

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ЛІННИК Г. Б.
МОРАЧКОВСЬКА І. О.
РУДНЄВА Г. В.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для самостійної роботи за темою

«НЕВИЗНАЧЕНІ ІНТЕГРАЛИ»

з курсу «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей
заочної та скороченої форми навчання

Харків
НТУ «ХП»
2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для самостійної роботи за темою

«НЕВИЗНАЧЕНІ ІНТЕГРАЛИ»

з курсу «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей
заочної та скороченої форми навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 3 від 30.10.2020 р.

Харків
НТУ «ХП»
2021

Методичні вказівки для самостійної роботи з курсу «Вища математика» за темою «Невизначені інтеграли» для студентів технічних спеціальностей.
Г. Б. Лінник, І. О. Морачковська, Г. В. Руднева. - Харків: НТУ «ХП». – 48 с.

Укладачі: Г. Б. Лінник, І. О. Морачковська, Г. В. Руднева

Рецензент доц. С. М. Решетнікова

Кафедра прикладної математики

ВСТУП

Методичні вказівки відповідають навчальним (робочим) програмам з дисципліни “Вища математика” ННІ МІТ. Їх мета допомогти студентам заочної та скороченої форм навчання у розв’язанні задач за темою «Невизначені інтеграли».

У роботі викладено у мінімально необхідному обсязі базові теоретичні відомості. Розв’язані приклади. Також розібрані зразки виконання індивідуальних завдань, наведено по 30 варіантів індивідуальних завдань.

1. Первісна функції. Означення невизначеного інтеграла

Припустимо, що функцію $f(x)$ задано, і ми хочемо дізнатися, чи існує функція $F(x)$ така, що функція $f(x)$ є похідною $F(x)$? Процес пошуку такої функції є зворотним до диференціювання і називається інтегруванням.

Означення 1. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на проміжку (a,b) , якщо на цьому проміжку $F(x)$ є диференційованою та $F'(x) = f(x)$.

Приклад 1. $F(x) = \cos x + 4x + 1$ є первісною для $f(x) = -\sin x + 4$, оскільки $F'(x) = (\cos x + 4x + 1)' = -\sin x + 4 = f(x)$.

Приклад 2. $F(x) = \ln|x|$ є первісною для $f(x) = \frac{1}{x}$ при всіх ненульових x , оскільки

$$F'(x) = (\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ для будь-якого } x > 0$$

та

$$F'(x) = (\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \text{ для будь-якого } x < 0.$$

Приклад 3. $F(x) = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$ є первісною для $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ для всіх

ненульових a , оскільки

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \left(\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2} + x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = f(x). \end{aligned}$$

Зауваження:

1. Якщо $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на інтервалі (a,b) , тоді $F(x) + C$ також є первісною цієї функції для будь-якої сталої C , оскільки $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x)$.

2. Якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – будь-які дві первісні для функції $f(x)$, то $(F_1(x) - F_2(x))' = f(x) - f(x) = 0$ для будь-якого x . Таким чином,

$F_1(x) - F_2(x) = \text{const} = C$ і $F_1(x) = F_2(x) + C$. Це означає, що первісні відрізняються одна від іншої лише на сталу величину.

3. Отже, набір усіх первісних збігається з набором функцій $\{F(x) + C, C \in R\}$.

Означення 2. Набір усіх первісних $\{F(x) + C, C \in R\}$ для функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом і позначається символом $\int f(x)dx$.

Тобто

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Тут x – це змінна інтегрування. Функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією, $f(x)dx$ є підінтегральним виразом, і, власне, знак \int є знаком інтеграла.

Властивості невизначеного інтеграла:

- 1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
- 2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;
- 3) $\int dF(x) = F(x) + C$;
- 4) $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$;
- 5) $\int(u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$.

Усі ці властивості можна перевірити диференціюванням.

Зауваження 1. За допомогою наведених вище прикладів та таблиці похідних можна побудувати таблицю невизначених інтегралів, але в цьому випадку вона буде неповною. Для формування повної таблиці слід спочатку вивчити деякі методи інтегрування. Таблицю інтегралів буде наведено нижче.

Зауваження 2. Назва змінної не важлива. Це означає, що якщо

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

тоді

$$\int f(u)du = F(u) + C \text{ чи } \int f(t)dt = F(t) + C.$$

ТАБЛИЦЯ ІНТЕГРАЛІВ

$$1. \int dx = x + C$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$5. \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

$$6. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$7. \int e^x dx = e^x + C$$

$$8. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$9. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$11. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$12. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$13. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$18. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$19. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$20. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$$21. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$22. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$23. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$24. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

$$25. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

2. Основні методи інтегрування

Існує чотири основні методи інтегрування, а саме метод прямого інтегрування за допомогою елементарних перетворень, метод інтегрування шляхом зміни виразу під знаком диференціала, інтегрування частинами та метод підстановки.

2.1. Метод прямого інтегрування

Щоб знайти невизначений інтеграл, підінтегральну функцію необхідно перетворити, щоб звести цей інтеграл до інтеграла табличного (з таблиці інтегралів). Це можна зробити за допомогою елементарних перетворень.

Приклади.

$$\begin{aligned} 1. \int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + 6x^5 \right) dx &= \int x^{\frac{1}{2}} dx + 2 \int x^{\frac{-2}{3}} dx + 6 \int x^5 dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + 2 \frac{x^{\frac{1}{3}}}{1/3} + 6 \frac{x^6}{6} + C = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + 6 \sqrt[3]{x} + x^6 + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int \frac{(1+x)^2}{x^2} dx &= \int \frac{1+2x+x^2}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} \right) dx = \int x^{-2} dx + 2 \int \frac{dx}{x} + \int dx = \\ &= \frac{x^{-1}}{-1} + 2 \ln|x| + x + C = -\frac{1}{x} + 2 \ln|x| + x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \int \frac{(1+3x^2) dx}{x^2(1+x^2)} &= \int \frac{1+x^2+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \left(\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)} + \frac{2x^2}{x^2(1+x^2)} \right) dx = \int \frac{dx}{x^2} + 2 \int \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= -\frac{1}{x} + 2 \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} &= \int \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \left(\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{x^2}{x^2(1+x^2)} \right) dx = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

$$5. \int \frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}} dx = \int \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}} \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + \arcsin x + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{1-\cos 2x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} x + C.$$

$$7. \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \left(\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C.$$

$$8. \int \frac{2^x + 5^x}{10^x} dx = \int \frac{2^x}{10^x} dx + \int \frac{5^x}{10^x} dx = \int \frac{2^x}{10^x} dx + \int \frac{5^x}{10^x} dx = \int \left(\frac{1}{5} \right)^x dx + \int \left(\frac{1}{2} \right)^x dx =$$

$$= \frac{(1/5)^x}{\ln(1/5)} + \frac{(1/2)^x}{\ln(1/2)} + C = -\frac{1}{5^x \ln 5} - \frac{1}{2^x \ln 2} + C.$$

2.2. Метод інтегрування шляхом зміни виразу під знаком диференціалу

Теорема (про інваріантність формул інтегрування). Формула інтегрування зберігає свій вигляд, якщо змінну інтегрування замінити будь-якою диференційованою функцією цієї змінної. Тобто якщо

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

тоді

$$\int f(u(x)) d(u(x)) = F(u(x)) + C,$$

де $u(x)$ - будь-яка диференційована функція.

Ця теорема дозволяє звести велику кількість інтегралів до табличних. Зазвичай це реалізується шляхом внесення якогось виразу $u(x)$ під знак диференціалу. Правило таке:

Якщо в підінтегральній функції $g(x)$ є множник, який є похідною деякої диференційованої функції $u(x)$, а решта підінтегральної функції є функцією від $u(x)$, тобто $g(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)$, тоді ми вносимо цю функцію $u(x)$ під знак

диференціала, змінюючи $u'(x)dx$ на $du(x)$, та інтегруємо отриманий інтеграл $\int g(x)dx = \int f(u)du$ в термінах нової змінної u .

Цей метод є варіантом методу заміни змінної (метод підстановки).

Приклади.

$$1. \int \underbrace{\sin^5 x}_{f(\sin x)} \underbrace{\cos x}_{(\sin x)'} dx = \left[\cos x dx = (\sin x)' dx = d(\sin x) \right] = \int \sin^5 x d(\sin x) = \\ = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$

$$2. \int 2xe^{x^2} dx = \int \underbrace{2x}_{(x^2)'} \underbrace{e^{x^2}}_{f(x^2)} dx = \left[2x dx = d(x^2) \right] = \int e^{x^2} d(x^2) = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C.$$

$$3. \int \frac{(\operatorname{arctg} x)^5}{1+x^2} dx = \left[\frac{dx}{1+x^2} = -d(\operatorname{arctg} x) \right] = -\int (\operatorname{arctg} x)^5 d(\operatorname{arctg} x) = -\int u^5 du = \\ = -\frac{u^6}{6} + C = -\frac{(\operatorname{arctg} x)^6}{6} + C.$$

$$4. \int \sin 2x dx = \left[d(2x) = 2dx \right] = \frac{1}{2} \int \sin 2x \cdot 2dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

$$5. \int (2+3x)^{100} dx = \left[d(2+3x) = 3dx \right] = \frac{1}{3} \int (2+3x)^{100} 3dx = \frac{1}{3} \int (2+3x)^{100} d(2+3x) = \\ = \frac{1}{3} \frac{(2+3x)^{101}}{101} + C.$$

