

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«Харківський політехнічний інститут»

**Н. М. Ясницька, О. Б. Ахієзер,  
А. А. Боєва, О. А. Геляровська, М. В. Мезерна**

# **МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ**

Навчальний посібник  
для студентів вищих навчальних закладів

У дев'яти модулях

## **Модуль 6**

**Диференціальне числення функцій багатьох змінних**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки,  
молоді та спорту України

Харків  
Видавництво «Підручник НТУ «ХПІ»  
2014

ББК 22.161  
М 33  
УДК 517.2

*Рецензенти:*

- А. А. Янцевич*, д-р фіз.-мат. наук, професор, Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна,  
*О. М. Кісільова*, д-р фіз.-мат. наук, професор, Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,  
*П. П. Костробій*, д-р фіз.-мат. наук, професор, Національний університет «Львівська політехніка»,  
*Ф. О. Сопронюк*, д-р фіз.-мат. наук, професор, Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича,  
*С. В. Бодяньський*, д-р техн. наук, професор, Харківський національний університет радіоелектроніки

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, лист № 1/11-9051 від 29.09.2010 р.

**Ясницька Н. М. та ін.**

М 33 Математичний аналіз [Текст] : навч. посіб. : у 9-ти мод. – Мод. 6 : Диференціальне числення функцій ба-гатьох змінних / Н. М. Ясницька, О. Б. Ахієзер, А. А. Боева, О. А. Геляровська, М. В. Мезерна. – 2-е вид., перероб. і доп. – Харків : вид-во «Підручник НТУ «ХП», 2014. – 102 с.

ISBN 978-966-593-864-4 (повне вид.)  
ISBN 978-966-593-870-5 (мод. 6)

Навчальний посібник входить до серії «Математичний аналіз» і є шостою частиною збірника, що складається з дев'яти частин. Містить короткі теоретичні відомості, питання для самоперевірки, велику кількість розібраних зразків, а також прикладів для самостійного розв'язання, призначених для практичних занять, як аудиторних, так і домашніх. Наведено обов'язкові домашні завдання, зразки модульних контрольних робіт. Окремий розділ містить довідник з елементарної математики.

Призначено для студентів технічних спеціальностей.

Лл. 4 . Табл. 1. Бібліогр.: 15 назв.

**ББК 22. 161**  
**УДК 517.2**

**ISBN 978-966-593-864-4**  
**ISBN 978-966-593-870-5 (мод. 6)**

- © Н. М. Ясницька, О. Б. Ахієзер,  
А. А. Боева, О. А. Геляровська,  
М. В. Мезерна, 2014  
© Вид-во «Підручник НТУ «ХП», 2014

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	4
6.1. Функції в $R^n$ . Границя. Неперервність .....	10
Аудиторне заняття 6.1 .....	18
Самостійна робота 6.1 .....	18
6.2. Частинні похідні. Перший диференціал функції декількох змінних .....	20
Аудиторне заняття 6.2 .....	24
Самостійна робота 6.2 .....	25
6.3. Похідні і диференціали складних функцій. Похідні функцій, заданих неявно .....	26
Аудиторне заняття 6.3 .....	29
Самостійна робота 6.3 .....	30
6.4. Похідні і диференціали вищих порядків .....	31
Аудиторне заняття 6.4 .....	37
Самостійна робота 6.4 .....	37
Зразок контрольної роботи .....	38
6.5. Геометричні застосування. Задача про знаходження найбільших і найменших значень .....	39
Аудиторне заняття 6.5 .....	46
Самостійна робота 6.5 .....	46
6.6. Локальний екстремум функції декількох змінних .....	47
Аудиторне заняття 6.6 .....	54
Самостійна робота 6.6 .....	54
6.7. Умовний екстремум .....	55
Аудиторне заняття 6.7. ....	61
Самостійна робота 6.7 .....	62
6.8. Теоретичні питання з теми «Диференціальне числення функцій багатьох змінних» .....	63
6.9. Зразки модульної контрольної роботи з теми «Диференціальне числення функцій багатьох змінних» .....	65
6.10. Варіанти обов'язкових домашніх завдань з теми «Диференціальне числення функцій багатьох змінних» .....	67
6.11. Довідковий матеріал .....	92
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ .....	100

## ВСТУП

В технічних університетах України протягом останніх років відбуваються зміни у програмах та методиках викладання курсу математичного аналізу, що пов'язані з необхідністю наблизити курс до потреб інженерних дисциплін, водночас зберігаючи високий рівень фундаментальної освіти.

Пропонований посібник, що складається з 9 частин, призначений для студентів вищих технічних навчальних закладів з розширеною програмою з математичних дисциплін, в якій курсу «Математичний аналіз» відведено 648 годин, у тому числі 432 – для самостійної роботи. Цей посібник призначений зокрема для підготовки бакалаврів у галузі знань «Системні науки та кібернетика» з напрямків «Прикладна математика» та «Системний аналіз».

Структура посібника відповідає кредитно-модульній системі навчання. Весь курс, що вивчається протягом 3 семестрів, розбито на 9 модулів, кожен з яких, у свою чергу, складається з декількох підмодулів. Кожен з підмодулів містить теоретичні відомості, приклади розв'язання типових задач, приблизний набір задач для роботи з викладачем в аудиторії, задачі для самостійної роботи, варіанти індивідуальних домашніх завдань та зразки модульних контрольних робіт.

Теоретична частина підмодуля містить необхідні визначення, формулювання теорем, формули. Вона ілюструється розібраними прикладами і вправами, виконання яких сприяє засвоєнню таких фундаментальних понять математичного аналізу, як границя послідовності та функції, неперервність, диференційовність, інтеграл, характер збіжності функціонального ряду тощо.

Вивчення цієї частини підмодуля допомагає при виконанні аудиторної і домашньої роботи, але не виключає необхідності роботи з підручником і конспектом.

У процесі вивчення матеріалу модуля студенти виконують обов'язкові домашні завдання (ОДЗ). В кожному з 9 підмодулів наведено 25 варіантів таких завдань приблизно однакової складності. Студенти усно захищають виконані ОДЗ напередодні написання двохчасової модульної контрольної роботи.

Зразки варіантів модульної контрольної роботи і перелік теоретичних питань, що містяться в ній, наведені у кінці кожного модуля.

Для отримання високої оцінки з модульної контрольної роботи необхідно знати не тільки формулювання та визначення, але і доведення теорем. Це потребує роботи з конспектом та вивчення відповідної літератури. Перелік рекомендованої літератури наведено в кінці кожного модуля.

Структура курсу «Математичний аналіз»:

Назва модуля	Назва підмодуля
<b>Модуль 1</b> Вступ до математичного аналізу. Елементи теорії множин, послідовності	<i>Підмодуль 1.</i> Логічні знаки. Метод математичної індукції. Деякі нерівності.
	<i>Підмодуль 2.</i> Елементи теорії множин.
	<i>Підмодуль 3.</i> Супремум та інфімум числової множини. Гранична точка множини.
	<i>Підмодуль 4.</i> Способи задання послідовності. Основні визначення.
	<i>Підмодуль 5.</i> Границя числової послідовності. Ознаки існування границі.
	<i>Підмодуль 6.</i> Техніка обчислювання границі послідовності.
	Модульна контрольна робота №1.
<b>Модуль 2</b> Границя і неперервність функції однієї змінної	<i>Підмодуль 1.</i> Визначення границі функції за Коші та за Гейне. Нескінченно великі й нескінченно малі функції.
	<i>Підмодуль 2.</i> Обчислення найпростіших границь.
	<i>Підмодуль 3.</i> Перша і друга визначні границі й висновки з них.
	<i>Підмодуль 4.</i> Обчислення границь за допомогою таблиці еквівалентних нескінченно малих.
	<i>Підмодуль 5.</i> Порівняння нескінченно малих і нескінченно великих функцій. Обчислення границь за допомогою відношень « $o$ » і « $O$ ».
	<i>Підмодуль 6.</i> Неперервні функції.
	Модульна контрольна робота № 2.

Назва модуля	Назва підмодуля
<b>Модуль 3</b> Диференціальне числення функцій однієї змінної	<i>Підмодуль 1.</i> Визначення похідної. Геометричний і механічний зміст.
	<i>Підмодуль 2.</i> Техніка диференціювання.
	<i>Підмодуль 3.</i> Диференціал функції. Застосування диференціювання для наближених обчислень.
	<i>Підмодуль 4.</i> Похідні і диференціали вищих порядків.
	<i>Підмодуль 5.</i> Теореми про середнє. Правило Лопіталя.
	<i>Підмодуль 6.</i> Формула Тейлора. Елементи поведінки функції.
	<i>Підмодуль 7.</i> Дослідження поведінки функцій. Асимптоти графіка функції.
	<i>Підмодуль 8.</i> Побудування графіків.
	Модульна контрольна робота № 3.
<b>Модуль 4</b> Невизначений інтеграл	<i>Підмодуль 1.</i> Основні визначення і формулювання. Безпосереднє інтегрування.
	<i>Підмодуль 2.</i> Метод підведення під знак диференціала. Обчислення інтегралів виду $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx \text{ і } \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx .$
	<i>Підмодуль 3.</i> Заміна змінної у невизначеному інтегралі.
	<i>Підмодуль 4.</i> Метод інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.
	<i>Підмодуль 5.</i> Раціональні функції. Розкладання на найпростіші дроби. Інтегрування раціональної функції.
	<i>Підмодуль 6.</i> Обчислення інтегралів виду $\int R(\sin x, \cos x) dx .$
	<i>Підмодуль 7.</i> Інтегрування ірраціональних виразів.
	Модульна контрольна робота № 4.

Назва модуля	Назва підмодуля
<b>Модуль 5</b> Визначений інтеграл і його застосування. Невласні інтеграли	<i>Підмодуль 1.</i> Інтеграл Рімана. Основні визначення. Обчислення за формулою Ньютона-Лейбніца.
	<i>Підмодуль 2.</i> Метод інтегрування частинами і заміна змінної у визначеному інтегралі.
	<i>Підмодуль 3.</i> Обчислення площі плоскої фігури за допомогою визначеного інтеграла.
	<i>Підмодуль 4.</i> Обчислення довжини дуги за допомогою визначеного інтеграла.
	<i>Підмодуль 5.</i> Обчислення площі поверхні обертання, об'єму тіла обертання, об'єму за відомими поперечними перерізами.
	<i>Підмодуль 6.</i> Невласні інтеграли першого роду.
	<i>Підмодуль 7.</i> Невласні інтеграли другого роду.
	Модульна контрольна робота № 5.
<b>Модуль 6</b> Диференціальне числення функцій багатьох змінних	<i>Підмодуль 1.</i> Функції в $R^n$ . Границя. Неперервність.
	<i>Підмодуль 2.</i> Частинні похідні. Перший диференціал функції декількох змінних.
	<i>Підмодуль 3.</i> Похідні і диференціали складних функцій. Похідні функцій, заданих неявно.
	<i>Підмодуль 4.</i> Похідні і диференціали вищих порядків.
	<i>Підмодуль 5.</i> Геометричні застосування. Задача про знаходження найбільших і найменших значень.
	<i>Підмодуль 6.</i> Локальний екстремум функції декількох змінних.
	<i>Підмодуль 7.</i> Умовний екстремум.
	Модульна контрольна робота № 6.
<b>Модуль 7</b> Кратні інтеграли	<i>Підмодуль 1.</i> Подвійні інтеграли. Основні визначення. Властивості. Обчислення подвійного інтеграла по прямокутній області.

Назва модуля	Назва підмодуля
<b>Модуль 7</b> Кратні інтеграли	<i>Підмодуль 2.</i> Заміна змінної в подвійному інтегралі. Перехід до полярної системи координат і узагальненої полярної системи координат.
	<i>Підмодуль 3.</i> Геометричні та фізичні застосування подвійного інтеграла.
	<i>Підмодуль 4.</i> Потрійний інтеграл. Визначення, властивості, обчислення в декартовій системі координат.
	<i>Підмодуль 5.</i> Заміна змінної в потрійному інтегралі.
	<i>Підмодуль 6.</i> Застосування потрійних інтегралів.
	Модульна контрольна робота № 7.
<b>Модуль 8</b> Криволінійні та поверхневі інтеграли. Теорія поля	<i>Підмодуль 1.</i> Криволінійні інтеграли першого роду та їх застосування.
	<i>Підмодуль 2.</i> Криволінійні інтеграли другого роду (по координатах).
	<i>Підмодуль 3.</i> Поверхневі інтеграли.
	<i>Підмодуль 4.</i> Скалярне поле. Основні характеристики скалярного поля.
	<i>Підмодуль 5.</i> Векторне поле.
	<i>Підмодуль 6.</i> Потік векторного поля через поверхню. Циркуляція.
	Модульна контрольна робота № 8.
<b>Модуль 9</b> Ряди	<i>Підмодуль 1.</i> Числові ряди. Основні поняття та визначення. Ознаки збіжності.
	<i>Підмодуль 2.</i> Інтегральна ознака Коші. Знакозмінні ряди. Абсолютна і умовна збіжність.
	<i>Підмодуль 3.</i> Функціональні ряди. Область збіжності. Рівномірна збіжність функціональних рядів.
	<i>Підмодуль 4.</i> Степеневі ряди. Область збіжності. Властивості степеневих рядів.
	<i>Підмодуль 5.</i> Ряди Тейлора та їх застосування.
	<i>Підмодуль 6.</i> Ряди Фур'є I.
	<i>Підмодуль 7.</i> Ряди Фур'є II.
	Модульна контрольна робота № 9.



Модуль 6 «Диференціальне числення функцій багатьох змінних» розрахований на 85 годин (16 годин лекційних занять, 18 годин практичних занять в аудиторії, 51 годину самостійної роботи).

Весь матеріал розподілено на 7 підмодулів. Перший підмодуль містить основні визначення, що стосуються простору  $R^n$ , множинам в  $R^n$ . Розібрані в цьому підмодулі приклади допоможуть засвоїти поняття границі функції декількох змінних та неперервності й оволодіти технікою обчислення границь та дослідження на неперервність.

Підмодулі 6.2-6.4 присвячені поняттям диференційовності частинних похідних, диференціалів першого та вищих порядків функції в  $R^n$ . В них наведено приклади розв'язання задач, які допоможуть розібратися в цих фундаментальних поняттях та засвоїти техніку обчислення.

В підмодулях 6.5-6.7 розібрані приклади задач на локальний та умовний екстремум функції декількох змінних.

В результаті вивчення матеріалу, що міститься в цьому модулі, студент повинен засвоїти основні поняття і формулювання, вивчити методи дослідження функцій багатьох змінних та вміти їх застосовувати. Знання та уміння, отримані в цьому розділі, необхідні при вивченні матеріалу наступних модулів.

## Модуль 6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

### 6.1. Функції в $R^n$ . Границя. Неперервність

1°. *Простором  $R^n$*  називають множину впорядкованих наборів дійсних чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Кожен такий набір називають *точкою* в  $R^n$  і позначають однією буквою  $x$ , а числа  $x_i$  – *координатами точки*.

2°. *Відстанню* між двома точками  $x^{(1)}, x^{(2)}$  у просторі  $R^n$  називають число

$$\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(1)} - x_i^{(2)})^2},$$

зокрема в  $R^1$ :

$$\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) = \sqrt{(x^{(1)} - x^{(2)})^2} = |x^{(1)} - x^{(2)}|,$$

в  $R^2$ :

$$\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) = \sqrt{(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})^2 + (x_2^{(1)} - x_2^{(2)})^2}.$$

3°. *Кулею радіуса  $\varepsilon$  із центром у точці  $a \in R^n$*  називають множину

$$B(a, \varepsilon) = \{x \in R^n \mid \rho(a, x) < \varepsilon\}.$$

Цю множину в  $R^n$  називають  *$\varepsilon$ -околом точки  $a$* .

