

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

«Харківський політехнічний інститут»

Н. М. Ясницька, О. Б. Ахієзер,

А. А. Босва, О. А. Геляровська

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник

для студентів вищих навчальних закладів

У дев'яти модулях

Модуль 9

Ряди

Рекомендовано Міністерством освіти і науки,
молоді та спорту України

Харків

Видавництво «Підручник НТУ «ХПІ»

2014

ББК 22.161
М 33
УДК 517.2

Рецензенти:

- А. А. Янцевич*, д-р фіз.-мат. наук, професор, Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна,
О. М. Кісільова, д-р фіз.-мат. наук, професор, Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
П. П. Костробій, д-р фіз.-мат. наук, професор, Національний університет «Львівська політехніка»,
Ф. О. Сопронюк, д-р фіз.-мат. наук, професор, Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича,
С. В. Бодяняський, д-р техн. наук, професор, Харківський національний університет радіоелектроніки

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, лист № 1/11-9051 від 29.09.2010 р.

Ясницька Н. М. та ін.

М 33 Математичний аналіз [Текст] : навч. посіб. : у 9-ти мод. – Мод. 9 : Ряди / Н. М. Ясницька, О. Б. Ахієзер, А. А. Боева, О. А. Геляровська. – 2-е вид., перероб. і доп. – Харків : вид-во «Підручник НТУ «ХП», 2014. – 162 с.

ISBN 978-966-593-864-4 (повне вид.)

ISBN 978-966-593-873-6 (мод. 9)

Навчальний посібник входить до серії «Математичний аналіз» і є дев'ятою частиною збірника, що складається з дев'яти частин. Містить короткі теоретичні відомості, питання для самоперевірки, велику кількість розібраних зразків, а також прикладів для самостійного розв'язання, призначених для практичних занять, як аудиторних, так і домашніх. Наведено обов'язкові домашні завдання, зразки модульних контрольних робіт. Окремий розділ містить довідник з елементарної математики.

Призначено для студентів технічних спеціальностей.

Лл. 11. Табл. 1. Бібліогр.: 15 назв.

ББК 22. 161
УДК 517.2

ISBN 978-966-593-864-4
ISBN 978-966-593-873-6 (мод. 9)

© Н. М. Ясницька, О. Б. Ахієзер,
А. А. Боева, О. А. Геляровська, 2014
© Вид-во «Підручник НТУ «ХП», 2014

ЗМІСТ

ВСТУП	4
9.1. Числові ряди. Основні поняття та визначення. Ознаки збіжності	10
Аудиторне заняття 9.1	21
Самостійна робота 9.1	22
9.2. Інтегральна ознака Коші. Знакозмінні ряди. Абсолютна і умовна збіжність.....	23
Аудиторне заняття 9.2	31
Самостійна робота 9.2	32
9.3. Функціональні ряди. Область збіжності. Рівномірна збіжність функціональних рядів.....	33
Аудиторне заняття 9.3	46
Самостійна робота 9.3	47
9.4. Степеневі ряди. Область збіжності. Властивості степеневих рядів	48
Аудиторне заняття 9.4	57
Самостійна робота 9.4	57
9.5. Ряди Тейлора та їх застосування	58
Аудиторне заняття 9.5	68
Самостійна робота 9.5	69
9.6. Ряди Фур'є I.....	70
Аудиторне заняття 9.6	84
Самостійна робота 9.6	84
9.7. Ряди Фур'є II	85
Аудиторне заняття 9.7	96
Самостійна робота 9.7	96
9.8. Теоретичні питання з теми «Ряди».....	98
9.9. Зразки модульної контрольної роботи з теми «Ряди»	100
9.10. Варіанти обов'язкових домашніх завдань з теми «Ряди»	102
9.11. Довідковий матеріал	152
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	160

ВСТУП

В технічних університетах України протягом останніх років відбуваються зміни у програмах та методиках викладання курсу математичного аналізу, що пов'язані з необхідністю наблизити курс до потреб інженерних дисциплін, водночас зберігаючи високий рівень фундаментальної освіти.

Пропонований посібник, що складається з 9 частин, призначений для студентів вищих технічних навчальних закладів з розширеною програмою з математичних дисциплін, в якій курсу «Математичний аналіз» відведено 648 годин, у тому числі 432 – для самостійної роботи. Цей посібник призначений зокрема для підготовки бакалаврів у галузі знань «Системні науки та кібернетика» з напрямків «Прикладна математика» та «Системний аналіз».

Структура посібника відповідає кредитно-модульній системі навчання. Весь курс, що вивчається протягом 3 семестрів, розбито на 9 модулів, кожен з яких, у свою чергу, складається з декількох підмодулів. Кожен з підмодулів містить теоретичні відомості, приклади розв'язання типових задач, приблизний набір задач для роботи з викладачем в аудиторії, задачі для самостійної роботи, варіанти індивідуальних домашніх завдань та зразки модульних контрольних робіт.

Теоретична частина підмодуля містить необхідні визначення, формулювання теорем, формули. Вона ілюструється розібраними прикладами і вправами, виконання яких сприяє засвоєнню таких фундаментальних понять математичного аналізу, як границя послідовності та функції, неперервність, диференційовність, інтеграл, характер збіжності функціонального ряду тощо.