$$6. \int \frac{7^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}} = \left[\frac{dx}{2\sqrt{x}} = d(\sqrt{x}) \right] = 2 \int \frac{7^{\sqrt{x}} dx}{2\sqrt{x}} = 2 \int 7^{\sqrt{x}} d(\sqrt{x}) = 2 \frac{7^{\sqrt{x}}}{\ln 7} + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{x \ln 5x} = \left[\frac{dx}{x} = d(\ln 5x) \right] = \int \frac{d(\ln 5x)}{\ln 5x} = \ln |\ln 5x| + C.$$

$$8. \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \left[\sin x dx = -d(\cos x) \right] = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C.$$

$$9. \int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \left[\cos x dx = d(\sin x) \right] = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln |\sin x| + C.$$

$$10. \int \frac{x}{1+x^2} dx = \left[2x dx = d(1+x^2) \right] = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C.$$

$$11. \int \frac{x^2}{1-4x^3} dx = \left[d(1-4x^3) = -12x^2 dx \right] = -\frac{1}{12} \int \frac{-12x^2 dx}{1-4x^3} = -\frac{1}{12} \int \frac{d(1-4x^3)}{1-4x^3} = \\ = -\frac{1}{12} \ln|1-4x^3| + C.$$

$$12. \int \frac{x^4}{\sqrt{1+x^5}} dx = \left[d(1+x^5) = 5x^4 dx \right] = \frac{1}{5} \int \frac{5x^4 dx}{\sqrt{1+x^5}} = \frac{1}{5} \int \frac{d(1+x^5)}{\sqrt{1+x^5}} = \frac{2}{5} \sqrt{1+x^5} + C.$$

$$13. \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \left[d(x^2) = 2x dx \right] = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin x^2 + C.$$

$$14. \int \frac{\sin x + x \cos x}{x \sin x} dx = \left[(\sin x + x \cos x) dx = d(x \sin x) \right] = \int \frac{d(x \sin x)}{x \sin x} = \ln|x \sin x| + C.$$

$$15. \int \frac{\arcsin^4 x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \left(\frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ = \int \arcsin^4 x d \arcsin x + \frac{1}{-2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\arcsin^5 x}{5} - \frac{1}{2} 2\sqrt{1-x^2} + C = \frac{\arcsin^5 x}{5} - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Зауваження. Нехай $\int f(x) dx = F(x) + C$. Тоді

$$\int f(ax+b) dx = \left[d(ax+b) = a dx \right] = \frac{1}{a} \int f(ax+b) a dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b) d(ax+b) = \\ = \frac{1}{a} F(ax+b) + C,$$

тобто

$$\int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C.$$

Отже, якщо інтеграл відрізняється від інтеграла табличного тим, що підінтегральна функція містить лінійний вираз $(ax+b)$ в якості аргумента замість x , використовуйте табличний інтеграл, але поділіть відповідь на коефіцієнт при x .

Приклади.

$$1. \int \cos \underbrace{2x}_{ax+b} dx = [a=2] = \frac{\sin 2x}{2} + C.$$

$$2. \int \operatorname{tg} \underbrace{3x}_{ax+b} dx = [a=3] = -\frac{\ln|\cos 3x|}{3} + C.$$

$$3. \int e^{2+7x} dx = [a=7] = \frac{e^{2+7x}}{7} + C.$$

$$4. \int \frac{dx}{3-5x} = [a=-5] = -\frac{\ln|3-5x|}{5} + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{(3+2x)^2} = \int (3+2x)^{-2} dx = [a=2] = \frac{(3+2x)^{-1}}{-1 \cdot 2} + C = -\frac{1}{2(3+2x)} + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4+1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = [a=1] = \operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{a} \frac{\arcsin \frac{x}{a}}{\frac{1}{a}} + C = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{a}}{\frac{1}{a}} + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$\begin{aligned} 9. \int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a} \int \frac{a+a}{(x-a)(x+a)} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{x+a+a-x}{(x-a)(x+a)} dx = \\ &= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{x+a}{(x-a)(x+a)} + \frac{a-x}{(x-a)(x+a)} \right) dx = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{(x-a)} - \frac{1}{(x+a)} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2a} (\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C. \end{aligned}$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\cos \frac{x}{2} dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \right) \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

Зауважимо, що розглянуті інтеграли 7-11 є табличними.

2.3. Метод інтегрування частинами

Цей метод зводить проблему пошуку інтеграла до обчислення іншого більш простого інтеграла, побудованого за допомогою початкового інтеграла. Щоб отримати формулу інтегрування частинами (або по частинах), розглянемо дві диференційовані функції u і v та знайдемо диференціал їх добудку:

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv.$$

Після інтегрування останньої рівності ми отримуємо:

$$\int d(u \cdot v) = \int du \cdot v + \int u \cdot dv,$$

$$u \cdot v = \int du \cdot v + \int u \cdot dv,$$

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}.$$

Остання формула називається формулою інтегрування частинами.

Як користуватися цим методом? Перш за все згадаймо, що $dv = v'dx$, $du = u'dx$, і тому в цій формулі початкова підінтегральна функція і початковий інтеграл, а саме

$$f(x) = u \cdot v' \quad \text{і} \quad \int f(x)dx = \int u \cdot v'dx,$$

замінюються новою підінтегральною функцією та новим інтегралом, а саме

$$g(x) = u' \cdot v \quad \text{і} \quad \int g(x)dx = \int u' \cdot v dx.$$

Таким чином, щоб отримати новий інтеграл, один з двох множників в $f(x)$ повинен бути продиференційований, а другий проінтегрований. Цей метод використовується для спрощення інтеграла, отже $f(x)$ слід розкласти на множники так, щоб після застосування формули інтегрування частинами новий інтеграл став простішим.

Приклад. Знайти $\int xe^x dx$. Проаналізуємо, який із двох множників, x або e^x , має простішу похідну? Функція e^x є незмінною при диференціюванні, тому краще

диференціювати степеневу функцію x , щоб зменшити її степінь і зробити інтеграл простішим. Розглянемо обидва варіанти, щоб перевірити обґрунтованість припущення:

$$1) \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 1 \cdot dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int v \cdot du = \int e^x dx;$$

$$2) \begin{cases} u = e^x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x \cdot dx \\ v = x^2/2 \end{cases} \Rightarrow \int v \cdot du = \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx.$$

Перший варіант дає простіший інтеграл. Отож, застосуємо формулу інтегрування частинами, щоб знайти відповідь:

$$\int x e^x dx = \begin{bmatrix} u = x \\ dv = e^x dx \\ du = 1 \cdot dx \\ v = e^x \end{bmatrix} = \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v} \underbrace{dx}_{du} = x e^x - e^x + C.$$

Зауваження 1. Іноді інтегрування частинами потрібно повторити, щоб отримати відповідь. Наприклад, в інтегралі $\int x^2 e^x dx$ ми маємо диференціювати x^2 двічі, щоб отримати більш простий інтеграл:

$$\int x^2 e^x dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \\ dv = e^x dx \\ du = 2x \cdot dx \\ v = e^x \end{bmatrix} = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = \begin{bmatrix} u = -2x \\ dv = e^x dx \\ du = -2 \cdot dx \\ v = e^x \end{bmatrix} = x^2 e^x + (-2x) e^x - \int -2 e^x dx =$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$$

Зауваження 2. Як правило, цей метод застосовується у випадку, коли інтеграл містить добуток многочлена та або тригонометричної, або трансцендентної функцій. Для таких інтегралів можна дати наступні рекомендації:

Для інтеграла $\int P_n(x) f(x) dx$, де $P_n(x)$ є многочлен n -го степеня, використовуйте метод інтегрування по частинах із наступним вибором множників:

$$f(x) = \begin{cases} \cos ax \\ \sin ax \\ a^{bx} \\ e^{bx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = P_n(x) \\ dv = f(x)dx \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \arcsin ax \\ \arccos ax \\ \operatorname{arctg} ax \\ \operatorname{arcctg} ax \\ \ln x \\ \log_a x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = f(x) \\ dv = P_n(x)dx \end{cases}$$

Приклади.

$$1. \int x \sin 2x dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin 2x dx \\ v = -\frac{\cos 2x}{2} \end{array} \right] = -x \frac{\cos 2x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2} dx = -\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

$$2. \int x \operatorname{arctg} x dx = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x; \quad du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x dx; \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \operatorname{arctg} x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

$$3. \int \ln(x+1) dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln(x+1); \quad du = \frac{dx}{x+1} \\ dv = 1 dx; \quad v = x+1 \end{array} \right] = (x+1) \ln(x+1) - \int (x+1) \frac{dx}{x+1} =$$

$$= (x+1) \ln(x+1) - \int dx = (x+1) \ln(x+1) - x + C.$$

Зауваження 3. Іноді інтегрування частинами допомагає отримати рівняння для обчислення початкового інтеграла. Продемонструємо цю процедуру на прикладі:

$$I = \int \sqrt{a^2 + x^2} dx.$$

$$I = \int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad du = \frac{xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right] = x\sqrt{a^2 + x^2} -$$

$$\begin{aligned}
-\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} &= x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = x\sqrt{a^2 + x^2} - \\
-\underbrace{\int \sqrt{a^2 + x^2} dx}_I + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} &= x\sqrt{a^2 + x^2} - I + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + 2C.
\end{aligned}$$

Таким чином, маємо рівняння:

$$I = x\sqrt{a^2 + x^2} - I + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + 2C;$$

$$2I = x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + 2C;$$

$$I = \int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \right) + C.$$

2.4. Інтегрування методом підстановки

Найчастіше застосовуваний метод інтегрування - це метод заміни змінної інтегрування (або метод підстановки). Розглянемо деяку монотонну, диференційовану функцію $x = \varphi(t)$. Відомо, що така функція має обернену функцію $t = \varphi^{-1}(x)$. Тоді

$$\boxed{\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.}$$

Вірність цієї рівності можна перевірити диференціюванням:

$$\begin{aligned}
\left(\int f(x) dx \right)'_x &= f(x); \\
\left(\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right)'_x &= \left(\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right)'_t \cdot t'_x = f(\varphi(t)) \varphi'(t) \cdot \frac{1}{x'_t} = \\
&= f(\varphi(t)) \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).
\end{aligned}$$

Вираз $x = \varphi(t)$ називають підстановкою.