У  $R^1$   $B(a, \varepsilon)$  має вигляд інтервалу  $|x - a| < \varepsilon$ , в  $R^2$   $B(a, \varepsilon)$  – це внутрішня частина круга радіуса  $\varepsilon$  із центром у точці  $a$ :

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < \varepsilon^2,$$

в  $R^3$   $B(a, \varepsilon)$  – внутрішня частина кулі радіуса  $\varepsilon$  із центром у точці  $a$ :

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 < \varepsilon^2.$$

4°. Точка  $x \in R^n$  називається *внутрішньою точкою* множини  $G \subset R^n$ , якщо вона належить цій множині разом з яким-небудь  $\varepsilon$ -околом (тобто кулею  $B(x, \varepsilon)$ ).

5°. Множина, яка складається тільки з внутрішніх точок, називається *відкритою множиною*.

6°. Точка  $x \in R^n$  називається *зовнішньою точкою* для множини  $G \subset R^n$ , якщо вона є внутрішньою для  $R^n/G$ .

7°. Точка  $x \in R^n$  називається *граничною точкою* для множини  $G$ , якщо вона не є ні внутрішньою для цієї множини, ні зовнішньою.

8°. Множина називається *замкненою множиною*, якщо вона містить всі свої граничні точки.

9°. *Діаметром множини*  $G \subset R^n$  називають величину

$$d = \sup_{x^{(1)}, x^{(2)} \in G} \rho(x^{(1)}, x^{(2)}).$$

10°. Множина називається *обмеженою множиною*, якщо її діаметр є скінченний.

11°. Множина називається *зв'язною множиною*, якщо будь-які дві її точки можна з'єднати кривою, що належить множині.

## **Функції в $R^n$ . Границя функції**

1°. Нехай  $G$  – множина в  $R^n$ . Якщо для кожного  $x \in G$  за деяким законом поставлено у відповідність дійсне число  $y \in R^1$ , то говорять, що на множині  $G$  визначено функцію  $y = f(x)$ .

Множина  $G$  називається *областю визначення функції*  $f(x)$ .

2°. У просторі  $R^2$  аргументи функцій звичайно позначають  $x$  та  $y$ , а функцію  $z$  ( $z = z(x, y)$ ). Областю визначення в цьому випадку є множина в площині  $xOy$ .

В просторі  $R^3$  аргументи позначають  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , а функцію –  $u$  ( $u = u(x, y, z)$ ). Областю визначення функції  $u = u(x, y, z)$  є тримірна множина.

### Приклади

Знайдіть і зобразіть область визначення функції. Чи є ця множина відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

$$1. \quad z = \ln(x^2 + y). \quad 2. \quad z = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)}.$$

### Розв'язання

1. Логарифмічна функція визначена в тих точках, де аргумент строго додатний, тобто при  $x^2 + y > 0$ ,  $y > -x^2$ .

Парабола  $y = -x^2$  ділить площину  $xOy$  на дві частини – внутрішню і зовнішню. Нерівності  $y > -x^2$  задовольняє зовнішня частина. Границя  $y = -x^2$  в область визначення не входить (див. рис. 1).

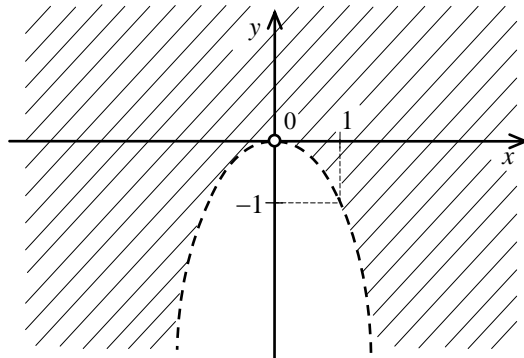


Рисунок 1

Виходить, множина є відкритою. Очевидно, діаметр множини є нескінченним, тому що множина містить точки, що розташовані одна від

одної як завгодно далеко. Виходить, область визначення є необмеженою. Ця множина зв'язна: будь-які дві точки можна з'єднати кривою, що належить множині.

2. Функція  $z = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)}$  визначена там, де  $\sin \pi(x^2 + y^2) \geq 0$ . Ця нерівність виконується, якщо

$$2\pi k \leq \pi(x^2 + y^2) \leq \pi + 2\pi k, \quad k = 0, 1, \dots;$$

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 1,$$

$$2 \leq x^2 + y^2 \leq 3,$$

$$2k \leq x^2 + y^2 \leq 2k + 1.$$

Перша нерівність виконується усередині і на межі кола одиничного радіуса, друга – у кільці між колами радіусів  $\sqrt{2}$  та  $\sqrt{3}$ , і тощо.

Область визначення (див. рис. 2) є замкнутою, необмеженою множиною. Вона не є зв'язною, тому що дві точки з різних кілець не можна з'єднати кривою, що повністю належить множині.

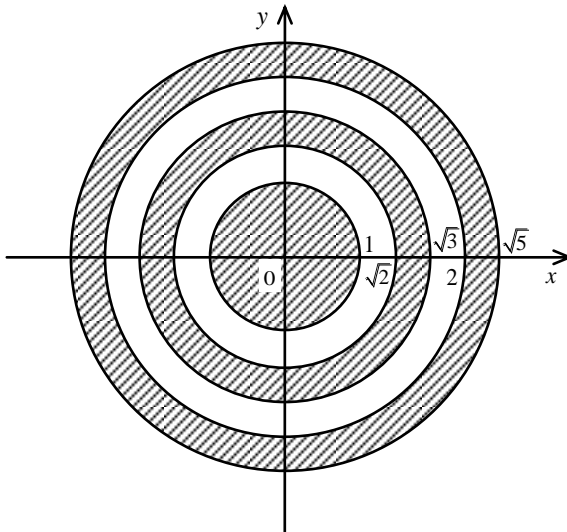


Рисунок 2

Геометричними характеристиками функції  $u = u(x, y, z)$  є поверхні рівня, які задаються рівняннями  $u(x, y, z) = C$ .

3°. Геометрично рівняння  $z = z(x, y)$  задає поверхню. Лінії, у всіх точках яких функція  $f(x, y)$  набуває одного й того самого значення, називають *лініями рівня*. Вони задаються рівняннями  $f(x, y) = C$ .

### Приклади

1. Знайдіть сім'ю ліній рівня функції  $z = \frac{1}{2x^2 + 3y^2}$ .
2. Знайдіть сім'ю поверхонь рівня  $u = u(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ .

### Розв'язання

1. Рівняння ліній, на яких функція  $z = \frac{1}{2x^2 + 3y^2}$  набуває однакових значень, має вигляд

$$\frac{1}{2x^2 + 3y^2} = C$$

(очевидно, що у даному випадку  $C > 0$ ),

тобто

$$2x^2 + 3y^2 = \frac{1}{C}.$$

Надаючи константі  $C$  різні значення, отримуємо сім'ю еліпсів

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2C}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3C}}\right)^2} = 1.$$

Таким чином, лініями рівня є сім'я еліпсів з напівосями  $\frac{1}{\sqrt{2C}}$  і  $\frac{1}{\sqrt{3C}}$  (див. рис. 3).

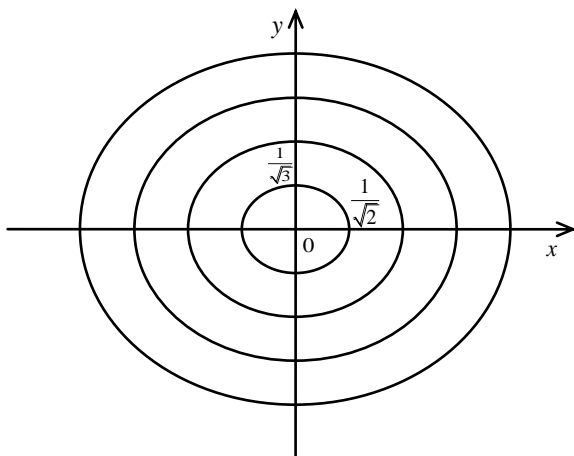


Рисунок 3

2. Рівняння поверхонь рівня в цьому випадку має вигляд

$$x^2 + y^2 - z^2 = C.$$

При  $C = 0$  поверхнею рівня є конус  $x^2 + y^2 = z^2$ .

При  $C > 0$  це сім'я однопорожнинних гіперболоїдів:

$$\frac{x^2}{(\sqrt{C})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{C})^2} - \frac{z^2}{(\sqrt{C})^2} = 1.$$

При  $C < 0$  це сім'я двопорожнинних гіперболоїдів:

$$-\frac{x^2}{(\sqrt{-C})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{-C})^2} + \frac{z^2}{(\sqrt{-C})^2} = 1.$$

4°. Число  $A$  називається *границею функції двох змінних* при  $(x, y) \rightarrow (a_1, a_2)$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : 0 < \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} < \delta : |f(x, y) - A| < \varepsilon .$$

Позначення:  $\lim_{\substack{x \rightarrow a_1 \\ y \rightarrow a_2}} f(x, y) = A$ .

Наявність границі функції  $f(x, y)$  при  $(x, y) \rightarrow (a_1, a_2)$ , що дорівнює  $A$ , говорить про те, що при наближенні  $(x, y) \rightarrow (a_1, a_2)$  будь-яким шляхом значення функції  $f(x, y) \rightarrow A$ .

З наявності послідовних границь

$$\lim_{x \rightarrow a_1} (\lim_{y \rightarrow a_2} f(x, y)) \text{ і } \lim_{y \rightarrow a_2} (\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y))$$

не виходить існування  $\lim_{\substack{x \rightarrow a_1 \\ y \rightarrow a_2}} f(x, y)$ , навіть якщо послідовні границі рівні.

### Приклади

Обчисліть границю або доведіть, що вона не існує.

1.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$ .

2.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ .

3.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$ .

### Розв'язання

1.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\cancel{(x^2 + y^2)} (\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2)}{\cancel{(x^2 + y^2 + 4 - 4)}} = 4$ .



2. Покажемо, що границя  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$  не існує. Нехай точка  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  уздовж прямої  $y = kx$ ,  $x \rightarrow 0$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow kx}} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (1+k^2)}{x^2 (1-k^2)} = \frac{1+k^2}{1-k^2},$$

із чого виходить, що на різних прямих граничні значення функції є різними, а отже, границя не існує.

3. У цьому випадку для розкриття невизначеності зручно перейти до полярних координат:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} &= \left\| \frac{0}{0} \right\| = \| x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi \| = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^4 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi)}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) = \\ &= \left\| \frac{\rho \rightarrow 0}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi \leq 2} \right\| = 0. \end{aligned}$$

5°. Функція  $f(x, y)$ , визначена в точці  $(x_0, y_0)$  і у деякому її околі, називається *неперервною функцією в точці  $(x_0, y_0)$* , якщо  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ .

6°. Функція, неперервна в кожній точці деякої множини, називається *неперервною функцією* на цій множині.

7°. Якщо функція  $f(x, y)$  неперервна на обмеженій замкненій множині  $X$ , то вона має наступні властивості:

- вона обмежена на цій множині;
- набуває на цій множині найбільшого і найменшого значення.

## Аудиторне заняття 6.1

1. Знайдіть множини визначення функцій  $z = f(x, y)$ , зобразіть їх і охарактеризуйте.

1.1.  $z = \sqrt{y^2 - 2x + 4}$ .

1.2.  $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \sqrt{x-y}$ .

1.3.  $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}$ .

1.4.  $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$ .

2. Знайдіть сім'ю ліній рівня заданих функцій.

2.1.  $z = e^{\frac{2x}{x^2 + y^2}}$ .

2.2.  $z = |x| + y$ .

2.3.  $z = \operatorname{arctg} \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}$ .

3. Знайдіть сім'ю поверхонь рівня заданих функцій.

3.1.  $u = x + y + z$ .

3.2.  $u = \operatorname{sign} \sin(x^2 + y^2 + z^2)$ .

4. Обчисліть границі або доведіть, що вони не існують.

4.1.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + 8} - 2}$ .

4.2.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ .

4.3.  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{2(x+y)^2}{(x^2 + y^4)^2}$ .

## Самостійна робота 6.1

1. Знайдіть множини визначення функцій  $z = f(x, y)$ , зобразіть їх і охарактеризуйте.

1.1.  $z = \sqrt{\frac{2x + 3y - 1}{x - y}}$ .

1.2.  $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ .

1.3.  $z = \ln(-x^2 - y)$ .

1.4.  $z = \arcsin(2x - y)$ .

2. Знайдіть сім'ю ліній рівня заданих функцій.

2.1.  $z = \min(x^2, y)$ .

2.2.  $z = \ln \sqrt{\frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2}}$ .

2.3.  $z = \operatorname{arctg} \frac{4y}{x^2 + y^2 - 4}$ .

3. Знайдіть сім'ю поверхонь рівня заданих функцій.

3.1.  $u = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ .

3.2.  $u = \operatorname{sign} \cos(x^2 + y^2 + z^2)$ .

3.3.  $u = (x + y)^2 + z^2$ .

4. Обчисліть границі або доведіть, що вони не існують.

4.1.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2}$ .

4.2.  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$ .

4.3.  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^4 + y^4}$ .

## 6.2. Частинні похідні. Перший диференціал функції декількох змінних

1°. Нехай  $\Delta_x f(x, y)$  – приріст, що набуває функція  $f(x, y)$ , якщо змінна  $x$  набуває приросту  $\Delta x$ , а  $y$  не змінюється. Границю

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f(x, y)}{\Delta x}$  (якщо вона існує) називають *частинною похідною*

функції  $f(x, y)$  по змінній  $x$  і позначають  $\frac{\partial f}{\partial x}$  або  $f'_x$ .

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f(x, y)}{\Delta y},$$

$$(\Delta_y f(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)).$$

Аналогічно визначаються перші похідні функції будь-якого числа змінних:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} f}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}.$$

2°. Обчислюють частинні похідні за тими ж правилами, що й похідні функції однієї змінної, за умови, що інші змінні фіксуються.

### Приклади

Обчисліть частинні похідні функцій.

1.  $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ .      2.  $z = \arctg \frac{x}{y}$ .      3.  $u = x^{y \cdot z}$ .

### Розв'язання

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \\ &= \frac{\cancel{(x + \sqrt{x^2 + y^2})}}{\sqrt{x^2 + y^2} \cancel{(x + \sqrt{x^2 + y^2})}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} (x + \sqrt{x^2 + y^2})}.$$

$$2. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{x^2 + y^2}.$$

3. Функція  $u = x^{y \cdot z}$  залежить від трьох змінних і має три перші частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot z \cdot x^{y \cdot z - 1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = z \cdot x^{y \cdot z} \cdot \ln x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = y \cdot x^{y \cdot z} \ln x.$$

3°. Якщо  $z = f(x, y)$  – рівняння поверхні, точка  $M_0(x_0, y_0)$  належить цій поверхні і існують  $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}$ , то  $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$ , де  $\alpha$  – кут нахилу дотичної до лінії перетину поверхні і площини  $y = y_0$  в точці  $M_0$  до вісі  $Ox$ . А  $\frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta$ , де  $\beta$  – кут нахилу дотичної до лінії перетину поверхні і площини  $x = x_0$  в точці  $M_0$  до вісі  $Oy$ .