Вивчення цієї частини підмодуля допомагає при виконанні аудиторної і домашньої роботи, але не виключає необхідності роботи з підручником і конспектом.

У процесі вивчення матеріалу модуля студенти виконують обов'язкові домашні завдання (ОДЗ). В кожному з 9 підмодулів наведено 25 варіантів таких завдань приблизно однакової складності. Студенти усно захищають виконані ОДЗ напередодні написання двохчасової модульної контрольної роботи.

Зразки варіантів модульної контрольної роботи і перелік теоретичних питань, що містяться в ній, наведені у кінці кожного модуля.

Для отримання високої оцінки з модульної контрольної роботи необхідно знати не тільки формулювання та визначення, але і доведення теорем. Це потребує роботи з конспектом та вивчення відповідної літератури. Перелік рекомендованої літератури наведено в кінці кожного модуля.

Структура курсу «Математичний аналіз»:

Назва модуля	Назва підмодуля
Модуль 1 Вступ до математичного аналізу. Елементи теорії множин, послідовності	<i>Підмодуль 1.</i> Логічні знаки. Метод математичної індукції. Деякі нерівності.
	<i>Підмодуль 2.</i> Елементи теорії множин.
	<i>Підмодуль 3.</i> Супремум та інфімум числової множини. Гранична точка множини.
	<i>Підмодуль 4.</i> Способи задання послідовності. Основні визначення.
	<i>Підмодуль 5.</i> Границя числової послідовності. Ознаки існування границі.
	<i>Підмодуль 6.</i> Техніка обчислювання границі послідовності.
	Модульна контрольна робота №1.
Модуль 2 Границя і неперервність функції однієї змінної	<i>Підмодуль 1.</i> Визначення границі функції за Коші та за Гейне. Нескінченно великі й нескінченно малі функції.
	<i>Підмодуль 2.</i> Обчислення найпростіших границь.
	<i>Підмодуль 3.</i> Перша і друга визначні границі й висновки з них.
	<i>Підмодуль 4.</i> Обчислення границь за допомогою таблиці еквівалентних нескінченно малих.
	<i>Підмодуль 5.</i> Порівняння нескінченно малих і нескінченно великих функцій. Обчислення границь за допомогою відношень « o » і « O ».
	<i>Підмодуль 6.</i> Неперервні функції.
	Модульна контрольна робота № 2.

Назва модуля	Назва підмодуля
Модуль 3 Диференціальне числення функцій однієї змінної	<i>Підмодуль 1.</i> Визначення похідної. Геометричний і механічний зміст.
	<i>Підмодуль 2.</i> Техніка диференціювання.
	<i>Підмодуль 3.</i> Диференціал функції. Застосування диференціювання для наближених обчислень.
	<i>Підмодуль 4.</i> Похідні і диференціали вищих порядків.
	<i>Підмодуль 5.</i> Теореми про середнє. Правило Лопіталя.
	<i>Підмодуль 6.</i> Формула Тейлора. Елементи поведінки функції.
	<i>Підмодуль 7.</i> Дослідження поведінки функцій. Асимптоти графіка функції.
	<i>Підмодуль 8.</i> Побудування графіків.
	Модульна контрольна робота № 3.
Модуль 4 Невизначений інтеграл	<i>Підмодуль 1.</i> Основні визначення і формулювання. Безпосереднє інтегрування.
	<i>Підмодуль 2.</i> Метод підведення під знак диференціала. Обчислення інтегралів виду $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx \text{ і } \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx .$
	<i>Підмодуль 3.</i> Заміна змінної у невизначеному інтегралі.
	<i>Підмодуль 4.</i> Метод інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.
	<i>Підмодуль 5.</i> Раціональні функції. Розкладання на найпростіші дроби. Інтегрування раціональної функції.
	<i>Підмодуль 6.</i> Обчислення інтегралів виду $\int R(\sin x, \cos x) dx .$
	<i>Підмодуль 7.</i> Інтегрування ірраціональних виразів.
	Модульна контрольна робота № 4.

Назва модуля	Назва підмодуля
Модуль 5 Визначений інтеграл і його застосування. Невласні інтеграли	<i>Підмодуль 1.</i> Інтеграл Рімана. Основні визначення. Обчислення за формулою Ньютона-Лейбніца.
	<i>Підмодуль 2.</i> Метод інтегрування частинами і заміна змінної у визначеному інтегралі.
	<i>Підмодуль 3.</i> Обчислення площі плоскої фігури за допомогою визначеного інтеграла.
	<i>Підмодуль 4.</i> Обчислення довжини дуги за допомогою визначеного інтеграла.
	<i>Підмодуль 5.</i> Обчислення площі поверхні обертання, об'єму тіла обертання, об'єму за відомими поперечними перерізами.
	<i>Підмодуль 6.</i> Невласні інтеграли першого роду.
	<i>Підмодуль 7.</i> Невласні інтеграли другого роду.
	Модульна контрольна робота № 5.
Модуль 6 Диференціальне числення функцій багатьох змінних	<i>Підмодуль 1.</i> Функції в R^n . Границя. Неперервність.
	<i>Підмодуль 2.</i> Частинні похідні. Перший диференціал функції декількох змінних.
	<i>Підмодуль 3.</i> Похідні і диференціали складних функцій. Похідні функцій, заданих неявно.
	<i>Підмодуль 4.</i> Похідні і диференціали вищих порядків.
	<i>Підмодуль 5.</i> Геометричні застосування. Задача про знаходження найбільших і найменших значень.
	<i>Підмодуль 6.</i> Локальний екстремум функції декількох змінних.
	<i>Підмодуль 7.</i> Умовний екстремум.
	Модульна контрольна робота № 6.
Модуль 7 Кратні інтеграли	<i>Підмодуль 1.</i> Подвійні інтеграли. Основні визначення. Властивості. Обчислення подвійного інтеграла по прямокутній області.