Успіх інтегрування цим методом багато в чому залежить від правильного вибору підстановки. Функцію $x = \varphi(t)$ слід обирати так, щоб отриманий інтеграл для змінної t був простішим за початковий.

Зауваження 1. Важливо отримати відповідь через початкову змінну x . Отже, замініть t на $\varphi^{-1}(x)$ у заключному виразі.

Зауваження 2. Використовуючи підстановку, ви визначаєте залежність між старими та новими змінними. Але залежність між їх диференціалами також необхідна для отримання інтеграла з новою змінною. Її можна знайти шляхом обчислення диференціалів обох сторін рівняння $x = \varphi(t)$, що з'єднує дві змінні, тобто

$$dx = d\varphi(t) \text{ або } dt = d\varphi^{-1}(x).$$

Приклади.

$$\begin{aligned} 1. \int \frac{2x-1}{(x+1)^2} dx &= \left[\begin{array}{l} x+1=t \Leftrightarrow x=t-1 \\ dx=d(t-1)=1 \cdot dt=dt \end{array} \right] = \int \frac{2(t-1)-1}{t^2} dt = \int \frac{2t-3}{t^2} dt = \int \left(\frac{2t}{t^2} - \frac{3}{t^2} \right) dt = \\ &= \int \left(2\frac{1}{t} - 3\frac{1}{t^2} \right) dt = 2\ln|t| - 3\frac{-1}{t} + C = 2\ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C. \end{aligned}$$

$$2. I = \int \frac{3x-1}{4x^2-8x+13} dx.$$

Давайте виділимо повний квадрат у знаменнику:

$$4x^2 - 8x + 13 = 4(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 13 = 4(x-1)^2 + 9 = (2x-2)^2 + 9.$$

Тоді

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3x-1}{(2x-2)^2+9} dx = \left[\begin{array}{l} 2x-2=t \\ x=1+\frac{t}{2}; dx=\frac{dt}{2} \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{3\left(1+\frac{t}{2}\right)-1}{t^2+9} dt = \frac{3}{4} \int \frac{t dt}{t^2+9} + \int \frac{dt}{t^2+9} = \\ &= \frac{3}{8} \int \frac{2t dt}{t^2+9} + \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{3}{8} \int \frac{d(t^2+9)}{t^2+9} + \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{3}{8} \ln|t^2+9| + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \\ &= \frac{3}{8} \ln|(2x-2)^2+9| + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-2}{3} + C = \frac{3}{8} \ln|4x^2-8x+13| + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-2}{3} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}} = \left[\begin{array}{l} t=3x-1 \\ dt=3dx \end{array} \right] = \int \frac{dt/3}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \\ &= \frac{1}{3} \ln|t+\sqrt{t^2+1}| + C = \frac{1}{3} \ln|3x-1+\sqrt{(3x-1)^2+1}| + C. \end{aligned}$$

$$4. I = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{3/2}} = \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t \Leftrightarrow t = \operatorname{arctg} x \\ x^2 + 1 = \operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t} \\ dx = d(\operatorname{tg} t) = \frac{1}{\cos^2 t} dt \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t} dt}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{3/2}} = \int \cos t dt = \sin t + C =$$

$$= \left[\sin t = \sqrt{\sin^2 t} = \sqrt{\frac{1}{\sin^{-2} t}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 t}} = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 t + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right] = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + C.$$

$$5. \int \sin^4 x \cos^3 x dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right] = \int \underbrace{\sin^4 x}_{t^4} \underbrace{\cos^2 x}_{1-t^2} \underbrace{\cos x dx}_{dt} = \int t^4 (1-t^2) dt =$$

$$\int (t^4 - t^6) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

Зауваження. Рекомендації щодо обрання вдалої підстановки розглянемо далі шляхом розглядання окремих класів інтегралів.

3. Інтегрування окремих класів інтегралів

Поєднання чотирьох описаних вище методів інтегрування допомагає знайти інтеграли, де первісна підінтегральних функцій виражається через елементарні функції. Зауважимо, що не всі інтеграли мають таку властивість. Прикладами інтегралів, де первісна не має такого виразу, є:

$$\int \frac{\sin x dx}{x} \quad \int e^{-x^2} dx \quad \int \frac{dx}{\ln x} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 1}} \quad \int e^{\operatorname{arctg} x} dx \quad \int \sqrt{\sin x} dx.$$

Найскладнішою проблемою є пошук відповідного методу інтегрування. Розглянемо кілька основних класів інтегралів і методи їх обчислення.

3.1. Інтегрування $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ і $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$.

Для інтегрування цих інтегралів достатньо виділити повний квадрат у виразі $ax^2 + bx + c$. Метою є зібрати лінійні та квадратичні члени з x , оскільки жоден інтеграл у таблиці не містить обох таких членів одночасно. Згадаймо формулу:

$$(A \pm B)^2 = \underline{A^2 \pm 2AB} + B^2.$$

Підкреслений вираз є $ax^2 + bx$, тобто $A^2 \pm 2AB = ax^2 + bx$, тому нам потрібно додати B^2 , щоб отримати повний квадрат. Зауважимо, що B – це половина коефіцієнта A у другому члені $2AB$.

Приклади.

$$1. \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}.$$

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 3 &= \underbrace{x^2}_{A^2} + \underbrace{4x}_{2AB} + 3 = \left[A = x, B = \frac{4x}{2A} = \frac{4x}{2x} = 2 \right] = \underbrace{x^2}_{A^2} + \underbrace{4x}_{2AB} + \underbrace{2^2}_{B^2} - 2^2 + 3 = \\ &= (x + 2)^2 - 4 + 3 = (x + 2)^2 - 1. \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 - 1} = [\text{табл., №14}] = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + 2 - 1}{x + 2 + 1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + 1}{x + 3} \right| + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 6x + 5}}.$$

$$\begin{aligned} 9x^2 + 6x + 5 &= \underbrace{9x^2}_{A^2} + \underbrace{6x}_{2AB} + 5 = \left[A = 3x, B = \frac{6x}{2A} = \frac{6x}{6x} = 1 \right] = \underbrace{9x^2}_{A^2} + \underbrace{6x}_{2AB} + \underbrace{1^2}_{B^2} - 1^2 + 5 = \\ &= (3x + 1)^2 - 1 + 5 = (3x + 1)^2 + 4. \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 6x + 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(3x + 1)^2 + 4}} = [\text{табл., №17}] = \frac{\ln \left| 3x + 1 + \sqrt{(3x + 1)^2 + 4} \right|}{3} + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{7 + 12x - 4x^2}}.$$

Відомо, що $-4x^2 \neq A^2$, тому винесемо знак "–" з виразу $7 + 12x - 4x^2$.

$$\begin{aligned} -\left(\underbrace{4x^2}_{A^2} - \underbrace{12x}_{2AB} - 7 \right) &= \left[A = 2x, B = \frac{12x}{2A} = \frac{12x}{4x} = 3 \right] = -\left(\underbrace{4x^2}_{A^2} - \underbrace{12x}_{2AB} + \underbrace{3^2}_{B^2} - 3^2 - 7 \right) = \\ &= -\left((2x - 3)^2 - 9 - 7 \right) = 16 - (2x - 3)^2. \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7 + 12x - 4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16 - (2x - 3)^2}} = [\text{табл., №16}] = \frac{\arcsin \frac{2x - 3}{4}}{2} + C.$$

Зауваження. Інтеграли $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ і $\int \frac{dx}{(cx + d)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ можуть

бути зведені до інтегралів, що розглянуті в цьому розділі, за допомогою підстановок $\boxed{x = \frac{1}{t}}$ та $\boxed{cx + d = \frac{1}{t}}$, відповідно.

Приклад.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ dx = \frac{-1}{t^2} dt \end{array} \right] = \int \frac{\frac{-1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{2}{t^2} + \frac{2}{t} + 1}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{2 + 2t + t^2}} =$$

$$\int \frac{-dt}{\sqrt{1 + (1+t)^2}} = -\ln \left| 1 + t + \sqrt{1 + (1+t)^2} \right| + C = -\ln \left| 1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} \right| + C.$$

3.2. Інтегрування $\int \frac{Cx + D}{ax^2 + bx + c} dx$ і $\int \frac{Cx + D}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$.

Слід виділити повний квадрат у знаменнику і скористатися підстановкою $Ax \pm B = t$ в інтегралі.