4°. Повним приростом функції називається різниця

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

5°. Функція  $z = f(x, y)$  називається *диференційовною функцією в точці*  $(x, y)$ , якщо її приріст  $\Delta z$  може бути представлено у вигляді:

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + o(\Delta \rho) \quad \left( \Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right).$$

*Достатньою ознакою диференційовності є неперервність частинних похідних.*

6°. Головна частина повного приросту функції  $z = f(x, y)$ , лінійна відносно  $\Delta x$  і  $\Delta y$ , називається *повним диференціалом функції* і позначається  $dz$ .

Диференціали незалежних змінних  $x$  і  $y$  збігаються з їхніми приростами:

$$\Delta x = dx, \quad \Delta y = dy, \quad dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

7°. У просторі  $R^n$  для функції  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  повний диференціал є лінійною формою відносно  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ :

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

8°. При досить малих приростах аргументів повний приріст функції приблизно дорівнює її диференціалу

$$\Delta z \approx dz.$$

Цей факт використовується в наближених обчисленнях.

### Приклади

1. Знайдіть повний приріст функції  $z = x^2 - xy + y^2$  у точці  $M_0(1, 3)$ .
2. Знайдіть повний диференціал функції  $z = x + y \cdot e^{x/y}$ .
3. Замінюючи приріст функції її повним диференціалом, обчисліть наближено  $\sqrt{(1,02)^2 + (1,97)^3}$ .

### Розв'язання

1. За визначенням повного приросту функції в точці:

$$\Delta z(x_0, y_0) = z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0).$$

У нашому випадку  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 3$ :

$$\begin{aligned}\Delta z(1,3) &= (1+\Delta x)^2 - (1+\Delta x)(3+\Delta y) + (3+\Delta y)^2 - (1-1\cdot 3+3^2) = \\ &= 2\Delta x - 3\Delta y - \Delta y + 6\Delta y + (\Delta x)^2 - \Delta x \cdot \Delta y + (\Delta y)^2 = \\ &= \underbrace{-\Delta x + 5\Delta y}_{\text{перша частина}} + \underbrace{(\Delta x)^2 - \Delta x \Delta y + (\Delta y)^2}_{\text{друга}}\end{aligned}$$

перша частина  $\Delta z$  лінійна відносно  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ; друга – при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  є нескінченно малою більш високого порядку, ніж перша.

$$2. \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Знаходимо частинні похідні:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 1 + y \cdot e^{x/y} \cdot \frac{1}{y} = 1 + e^{x/y}, & \frac{\partial z}{\partial y} &= e^{x/y} \cdot (1 - x/y). \\ dz &= (1 + e^{x/y}) dx + e^{x/y} \cdot (1 - x/y) dy.\end{aligned}$$

3. Розглянемо функцію  $z = \sqrt{x^2 + y^3}$ .

При  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 2$  маємо:

$$z_0 = \sqrt{1+8} = 3, \quad \Delta x = 1,02 - 1 = 0,02, \quad \Delta y = 1,97 - 2 = -0,03.$$

Знаходимо повний диференціал функції в довільній точці:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^3}} \cdot \cancel{2}x \cdot \Delta x + \frac{1 \cdot 3y^2}{2\sqrt{x^2 + y^3}} \cdot \Delta y.$$

Обчислюємо повний диференціал у точці  $(1,2)$  при даних приростах:

$$dz(1,2) = \frac{1}{\sqrt{1+2^3}} \cdot 0,02 + \frac{3 \cdot 2^2 \cdot (-0,03)}{2\sqrt{1+2^3}} = \frac{0,02}{3} - 0,06 = -0,053.$$

Тоді

$$z(1,02; 1,97) = \sqrt{(1,02)^2 + (1,97)^2} \approx z_0 + dz = 2 - 0,053 = 1,947.$$

## Аудиторне заняття 6.2

1. Знайдіть всі перші частинні похідні зазначених функцій.

1.1.  $z = (x^4 + y^4 - 3x^2y^2)^3$ .      1.2.  $z = \frac{\cos x^2}{y}$ .

1.3.  $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ .      1.4.  $z = \arcsin \frac{x+2y}{\sqrt{1+x^2}}$ .

1.5.  $z = \frac{1}{\ln(x^2 - y^2)}$ .      1.6.  $u = (xy)^z$ .

2. Обчисліть  $u'_x + u'_y + u'_z$  в точці  $M(1,1,1)$ , якщо

$$u = \ln(1 + x + y^2 + z^3).$$

3. Обчисліть кут, який утворює з віссю  $Ox$  дотична до лінії

$$\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4}, \\ y = 4 \end{cases} \text{ в точці } M_0(2,4,5).$$

4. Знайдіть повний приріст функції  $z = x^3 + xy + y^2$  в точці  $M_0(1,1)$ . Виділіть лінійну відносно  $\Delta x$  і  $\Delta y$  частину.

5. Знайдіть повні диференціали функцій.

5.1.  $z = 3x^2 - 8xy + y^3 - 1$ .      5.2.  $z = 2^{2x^2 - 3y^2}$ .

6. Знайдіть повний диференціал функції

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ у точці } M_0(3,4,5).$$

7. Обчисліть наближено, заміняючи приріст функції повним диференціалом.

7.1.  $(0,98)^{3,03}$ .

7.2.  $(1,02)^3 \cdot (2,03)^2$ .



## Самостійна робота 6.2

1. Знайдіть частинні похідні зазначених функцій.

1.1.  $z = xy + \frac{x}{y}$ .

1.2.  $z = x + (y-1) \cdot \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$ .

1.3.  $z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

1.4.  $u = x \cdot z^{-x \cdot y}$ .

2. Обчисліть  $u'_x + u'_y + u'_z$  в точці  $M(0,1,2)$ , якщо

$$u = \frac{x + y + z}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

3. Обчисліть кут, який утворює з віссю  $Oy$  дотична до лінії

$$\begin{cases} z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \\ x = 1 \end{cases} \text{ в точці } M_0(1,1,\sqrt{3}).$$

4. Знайдіть повний приріст функції  $z = x^2 y$  в точці  $M_0(1,2)$ .

Виділіть лінійну відносно  $\Delta x$  і  $\Delta y$  частину.

5. Знайдіть повні диференціали функцій.

5.1.  $z = \lg(x^2 + y^2)$ .

5.2.  $z = \left( \operatorname{tg} \frac{y^2}{x} \right)$ .

6. Знайдіть повний диференціал функції  $u = e^{x \cdot y \cdot z}$  у точці  $M_0(1,1,1)$ .

7. Обчисліть наближено, замінюючи приріст функції повним диференціалом.

7.1.  $\sqrt{(4,05)^2 + (3,07)^2}$ .

7.2.  $(2,01)^{3,02}$ .

### 6.3. Похідні і диференціали складних функцій. Похідні функцій, заданих неявно

1°. Якщо функція  $f(u, v)$  диференційована в точці  $(u, v)$ , а функції  $u(x, y)$  і  $v(x, y)$  диференційовані в точці  $(x, y)$ , то складна функція  $f(u(x, y), v(x, y))$  диференційовна в точці  $(x, y)$ , і її частинні похідні знаходять за формулами:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

2°. Якщо  $z = f(x, y(x))$ , то повна похідна  $\frac{df}{dx}$  обчислюється за формулою:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

3°. Якщо функція залежить від змінних  $x, y$  безпосередньо і як складна функція  $z = f(x, y, u(x, y), v(x, y))$ , то варто розрізнити частинну похідну, що враховує безпосередню залежність від змінних  $x$  і  $y$   $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \text{ і } \frac{\partial f}{\partial y}\right)$  і частинну похідну, що враховує як безпосередню

залежність, так і залежність через функції  $u(x, y)$  і  $v(x, y)$   $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

#### Приклади

1. Знайдіть частинні похідні  $\frac{\partial f}{\partial x}$  і  $\frac{\partial z}{\partial y}$  функції  $z = u^2 \ln v$ , якщо  $u = y/x, v = x^2 + y^2$ .

2. Знайдіть похідну  $\frac{dz}{dx}$  функції  $z = \operatorname{tg}^2(x^2 - y^2)$ , якщо  $y = \sin \sqrt{x}$ .

## Розв'язання

1.  $z = u^2 \ln v$  – складна функція змінних  $x$  і  $y$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \cdot \ln v \cdot \frac{-y}{x^2} + \frac{u^2}{v} \cdot 2x = \\ &= -2 \frac{y^2}{x^3} \cdot \ln(x^2 + y^2) + \frac{y^2 \cdot 2x}{x^2(x^2 + y^2)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \cdot \ln v \cdot \frac{1}{x} + \frac{u^2}{v} \cdot 2y = \\ &= 2 \cdot \frac{y}{x^2} \cdot \ln(x^2 + y^2) + \frac{y^3 \cdot 2}{x^2(x^2 + y^2)}.\end{aligned}$$

2. Функція  $z = \operatorname{tg}^2(x^2 - y^2)$  залежить від змінної  $x$  безпосередньо і через функцію  $y(x)$

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2 \operatorname{tg}(x^2 - y^2) \cdot \frac{2x}{\cos^2(x^2 - y^2)} + \\ &+ 2 \operatorname{tg}(x^2 - y^2) \cdot \frac{-2y}{\cos^2(x^2 - y^2)} \cdot \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{4 \operatorname{tg}(x^2 - y^2)}{\cos^2(x^2 - y^2)} \left( x - \frac{y \cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \right).\end{aligned}$$

4°. Якщо функцію  $y(x)$  задано неявно рівнянням:  $F(x, y) = 0$  і  $F'_y(x, y) \neq 0$ , то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Якщо функцію двох змінних  $z(x, y)$  задано неявно рівнянням:

$F(x, y, z) = 0$  і  $F'_z(x, y, z) \neq 0$ , то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

## Приклади

1. Обчисліть похідну функції, заданої неявно рівнянням

$$\sin xy - x^2 - y^2 = 0,5.$$

2. Функцію  $z(x, y)$  задано неявно рівнянням

$$x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 2.$$

Знайдіть її частинні похідні в точці  $M_0(1, 1, 1)$ .

## Розв'язання

1.  $F(x, y) = \sin xy - x^2 - y^2 - 0,5 = 0$ ,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y \cos xy - 2x}{x \cos xy - 2y}.$$

2.  $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 2 = 0$ ,

$$F'_x = 3x^2 - yz, \quad F'_y = 3y^2 - xz, \quad F'_z = 3z^2 - xy.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3x^2 - yz}{3z^2 - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{3y^2 - xz}{3z^2 - xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = -\frac{2}{2} = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = -\frac{2}{2} = -1.$$

5°. Перший диференціал функції кількох змінних має властивість інваріантності форми, тобто диференціал функції

$$z = f(x(u, v), y(u, v)),$$

може бути обчислений за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

і в тому разі коли  $x$ ,  $y$  – незалежні змінні, і в тому разі коли вони є функціями других змінних.

### Приклад

Знайдіть повний диференціал функції  $z = x^y + y^x$ ,  $x = u^2 + v^2$ ,  $y = u^2 - v^2$  використовуючи властивості інваріантності форми.

### Розв'язання

Функція  $z = (x, y)$  – складна  $(x(u, v), y(u, v))$ . Її диференціал можна обчислити за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \text{ або}$$

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \left\| \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} + y^x \ln y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x + xy^{x-1} \\ dx = 2u du + 2v dv, \quad dy = 2u du - 2v dv \end{array} \right\| = \\ &= (yx^{y-1} + y^x \ln y)(2u du + 2v dv) + (x^y \ln x + xy^{x-1})(2u du - 2v dv) = \\ &= 2u(yx^{y-1} + y^x \ln y + x^y \ln x + xy^{x-1})du + 2v(yx^{y-1} + y^x \ln y - x^y \ln x - xy^{x-1})dv. \end{aligned}$$

### Аудиторне заняття 6.3

1. Знайдіть частинні похідні функцій.

1.1.  $z = \sqrt[3]{u^3 + v^3}$ , де  $u = x \sin y$ ,  $v = y \cos x$ .

1.2.  $z = \ln(u + v^2 - t^3)$ , де  $u = xy$ ,  $v = x/y$ ,  $t = e^{x \cdot y}$ .

2. Знайдіть  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = \sqrt{\cos(x^2 - y^2)}$ ,  $y = \ln x$ .

3. Знайдіть похідну функції  $y(x)$ , заданої неявно:

$$\operatorname{tg} xy - x^2 - y^2 = 5.$$

4. Знайдіть частинні похідні і диференціал функції  $z(x, y)$ , заданої неявно:  $xyz - \sin^2 xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 7$ .

5. Обчисліть значення частинних похідних функції, заданої неявно рівнянням  $x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz + 1 = 0$ , у точці  $M_0(1, 1, 1)$ .

6. Знайдіть повні диференціали функцій.

6.1.  $z = f(x, y)$ ,  $x = u \cdot \sin v$ ,  $y = v^2$ .

6.2.  $z = x \cdot \sin y + y \cdot \cos x$ ,  $x = \frac{u}{v}$ ,  $y = u \cdot v$ .

7. Виразіть  $dz$  через  $dx$ ,  $dy$ ,  $u$ ,  $v$ , якщо

$$z = u \cdot v, \quad x = e^u \cdot \cos v, \quad y = e^u \cdot \sin v.$$

### Самостійна робота 6.3

1. Знайдіть частинні похідні наступних функцій.

1.1.  $u = xyz$ , де  $x = t^2 + 1$ ,  $y = \ln t$ ,  $z = \operatorname{tg} t$ .

1.2.  $z = u^2 \ln v$ , де  $u = x/y$ ,  $v = x^2 + y^2$ .

2. Знайдіть  $\frac{dz}{dx}$  і  $\frac{\partial z}{\partial x}$ , якщо  $z = \ln(e^x + e^y)$ ,  $y = \frac{1}{3}x^3 + x$ .

3. Знайдіть похідну функції  $y(x)$ , заданої неявно:

$$x^2 e^{2y} - y^2 \cdot e^{2x} = 0.$$

4. Знайдіть частинні похідні і диференціал функції  $z(x, y)$ ,

заданої неявно:  $z \cdot \ln(x + y) - xy/z = 0$ .

5. Обчисліть значення частинних похідних функції, заданої

неявно рівнянням  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  у точці  $M_0(a, 0, 0)$ .

6. Знайдіть повні диференціали функцій.

6.1.  $z = f(x, y)$ ,  $x = u^2 + v^2$ ,  $y = \frac{u}{v}$ .

6.2.  $z = e^{x \cdot y} \cdot \ln(x + y)$ ,  $x = t^3$ ,  $y = 1 - t^3$ .

## 6.4. Похідні і диференціали вищих порядків

1°. Якщо перші частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial z}{\partial y}$  функції  $z = f(x, y)$ , у свою чергу, є диференційовними функціями, то можна визначити частинні похідні другого порядку:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xx}, & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yy}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xy}, & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yx}.\end{aligned}$$

Аналогічно визначаються похідні більш високих порядків.

2°. Частинні похідні  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  і  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ,

називаються *змішаними похідними*. У тих точках, де змішані похідні неперервні, вони є рівними. Це твердження справедливо і для похідних більш високих порядків:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^{(k)} \partial y^{m-k}} = \frac{\partial^m f}{\partial y^{m-k} \partial x^k}.$$

3°. У просторі  $R^n$  змішані похідні  $m$  разів диференційовної функції є рівними, якщо вони неперервні:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_i^k \partial x_j^{m-k}} = \frac{\partial^m f}{\partial x_j^{m-k} \partial x_i^k}.$$

### Приклади

1. Перевірте, що змішані похідні другого порядку для функції  $z = e^{x^2+2y^2}$  є рівними.

2. Доведіть, що функція  $z = \arctg(y/x)$  задовольняє рівнянню

Лапласа  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ .

## Розв'язання

1. Обчислимо спочатку перші похідні функції  $z = e^{x^2+2y^2}$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+2y^2} \cdot 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+2y^2} \cdot 4y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( e^{x^2+2y^2} \cdot 2x \right) = 2x \frac{\partial}{\partial y} \left( e^{x^2+2y^2} \right) = 8xy \cdot e^{x^2+2y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{x^2+2y^2} \cdot 4y \right) = 4y \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{x^2+2y^2} \right) = 8xy \cdot e^{x^2+2y^2}.$$

Очевидно, що  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

2. 
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

4°. Нехай функція  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  диференційовна в точці  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , тоді

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Якщо похідні  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  – диференційовні, то може бути визначено диференціал другого порядку

$$d^2 f = d(df) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) dx_n.$$



Аналогічно визначаються диференціали більш високих порядків:

$$d^m f = d(d^{m-1} f).$$

5°. Якщо  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – незалежні змінні, то другий диференціал  $d^2 f$  являє собою квадратичну форму відносно  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ :

$$d^2 f = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j,$$

або в операторному вигляді:

$$d^2 f = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 f.$$

6°. Для функції двох змінних  $z = f(x, y)$  у випадку, якщо  $x, y$  – незалежні змінні,  $d^2 z$  має вигляд:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (dy)^2 = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f.$$

7°. Другий диференціал і всі наступні не мають властивостей інваріантності форми. Якщо  $x, y$  – функції інших змінних  $u$  і  $v$ , то

$$d^2 f = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f + \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y.$$

### Приклади

1. Знайдіть  $d^2 z$ , якщо  $z = e^{x^2 y}$ .
2. Знайдіть  $d^2 z$ , якщо  $z = u^v$ , де  $u = \frac{x}{y}$ ,  $v = x \cdot y$ .
3. Знайдіть  $d^2 f(0, 0, 0)$ , якщо

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz.$$

## Розв'язання

1. Оскільки  $x$ ,  $y$  – незалежні змінні, то

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Обчислимо частинні похідні другого порядку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2xy \cdot e^{x^2 y}, & \frac{\partial z}{\partial y} &= x^2 e^{x^2 y}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2y(e^{x^2 y} + 2x^2 y e^{x^2 y}) = 2ye^{x^2 y}(1 + 2x^2 y), & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= x^4 e^{x^2 y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 2x \cdot e^{x^2 y} + 2x^3 y e^{x^2 y} = 2xe^{x^2 y}(1 + x^2 y). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} d^2 z &= 2ye^{x^2 y}(1 + 2x^2 y) dx^2 + 4x \cdot e^{x^2 y}(1 + x^2 y) dx dy + x^4 e^{x^2 y} dy^2 = \\ &= e^{x^2 y} \left( (4x^2 y^2 + 2y) dx^2 + 4x(1 + x^2 y) dx dy + x^4 dy^2 \right). \end{aligned}$$

2. Функція  $z = u^v$ ,  $u = x^2 + y^2$ ,  $v = xy$  – складна.

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial z}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial z}{\partial v} d^2 v.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= vu^{v-1}, & \frac{\partial z}{\partial v} &= u^v \cdot \ln u, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= v(v-1)u^{v-2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} &= u^v \ln^2 u, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} &= vu^{v-1} \ln u + u^{v-1} = u^{v-1}(1 + v \ln u); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 z &= v(v-1)u^{v-2} (du)^2 + 2 \cdot u^{v-1} (1 + v \ln u) du dv + u^v \ln^2 u (dv)^2 + \\ &+ vu^{v-1} d^2 u + u^v \ln u d^2 v. \end{aligned}$$

Тут

$$du = 2x dx + 2y dy, \quad dv = x dy + y dx,$$

$$d^2u = 2(dx)^2 + 2(dy)^2, \quad d^2v = dx dy.$$

3. Дана функція залежить від трьох вільних змінних

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz.$$

$$d^2f = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 f.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y + 4z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 2x + 2z,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 6z + 4x + 2y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6.$$

Всі похідні другого порядку не залежать від значень  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

$$d^2f(0, 0, 0) = 2dx^2 + 4dy^2 + 6dz^2 - 4dx dy + 8dx dz + 4dy dz.$$

8°. Нехай функцію  $z(x, y)$  задано неявно рівнянням:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

При обчисленні других похідних варто враховувати, що перші похідні залежать від  $x$  і  $y$  безпосередньо і через  $z$ .

### Приклад

Знайдіть  $dz$  і  $d^2z$ , якщо  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

### Розв'язання

Функцію  $z(x, y)$  задано неявно рівнянням

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x \cdot c^2}{a^2 \cdot 2z} = -\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x}{z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{z},$$

$$dz = -\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x}{z} dx - \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{z} dy = -\frac{c^2}{z} \left( \frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} \right).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{z} \right) = -\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{\left( z - x \frac{\partial z}{\partial x} \right)}{z^2} = -\frac{c^2}{a^2 z^2} \cdot \left( z + \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{z} \right) = \\ &= -\frac{c^2 (a^2 z^2 + c^2 x^2)}{a^4 z^3}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{c^2 (b^2 z^2 + c^2 y^2)}{b^4 \cdot z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = +\frac{c^2}{a^2} \cdot x \cdot \frac{\partial z}{z^2} = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3},$$

$$d^2z = -\frac{c^2}{z^3} \left( \frac{a^2 z^2 + c^2 x^2}{a^4} dx^2 + \frac{2c^2 xy}{a^2 b^2} dx dy + \frac{b^2 z^2 + c^2 y^2}{b^2} dy^2 \right).$$

#### Аудиторне заняття 6.4

1. Обчисліть частинні похідні другого порядку функцій.

1.1.  $z = \sqrt[3]{(x^2 + 2y^2)^2}$ .                      1.2.  $z = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$ .

1.3.  $z = (\cos x^2)/y$ .                      1.4.  $z = 2^{x^2-2y^2}$ .

2. Доведіть, що функція  $z = e^x(x \cos y - y \sin y)$  задовольняє рівнянню Лапласа  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ .

3. Доведіть, що функція  $z = e^{-\cos(x+2y)}$  задовольняє рівнянню  $4 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

4. Знайдіть диференціал другого порядку функції

$$z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

5. Знайдіть  $dz$  і  $d^2z$  функції  $z(x, y)$ , заданої неявно рівнянням  $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 12$ .

#### Самостійна робота 6.4

1. Обчисліть частинні похідні другого порядку функцій.

1.1.  $z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3$ .                      1.2.  $z = y^x$ .

1.3.  $z = \ln(x^2 + y^2)$ .                      1.4.  $u = (y/x)^z$ .

2. Доведіть, що функція  $u$  задовольняє рівнянню Лапласа.

$$u = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

3. Доведіть, що функція  $u = A \sin \lambda x \cos a \lambda t$  задовольняє рівнянню коливань струни  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

4. Знайдіть диференціал другого порядку функції  $z = e^y \cdot \sin x$ .

5. Знайдіть  $dz$  і  $d^2z$  функції  $z(x, y)$ , заданої неявно рівнянням  $yz = \operatorname{arctg} xz$ .

## Зразок контрольної роботи

1. Знайдіть область визначення функції

$$z = \ln(9 - x^2 - y^2) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 5}}.$$

2. Обчисліть  $\frac{\partial z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial z}{\partial y}$  функції

$$z = \sqrt{\sin(u^2 + v^3)}, \quad u = x + y, \quad v = \frac{x}{y}.$$

3. Обчисліть  $dz(1,1)$ , якщо  $z = \ln(x + xy - y^2)$ .

4. Доведіть, що функція  $u = u(x, y, z)$  задовольняє рівнянню Лапласа.

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

5. Обчисліть наближено

$$\operatorname{arctg}\left((1,02)^3 \cdot (0,97)^2\right).$$

6. Знайдіть  $dz$  і  $d^2z$  функції  $z(x, y)$ , заданої неявно:

$$2x^2 - 3y^2 + 4z^2 - 12 = 0.$$

## 6.5. Геометричні застосування. Задача про знаходження найбільших і найменших значень

1°. Нехай просторову криву задано параметрично

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

де  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  – диференційовні функції.

У тих точках  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , де  $(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2 + (z'(t_0))^2 \neq 0$ , крива має дотичну. Рівняння дотичної:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

2°. *Нормальною площиною до кривої в точці  $M_0$*  називається площина, що проходить через цю точку перпендикулярно дотичній. Її рівняння має вигляд:

$$x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

3°. Нехай поверхню задано рівнянням  $F(x, y, z) = 0$ ,  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  – точка поверхні, тоді рівняння дотичної площини має вигляд:

$$F'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

4°. Пряма, що проходить через точку  $M_0$  перпендикулярно дотичній площині, називається *нормаллю до поверхні*.

Рівняння нормалі:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

5°. Якщо лінія задана як перетин двох поверхонь

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0, \end{cases} \text{ то напрямок дотичної до неї в точці } M_0, \vec{\tau} \text{ є вектор-}$$

ним добутком нормалей до поверхонь  $F(x, y, z) = 0$  і  $\Phi(x, y, z) = 0$  в цій точці, тобто

$$\vec{\tau} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2],$$

де 
$$\vec{n}_1 = \{F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)\},$$

$$\vec{n}_2 = \{\Phi'_x(M_0), \Phi'_y(M_0), \Phi'_z(M_0)\}.$$

### Приклади

1. На лінії  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = e^t$  знайдіть точку, дотична в якій паралельна площині  $\sqrt{3}x + y - 4 = 0$ . Напишіть рівняння дотичної.

2. Для поверхні  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  знайдіть рівняння дотичної площини, паралельної площині  $x + 4y + 6z = 0$ .

3. Доведіть, що дотична площина до поверхні  $xuz = a^3$  в будь-якій точці утворює із координатними площинами тетраедр постійного об'єму.

4. Крива  $L$  є лінією перетину двох поверхонь;  $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$  і  $x + y - 2z = 0$ . Знайдіть рівняння нормальної площини до кривої  $L$  в точці  $M_0(1, 1, 1)$ .

### Розв'язання

1. За умовою дотична паралельна площині, а отже, вектор дотичної  $\vec{\tau} = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$  перпендикулярний нормальному вектору площини  $\vec{n} = \{\sqrt{3}, 1, 0\}$ .

$$(\vec{\tau}, \vec{n}) = 0,$$

$$-\sin t \cdot \sqrt{3} + \cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}.$$



Шукана точка  $M_0$  має координати:

$$x_0 = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_0 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad z_0 = e^{\frac{\pi}{6}},$$

а рівняння дотичної:

$$\frac{x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{y - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{z - e^{\frac{\pi}{6}}}{e^{\frac{\pi}{6}}}.$$

2. Рівняння шуканої дотичної площини

$$F'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21 = 0.$$

$$F'_x = 2x,$$

$$F'_y = 4y,$$

$$F'_z = 6z.$$

Оскільки дотична площина паралельна площині  $x + 4y + 6z = 0$ , то координати їхніх нормальних векторів є пропорційними:

$$\frac{F'_x(M_0)}{1} = \frac{F'_y(M_0)}{4} = \frac{F'_z(M_0)}{6};$$

$$\frac{2x_0}{1} = \frac{4y_0}{4} = \frac{6z_0}{6} \Rightarrow 2x_0 = z_0 \Rightarrow$$

$$x_0 = \frac{z_0}{2}, \quad y_0 = z_0.$$

Підставляючи ці співвідношення в рівняння поверхні, одержимо:

$$\frac{z_0^2}{4} + 2z_0^2 + 3z_0^2 = 21 \Rightarrow z_0^2 \left( \frac{1}{4} + 5 \right) = 21 \Rightarrow z_0^2 = 4 \Rightarrow z_0 = \pm 2.$$

Таким чином, є дві точки, що задовольняють умові:  $M_1(1, 2, 2)$ ,  $M_2(-1, -2, -2)$ , а рівняння дотичних площин мають вигляд:

$$(x-1)+4(y-2)+6(z-2)=0 \Rightarrow x+4y+6z-21=0,$$

$$(x+1)+4(y+2)+6(z+2)=0 \Rightarrow x+4y+6z+21=0.$$

3. Нехай  $x_0, y_0, z_0$  – довільна точка поверхні  $x \cdot y \cdot z = a^3$ .

$$F(x, y, z) = xyz - a^3 = 0.$$

$$F'_x = yz,$$

$$F'_y = xz,$$

$$F'_z = xy.$$

Рівняння дотичної площини в точці  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  має вигляд:

$$y_0 z_0 (x - x_0) + x_0 z_0 (y - y_0) + x_0 y_0 (z - z_0) = 0,$$

$$y_0 z_0 x + x_0 z_0 y + x_0 y_0 z = 3x_0 y_0 z_0,$$

$$\frac{x}{3x_0} + \frac{y}{3y_0} + \frac{z}{3z_0} = 1.$$

Відрізки, що відтинаються дотичною площиною на осях координат, відповідно дорівнюють  $3x_0, 3y_0, 3z_0$ . Об'єм тетраедра дорівнює

$$\frac{1}{6} \cdot 3x_0 \cdot 3y_0 \cdot 3z_0 = \frac{27}{6} \cdot x_0 \cdot y_0 \cdot z_0 = \frac{9}{6} \cdot a^3 = \frac{3}{2} a^3.$$

4. Точка  $M_0(1,1,1)$  належить обом поверхням. Обчислимо нормалі в цій точці до поверхонь  $F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 6 = 0$  і  $\Phi(x, y, z) = x + y - 2z = 0$ .

$$\vec{n}_1(M_0) = \{4x, 6y, 2z\}|_{M_0} = \{4, 6, 2\},$$

$$\vec{n}_2(M_0) = \{1, 1, -2\}.$$

Напрямок дотичної  $\vec{\tau}$  до кривої  $L$  в точці  $M_0$  є векторним добутком  $\vec{n}_1$  і  $\vec{n}_2$ :

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \{-14, 10, -2\}.$$

Нормальна площина перпендикулярна  $\vec{r} = \{-14, 10, -2\}$  і проходить через точку  $M_0(1, 1, 1)$ . Її рівняння має вигляд:

$$\begin{aligned} -14(x-1) + 10(y-1) - 2(z-1) &= 0, \\ -14x + 10y - 2z + 6 &= 0 \Rightarrow 7x - 5y + z - 3 = 0. \end{aligned}$$

5°. Найбільше і найменше значення функції в області.

Функція  $f(x, y)$ , диференційовна в обмеженій замкненій області, досягає свого найбільшого (найменшого) значення або в стаціонарній точці, або на межі області.

Для розв'язання задачі про найбільше (найменше) значення потрібно:

1) знайти стаціонарні точки функції  $f(x, y)$ , що потрапляють усередину області.

Для цього потрібно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0; \end{cases}$$

2) вибрати ті стаціонарні точки, які потрапили усередину області, обчислити значення функції в цих точках;

3) знайти найбільше і найменше значення функції на межі області. Ця задача зводиться до відшукування найбільшого і найменшого значення функції однієї змінної;

4) порівнюючи всі отримані значення, знайти найбільше і найменше з них.

### Приклад

Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

в області, обмеженій осями координат і прямою  $x + y + 3 = 0$ .