Приклад. $I = \int \frac{4x + 1}{25x^2 - 10x + 2} dx.$

Виділимо повний квадрат у знаменнику.

$$25x^2 - 10x + 2 = 25x^2 - 10x + 1^2 - 1^2 + 2 = (5x - 1)^2 + 1.$$

Тоді

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4x + 1}{(5x - 1)^2 + 1} dx = \left[\begin{array}{l} 5x - 1 = t \\ x = \frac{t + 1}{5}; dx = \frac{dt}{5} \end{array} \right] = \int \frac{4\left(\frac{t + 1}{5}\right) + 1}{t^2 + 1} \frac{dt}{5} = \frac{4}{25} \int \frac{t dt}{t^2 + 1} + \frac{9}{25} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= \frac{2}{25} \int \frac{2t dt}{t^2 + 1} + \frac{9}{25} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{2}{25} \int \frac{d(t^2 + 1)}{t^2 + 1} + \frac{9}{25} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{2}{25} \ln |t^2 + 1| + \frac{9}{25} \operatorname{arctg} t + C = \\ &= \frac{2}{25} \ln |(5x - 1)^2 + 1| + \frac{9}{25} \operatorname{arctg}(5x - 1) + C. \end{aligned}$$

Зауваження. Інтеграли $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ і $\int \frac{dx}{(cx + d)^2 \sqrt{ax^2 + bx + c}}$

можуть бути зведені до інтегралів, що розглянуті вище, за допомогою

підстановок $\boxed{x = \frac{1}{t}}$ та $\boxed{cx + d = \frac{1}{t}}$, відповідно.

Приклад.
$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}} = \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ dx = \frac{-1}{t^2} dt \end{array} \right] = \int \frac{\frac{-1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^2} \sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}} = \int \frac{-tdt}{\sqrt{1+t^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{2tdt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{d(1+t^2)}{\sqrt{1+t^2}} = -\frac{1}{2} 2\sqrt{1+t^2} + C = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + C = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C.$$

3.3. Інтегрування раціональних функцій

Раціональні функції утворюють клас підінтегральних функцій, які завжди мають первісну, що виражається через скінченне число елементарних функцій.

Означення. Раціональна функція (або дробово-раціональна функція, або раціональний дріб) – це відношення двох многочленів.

Загалом, раціональний дріб можна записати як

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}.$$

Раціональний дріб називається правильним, якщо $n < m$, а в іншому випадку неправильним. Будь-який неправильний дріб може бути представлений як сума многочлена і правильного раціонального дробу. Це представлення можна отримати, поділивши чисельник на знаменник у стовпчик.

Приклад. $R(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 1}{x^2 - x}.$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 1 & x^2 - x \\ \hline x^4 - x^3 & x^2 + 3x + 6 \\ \hline 3x^3 + 3x^2 & \\ \hline 3x^3 - 3x^2 & \\ \hline 6x^2 + 1 & \\ \hline 6x^2 - 6x & \\ \hline 6x + 1 & \text{(остача)} \end{array}$$

Тому, $x^2 + 3x + 6$ є неповною часткою, $6x + 1$ є остачею. Таким чином,

$$R(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 1}{x^2 - x} = x^2 + 3x + 6 + \frac{6x + 1}{x^2 - x}.$$

Отже, проблему інтегрування раціональної функції зведено до інтегрування многочлена та правильної раціональної функції.

Зауваження. Правильна раціональна функція все ще надто складна для інтегрування. Для спрощення проблеми інтегрування пропонується звести її до інтегрування двох типів дробів, що називаються найпростішими (або елементарними) раціональними дробами, а саме до:

$$\text{I. } \frac{A}{(x-a)^k}; \quad \text{II. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s}, \text{ де } p^2 - 4q < 0.$$

Дроби першого типу та другого у випадку $s = 1$ просто інтегруються (це було показано вище). Для $s > 1$ дроби другого типу інтегруються за допомогою

підстановки
$$x = -\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \operatorname{tg} t.$$

Приклад. Знайдіть $\int \frac{x-3}{(x^2+2x+2)^2} dx.$

$$\begin{aligned} \int \frac{x-3}{(x^2+2x+2)^2} dx &= \int \frac{x-3}{((x+1)^2+1)^2} dx = \left[\begin{array}{l} x+1 = \operatorname{tg} t \\ x = -1 + \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right] = \int \frac{-1 + \operatorname{tg} t - 3}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^2} \frac{dt}{\cos^2 t} = \\ &= \int \frac{-4 + \operatorname{tg} t}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \left(-4 + \frac{\sin t}{\cos t}\right) \cos^2 t dt = \int (-4 \cos^2 t + \sin t \cos t) dt = \\ &= \int -4 \frac{1 + \cos 2t}{2} dt + \int \underbrace{\sin t \cos t}_{d \sin t} dt = -2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + \frac{\sin^2 t}{2} + C = \\ &= \left[t = \operatorname{arctg}(x+1); \quad \sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{(x+1)^2}{1 + (x+1)^2}; \quad \sin 2t = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{2(x+1)}{1 + (x+1)^2} \right] = \\ &= -2 \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{2(x+1)}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{2} \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x + 2} + C. \end{aligned}$$

Отже, при інтегруванні раціонального дробу дотримуйтесь наступного алгоритму:

1. Якщо дріб неправильний, то виділіть цілу частину діленням чисельника на знаменник у стовпчик. Тоді дріб набуде вигляду:

$$R(x) = S_k(x) + \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

де $S_k(x)$ – многочлен, а $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ є неспрощуваний правильний раціональний дріб,

тобто многочлени $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ не мають спільних множників.

2. Розкладіть знаменник $Q_m(x)$ на найпростіші множники, а саме многочлени першого порядку $(x - a)$ і многочлени другого порядку без дійсних коренів $(x^2 + px + q)$ (тут $D = p^2 - 4q < 0$). Це можна зробити завдяки теоремам алгебри многочленів.

3. Розкладіть правильний дріб у суму найпростіших раціональних дробів завдяки теоремі:

Теорема. Якщо $Q_m(x) = b_0(x - a)^\alpha (x - b)^\beta \dots (x^2 + px + q)^\mu \dots (x^2 + lx + s)^\nu$,

то правильний неспрощуваний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ може бути поданим у

вигляді

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = & \frac{A_0}{(x - a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x - a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x - a)} + \frac{B_0}{(x - b)^\beta} + \frac{B_1}{(x - b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{(x - b)} + \\ & + \dots + \frac{M_0x + N_0}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)^{\mu-1}} + \dots + \frac{M_{\mu-1}x + N_{\mu-1}}{(x^2 + px + q)} + \dots + \\ & + \frac{P_0x + Q_0}{(x^2 + lx + s)^\nu} + \frac{P_1x + Q_1}{(x^2 + lx + s)^{\nu-1}} + \dots + \frac{P_{\nu-1}x + Q_{\nu-1}}{(x^2 + lx + s)}. \end{aligned}$$

4. Обчисліть інтеграл від отриманої суми як суму інтегралів від доданків.

Зауваження. Коефіцієнти доданків цієї суми можна визначити з наступних міркувань. Подана рівність - це тотожність. Тому, якщо звести суму

дробів праворуч до спільного знаменника $Q_m(x)$, то отримаємо однакові многочлени у чисельниках правого та лівого дробів. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для обчислення невідомих коефіцієнтів.

Крім того, для обчислення коефіцієнтів можна використати наступне зауваження: оскільки многочлени в чисельниках рівні, то їх значення рівні для будь-яких значень x . Надаючи x певних значень, ми отримуємо рівняння для обчислення коефіцієнтів. В якості значень x зручно обирати корені спільного знаменника. На практиці використовують обидва підходи одночасно, щоб знайти коефіцієнти.

Приклади.

$$1. \int \frac{7x^2 + 9x - 12}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx = \int \frac{7x^2 + 9x - 12}{x(x^2 + 2x - 3)} dx = \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ x_1 = -3, x_2 = 1 \\ x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) \end{array} \right] = \int \frac{7x^2 + 9x - 12}{x(x + 3)(x - 1)} dx.$$

$$\frac{7x^2 + 9x - 12}{x(x + 3)(x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 1} \Rightarrow 7x^2 + 9x - 12 = A(x + 3)(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 3).$$

Корені знаменника: $x_1 = -3, x_2 = 1, x_3 = 0$. Підставимо їх до останнього рівняння:

$$x = -3: 7 \cdot (-3)^2 + 9(-3) - 12 = A \cdot 0 + B(-3)(-4) + C \cdot 0 \Rightarrow B = 2$$

$$x = 1: 7 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 12 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 1(1 + 3) \Rightarrow C = 1$$

$$x = 0: 7 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 12 = A \cdot 3 \cdot (-1) + B \cdot 0 + C \cdot 0 \Rightarrow A = 4$$

$$\frac{7x^2 + 9x - 12}{x(x + 3)(x - 1)} = \frac{4}{x} + \frac{2}{x + 3} + \frac{1}{x - 1};$$

$$\int \frac{7x^2 + 9x - 12}{x(x + 3)(x - 1)} dx = \int \left(\frac{4}{x} + \frac{2}{x + 3} + \frac{1}{x - 1} \right) dx = 4 \ln|x| + 2 \ln|x + 3| + \ln|x - 1| + C.$$

$$2. \int \frac{3x^3 - 4x^2 - x + 1}{x^4 - x^3} dx = \int \frac{3x^3 - 4x^2 - x + 1}{x^3(x - 1)} dx.$$

$$\frac{3x^3 - 4x^2 - x + 1}{x^3(x - 1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x - 1} \Rightarrow$$

$$3x^3 - 4x^2 - x + 1 = A(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx^2(x - 1) + Dx^3.$$