## Розв'язання

1) зазначена область – трикутник  $AOB$  (див. рис. 4). Відповідно до наведеної схеми розв'язання:

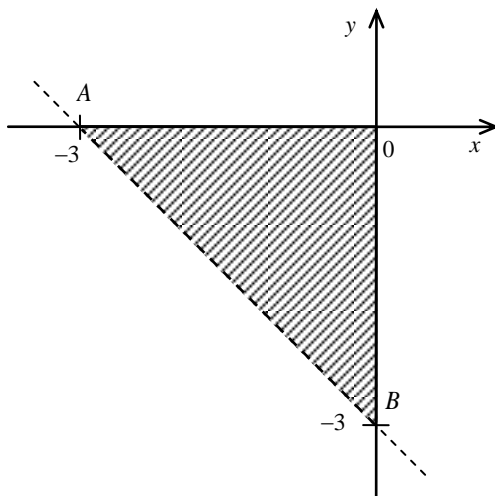


Рисунок 4

знаходимо стаціонарні точки функції:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0, \end{array} \right\} \Rightarrow x = -1, y = -1;$$

2) точка  $M_1(-1, -1)$  є внутрішньою точкою області;

$$z(M_1) = +1;$$

3) досліджуємо функцію на межі області:

$$OB: x = 0, z = y^2 + y.$$

Задача зводиться до відшукування найбільшого і найменшого значень функції однієї змінної  $z = y^2 + y$ ,  $y \in [-3, 0]$ .

Знаходимо

$$z'(y) = 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}.$$

Точка  $M_2\left(0, -\frac{1}{2}\right)$  – стаціонарна точка цієї функції,  $z(M_2) = -\frac{1}{4}$ .

У граничних точках  $M_3(0, 0)$  і  $M_4(0, -3)$  значення функції дорівнюють  $z(M_3) = 0$ ,  $z(M_4) = 6$ .

Аналогічно на прямій  $AO$ :

$$y = 0, x \in [-3, 0], z(x) = x^2 + x,$$

$$z'_x = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Точка  $M_5\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$  – стаціонарна, належить області –  $z(M_5) = -\frac{1}{4}$ .

У граничній точці  $M_6(-3, 0)$ ,  $z(M_6) = 6$ .

На відріжку  $AB$  прямої  $x + y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3 - x$ :

$$z(x) = 3x^2 + 9x + 6,$$

$$z'(x) = 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

$M_7\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$  – стаціонарна точка,  $z(M_7) = -\frac{3}{4}$ .

На кінцях відрізка  $AB$  значення функції вже обчислено;

4) вибираючи найменше і найбільше з всіх отриманих значень, знаходимо:

$$\text{Sup } z = z(A) = z(B) = 6,$$

$$\text{Inf } z = z(M_7) = -\frac{3}{4}.$$

### Аудиторне заняття 6.5

1. У якій точці дотична площина до поверхні  $z = 4 - x^2 - y^2$  паралельна площині  $2x + 2y + z = 0$ ? Напишіть рівняння цієї площини і нормалі до поверхні.

2. На лінії  $x = t^4/4$ ,  $y = t^3/3$ ,  $z = t^2/2$ , знайдіть точки, у яких дотична паралельна площині  $x + 3y + 2z - 10 = 0$ . Напишіть рівняння дотичної і нормальної площини в одній з точок.

3. Доведіть, що поверхні конуса  $z^2 = x^2 + y^2$  і сфери  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2$  дотикаються одна до одної в точці  $(0, 1, 1)$ .

4. Знайдіть найбільше і найменше значення функції  $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5 = 0$  в області, обмеженій прямими  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 3$ .

5. Знайдіть найбільше і найменше значення функції  $z = x^2y(4 - x - y)$  в області, обмеженій лініями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 6$ .

### Самостійна робота 6.5

1. На поверхні  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$  знайдіть точки, у яких дотичні площини паралельні координатним площинам.

2. Складіть рівняння дотичної прямої і нормальної площини до лінії  $x = t^2$ ,  $y = 1 - t$ ,  $z = t^3$  у точці  $M(1, 0, 1)$ .

3. Покажіть, що поверхні

$$x + 2y - \ln z + 4 = 0 \text{ і } x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$$

дотикаються одна до одної в точці  $M_0(2, -3, 1)$ .

4. Знайдіть найбільше і найменше значення функції.

4.1.  $z = x - 2y + 5$  в області  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

4.2.  $z = xy$  в області  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

## 6.6. Локальний екстремум функції декількох змінних

1°. Точка  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  називається *точкою локального максимуму функції*  $f(x_1, \dots, x_n)$ , якщо знайдеться такий  $\varepsilon$ -окіл точки  $M_0 - B(M_0, \varepsilon)$ , що для всіх точок цього окілу  $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$  виконується нерівність:  $f(x) \leq f(M_0)$  і *точкою локального мінімуму*, якщо  $f(x) \geq f(M_0)$ .

Максимуми і мінімуми функції називаються її *екстремумами*.

2°. **Теорема (необхідна ознака екстремуму).** Якщо функція  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  диференційовна в точці  $M_0$  і має в цій точці екстремум, то всі її частинні похідні першого порядку в точці  $M_0$  дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n} = 0, \quad \dots$$

3°. Точки екстремуму функції належать множині критичних точок, що складається зі стаціонарних (у яких всі похідні першого порядку дорівнюють нулю) і точок, у яких хоча б одна з похідних першого порядку не існує.

4°. **Теорема (достатня ознака екстремуму двічі диференційовної функції).** Нехай  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  двічі диференційовна в точці  $M_0$  і точка  $M_0$  – її стаціонарна точка. Якщо другий диференціал функції  $d^2 f(M_0)$  є додатньо визначеною квадратичною формою відносно  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ , то  $M_0$  – точка мінімуму, якщо  $d^2 f(M_0)$  – від'ємно визначена форма, то  $M_0$  – точка максимуму, якщо  $d^2 f(M_0)$  – знакозмінна квадратична форма, то в точці  $M_0$  екстремуму немає.

Для того, щоб визначити, чи є квадратична форма  $\sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k$

знаковизначеною, використовують критерій Сильвестра, який полягає в наступному:

– якщо всі головні мінори матриці  $(a_{ik})_{i,k=1}^n$  є додатними, то

форма  $\sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k$  додатньо визначена;

– якщо знаки головних мінорів матриці  $(a_{ik})_{i,k=1}^n$  перемі-  
жуються, починаючи зі знака «-», то форма  $\sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k$  від'ємно ви-  
значена.

5°. Нехай  $z = f(x, y)$  – функція двох змінних.  $M_0(x_0, y_0)$  –  
стаціонарна точка.

Позначимо

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0), \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0), \quad a_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0).$$

Тоді:

1) якщо  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 > 0$ , то в точці  $M_0$  –

екстремум.

Причому, максимум, якщо  $a_{11} < 0$ , і мінімум, якщо  $a_{11} > 0$ ;

2) якщо  $\Delta < 0$ , то в точці  $M_0$  екстремуму немає;

3) якщо  $\Delta = 0$ , то точка  $M_0$  може бути точкою екстремуму, а може не бути. У цьому випадку теорема відповіді не дає.

### Приклади

1. Дослідіть на екстремум функцію  $z = x^3 + y^3 - 3xy$ .

2. Дослідіть на екстремум функцію  $z(x, y)$ , задану неявно:

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0.$$



## Розв'язання

1. 1) знаходимо стаціонарні точки функції. Для цього варто знайти перші похідні і прирівняти їх до нуля:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0; \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему рівнянь, знаходимо 2 стаціонарні точки:  $M_1(0,0)$  і  $M_2(1,1)$ ;

2) для того, щоб вирішити питання про те, чи є знайдені стаціонарні точки точками екстремуму, треба знайти всі другі похідні

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

і обчислити їхні значення в стаціонарних точках:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y;$$

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_1) = 0, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_1) = -3, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_1) = 0.$$

$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0 - 9 < 0 \Rightarrow$  у точці  $M_1$  – екстремуму немає.

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_2) = 6, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_2) = -3, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_2) = 6.$$

$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0 \Rightarrow$  у точці  $M_2$  функція досягає екстремуму і, тому що  $a_{11} = 6 > 0$ , це мінімум, причому,

$$z_{\min} = z(1,1) = -1.$$

2. Для визначення критичних точок обчислимо перші похідні функції

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{10x-2y-2z}{10z-2x-2y} = \frac{-5x+y+z}{5z-x-y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{10y-2x-2z}{10z-2x-2y} = \frac{x-5y+z}{5z-x-y}.$$

У точках, де  $5z-x-y \neq 0$ , перші похідні існують, і стаціонарні точки визначаються із системи рівнянь:

$$\begin{cases} -5x + y + z = 0, \\ x - 5y + z = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Зверніть увагу на те, що система, щодо трьох змінних, складається тільки із двох рівнянь. До цієї системи слід приєднати рівняння, що задає функцію  $z(x, y)$ :

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0. \quad (2)$$

Із системи (1) легко виражаються  $x$  і  $z$  через  $y$ :  $x = y$ ,  $z = 4y$ .

Підставляючи ці співвідношення в (2), одержуємо:

$$5y^2 + 80y^2 + 5y^2 - 2y^2 - 8y^2 - 8y^2 - 72 = 0,$$

$$72y^2 = 72, \Rightarrow y = \pm 1.$$

Таким чином, точки  $M_1(1, 1, 4)$  і  $M_2(-1, -1, -4)$  – стаціонарні точки функції.

Обчислюючи другі похідні  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ , варто пам'ятати, що змінна  $z$  є функцією  $x$  і  $y$ .

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-5x+y+z}{5z-x-y} \right) =$$

$$= \frac{\left(-5 + \frac{\partial z}{\partial x}\right)(5z - x - y) - \left(5 \frac{\partial z}{\partial x} - 1\right)(-5x + y + z)}{(5z - x - y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right)(5z - x - y) - \left(5 \frac{\partial z}{\partial x} - 1\right)(x - 5y + z)}{(5z - x - y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\left(-5 + \frac{\partial z}{\partial y}\right)(5z - x - y) - \left(5 \frac{\partial z}{\partial y} - 1\right)(x - 5y + z)}{(5z - x - y)^2}.$$

Помітьте, що підставляти в ці формули  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  не потрібно, оскільки похідні другого порядку потрібні тільки в стаціонарних точках, де  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$  і  $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_1) = \frac{(-5+0)(5 \cdot 4 - 1 - 1) + 1 \cdot 0}{(18)^2} = -\frac{5}{18},$$

$$a_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_1) = \frac{1 \cdot 18 + 1 \cdot 0}{18^2} = \frac{1}{18},$$

$$a_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_1) = \frac{-5 \cdot 18 + 1 \cdot 0}{18^2} = -\frac{5}{18}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} \end{vmatrix} = \frac{24}{18^2} > 0 \Rightarrow M_1 - \text{точка екстремуму},$$

$$a_{11} < 0 \Rightarrow M_1 - \text{точка максимуму, причому, } z_{\max} = 4.$$

У точці  $M_2$

$$a_{11} = \frac{(-5+0)(-5 \cdot 4 + 1 + 1) + 1 \cdot 0}{18^2} = \frac{5}{18},$$

$$a_{12} = -\frac{1}{18}, \quad a_{22} = \frac{5}{18};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} \end{vmatrix} = \frac{24}{18^2} > 0 \Rightarrow M_2 - \text{точка екстремуму,}$$

$$a_{11} > 0 \Rightarrow M_2 - \text{точка мінімуму, причому, } z_{\min} = -4.$$

б°. Якщо  $u = f(x, y, z)$  – двічі диференційовна функція трьох змінних і  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  – стаціонарна точка, то для перевірки достатньої ознаки екстремума варто обчислити всі другі похідні функції в точці  $M_0$ :

$$a_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0), \quad a_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(M_0), \quad a_{13} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}(M_0),$$

$$a_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0), \quad a_{23} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}(M_0), \quad a_{33} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(M_0).$$

і скласти матрицю  $(a_{ik})_{i,k=1}^3$ . Якщо всі головні мінори матриці  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  додатні, то в точці  $M_0$  – мінімум.

Якщо  $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$ , у точці  $M_0$  – максимум.

### Приклад

Дослідіть на екстремум функцію

$$u = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{2}{z}, \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

### Розв'язання

1) знаходимо стаціонарні точки функції:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{y} - \frac{2}{z^2}.$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{y}{x^2} = 0, \\ \frac{1}{x} - \frac{z}{y^2} = 0, \\ \frac{1}{y} - \frac{2}{z^2} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ \frac{1}{x} - \frac{z}{x^4} = 0 \Rightarrow z = x^3, \Rightarrow \\ \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^6} = 0 \Rightarrow x^4 = 2, \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{2}.$$

За умовою задачі  $x > 0$ , тому:

$$x_0 = \sqrt[4]{2}, \quad y_0 = \sqrt{2}, \quad z_0 = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2};$$

$$2) \quad \begin{aligned} u''_{xx} &= \frac{2y}{x^3}, & u''_{xy} &= -\frac{1}{x^2}, & u''_{xz} &= 0, \\ u''_{yy} &= \frac{2z}{y^3}, & u''_{yz} &= -\frac{1}{y^2}, & u''_{zz} &= \frac{4}{z^3}. \end{aligned}$$

$$(a_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt[4]{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{pmatrix};$$

$$\Delta_1 = a_{11} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} > 0,$$

$$\Delta_2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} > 0,$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} > 0.$$

Точка  $M_0(\sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2})$  – точка мінімуму,

Причому,

$$z_{\min} = \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2} = 4\sqrt[4]{2}.$$

### Аудиторне заняття 6.6

1. Дослідіть на локальний екстремум функції двох змінних.

1.1.  $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$ .                      1.2.  $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ .

2. Дослідіть на екстремум функцію, задану неявно:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z - 7 = 0.$$

3. Дослідіть на локальний екстремум функцію трьох змінних

$$u = z + \frac{y}{z} + \frac{x}{y} + \frac{4}{x}, \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

### Самостійна робота 6.6

1. Дослідіть на локальний екстремум функції двох змінних.

1.1.  $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$ .

1.2.  $z = xy^2 \cdot (1 - x - y)$ ,  $(x > 0, y > 0)$ .

2. Дослідіть на екстремум функцію, задану неявно:

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8 = 0.$$

3. Дослідіть на локальний екстремум функцію трьох змінних

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z.$$

## 6.7. Умовний екстремум

Нехай функція  $n$  змінних  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  розглядається не у всій області визначення, а тільки на множині  $E$ , координати точок якої задовольняють деяким умовам (рівнянням зв'язку):

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

.....

$$\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$(m < n).$$

1°. Точка  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in E$  називається *точкою умовного максимуму функції*  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , якщо існує такий  $\varepsilon$ -окіл точки  $M_0$ , що для всіх точок  $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$  цього околу, належних  $E$ , виконується нерівність  $f(M_0) \geq f(x)$ , і називається *точкою умовного мінімуму*, якщо  $f(M_0) \leq f(x)$ .

2°. Найпростіша задача на умовний екстремум – задача для функції двох змінних  $f(x, y)$  при одному рівнянні зв'язку  $\varphi(x, y) = 0$ .

### Методи розв'язання задач на умовний екстремум

1°. *Метод виключення змінних* полягає в тому, що з умов зв'язку  $t$  змінних виражаються через інші  $(n - t)$ , і задача на умовний екстремум функції  $n$  змінних зводиться до задачі на екстремум для функції  $(n - t)$  змінних.

Метод застосовують для задач невеликої розмірності.

2°. Метод невизначених множників Лагранжа дозволяє уникнути труднощів, пов'язаних з вираженням одних змінних через інші.