Корені знаменника: $x_1 = 0, x_2 = 1$. Підставимо їх до останнього рівняння:

$$x=0 : 1 = A \cdot (-1) + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D \cdot 0 \Rightarrow A = -1$$

$$x=1 : -1 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D \cdot 1 \Rightarrow D = -1$$

Для обчислення коефіцієнтів B і C прирівнюємо коефіцієнти при x і x^3 :

$$3x^3 - 4x^2 - x + 1 = Ax - A + Bx^2 - Bx + Cx^3 - Cx^2 + Dx^3$$

$$x^1 : -1 = A - B \Rightarrow B = A + 1 = 0$$

$$x^3 : 3 = C + D \Rightarrow C = 3 - D = 4$$

$$\frac{3x^3 - 4x^2 - x + 1}{x^3(x-1)} = \frac{-1}{x^3} + \frac{4}{x} + \frac{-1}{x-1}.$$

Таким чином,

$$\int \frac{3x^3 - 4x^2 - x + 1}{x^3(x-1)} dx = \int \left(\frac{-1}{x^3} + \frac{4}{x} + \frac{-1}{x-1} \right) dx = \frac{1}{2x^2} + 4 \ln|x| - \ln|x-1| + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{x^3 - 1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x^2 + x + 1)}.$$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} \Rightarrow 1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x-1).$$

Щоб знайти невідомі коефіцієнти, підставляємо кореня знаменника $x=1$ в останнє рівняння, а також прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x з різних сторін рівняння:

$$x=1: 1 = A \cdot 3 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$x^2 : 0 = A + B \Rightarrow B = -A = -\frac{1}{3}$$

$$x^0 : 1 = A - C \Rightarrow C = A - 1 = -\frac{2}{3}$$

Тому,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 - 1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{x+2}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3 \cdot 2} \int \frac{2x+4}{x^2 + x + 1} dx = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3 \cdot 2} \int \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} dx - \frac{1}{3 \cdot 2} \int \frac{3dx}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3 \cdot 2} \int \frac{d(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1/2)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$4. \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} = \frac{(Ax+B)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+4)};$$

$$x^2 = (Ax+B)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2+1).$$

У знаменнику немає коренів, тому ми прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x , щоб знайти невідомі коефіцієнти:

$$x^3 : 0 = A + C \quad \Rightarrow 0 = 4A + C - (A + C) = 3A \Rightarrow A = C = 0$$

$$x^2 : 1 = B + D \quad \Rightarrow 1 = B + D - (4B + D) = -3B \Rightarrow B = -1/3$$

$$x^1 : 0 = 4A + C$$

$$x^0 : 0 = 4B + D \quad \Rightarrow D = -4B = 4/3$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \int \frac{-\frac{1}{3}}{x^2+1} dx + \int \frac{\frac{4}{3}}{x^2+4} = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

3.4. Інтегрування виразів з тригонометричними функціями

3.4.1. Пряме інтегрування тригонометричних виразів

Якщо ваш інтеграл містить тригонометричні вирази, спершу слід спробувати використати пряме інтегрування за допомогою різних тригонометричних формул. Деякі з цих формул є

$$\sin kx \cos lx = \frac{1}{2} [\sin(k-l)x + \sin(k+l)x];$$

$$\cos kx \cos lx = \frac{1}{2} [\cos(k-l)x + \cos(k+l)x];$$

$$\sin kx \sin lx = \frac{1}{2} [\cos(k-l)x - \cos(k+l)x];$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Останні дві формули дуже корисні для інтегрування парних степенів синуса або косинуса.

Приклади.

$$1. \int \sin 6x \cos 7x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 13x - \sin x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 13x dx - \frac{1}{2} \int \sin x dx = \\ = -\frac{1}{26} \cos 13x + \frac{1}{2} \cos x + C.$$

$$2. \int \cos^2 3x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 6x) dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \frac{\sin 6x}{6} + C.$$

$$3. \int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ = \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \left(x - \sin 2x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \frac{\sin 4x}{4} \right) + C.$$

$$4. \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

3.4.2. Інтегрування $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Розглянемо інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x) dx$, де $R(x_1, x_2)$ – раціональна функція, що отримана за допомогою операцій множення, ділення, додавання або віднімання її аргументів x_1, x_2 та сталих. Виділимо 4 випадки рекомендованих підстановок:

Випадок 1. Якщо $\boxed{R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)}$, тобто ця функція є непарною відносно функції $\sin x$, тоді використовуйте підстановку $\boxed{t = \cos x}$.

Випадок 2. Якщо $\boxed{R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)}$, тобто ця функція є непарною відносно функції $\cos x$, тоді використовуйте підстановку $\boxed{t = \sin x}$.

Випадок 3. Якщо $\boxed{R(-\sin x, -\cos x) = R(\cos x, \sin x)}$, тобто ця функція є парною відносно обох функцій $\sin x$ і $\cos x$ одночасно, тоді використовуйте підстановки $\boxed{t = \operatorname{tg} x}$ або $\boxed{t = \operatorname{ctg} x}$.

Випадок 4. У всіх інших випадках використовують універсальну

тригонометричну підстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. При цьому:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Зауваження 1. Остання підстановка називається універсальною, оскільки її можна використовувати в будь-якому випадку. Але якщо вона використана у випадках 1-3, то новий інтеграл, отриманий після заміни, буде складнішим.

Зауваження 2. Отриманий після підстановки інтеграл є інтегралом від раціонального дробу.

Приклади.

1. Знайдіть $I = \int \sin^3 x dx$. Функція $R = \sin^3 x$ є непарною відносно $\sin x$, оскільки

$$R(-\sin x, \cos x) = (-\sin x)^3 = -\sin^3 x = -R(\sin x, \cos x).$$

$$I = \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right] = \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{1-t^2} = \int (t^2 - 1) dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

2. Знайдіть $I = \int \sin^4 x \cos^5 x dx$.

$$R(\sin x, \cos x) = \sin^4 x \cos^5 x \Rightarrow R(\sin x, -\cos x) = \sin^4 x (-\cos x)^5 = -\sin^4 x \cos^5 x.$$

Таким чином, $R(\sin x, \cos x)$ є непарною відносно $\cos x$, і ми використовуємо підстановку $t = \sin x$.

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^4 x \cos^5 x dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right] = \int \frac{\sin^4 x (\cos^2 x)^2 \cos x dx}{1-t^2} = \int t^4 (1-t^2)^2 dt = \\ &= \int t^4 (1 - 2t^2 + t^4) dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt = \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \\ &= \frac{\sin^5 x}{5} - 2\frac{\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C. \end{aligned}$$

3. Знайдіть $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$.

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(-\sin x)^2 (-\cos x)^4} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x} = R(\sin x, \cos x).$$

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x; \quad dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \\ \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} \\ \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \end{array} \right] = \int \frac{1+t^2}{t^2} (1+t^2) dt =$$

$$= \int \frac{(1+t^2)^2}{t^2} dt = \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^2} dt = \int \left(\frac{1}{t^2} + 2 + t^2 \right) dt = -\frac{1}{t} + 2t + \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{tg} x} + 2\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

4. Знайдіть $\int \frac{dx}{8+7\cos x+\sin x}$.

$$\int \frac{dx}{8+7\cos x+\sin x} = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dt = \frac{2dt}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(8 + \frac{7(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} \right)} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{8+8t^2+7-7t^2+2t} = 2 \int \frac{dt}{15+t^2+2t} = 2 \int \frac{dt}{(t+1)^2+14} =$$

$$= 2 \frac{1}{\sqrt{14}} \operatorname{arctg} \frac{t+1}{\sqrt{14}} + C = \frac{2}{\sqrt{14}} \operatorname{arctg} \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right)}{\sqrt{14}} + C.$$

3.5. Інтегрування ірраціональних виразів

Розглянемо різні класи інтегралів, що містять радикали.

3.5.1. Інтегрування $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \dots, \sqrt[n_s]{x^{m_s}}\right) dx$

Нехай $R(x_1, x_2, \dots, x_{s+1})$ є раціональною функцією своїх аргументів, тобто створюється операціями додавання, віднімання, множення та ділення її аргументів та сталих. Щоб спростити інтеграл і прибрати всі радикали, використовуйте підстановку

$$\boxed{x = t^k},$$

де k – спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_s}{n_s}$.

Зауваження. Новий інтеграл є інтегралом від раціонального дробу.

Приклад.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})} &= \left[\begin{array}{l} x = t^{12}, \quad t = \sqrt[12]{x} \\ dx = 12t^{11} dt \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} = t^4 + t^3 \end{array} \right] = \int \frac{t^2 12t^{11} dt}{t^{12}(t^4 + t^3)} = 12 \int \frac{1}{t^2(t+1)} dt = \\ &= 12 \int \frac{1+t-t}{t^2(t+1)} dt = 12 \int \left(\frac{1+t}{t^2(t+1)} - \frac{t}{t^2(t+1)} \right) dt = 12 \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t(t+1)} \right) dt = \\ &= 12 \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1+t-t}{t(t+1)} \right) dt = 12 \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1+t}{t(t+1)} + \frac{t}{t(t+1)} \right) dt = 12 \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= 12 \left(-\frac{1}{t} - \ln|t| + \ln|t+1| \right) + C = 12 \left(-\frac{1}{\sqrt[12]{x}} - \ln|\sqrt[12]{x}| + \ln|\sqrt[12]{x} + 1| \right) + C. \end{aligned}$$

3.5.2. Інтегрування $\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_s}{n_s}} \right) dx$

Нехай $R(x_1, x_2, \dots, x_{s+1})$ є раціональною функцією і $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$. Щоб спростити інтеграл і прибрати всі радикали, використовуйте підстановку

$$\boxed{\frac{ax+b}{cx+d} = t^k},$$

де k - спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_s}{n_s}$. В результаті ви отримуєте інтеграл від раціонального дробу.

Приклад.

$$\int \sqrt{\frac{2-x}{x-6}} \frac{dx}{x} = \left[\begin{array}{l} \frac{2-x}{x-6} = t^2; \quad x = \frac{2+6t^2}{1+t^2}; \\ dx = \left(\frac{2+6t^2}{1+t^2} \right)' dt = \frac{8tdt}{(1+t^2)^2} \end{array} \right] = \int t \frac{8tdt}{(1+t^2)^2} \frac{1}{\frac{2+6t^2}{1+t^2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{4t^2}{(1+t^2)(1+3t^2)} dt = [2t^2 = (3t^2 + 1) - (t^2 + 1)] = 2 \int \frac{(3t^2 + 1) - (t^2 + 1)}{(1+t^2)(1+3t^2)} dt = \\
&= 2 \int \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+3t^2} \right) dt = 2 \int \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+(\sqrt{3}t)^2} \right) dt = 2 \operatorname{arctg} t - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}t) + C = \\
&= 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2-x}{x-6}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{3} \sqrt{\frac{2-x}{x-6}} \right) + C.
\end{aligned}$$

3.5.3. Інтегрування $\int R(x, \sqrt{x^2 \pm a^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$

Нехай $R(x_1, x_2)$ є раціональною функцією і $a > 0$. Для спрощення цих інтегралів слід використовувати тригонометричні підстановки та наступні тригонометричні формули:

1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;	2) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$;	3) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$;
4) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$;	5) $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$;	6) $\frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \operatorname{tg}^2 x$;
7) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = \frac{\sin x}{\cos x}$;	8) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}$.	

Розглянемо кожен інтеграл окремо.

Тип 1. $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$.

Щоб прибрати радикал, нам слід змінити x на таку функцію, щоб вираз $a^2 - x^2$ був квадратом якоїсь іншої функції. Нехай

$$x = a \sin t, \quad dx = a \cos t dt.$$

Тоді за тригонометричною формулою №2 маємо:

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \sin^2 t = a^2 \cos^2 t \quad \text{і} \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t.$$

В результаті отримуємо інтеграл від тригонометричного виразу без коренів.

Приклад.

$$\int \sqrt{25 - x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = 5 \sin t \\ dx = 5 \cos t dt \\ 25 - x^2 = 25 \cos^2 t \end{array} \right] = \int 5 \cos t \cdot 5 \cos t dt = 25 \int \cos^2 t dt =$$

$$= 25 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{25}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = \left[\begin{array}{l} t = \arcsin \frac{x}{5} \\ \sin 2t = 2 \sin t \cos t = \frac{2x\sqrt{25-x^2}}{25} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{25}{2} \left(\arcsin \frac{x}{5} + \frac{x\sqrt{25-x^2}}{25} \right) + C.$$

Тип 2. $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx.$

Нехай

$$\boxed{x = a \operatorname{tg} t, dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}.$$

Тоді за тригонометричною формулою №4 маємо:

$$a^2 + x^2 = a^2(1 + \operatorname{tg}^2 t) = \frac{a^2}{\cos^2 t} \quad \text{і} \quad \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t}.$$

В результаті отримуємо інтеграл від тригонометричного виразу.

Приклад.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \\ 1+x^2 = \frac{1}{\cos^2 t} \end{array} \right] = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^3 t}} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \cos t dt = \sin t + C =$$

$$= \left[\sin t = \frac{\sin t}{\cos t} \cos t = \operatorname{tg} t \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right] = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Тип 3. $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx.$

Нехай

$$\boxed{x = \frac{a}{\cos t}, dx = \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t}.$$

Тоді за тригонометричною формулою № 6 маємо:

$$x^2 - a^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 t \quad \text{і} \quad \sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{tg} t = \frac{a \sin t}{\cos t}.$$

В результаті отримуємо інтеграл від тригонометричного виразу.

$$\text{Приклад. } \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}} = \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{\cos t} \\ dx = \frac{\sin t dt}{\cos^2 t} \\ x^2 - 1 = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \end{array} \right] = \int \frac{1}{\frac{\sin^3 t}{\cos^3 t}} \frac{\sin t dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{d \sin t}{\sin^2 t} =$$

$$= \frac{-1}{\sin t} + C = \left[\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right] = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 1}} + C$$

3.5.4. Інтегрування $\int \frac{P_m(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ і $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$

Інтеграл виду $\int \frac{P_m(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, де $P_m(x)$ є многочлен m -го степеня, можна

знайти за допомогою формули:

$$\int \frac{P_m(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q_{m-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

де $\lambda \in R$ і $Q_{m-1} = A_{m-1}x^{m-1} + A_{m-2}x^{m-2} + \dots + A_1x + A_0$ є многочлен $(m-1)$ -го степеню з невідомими коефіцієнтами. Щоб знайти коефіцієнти, диференціюйте останнє рівняння, зведіть дроби до спільного знаменника та прирівняйте чисельники, як це було зроблено для раціональних дробів.

Приклад. Знайдіть $\int \frac{6x^3 + 14x^2 + 2x - 11}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx$.

Тут $P_m(x) = 6x^3 + 14x^2 + 2x - 11$, $m = 3$. Тому $Q_{m-1}(x) = Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ і

$$\int \frac{6x^3 + 14x^2 + 2x - 11}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx = (Ax^2 + Bx + C)\sqrt{x^2 + 4x + 5} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}.$$

Знайдемо похідні обох сторін цього рівняння:

$$\frac{6x^3 + 14x^2 + 2x - 11}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} = (2Ax + B)\sqrt{x^2 + 4x + 5} + \frac{(Ax^2 + Bx + C)(2x + 4)}{2\sqrt{x^2 + 4x + 5}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}};$$

зведемо праву частину до спільного знаменника:

$$\frac{6x^3 + 14x^2 + 2x - 11}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} = \frac{(2Ax + B)(x^2 + 4x + 5) + (Ax^2 + Bx + C)(x + 2) + \lambda}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}};$$

прирівняємо чисельники:

$$6x^3 + 14x^2 + 2x - 11 = (2Ax + B)(x^2 + 4x + 5) + (Ax^2 + Bx + C)(x + 2) + \lambda;$$

обчислимо коефіцієнти при рівних степенях аргументу x :

$$x^3: 6 = 2A + A \quad \Rightarrow 6 = 3A, \quad A = 2;$$

$$x^2: 14 = 8A + B + 2A + B \quad \Rightarrow 2B = 14 - 10A = -6, \quad B = -3;$$

$$x^1: 2 = 10A + 4B + 2B + C \quad \Rightarrow C = 2 - 6B - 10A = 0;$$

$$x^0: -11 = 5B + 2C + \lambda \quad \Rightarrow \lambda = -11 - 5B - 2C = 4.$$

Тому

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^3 + 14x^2 + 2x - 11}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx &= (2x^2 - 3x)\sqrt{x^2 + 4x + 5} + 4 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} = \\ &= (2x^2 - 3x)\sqrt{x^2 + 4x + 5} + 4 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 + 1}} = (2x^2 - 3x)\sqrt{x^2 + 4x + 5} + \\ &+ 4 \ln \left| x + 2 + \sqrt{(x+2)^2 + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

Зауваження. Інтеграл $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ можна звести до

попереднього типу інтегралів за допомогою підстановки $x - \alpha = \frac{1}{t}$.

3.5.5. Інтегрування $\int x^m (a + bx^n)^p dx$

Цей клас інтегралів називають диференціальним біномом (або біноміальним диференціалом). Існує лише три набори раціональних параметрів n, m, p , для яких можливо інтегрувати цей вираз.

Випадок 1. Якщо p є ціле число, то використовуйте підстановку $x = t^N$, де N є спільним знаменником дробів m, n , щоб отримати інтеграл від раціонального дробу.

Випадок 2. Якщо $\frac{m+1}{n}$ є ціле число, то використовуйте підстановку

$\boxed{a + bx^n = t^N}$, де N є знаменником p , щоб отримати інтеграл від раціонального дробу.

Випадок 3. Якщо $\frac{m+1}{n} + p$ є ціле число, то використовуйте підстановку

$\boxed{\left(a + bx^n\right) / x^n = b + ax^{-n} = t^N}$, де N є знаменником p , щоб отримати інтеграл від раціонального дробу.

Приклад. Знайдіть $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

Тут $p = \frac{1}{3}$, $n = \frac{1}{4}$, $m = -\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} = 2$. Тому ми отримали другий випадок. $N = 3$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \left[\begin{array}{l} t^3 = 1 + \sqrt[4]{x} \Leftrightarrow x = (t^3 - 1)^4 \\ dx = 12(t^3 - 1)^3 t^2 dt \end{array} \right] = \int \frac{t}{(t^3 - 1)^2} 12(t^3 - 1)^3 t^2 dt = \\ &= \int 12(t^3 - 1)t^3 dt = 12 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) + C = \frac{12}{7} \left(\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} \right)^7 - 3 \left(\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} \right)^4 + C. \end{aligned}$$

4. Приклад розв'язання типового варіанту індивідуального завдання

Завдання 1. Знайти невизначений інтеграл $\int \operatorname{ctg} x \ln^5 \sin x dx$.