Метод невизначених множників Лагранжа полягає в наступному:

1) складають функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1 \dots \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x_1 \dots x_n);$$

2) стаціонарні точки функції Лагранжа і коефіцієнти  $\lambda_i$  знаходять із системи  $(n + m)$  рівнянь

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Стаціонарні точки функції Лагранжа збігаються зі стаціонарними точками функції  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  із множини  $E$ ;

3) для встановлення, чи є стаціонарні точки точками екстремуму, у кожній стаціонарній точці обчислюють другий диференціал функції Лагранжа:

$$d^2L(M_0) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} \partial x_i \partial x_j.$$

4°. При встановленні знака  $d^2L(M_0)$  варто пам'ятати, що  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  зв'язані рівняннями

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(M_0) dx_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}(M_0) dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}(M_0) dx_n = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

### Приклад

Дослідіть на екстремум функцію

$$z = xy \quad \text{за умови, що } x^2 + y^2 = 4.$$

### Розв'язання

Вирішимо поставлену задачу методом невизначених множників Лагранжа.



1) складемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 4);$$

2) система, з якої визначається множник  $\lambda$  і критичні точки, має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 2\lambda x = 0, \\ x + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 4, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+y)(1+2\lambda) = 0, \\ (x-y)(1-2\lambda) = 0, \\ x^2 + y^2 = 4, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x = -y, & \Rightarrow 2x^2 = 4, \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}, y = \mp\sqrt{2}; \\ x = y, & \Rightarrow 2x^2 = 4, \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}, y = \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Система визначає чотири стаціонарні точки:

$$M_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \quad M_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2}),$$

$$M_3(\sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad M_4(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

Точкам  $M_1, M_2$  відповідає  $\lambda = \frac{1}{2}$ ; точкам  $M_3, M_4$  відповідає  $\lambda = -\frac{1}{2}$ .

$$L''_{xx} = 2\lambda, \quad L''_{yy} = 2\lambda, \quad L''_{xy} = 1,$$

$$3) \quad d^2L(M_1) = d^2L(M_2) = 2\lambda(dx)^2 + 2dx dy + 2\lambda(dy)^2 =$$

$$= (dx)^2 + 2dx dy + (dy)^2,$$

$$d^2L(M_3) = d^2L(M_4) = -(dx)^2 + 2dx dy - (dy)^2;$$

4) диференціюючи умову зв'язку, одержуємо співвідношення, що зв'язує  $dx$  і  $dy$ :

$$2x dx + 2y dy = 0.$$

У точках  $M_1, M_2$ :  $dx = dy$ ,

$$d^2L(M_1) = d^2L(M_2) = 4(dx)^2 > 0 \quad \forall dx \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  точки  $M_1$  і  $M_2$  – точки умовного мінімуму, причому,

$$z_{\min} = z(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = z(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -2.$$

У точках  $M_3$  і  $M_4$ :  $dx = -dy$ .

$$d^2L(M_3) = d^2L(M_4) = -4(dx)^2 < 0 \quad \forall dx \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  точки  $M_3$  і  $M_4$  – точки умовного максимуму, причому,

$$z_{\max} = z(M_3) = z(M_4) = 2.$$

5°. У деяких випадках дослідження знака другого диференціала не обов'язкове. У наведеному вище прикладі неперервна функція  $z = xy$  розглядається на обмеженій замкненій множині:  $x^2 + y^2 = 4$ .

Така функція досягає найбільшого і найменшого значень. Оскільки в стаціонарних точках  $M_1, M_2, M_3, M_4$  функція набуває тільки двох різних значень:  $z = 2$  і  $z = -2$ , то без дослідження знака другого диференціала очевидно, що  $M_1, M_2$  – точки мінімуму,  $M_3$  і  $M_4$  – точки максимуму.

У деяких задачах геометричного характеру досить знайти стаціонарну точку. Характер екстремуму впливає із самого змісту задачі.

### Приклади

1. На площині  $3x - 2z = 0$  знайдіть точку, сума квадратів відстаней від якої до точок  $A(1,1,1)$  і  $B(2,3,4)$  була б найменшою.

2. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$u = x^2 + y^2 - z^2 - 4xz + 4yz \text{ на сфері } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

## Розв'язання

1. Нехай  $M(x, y, z)$  – шукана точка.

Тоді вираз

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2$$

являє собою суму квадратів відстаней від точки  $M$  до точок  $A$  і  $B$ . Оскільки  $M$  належить площині, то її координати задовольняють рівнянню площини:  $3x - 2z = 0$ .

Отже, мова йде про дослідження на екстремум функції

$$u(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6x - 8y - 10z + 32,$$

за умови  $\varphi(x, y, z) = 3x - 2z = 0$ .

1) складемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, z, \lambda) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6x - 8y - 10z + 32 + \lambda(3x - 2z);$$

2) система для визначення стаціонарних точок має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 4x - 6 + 3\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 4y - 8 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 4z - 10 - 2\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 3x - 2z = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6 - 3\lambda}{4}, \\ y = 2, \\ z = \frac{10 + 2\lambda}{4}, \\ 3 \cdot \frac{6 - 3\lambda}{4} - 2 \cdot \frac{10 + 2\lambda}{4} = 0. \end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{2}{13}, \quad x = \frac{21}{13}, \quad y = 2, \quad z = \frac{63}{26}.$$

Отже, точка  $M\left(\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26}\right)$  – єдина стаціонарна точка.

За геометричним змістом задача не має максимуму.

Виходить,  $M\left(\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26}\right)$  – шукана точка мінімуму.

2. Найбільше і найменше значення диференційовна функція на обмеженій замкнутій множині (сфері) приймає в стаціонарних точках функції Лагранжа:

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 - z^2 - 4xz + 4yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Система рівнянь для визначення координат стаціонарних точок і множника  $\lambda$  має вигляд:

$$\begin{cases} L'_x = 2x - 4z + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = 2y + 4z + 2\lambda y = 0, \\ L'_z = -2z - 4x + 4y + 2\lambda z = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2 + 2\lambda)x - 4z = 0, \\ (2 + 2\lambda)y + 4z = 0, \\ -4x + 4y + (-2 + 2\lambda)z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Однорідна лінійна система відносно  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , що складається з перших трьох рівнянь, може мати нетривіальний розв'язок тільки за умови, що визначник системи дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 + 2\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 2 + 2\lambda & 4 \\ -4 & 4 & -2 + 2\lambda \end{vmatrix} = (2 + 2\lambda)(4\lambda^2 - 36) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 3.$$

При  $\lambda_1 = -1$  система приймає вигляд:

$$\begin{cases} -4z = 0, \\ 4z = 0, \\ -4x + 4y - 4z = 0, \end{cases} \Rightarrow x = y, z = 0.$$

Підставивши це рішення в четверте рівняння, одержимо дві стаціонарні точки:

$$M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Аналогічно можна показати, що  $\lambda_2 = -3$  відповідають стаціонарні точки:

$$M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), M_4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

а  $\lambda_3 = 3$  відповідають стаціонарні точки:

$$M_5\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), M_6\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Обчислимо тепер значення функції  $u(x, y, z)$  в стаціонарних точках:

$$u(M_1) = u(M_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$u(M_3) = u(M_4) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 3,$$

$$u(M_5) = u(M_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{4}{6} - \frac{8}{6} - \frac{8}{6} = -3.$$

Найбільше значення функція  $u(x, y, z)$  приймає в точках  $M_3$  і  $M_4$ :

$$\max_{x^2+y^2+z^2=1} u(x, y, z) = 3,$$

найменше значення функція  $u(x, y, z)$  приймає в точках  $M_5$  і  $M_6$ :

$$\min_{x^2+y^2+z^2=1} u(x, y, z) = -3.$$

### Аудиторне заняття 6.7

1. Дослідіть на умовний екстремум функцію  $z = x + 2y$ , якщо  $x^2 + y^2 = 5$ .

2. Дослідіть на умовний екстремум функцію  $u = xyz$ , якщо  $x + y + z = 8$ .

3. На еліпсі  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  знайдіть точки, які найбільш і найменш віддалені від прямої  $3x - y - 9 = 0$ .

4. Додатне число  $a$  розкладіть на три додатних доданки так, щоб їхній добуток був найбільшим.

### Самостійна робота 6.7

1. Дослідіть на умовний екстремум.

1.1. Функцію  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ , якщо  $x + y = 2$ .

1.2. Функцію  $u = x \cdot y^2 \cdot z^3$ , якщо

$$x + 2y + 3z = 12 \quad (x > 0, y > 0, z < 0).$$

1.3. Функцію  $u = x^2 - 9y^2$ , якщо  $3x - 2y = 6$ .

1.4. Функцію  $u = x^2 + \frac{y^2}{4} + 16z^2$ , якщо  $x - 2y + z = 3$ .

2. Із всіх трикутників з периметром  $2P$  знайдіть такий, що має найбільшу площу.

### 6.8. Теоретичні питання з теми «Диференціальне числення функцій багатьох змінних»

1. Яку множину називають простором  $R^n$  ?
2. Як обчислюють відстань між точками в  $R^n$  ?
3. Як обчислюється відстань між точками в  $R^1$  і  $R^2$  ?
4. Що називається кулею в просторі  $R^n$  ?
5. Як виглядає  $\varepsilon$ -окіл точки в просторах  $R^1$  і  $R^2$  ?
6. Дайте визначення внутрішньої і межової точки множини.
7. Яка множина називається відкритою? Наведіть приклад.
8. Яка множина називається замкнутою? Наведіть приклад.
9. Дайте визначення обмеженої і необмеженої множини. Наведіть приклади.
10. Дайте визначення границі функції в  $R^n$  .
11. Дайте визначення неперервності функції декількох змінних у точці.
12. Дайте визначення частинних похідних першого порядку функції  $z = f(x, y)$  .
13. Геометричний зміст частинних похідних в  $R^2$  .
14. Визначення диференційовності в  $R^2$  .
15. Визначення диференційовності в  $R^n$  .
16. Сформулюйте необхідну ознаку диференційовності.
17. Сформулюйте достатню ознаку диференційовності функцій декількох змінних.
18. Дайте визначення диференціала функції двох змінних. У чому полягає властивість інваріантності форми першого диференціала?
19. Дайте визначення диференціала функції  $n$  змінних.
20. Теорема про диференціювання складної функції.
21. Похідні вищих порядків. Сформулюйте теорему про змішану похідну.

22. Диференціали вищих порядків. Відсутність інваріантності форми.
23. Напишіть формулу Тейлора для функції двох змінних.
24. Напишіть рівняння дотичної до просторової кривої та нормальної площини.
25. Напишіть рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні.
26. Дайте визначення локального екстремуму функції декількох змінних.
27. Необхідна ознака екстремуму диференційовної функції.
28. Достатня ознака екстремуму двічі диференційовної функції.
29. Критерій Сильвестра знаковизначеності квадратичної форми.
30. Достатня ознака екстремуму функції двох змінних.
31. Постановка задачі про умовний екстремум.
32. Опишіть процедуру знаходження стаціонарних точок при розв'язанні задачі на умовний екстремум методом Лагранжа.
33. Опишіть процедуру перевірки достатньої ознаки при розв'язанні задачі на умовний екстремум методом Лагранжа.



## 6.9. Зразки модульної контрольної роботи з теми «Диференціальне числення функцій багатьох змінних»

### Варіант №1

1. Яка множина називається відкритою? Наведіть приклад відкритої множини в  $R^2$ .

2. Сформулюйте необхідну ознаку диференційовності функції декількох змінних.

3. Теорема про диференціювання складної функції.

4. Критерій Сильвестра знаковизначеності квадратичної форми.

5. Знайдіть область визначення функції  $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \sqrt{x-y}$ , зобразіть і охарактеризуйте її.

6. Знайдіть частинні похідні першого порядку функції

$$z = \frac{\operatorname{tg} x^2}{\sqrt{y}}.$$

7. Обчисліть наближено, замінюючи приріст повним диференціалом

$$(1,02)^3 \cdot (2,03)^2.$$

8. У якій точці дотична площина до поверхні  $z = 1 - 2x^2 - 2y^2$  паралельна площині  $2x + 2y + z = 0$ ?

Напишіть рівняння нормалі в цій точці.

9. Знайдіть стаціонарні точки функції

$$u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

10. Нехай  $M_0$  – стаціонарна точка функції  $f(x, y)$ ,  $\Delta_1 = a_{11} < 0$ ,  $\Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ . Охарактеризуйте точку  $M_0$ .

## Варіант № 2

1. Дайте визначення обмеженої і необмеженої множини.
2. Сформулюйте необхідну ознаку диференційовності.
3. Теорема про диференціювання складної функції.
4. Постановка задачі про умовний екстремум.
5. Знайдіть область визначення функції  $z = \ln y + \ln \cos x$ , зобразіть і охарактеризуйте її.

6. Функція  $z$  задана неявно:

$$z^3 + x^3 + y^3 - \sin xyz + 5 = 0.$$

Знайдіть  $z'_x$ ,  $z'_y$ .

7. Знайдіть повний диференціал  $dz$  функції

$$z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

8. Напишіть рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні

$$z = y + \ln \frac{x}{z} \text{ у точці } M_0(1, 1, 1).$$

9. Знайдіть всі частинні похідні другого порядку функції

$$z = \operatorname{tg} \frac{x^2}{y}.$$

10. Дослідіть на екстремум функцію

$$z = x^2 + (y-1)^2.$$

## 6.10. Варіанти обов'язкових домашніх завдань з теми «Диференціальне числення функцій багатьох змінних»

### Варіант № 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \arcsin \frac{y}{x}.$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 + (x-1)^2 + y^2)}{2y^2 + 2x^2 - 4x + 2}. \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x-3y}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = \ln(y^2 - e^{-x})$  і знайдіть її повний диференціал.

3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$ , заданої неявно, у точці  $M_0(2, 1, 1)$ .

3.3. Покажіть, що функція  $z = y \cdot \varphi(x^2 - y^2)$ , де  $\varphi(x, y)$  – диференційовна функція, задовольняє співвідношенню  $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$ .

4. Покажіть, що функція  $z = e^x(x \cos y - y \sin y)$  задовольняє співвідношенню  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. На поверхні  $x^2 - z^2 - 2x + 2y = 4$  знайдіть точку, у якій нормаль паралельна прямій  $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4}$ . Напишіть рівняння цієї нормалі.

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$ .

7. Знайдіть екстремум функції  $z = xy$ , за умови  $x^2 + y^2 = 4$ .

## Варіант № 2

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \arcsin \frac{y-2}{x-1}.$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\cos\left((x-2)^2 + (y-1)^2\right) - 1}{(x-2)^2 + (y-1)^2}. \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 3y^2}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = \arccos(2x^3y)$  і знайдіть її повний диференціал.

- 3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3z = 3,$$

заданої неявно, у точці  $M_0(4, 3, 1)$ .

- 3.3. Для функції  $z = e^{y-2x+2}$ ,  $x = \sin t$ ,  $y = \cos t$  обчисліть  $\frac{dz}{dt}$ .

4. Покажіть, що функція  $z = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$  задовольняє співвід-

ношенню  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. Знайдіть точку на поверхні  $z = 4 - x^2 - y^2$ , у якій дотична площина паралельна площині  $2x + 2y + z = 0$ . Скласти рівняння цієї площини.

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x - 14y$ .

7. Знайдіть екстремум функції

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \text{ за умови } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1.$$

### Варіант № 3

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2).$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 1}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}. \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x^2 + 3y^2}{2x^2 - 4y^2}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = \arctg \frac{x^3}{y}$  і знайдіть її повний диференціал.

- 3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$\ln z = x + 2y - z + \ln 3,$$

заданої неявно, у точці  $M_0(1, 1, 3)$ .