Зауважимо, що $(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cos x = \operatorname{ctg} x$. Тому вираз $\operatorname{ctg} x dx$ можна переписати наступним чином: $\operatorname{ctg} x dx = (\ln \sin x)' dx = d(\ln \sin x)$. Отож:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ctg} x \ln^5 \sin x dx &= \int \ln^5 \sin x \operatorname{ctg} x dx = \int \ln^5 \sin x d \ln \sin x = [u = \ln \sin x] = \int u^5 du = \\ &= \frac{u^6}{6} + C = \frac{\ln^6 \sin x}{6} + C. \end{aligned}$$

Завдання 2. Знайти невизначений інтеграл $\int \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} dx$.

Зауважимо, що в підінтегральній функції немає множника, який є похідною від арктангенса. Тому цей інтеграл можна знайти тільки прибравши арктангенс шляхом диференціювання. Це можна зробити лише методом інтегрування частинами. Отож:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} dx &= \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} \\ dv = dx \\ du = \frac{1}{1+(\sqrt{5x-1})^2} \frac{1}{2\sqrt{5x-1}} 5dx = \frac{dx}{2x\sqrt{5x-1}} \\ v = x. \end{array} \right] = x \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} - \\ - \int \frac{x dx}{2x\sqrt{5x-1}} &= x \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} - \frac{1}{5} \int \frac{5dx}{2\sqrt{5x-1}} = x \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} - \frac{1}{5} \int \frac{d(5x-1)}{2\sqrt{5x-1}} = \\ &= x \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} - \frac{1}{5} \sqrt{5x-1} + C. \end{aligned}$$

Завдання 3. Знайти невизначений інтеграл $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$.

Зауважимо, що підінтегральна функція є раціональною функцією від синуса та косинуса $R(\sin x, \cos x)$, причому ця функція є непарною відносно змінної косинус. В цьому випадку рекомендовано використання підстановки $t = \sin x$. Отож:

$$\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right] = \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x \, dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx =$$

$$= \int t^2 (1 - t^2)^2 \, dt = \int t^2 (1 - 2t^2 + t^4) \, dt = \int (t^2 - 2t^4 + t^6) \, dt = \frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C =$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - 2\frac{\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

Завдання 4. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{4\cos x + \sin x + 3}$.

Зауважимо, що підінтегральна функція є раціональною функцією від синуса та косинуса $R(\sin x, \cos x)$ довільного вигляду, тобто ані парність, ані непарність щодо аргументів функції не спостерігається. В цьому випадку рекомендовано використання універсальної підстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Отож:

$$\int \frac{dx}{4\cos x + \sin x + 3} = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ x = 2 \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1+t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1+t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{2dt}{4-4t^2+2t+3+3t^2} = \int \frac{2dt}{7-t^2+2t} = -\int \frac{2dt}{t^2-2t-7} = -\int \frac{2dt}{(t-1)^2-8} =$$

$$= -\frac{2}{2\sqrt{8}} \ln \left| \frac{t-1-\sqrt{8}}{t-1+\sqrt{8}} \right| + C = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 - 2\sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + 2\sqrt{2}} \right| + C.$$

Завдання 5. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{81-x^2}}$.

Підінтегральна функція містить кореня типу $\sqrt{a^2-x^2}$. Щоб спростити функцію та позбутися кореня, рекомендовано використання тригонометричної

підстановки $x = a \sin t$. В нашому випадку $a^2 = 81$, тому $a = 9$ та $x = 9 \sin t$.

Отож:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{81-x^2}} = \left[\begin{array}{l} x = 9 \sin t \\ t = \arcsin \frac{x}{9} \\ dx = 9 \cos t dt \\ 81 - x^2 = 81 \cos^2 t \end{array} \right] = \int \frac{81 \sin^2 t (9 \cos t) dt}{\sqrt{81 \cos^2 t}} = \int \frac{81 \sin^2 t (9 \cos t) dt}{9 \cos t} =$$

$$= 81 \int \sin^2 t dt = \left[\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \right] = \frac{81}{2} \int (1 - \cos 2t) dt = \frac{81}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + C =$$

$$= \frac{81}{2} \left(\arcsin \frac{x}{9} - \frac{\sin \left(2 \arcsin \frac{x}{9} \right)}{2} \right) + C.$$

Зауважимо, що синус подвійного кута можна виразити через синус одинарного кута, тоді відповідь набуде іншого вигляду:

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2 \frac{x}{9} \sqrt{1 - \frac{x^2}{81}} = \frac{2x}{81} \sqrt{81 - x^2};$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{81-x^2}} = \frac{81}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = \frac{81}{2} \arcsin \frac{x}{9} - \frac{x \sqrt{81-x^2}}{2} + C.$$

Варіанти індивідуальних завдань за темою «Невизначений інтеграл»

Завдання 1. Знайти невизначений інтеграл.

$$1.1. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

$$1.2. \int \frac{1+\ln x}{x} dx.$$

$$1.3. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$1.4. \int \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$

$$1.5. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^4+3}}.$$

$$1.6. \int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$1.7. \int \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$$

$$1.8. \int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$$

$$1.9. \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx.$$

$$1.10. \int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx.$$

$$1.11. \int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$$

$$1.12. \int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$$

$$1.13. \int \frac{x^3}{x^4+1} dx.$$

$$1.14. \int \frac{(x^3+x)dx}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}.$$

$$1.15. \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

$$1.16. \int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx.$$

$$1.17. \int \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^5}.$$

$$1.18. \int \frac{4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$1.19. \int \frac{x+5}{x^2+4} dx.$$

$$1.20. \int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x} dx.$$

$$1.21. \int \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3} dx.$$

$$1.22. \int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx.$$

$$1.23. \int \frac{1+1/(2\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+x)^2} dx.$$

$$1.24. \int \frac{x}{x^4+1} dx.$$

$$1.25. \int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$1.26. \int \frac{4x-3}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$1.27. \int \frac{\operatorname{arctg} x + 1}{1+x^2} dx.$$

$$1.28. \int \frac{4 - (\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2} dx.$$

$$1.29. \int \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} dx.$$

$$1.30. \int \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Завдання 2. Знайти невизначений інтеграл.

$$2.1. \int (4-3x)e^{-3x} dx.$$

$$2.2. \int \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1} dx.$$

$$2.3. \int (3x+4)e^{3x} dx.$$

$$2.4. \int (4x-2)\cos 2x dx.$$

$$2.5. \int (4-16x)\sin 4x dx.$$

$$2.6. \int (5x-2)e^{3x} dx.$$

$$2.7. \int (1-6x)e^{2x} dx.$$

$$2.8. \int \ln(x^2+4) dx.$$

$$2.9. \int \ln(4x^2+1) dx.$$

$$2.10. \int (2-4x)\sin 2x dx.$$

$$2.11. \int \operatorname{arctg} \sqrt{6x-1} dx.$$

$$2.12. \int e^{-2x}(4x-3) dx.$$

$$2.13. \int e^{-3x}(2-9x) dx.$$

$$2.14. \int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx.$$

$$2.15. \int \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1} dx.$$

$$2.16. \int \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} dx.$$

$$2.17. \int (5x+6)\cos 2x dx.$$

$$2.18. \int (3x-2)\cos 5x dx.$$

$$2.19. \int (x\sqrt{2}-3)\cos 2x dx.$$

$$2.20. \int (4x+7)\cos 3x dx.$$

$$2.21. \int (2x-5)\cos 4x dx.$$

$$2.22. \int (8-3x)\cos 5x dx.$$

$$2.23. \int (x+5)\sin 3x dx.$$

$$2.24. \int (2-3x)\sin 2x dx.$$

2.25. $\int (4x + 3) \sin 5x dx.$

2.26. $\int (7x - 10) \sin 4x dx.$

2.27. $\int (\sqrt{2} - 8x) \sin 3x dx.$

2.28. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}.$

2.29. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}.$

2.30. $\int x \sin^2 x dx.$

Завдання 3. Знайти невизначений інтеграл.

3.1. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx.$

3.2. $\int \sin^6 x \cos^3 x dx.$

3.3. $\int 4 \sin^2 x \cos^2 x dx.$

3.4. $\int \sin^3(x/4) \cos^6(x/4) dx.$

3.5. $\int \cos^5(x/2) \sin^3(x/2) dx.$

3.6. $\int 2^8 \sin^4 x dx.$

3.7. $\int \sin^5 x dx.$

3.8. $\int 2^4 \sin^3 x \cos^6 x dx.$

3.9. $\int \sin^2 x \cos^5 x dx.$

3.10. $\int \cos^5(x/4) dx.$

3.11. $\int 2^4 \sin^3(x/2) dx.$

3.12. $\int 2^8 \sin^6 x \cos^3 x dx.$

3.13. $\int 2^8 \sin^2 x \cos^2 x dx.$

3.14. $\int 2^4 \sin^3 x \cos^6 x dx.$

3.15. $\int \cos^5 x dx.$

3.16. $\int \sin^5(x/4) dx.$

3.17. $\int 2^4 \sin^2(x/2) \cos^2(x/2) dx.$

3.18. $\int 2^8 \sin^3 x \cos^3 x dx.$

3.19. $\int 2^8 \sin x \cos^6 x dx.$

3.20. $\int 2^4 \cos^3 x dx.$

3.21. $\int \sin^5 x dx.$

3.22. $\int \sin(x/4) \cos^2(x/4) dx.$

3.23. $\int 2^4 \sin^4(x/2) \cos(x/2) dx.$

3.24. $\int 2^8 \sin^2 x \cos^2 x dx.$

3.25. $\int 2^8 \cos^2 x dx.$

3.26. $\int 2^4 \sin^4 x dx.$

3.27. $\int \sin^6 x \cos^3 x dx.$

3.28. $\int \sin^2(x/4) \cos^2(x/4) dx.$

3.29. $\int 2^4 \sin^2(x/2) \cos^3(x/2) dx.$

3.30. $\int 2^8 \cos^4 x \sin x dx.$

Завдання 4. Знайти невизначений інтеграл.