3.3. Покажіть, що функція  $z = xy + x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ , де  $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$  – диференційовна функція, задовольняє співвідношенню

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

4. Покажіть, що функція  $z = \frac{y}{y^2 - x^2}$  задовольняє співвідношенню  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. Доведіть, що дотична площина до поверхні  $xyz = 8$  у будь-якій точці утворює із координатними площинами тетраedr, об'єм якого дорівнює  $V = 36$  (од.куб.).

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ .

7. Знайдіть екстремум функції

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \text{ за умови } x^2 + y^2 = 4x^2y^2.$$

#### Варіант № 4

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

2.1.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow \infty}} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\frac{y^2}{x-y}}.$

2.2.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x^2 - 3xy + y^2}{x^2 + y^2}.$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = \sqrt[3]{\operatorname{tg}(x^3 y^4)}$  і знайдіть її повний диференціал.

- 3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$x \cos y + y \cos z + z \cos x = \frac{\pi}{2},$$

заданої неявно, у точці  $M_0\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$ .

- 3.3. Для функції  $z = \arccos \frac{2x}{y}$ ,  $x = \sin t$ ,  $y = \cos t$  обчисліть  $\frac{dz}{dt}$ .

4. Покажіть, що функція  $z = x \cdot e^{-y/x}$  задовольняє співвідношенню  $x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) = y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. Покажіть, що поверхні  $z^2 = x^2 + y^2$  і  $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$  дотикаються в точці  $M_0(0,1,1)$ .

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = x^3 y^2 (6 - x - y)$ .

7. Знайдіть екстремум функції  $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25}$ , за умови  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

## Варіант № 5

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arccos(1 - y).$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2 - xy}{2(x^2 + y^2)}. \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left( (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right).$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $u = (\sin x)^{y \cdot z}$  і знайдіть її повний диференціал.

3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції  $z^3 + 3xyz - 4 = 0$ , заданої неявно, у точці  $M_0(1, 1, 1)$ .

3.3. Покажіть, що функція  $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ ,  $x = u + v$ ,  $y = u - v$  за-

довольняє співвідношенню  $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}$ .

4. Покажіть, що функція  $z = \frac{x + y}{x - y}$  задовольняє співвідношен-

ню  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. Знайдіть рівняння дотичної площини до поверхні  $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{6} = 1$ , що відтинає на осях координат відрізки рівної довжини.

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = xy(x + y - 2)$ .

7. Знайдіть екстремум функції

$$u = x^3 y^2 z^3, \text{ за умови } x + y + z = 1.$$

## Варіант № 6

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \frac{\ln(x^2 y)}{\sqrt{y-x}}.$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2) \cdot x^2 y^2} \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 1}} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x-y}}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = \arctg \sqrt{x^y}$  і знайдіть її повний диференціал.

- 3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$z^3 - 3xyz - 2 = 0,$$

заданої неявно, у точці  $M_0(1, 1, 2)$ .

- 3.3. Для функції  $z = y^x$ ,  $x = \ln(t-1)$ ,  $y = e^{t/2}$  обчисліть  $\frac{dz}{dt}$ .

4. Покажіть, що функція  $z = \frac{y}{y^2 - 4x^2}$  задовольняє співвідно-

шенню  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. Покажіть, що поверхні

$$x + 2y - \ln z + 4 = 0 \text{ і } x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$$

дотикаються одна до одної в точці  $M_0(2, -3, 1)$ .

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$ .

7. Знайдіть екстремум функції  $u = 5x^2 + 13y^2 + 5z^2 + 4xy + 8yz$ , за умови  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .



## Варіант № 7

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \arccos(x^2 + y^2 - 3).$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2) \cdot x^2 y^2}. \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow \infty}} \left(1 - \frac{1}{2y}\right)^{\frac{y^2}{y+x}}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = (1 + xy)^y$  і знайдіть її повний диференціал.

- 3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$2x^2 + y^2 + 4z^2 = 7,$$

заданої неявно, у точці  $M_0(-1, -1, 1)$ .

- 3.3. Покажіть, що функція  $z = \arctg \frac{x}{y}$ ,  $x = u + v$ ,  $y = u - v$  за-

довольняє співвідношенню  $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}$ .

4. Покажіть, що функція  $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$  задовольняє співвідношенню  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. До поверхні  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$  провести дотичні площини, паралельні площині  $x + 4y + 6z = 0$ .

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ .

7. Знайдіть екстремум функції  $u = x^2 + y^2 - z^2 - 4xz + 4yz$ , за умови  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

## Варіант № 8

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{(x^2+y^2)^2} - 1}{(x^2+y^2) \cdot x^2 y^2}. \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1+x^3 y^3)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = x^{x^y}$  і знайдіть її повний диференціал.

- 3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2},$$

заданої неявно, у точці  $M_0\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ .

3.3. Для функції  $z = \frac{x^2}{y+1}$ ,  $x = 1-2t$ ,  $y = \arctg t$  обчисліть  $\frac{dz}{dt}$ .

4. Покажіть, що функція  $z = \ln(x^2 + y^2 + 4x + 4)$  задовольняє співвідношенню  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. До поверхні  $x^2 - y^2 - 6z = 0$  провести дотичну площину, що проходить через точку  $A(0, 0, 1)$  паралельно прямій  $\frac{x}{2} = y = \frac{z}{2}$ .

6. Дослідіть на екстремум функцію

$$z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$$

7. Знайдіть екстремум функції  $z = x^3 y^2 z^3$ , за умови  $x + y + z = 1$ .

## Варіант № 9

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \ln(16 - x^2 - y^2).$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2^{(x^2+y^2)} - 1}{x^2 + y^2}. \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 2}} \frac{(x-2)(y-2)}{(x-2)^2 + 3(y-2)^2}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $u = x^{\frac{y}{z}}$  і знайдіть її повний диференціал.

- 3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 15 = 0,$$

заданої неявно, у точці  $M_0(1, -1, 2)$ .

- 3.3. Покажіть, що функція  $z = x + y + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ , де  $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$  – дифе-

ренційовна функція, задовольняє співвідношенню  $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$ .

4. Покажіть, що функція  $z = \sin^2(x - 2y)$  задовольняє співвідношенню  $4 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. Для поверхні  $z = xy$  напишіть рівняння дотичної площини, перпендикулярної до прямої  $\frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}$ .

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = x^3 + y^3 - 3xy$ .

7. Знайдіть екстремум функції

$$u = xy^2z^3, \text{ за умови } x + 2y + 3z = 4.$$

## Варіант № 10

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - y^2}.$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

2.1.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3^{x^2+y^2} - 1}{\operatorname{tg}(x^2 + y^2)}.$

2.2.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{(x-1)^2 \cdot (y-1)^2}{(x-1)^4 + (y-1)^4}.$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = (2x + y)^{2x+y}$  і знайдіть її повний диференціал.

- 3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$z^3 + 3xyz - 4 = 0,$$

заданої неявно, у точці  $M_0(1, 1, 1)$ .

- 3.3. Для функції  $z = x^y$ ,  $x = e^t$ ,  $y = \ln t$  обчисліть  $\frac{dz}{dt}$ .

4. Покажіть, що функція  $z = y\sqrt{\frac{y}{x}}$  задовольняє співвідношенню  $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. Знайдіть відстань від початку координат до дотичної площини до поверхні  $(8 - z^2) \cdot x^2 - 4y^2 = 0$  у точці  $(2, 2, 2)$ .

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = (12 - x - y) \cdot xy$ .

7. Знайдіть екстремум функції

$$u = xy^2z^3, \text{ за умови } x + 2y + 3z = 1.$$

## Варіант № 11

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \sqrt{x^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{4 - y^2}}.$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[5]{x^2 + y^2 + 1} - 1}{\sin(x^2 + y^2)}. \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = x \cdot y \cdot e^{\sin(\pi xy)}$  і знайдіть її повний диференціал.

3.2. Обчисліть значення частинних похідних заданої неявно функції  $e^z + 1 + 2y + z - 4 = 0$ , у точці  $M_0(1, 1, 0)$ .

- 3.3. Покажіть, що функція

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \varphi(x - y),$$

де  $\varphi(x - y)$  – диференційовна функція, задовольняє співвідношенню

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + y.$$

4. Покажіть, що функція  $z = x^y$  задовольняє співвідношенню  $y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x) \frac{\partial z}{\partial x}$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. Знайдіть відстань від початку координат до дотичної площини до поверхні  $(2 - z^2)x^2 - y^2 = 0$  у точці  $(1, 1, 1)$ .

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ .

7. Знайдіть екстремум функції

$$u = x^2 y^2 z^4, \text{ за умови } 2x + 2y + 4z = 1.$$

## Варіант № 12

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \frac{\ln(y^2 x)}{\sqrt{x-y}}.$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}. \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 3}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^{x \ln y}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = \arctg \sqrt[3]{x^y}$  і знайдіть її повний диференціал.

3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції  $z(x, y)$ , заданої неявно, у даній точці  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ :

$$e^z - xyz - x + 1 = 0, \quad \text{т. } M_0(2, 1, 0).$$

3.3. Для функції  $z = x^2 \cdot e^{-y}$ ,  $x = \sin t$ ,  $y = \sin^2 t$  обчисліть  $\frac{dz}{dt}$ .

4. Покажіть, що функція  $z = e^{-\cos(x+2y)}$  задовольняє співвідношенню  $4 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. Напишіть рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z^2 + 4z + x^2 = 0$ , у точках перетину з віссю  $Oz$ .

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ .

7. Знайдіть екстремум функції

$$u = x - 2y + 2z, \text{ за умови } x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

### Варіант № 13

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \sqrt{1 - (x + y^2)^2}.$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow \infty}} \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{y \cdot \lg x}. \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3x^2 - 2y^2}{xy}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{y}{x}$  і знайдіть її повний диференціал.

3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції  $\sqrt{x^2 + y^2} + z^3 - 3z = 3$ , заданої неявно, у точці  $M_0(4, 3, 1)$ .

3.3. Покажіть, що функція  $z = e^y \cdot \varphi(y \cdot e^{x^2/2y^2})$ , де  $\varphi(x, y)$  – диференційовна функція, задовольняє співвідношенню

$$(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz.$$

4. Покажіть, що функція  $z = \ln(x^2 - y^2)$  задовольняє співвідношенню  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. Знайдіть відстань від початку координат до дотичної площини до поверхні  $z = y \cdot \operatorname{tg} x$  у точці  $M_0\left(\frac{\pi}{4}, 1, 1\right)$ .

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = \frac{1 + 2x + 3y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$ .

7. Знайдіть екстремум функції

$$u = x^2 + y^2 + z^2, \text{ за умови } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

## Варіант № 14

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}.$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + 2x^2 y^4)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}. \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x-3)y}{(x-3)^2 + y^2}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = (1 + xy)^y$  і знайдіть її повний диференціал.

3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції  $z(x, y)$ , заданої неявно, у даній точці  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ :

$$x^3 + 3xyz - z^3 = 27, \quad M_0(3, 1, 3).$$

3.3. Для функції  $z = \ln(e^{-x} + e^{-2y})$ ,  $x = t^2$ ,  $y = \frac{1}{3}t^3$  обчисліть  $\frac{dz}{dt}$ .

4. Покажіть, що функція  $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  задовольняє співвідношенню  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. На лінії  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = e^t$  знайдіть точку, у якій дотична паралельна площині  $\sqrt{3}x + y - 4 = 0$ . Напишіть рівняння цієї дотичної.

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ .

7. Знайдіть екстремум функції

$$u = x^2 y z^2, \text{ за умови } x + 2y + 2z = 1.$$



### Варіант № 15

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \frac{y}{\sqrt{4-x^2-2y^2}}.$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3(x-1)^2 + 2y^2}{(x-1)y}. \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3x^2 + y^2 - 1}{\operatorname{tg}(x^2 + y^2)}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $u = x^{y/z}$  і знайдіть її повний диференціал.

- 3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4,$$

заданої неявно, у точці  $M_0(2,1,1)$ .

3.3. Доведіть, що  $z = \sin y + f(\sin x - \sin y)$ , де  $f(u)$  – диференційовна функція, задовольняє співвідношенню

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

4. Покажіть, що функція  $z = xe^{y/x}$  задовольняє співвідношенню  $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. Знайдіть відстань від початку координат до дотичної площини до поверхні  $(11-z^2)x^2 = 2y^2$  у точці  $(3,3,3)$ .

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = \frac{1-x-2y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ .

7. Знайдіть екстремум функції  $z = xy$ , за умови  $x^2 + y^2 = 8$ .

## Варіант № 16

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2y^2 - 4}}.$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x^2 + 3(y-1)^2}{x(y-1)}.$$

$$2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[4]{1-x^2-y^2}-1}{\sin(x^2+y^2)}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = x \cdot y \cdot 2^{\sin(x \cdot y)}$  і знайдіть її повний диференціал.

- 3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$z^3 + 3xyz + 3y - 7 = 0,$$

заданої неявно, у точці  $M_0(1, 1, 1)$ .

3.3. Для функції  $z = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right)$ ,  $x = \sin t$ ,  $y = \cos t$  обчисліть  $\frac{dz}{dt}$ .

4. Покажіть, що функція  $z = \ln(x + e^{-y})$  задовольняє співвідношенню  $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. Покажіть, що дотичні площини до поверхні

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 2,$$

відтинають на осях координат відрізки, сума яких є постійною.

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ .

7. Знайдіть екстремум функції

$$u = x^2 - 7y^2 + z^2 - 4xy - 2xz - 4yz, \text{ за умови } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

### Варіант № 17

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \arcsin \frac{y}{x^2} + \arcsin(1-x).$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 2}} \frac{2(x-2)^2 + 3(y-2)^2}{(x-2)(y-2)}. \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = (x+2y)e^{\sqrt{xy}}$  і знайдіть її повний диференціал.

- 3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$z^3 + 2y^3 + x^3 - 3xyz - 2y - 15 = 0,$$

заданої неявно, у точці  $M_0(1, -1, 2)$ .

3.3. Покажіть, що функція  $z = x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$ , де  $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$  – диференційовна функція, задовольняє співвідношенню

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2.$$

4. Покажіть що функція  $z = e^{-(x+2y)} \cdot \sin(x+2y)$  задовольняє співвідношенню  $4 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. До еліпсоїда  $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1$  провести дотичну площину, що відтинає на осях координат відрізки рівної довжини.

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$ .

7. Знайдіть екстремум функції  $u = xyz^4$ , за умови  $x + y + z = 1$ .

## Варіант № 18

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \sqrt{y} + \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}.$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow -1}} \frac{3(y+1)^2 - (x-3)^2}{(y+1)(x-3)}. \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\cos 2\sqrt{x^2 + y^2} - 1}{x^2 + y^2}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = \operatorname{arcsctg} \frac{1}{\sqrt{xy}}$  і знайдіть її повний диференціал.

- 3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$\ln z = x + 2y - z + \ln 3,$$

заданої неявно, у точці  $M_0(1, 1, 3)$ .

3.3. Для функції  $z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ ,  $x = \sin 2t$ ,  $y = \operatorname{tg}^2 t$  обчисліть  $\frac{dz}{dt}$ .

4. Покажіть, що функція  $z = \ln(x^2 + y^2 + 4y + 4)$  задовольняє співвідношенню  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. Доведіть, що дотичні площини, проведені в будь-якій точці до поверхні  $xyz = 2$ , утворюють із площинами координат тетраедр, об'єм якого дорівнює  $V = 9$  (од.куб.).

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$ .

7. Знайдіть екстремум функції

$$u = x y^2 z^3 \quad (x > 0; y > 0; z > 0), \text{ за умови } x + 2y + 3z = 6.$$

### Варіант № 19

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}.$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(1 + \sin(x^2 y^2)\right)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}. \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3x - y - 3}{2x + y - 2}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = (1 + 3xy)^{x-y}$  і знайдіть її повний диференціал.

- 3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$e^z - xyz - 2x + 1 = 0,$$

заданої неявно, у точці  $M_0(1, 1, 0)$ .

- 3.3. Доведіть, що якщо  $f(x^2 - y^2)$  – диференційована функція,

то  $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$  задовольняє співвідношенню  $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$ .

4. Покажіть, що функція  $z = \ln \sqrt{x^2 - 6x + y^2 + 9}$  задовольняє співвідношенню  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. Доведіть, що дотичні площини до поверхні  $xyz = 4$ , проведені в будь-якій точці, утворюють із координатними площинами тетраедр, об'єм якого дорівнює  $V = 18$  (од.куб.).

6. Дослідіть на екстремум функцію, задану неявно

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

7. Знайдіть екстремум функції

$$u = x^2 + y^2 + z^2, \text{ за умови } x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

## Варіант № 20

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \ln \frac{y}{x} + \sqrt{1 - x^2 + y^2}.$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2^{x^2+y^2} - 1}{\cos \sqrt{x^2 + y^2} - 1}. \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3x + y + 3}{5x - 2y + 5}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = (\log_y x + 1)^x$  і знайдіть її повний диференціал.

- 3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3z - 3 = 0,$$

заданої неявно, у точці  $M_0(4, 3, 2)$ .

- 3.3. Для функції  $z = \arctg(xy)$ ,  $x = t + 3$ ,  $y = e^t$  обчисліть  $\frac{dz}{dt}$ .

4. Покажіть, що функція  $z = \frac{y}{y^2 - 9x^2}$  задовольняє співвідношенню  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 9 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. Напишіть рівняння дотичної площини до поверхні

$$\frac{x^2}{3} + y^2 - z^2 = -1,$$

яка проходить через точки  $A(1, 0, 0)$  і  $B(1, 1, 0)$ .

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = x^2 + y^2 + \frac{4}{x} + \frac{4}{y} + xy$ .

7. Знайдіть екстремум функції

$$u = xy^2z^3 \quad (x > 0, y > 0, z > 0), \text{ за умови } x + y + z = 12.$$

## Варіант № 21

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \ln \frac{x}{y} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left( 2 - \cos(x^2 + y^2) \right)^{\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}}. \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{x + y - 3}{x - y + 1}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = \frac{\ln(x^2 y)}{\sqrt{y - x}}$  і знайдіть її повний диференціал.

- 3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$\ln(2 - z^2) = x^2 + y^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot z\right),$$

заданої неявно, у точці  $M_0(0, 2, 1)$ .

3.3. Доведіть, що якщо  $z = \phi(x^2 + y^2)$  – диференційовна функція, то  $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

4. Покажіть, що функція  $z = x \cdot e^{-y/x}$  задовольняє співвідношенню  $x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. Напишіть рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $3xyz - z^3 = 8$  у точці  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 2$ .

6. Дослідіть на екстремум функцію

$$z = x^3 y^2 (6 - x - y), \quad (x > 0, y > 0).$$

7. Знайдіть екстремум функції

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad \text{за умови} \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}.$$

## Варіант № 22

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \ln(x^2 - 3y + 6) - \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (2 - 2^{x^2 + y^2})^{-1/2(x^2 + y^2)}. \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = (1 + \sin xy)^{x-y}$  і знайдіть її повний диференціал.

- 3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$e^{z-1} = \cos x \cos y - \cos \frac{\pi}{2} z + 1,$$

заданої неявно, у точці  $M_0\left(0, \frac{\pi}{2}, 1\right)$ .

- 3.3. Для функції  $z = \sqrt{x + y^2 + 3}$ ,  $x = \ln t$ ,  $y = t^2$  обчисліть  $\frac{dz}{dt}$ .

4. Покажіть, що функція  $z = e^{-\cos(x+3y)}$  задовольняє співвідношенню  $9 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. Напишіть рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $3xyz - z^3 = 1$  у точці  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ .

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = \frac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$ .

7. Знайдіть екстремум функції

$$u = x^2 y^3 z, \text{ за умови } x + y + z = 6, (x, y, z > 0).$$



### Варіант № 23

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \sqrt[3]{1-x^2-y^2} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(2 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}\right)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}. \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 2}} \frac{x + y - 4}{x - y}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}$  і знайдіть її повний диференціал.

- 3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$e^{z-1} = \cos y \cdot \cos z + 1,$$

заданої неявно, у точці  $M_0\left(0, \frac{\pi}{2}, 1\right)$ .

3.3. Для функції  $z = f\left(x^2 + y^2; \frac{1}{xy}\right)$  знайдіть  $\frac{\partial z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

4. Покажіть, що функція  $z = \ln \sqrt{x^2 + 8x + y^2 + 16}$  задовольняє співвідношенню  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. Знайдіть відстань від початку координат до дотичної площини до поверхні  $(18 - z^2)x^2 - 9y^2 = 0$  у точці  $M_0(3, 3, 3)$ .

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = e^{-x^2-y^2} (2x^2 + y^2)$ .

7. Знайдіть екстремум функції

$$u = x^3 y^2 z^2, \text{ за умови } x + y + z = 7, (x, y, z > 0).$$

## Варіант № 24

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2y^2 - 4}}.$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

$$2.1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left( 1 - \left( \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}. \quad 2.2. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 3}} \frac{x + y - 6}{x - y}.$$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $z = \sqrt[3]{1 + \log_y x}$  і знайдіть її повний диференціал.

- 3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$\operatorname{arctg} z - \frac{\pi}{4} = xy \cdot \cos z,$$

заданої неявно, у точці  $M_0(3, 0, 1)$ .

3.3. Для функція  $z = \frac{y}{x}$ ,  $x = e^t$ ,  $y = 1 - e^{2t}$  обчисліть  $\frac{dz}{dt}$ .

4. Покажіть, що функція  $z = \ln \sqrt[3]{(x-1)^2 + y^2}$  задовольняє співвідношенню  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ . Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. До еліпсоїда  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 1$  провести дотичну площину, що відтинає на осях координат відрізки рівної довжини.

6. Дослідіть на екстремум функцію  $z = xy \cdot \ln(x^2 + y^2)$ .

7. Знайдіть екстремум функції

$$u = x^2 y z^4, \text{ за умови } 2x + y + 4z = 6.$$

## Варіант № 25

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$z = \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - 2y^2}}.$$

Чи є ця область відкритою (замкненою), обмеженою (необмеженою), зв'язною (незв'язною)?

2. Обчисліть границі або покажіть, що границя не існує.

2.1.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left( 2 - \sqrt{1 + x^2 + y^2} \right)^{\frac{1}{2(x^2 + y^2)}}.$     2.2.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x + 2y - 4}{x - y - 1}.$

3.1. Обчисліть частинні похідні першого порядку зазначеної функції  $u = (\sin y)^{x-z}$  і знайдіть її повний диференціал.

- 3.2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$e^{z-2} = \sin x \cdot \cos z + \cos y + 1,$$

заданої неявно, у точці  $M_0 \left( 0, \frac{\pi}{2}, 2 \right).$

3.3. Для функції  $z = f(x^2 - y^2; xy)$  знайдіть  $\frac{\partial z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial z}{\partial y}.$

4. Покажіть, що функція  $z = \cos^2(x - 3y)$  задовольняє співвідношенню  $9 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$  Перевірте, що змішані похідні є рівними.

5. Напишіть рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $3xyz - z^3 = 27$  у точці  $x_0 = 0, y_0 = 3.$

6. Дослідіть на екстремум функцію

$$z = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y.$$

7. Знайдіть екстремум функції

$$u = x^2 + y^2 + z^2, \text{ за умови } x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

## 6.11. Довідковий матеріал

### 1. Основні формули диференціального числення

#### Основні правила диференціювання

1.  $C' = 0$ .
2.  $(Cu)' = Cu'$ .
3.  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ .
4.  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$ .
5.  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ ,  $v \neq 0$ .
6.  $(f(u))'_x = f'_u \cdot u'_x$ .
7.  $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ , де  $x = x(y)$  – обернена функція до функції

$y = y(x)$ .

Тут  $C$  – постійна,  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$ .

#### Основні формули диференціювання

1.  $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
2.  $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$ .
3.  $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$ .

4.  $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ .
5.  $(e^u)' = e^u \cdot u'$ .
6.  $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ .
7.  $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ .
8.  $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ .
9.  $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$ .
10.  $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ .
11.  $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ .
12.  $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ .
13.  $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ .
14.  $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$ .
15.  $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$ .
16.  $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$ .
17.  $(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$ .

Тут  $u = u(x)$ . Якщо  $u(x) = x$ , то  $u'(x) = x' = 1$ .

## 2. Основні формули елементарної математики

### 2.1. Алгебраїчні функції

#### Властивості степенів

Для будь-яких  $x$ ,  $y$  і додатних  $a$  і  $b$  є вірними рівності:

$$a^0 = 1;$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y};$$

$$a^x : a^y = a^{x-y};$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y};$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

#### Многочлени

Для будь-яких  $a$ ,  $b$  і  $c$  є вірними рівності:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$\text{або } (a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b);$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де  $x_1$  і  $x_2$  – корені рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$ .

## Властивості арифметичних коренів

Для будь-яких натуральних  $n$  і  $k$ , більших за 1, і будь-яких невід'ємних  $a$  і  $b$  є вірними рівності:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; & \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0); \\ (\sqrt[n]{a})^k &= \sqrt[n]{a^k}; & \sqrt[n]{k\sqrt{a}} &= \sqrt[k]{a}; \\ \sqrt[n]{a} &= \sqrt[nk]{a^k}; & \sqrt[n]{a^n} &= a \quad (a \geq 0); \\ \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, & \text{ якщо } 0 \leq a < b; & \sqrt{a^2} &= |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0; \end{cases} \\ \sqrt[2n]{a^{2n}} &= |a|; & \sqrt[2n+1]{-a} &= -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \geq 0).\end{aligned}$$

## 2.2. Тригонометричні функції

### Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}; \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}; \\ 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

### Формули додавання

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta ;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta ;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta ;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta ;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha, \beta, (\alpha + \beta) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha, \beta, (\alpha - \beta) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

### Формули подвійного аргументу

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha ;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha ;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

### Формули половинного аргументу

#### (формули зниження степеня)

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2};$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



### Формули перетворення суми в добуток

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

### Формули перетворення добутку в суму

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)].$$

### Співвідношення між $\sin \alpha$ , $\cos \alpha$ , і $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

### Формули зведення

Назва функції не змінюється				Назва функції змінюється			
$u$	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
	$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}$			$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}$			
$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
	$\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$			$\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$			

### Властивості обернених тригонометричних функцій

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, |a| \leq 1; \quad \arccos(-a) = \pi - \arccos a, |a| \leq 1;$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a, a \in \mathbb{R}; \quad \operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a, a \in \mathbb{R};$$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, |a| \leq 1; \quad \operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}, a \in \mathbb{R}.$$

### Найпростіші тригонометричні рівняння

$$\sin x = a \quad |a| \leq 1; \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = a \quad |a| \leq 1; \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = a \quad a \in \mathbb{R}; \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} x = a \quad a \in \mathbb{R}; \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Окремі випадки:

$$\sin x = 0; \quad x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \cos x = 1, \quad x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

## Властивості логарифмів

1. Якщо  $x > 0$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , то

$$x = a^{\log_a x}.$$

**(основна логарифмічна тотожність)**

2. Логарифм одиниці дорівнює нулю:

$$\log_a 1 = 0.$$

3. Логарифм основи дорівнює одиниці:

$$\log_a a = 1.$$

4. Якщо  $x_1 > 0$  і  $x_2 > 0$ , то

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2;$$

**(формула для логарифма добутку)**

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2.$$

**(формула для логарифма частки)**

5. Якщо  $x > 0$ , то

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x,$$

**(формула для логарифма степеня)**

де  $p$  – будь-яке дійсне число.

6. Якщо  $x > 0$ , то

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$$

**(формула переходу до нової основи логарифма)**

для будь-якого дійсного числа  $b > 0$ .

Зокрема

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad \text{або} \quad \log_a b \cdot \log_b a = 1;$$

$$\log_a b = \log_{a^p} b^p, \quad (p \in \mathbb{R}, p \neq 0).$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРИ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособ. для вузов. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 384 с.
2. Виленкин Н. Я. и др. Задачник по курсу математического анализа : учеб. пособ. для студентов заоч. отделений физ.-мат. фак-тов пединститутов : в 2-х ч. / Н. Я. Виленкин, К. А. Бохан, И. А. Марон и др.; под ред. Н. Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – Ч. I. – 1971. – 343 с.; Ч. II. – 1971. – 336 с.
3. Демидович Б. Н. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособ. для вузов. – М. : Наука, 1977.
4. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа : в 2-х ч. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971 – 1973. – Ч. 1. – 1971. – 600 с.; Ч. 2. – 1973. – 448 с.
5. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : учеб. пособ. для студентов университетов и вузов : в 3-х т. – М. : Высш. шк., 1988 – 1989. – Т. 1. – 1988. – 712 с.; Т. 2. – 1988. – 576 с.; Т. 3. – 1989. – 352 с.
6. Кудрявцев Л. Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость : учеб. пособ. / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 592 с.
7. Кудрявцев Л. Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды : учеб. пособ. / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 528 с.
8. Кудрявцев Л. Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных : учеб. пособ. / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1994. – 496 с.
9. Рябушко А. П. и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3-х ч. / А. П. Рябушко, В. В. Баршатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть; под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Высш. шк., 1990 – 1991. – Ч. 1. – 1990. – 270 с.; Ч. 2. – 1991. – 352 с.; Ч. 3. – 1991. – 288 с.

10. Ляшко І. І. та ін. Математичний аналіз. / І. І. Ляшко, В. Ф. Ємельянов, О. К. Боярчук. – К., 1992 – 1993. – Ч. 1, 2.
11. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. – К., 1993. – Ч. 1, 2.
12. Сенчук Ю. Ф. Математичний аналіз для інженерів : навч. посіб. : Ч.І. – Харків : НТУ «ХПІ», 2004. – 408 с. – Рос. мовою.
13. Сенчук Ю. Ф. Математичний аналіз для інженерів : навч. посіб. : Ч.ІІ. – Харків : НТУ «ХПІ», 2006. – 408 с. – Рос. мовою.
14. Заболоцький М. В. та ін. Математичний аналіз : підр. / М. В. Заболоцький, О. Г. Сторож, С. І. Тарасюк. – К. : Знання, 2008. – 421 с.
15. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3-х т. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966 – 1969. – Т. 1. – 1966. – 608 с.; Т. 2. – 1988. – 800 с.; Т. 3. – 1969. – 656 с.

Навчальне видання

ЯСНИЦЬКА Неля Миколаївна  
АХІЄЗЕР Олена Борисівна  
БОЄВА Анна Анатоліївна  
ГЕЛЯРОВСЬКА Оксана Анатоліївна  
МЕЗЕРНА Марія Віталіївна

## МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник  
Для студентів навчальних закладів

У дев'яти модулях

### Модуль 6

### Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Роботу до видання рекомендував проф. *О. В. Горілий*  
Редактор *М. П. Ефремова*

План 2010 р., поз. 85 / 134-10

Підп. до друку 10.09.2010. Формат  $60 \times 84 \frac{1}{16}$ . Папір офісний  
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 5,9. Наклад 30 прим.  
Зам. № 375. Ціна договірна.

---

ТОВ «Видавництво «Підручник» НТУ «ХП».  
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.  
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.