4.1. $\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x - 3}.$

4.2. $\int \frac{dx}{4 \cos x - 3 \sin x - 1}.$

4.3. $\int \frac{dx}{\cos x - \sin x + 2}.$

4.4. $\int \frac{dx}{3 \cos x + 3 \sin x + 1}.$

4.5. $\int \frac{dx}{2 \cos x + \sin x + 2}.$

4.6. $\int \frac{dx}{5 \cos x - 2 \sin x - 4}.$

4.7. $\int \frac{dx}{\cos x + 4 \sin x + 5}.$

4.8. $\int \frac{dx}{2 \cos x - 3 \sin x - 6}.$

4.9. $\int \frac{dx}{2 \cos x + \sin x - 4}.$

4.10. $\int \frac{dx}{4 \cos x - 3 \sin x + 5}.$

4.11. $\int \frac{dx}{6 \cos x + \sin x + 3}.$

4.12. $\int \frac{dx}{4 \cos x + \sin x}.$

4.13. $\int \frac{dx}{3 \cos x - 4 \sin x - 1}.$

4.14. $\int \frac{dx}{3 \cos x - 4 \sin x}.$

4.15. $\int \frac{dx}{\cos x + \sin x + 1}.$

4.16. $\int \frac{dx}{\cos x + 6 \sin x - 1}.$

4.17. $\int \frac{dx}{5 \cos x + \sin x - 4}.$

4.19. $\int \frac{dx}{\cos x + 8 \sin x - 3}.$

4.21. $\int \frac{dx}{4 - \cos x + 2 \sin x}.$

4.23. $\int \frac{dx}{7 - 7 \cos x + 2 \sin x}.$

4.25. $\int \frac{dx}{9 \cos x + \sin x - 2}.$

4.27. $\int \frac{dx}{4 \cos x + \sin x + 1}.$

4.29. $\int \frac{dx}{11 + \cos x - \sin x}.$

4.18. $\int \frac{dx}{5 \cos x + \sin x - 5}.$

4.20. $\int \frac{dx}{1 - \cos x + 2 \sin x}.$

4.22. $\int \frac{dx}{5 - 4 \cos x - \sin x}.$

4.24. $\int \frac{dx}{\cos x + 10 \sin x}.$

4.26. $\int \frac{dx}{10 - 4 \cos x + 3 \sin x}.$

4.28. $\int \frac{dx}{1 - 3 \cos x + \sin x}.$

4.30. $\int \frac{dx}{\cos x + 5 \sin x + 1}.$

Завдання 5. Знайти невизначений інтеграл.

5.1. $\int \sqrt{256 - x^2} dx.$

5.2. $\int \sqrt{1 - x^2} dx.$

5.3. $\int \frac{dx}{(25 + x^2) \sqrt{25 + x^2}}.$

5.4. $\int \frac{dx}{(9 + x^2)^{3/2}}.$

5.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{(5 - x^2)^3}}.$

5.6. $\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx.$

5.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}.$

5.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}.$

5.9. $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} dx.$

5.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{(16 - x^2)^3}}.$

5.11. $\int \sqrt{4 - x^2} dx.$

5.12. $\int \frac{dx}{(16 + x^2)^{3/2}}.$

5.13. $\int \sqrt{16 - x^2} dx.$

5.14. $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} dx.$

5.15. $\int \sqrt{25 - x^2} dx.$

5.16. $\int \sqrt{16 - x^2} dx.$

5.17. $\int \frac{dx}{\sqrt{(64 - x^2)^3}}.$

5.18. $\int \frac{dx}{(16 + x^2)\sqrt{16 + x^2}}.$

5.19. $\int \frac{dx}{(16 - x^2)\sqrt{16 - x^2}}.$

5.20. $\int \sqrt{9 - x^2} dx.$

5.21. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}.$

5.22. $\int \frac{dx}{\sqrt{(16 - x^2)^3}}.$

5.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{(8 - x^2)^3}}.$

5.24. $\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx.$

5.25. $\int \sqrt{4 - x^2} dx.$

5.26. $\int \sqrt{16 - x^2} dx.$

5.27. $\int \frac{dx}{(4 + x^2)\sqrt{4 + x^2}}.$

5.28. $\int \frac{dx}{(4 - x^2)^{3/2}}.$

5.29. $\int \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}.$

5.30. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$

ДОДАТОК

Правила обчислення та таблиця похідних функцій

Похідною функції $y=f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції до відповідного приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, і позначається:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Найпростіші правила обчислення похідних:

I. Нехай функції u і v мають у певній точці похідні u', v' . Тоді

$$\begin{aligned} (cu)' &= cu' \\ (u \pm v)' &= u' \pm v' \\ (u \cdot v)' &= u'v + uv' \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0. \end{aligned}$$

II. Нехай функція $u = \varphi(x)$ має в деякій точці x_0 похідну $u'_x = \varphi'(x_0)$, а функція $y = f(u)$ має у відповідній точці $u_0 = \varphi(x_0)$ похідну $y' = f'(u_0)$. Тоді *складна функція* $y = f(\varphi(x))$ в зазначеній точці x_0 також буде мати похідну, яка визначається за формулою

$$y'(x_0) = f'(u_0)u'(x_0)$$

або

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

III. Якщо функція $y = f(x)$ задовольняє умовам теореми про існування оберненої функції і в точці x_0 має похідну $f'(x_0) \neq 0$, то для оберненої функції $x = g(y)$ у відповідній точці $x_0 = g(y_0)$ також існує похідна та

$$x'(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)}$$

або

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Нижче наведена таблиця похідних простіших елементарних функцій в припущенні, що аргумент u є деякою функцією від x .

Таблиця похідних

$$1) c' = 0$$

$$2) (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$$

$$3) (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$4) \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$5) (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$6) (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$7) (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

$$8) (e^u)' = e^u u'$$

$$9) (\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$10) (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$11) (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$12) (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$$

$$13) (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$14) (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$15) (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$16) (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

$$17) (\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$$

$$18) (\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$$

$$19) (\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$$

$$20) (\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} u'$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика в прикладах і задачах. У 2-х томах. Т. 1: Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної : навч. посіб. / Л. В. Курпа, Ж. Б. Кашуба, Г. Б. Лінник [та ін.] ; за ред. Л. В. Курпи. – Харків : НТУ “ХПІ”, 2009. – 532 с.
2. Сборник задач по высшей математике. / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 7-е изд. – Москва : Айрис-прес, 2011. – 592 с.
3. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). — М: Высшая школа, 1983.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
1. Первісна функції. Означення невизначеного інтеграла.....	4
2. Основні методи інтегрування	7
2.1. Метод прямого інтегрування	7
2.2. Метод інтегрування шляхом зміни виразу під знаком диференціалу....	8
2.3. Метод інтегрування частинами.....	12
2.4. Інтегрування методом підстановки.....	15
3. Інтегрування окремих класів інтегралів	17
3.1. Інтегрування $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ і $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$	17
3.2. Інтегрування $\int \frac{Cx + D}{ax^2 + bx + c} dx$ і $\int \frac{Cx + D}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$	19
3.3. Інтегрування раціональних функцій.....	20
3.4. Інтегрування виразів з тригонометричними функціями.....	25
3.4.1. Пряме інтегрування тригонометричних виразів.....	25
3.4.2. Інтегрування $\int R(\sin x, \cos x) dx$	26
3.5. Інтегрування ірраціональних виразів.....	28
3.5.1. Інтегрування $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \dots, \sqrt[n_s]{x^{m_s}}\right) dx$	28
3.5.2. Інтегрування $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right) dx$	29
3.5.3. Інтегрування $\int R\left(x, \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) dx, \int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$	30
3.5.4. Інтегрування $\int \frac{P_m(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ і $\int \frac{dx}{(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$	32
3.5.5. Інтегрування $\int x^m (a + bx^n)^p dx$	33
4. Приклад розв'язання типового варіанту індивідуального завдання.....	35
Варіанти індивідуальних завдань за темою «Невизначений інтеграл».....	38
ДОДАТОК. Правила обчислення та таблиця похідних функцій.....	44
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	46
ЗМІСТ.....	47

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для самостійної роботи за темою

«Невизначені інтеграли»

з курсу «Вища математика»

для студентів технічних спеціальностей

заочної та прискореної форм навчання

Укладачі: ЛІННИК Ганна Борисівна,
МОРАЧКОВСЬКА Ірина Олегівна
РУДНЄВА Гаяне Валериківна

Відповідальний за випуск Л. В. Курпа
Роботу до видання рекомендував Д. В. Бреславський

В авторській редакції

План 2020 р., поз. 307

Підп. до друку 16.03.2021. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.

Riso-друк. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 1,5.

Наклад 50 прим. Зам. № _____. Ціна договірна.

Видавець

Видавничий центр НТУ «ХП».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Виготовлювач

Надруковано ФОП Секішова Т.Є.

Свідоцтво про державну реєстрацію за №2 480 000 0000 079758 від

21.05.2007 р. м.Харків, вул. Тобольська, 42-а, 067-709-71-16.

u2print.com.ua