Назва модуля	Назва підмодуля
Модуль 7 Кратні інтеграли	<i>Підмодуль 2.</i> Заміна змінної в подвійному інтегралі. Перехід до полярної системи координат і узагальненої полярної системи координат.
	<i>Підмодуль 3.</i> Геометричні та фізичні застосування подвійного інтеграла.
	<i>Підмодуль 4.</i> Потрійний інтеграл. Визначення, властивості, обчислення в декартовій системі координат.
	<i>Підмодуль 5.</i> Заміна змінної в потрійному інтегралі.
	<i>Підмодуль 6.</i> Застосування потрійних інтегралів.
	Модульна контрольна робота № 7.
Модуль 8 Криволінійні та поверхневі інтеграли. Теорія поля	<i>Підмодуль 1.</i> Криволінійні інтеграли першого роду та їх застосування.
	<i>Підмодуль 2.</i> Криволінійні інтеграли другого роду (по координатах).
	<i>Підмодуль 3.</i> Поверхневі інтеграли.
	<i>Підмодуль 4.</i> Скалярне поле. Основні характеристики скалярного поля.
	<i>Підмодуль 5.</i> Векторне поле.
	<i>Підмодуль 6.</i> Потік векторного поля через поверхню. Циркуляція.
	Модульна контрольна робота № 8.
Модуль 9 Ряди	<i>Підмодуль 1.</i> Числові ряди. Основні поняття та визначення. Ознаки збіжності.
	<i>Підмодуль 2.</i> Інтегральна ознака Коші. Знакозмінні ряди. Абсолютна і умовна збіжність.
	<i>Підмодуль 3.</i> Функціональні ряди. Область збіжності. Рівномірна збіжність функціональних рядів.
	<i>Підмодуль 4.</i> Степеневі ряди. Область збіжності. Властивості степеневих рядів.
	<i>Підмодуль 5.</i> Ряди Тейлора та їх застосування.
	<i>Підмодуль 6.</i> Ряди Фур'є I.
	<i>Підмодуль 7.</i> Ряди Фур'є II.
	Модульна контрольна робота № 9.

Модуль 9 «Ряди» розрахований на 90 годин (18 годин лекційних занять, 18 годин практичних занять в аудиторії, 54 години самостійної роботи).

Весь матеріал розподілено на 7 підмодулів. Перші два підмодуля містять основні поняття, формулювання ознак збіжності числових рядів. Також, розібрано приклади застосування цих ознак для дослідження збіжності додатних і знакозмінних рядів.

В третьому і четвертому підмодулях містяться необхідні відомості про функціональні ряди, визначення поточної та рівномірної збіжності, а також, властивості рівномірно збіжних рядів, збіжність степеневих рядів.

У п'ятому підмодулі, який пов'язаний з рядами Тейлора, викладено основні способи розкладання функцій в ряд Тейлора та їх застосування.

Підмодулі шостий і сьомий містять основні теоретичні відомості про простір $R[a; b]$, характер збіжності рядів Фур'є, способи розкладання функції в ряд Фур'є.

Обов'язкове домашнє завдання (ОДЗ-І) розбито на дві частини. ОДЗ-І студенти виконують і здають після вивчення перших чотирьох підмодулів. Друга частина ОДЗ виконується після вивчення підмодулів 9.5-9.7.

Для отримання високої оцінки за модуль потрібно знати не тільки визначення і формулювання, що містяться в підмодулях 9.1-9.9, але й доведення основних теорем. Це потребує роботи з конспектом та вивчення літератури.

Знання та вміння, одержані в модулі 9, є необхідними при вивченні багатьох математичних дисциплін, зокрема, функціонального аналізу, теорії функцій комплексної змінної, диференціальних рівнянь.

Модуль 9. РЯДИ

9.1. Числові ряди. Основні поняття та визначення. Ознаки збіжності

1°. Нехай $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числова послідовність. Вираз

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \text{ або } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

називають *числовим рядом*, а числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – *членами ряду*.

2°. Суму n перших членів ряду називають n -ю *частковою сумою* і позначають S_n , тобто:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k .$$

Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, отриманий з ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ викреслюванням n -ї часткової суми, називають n -им *залишком ряду* і позначають R_n . Таким чином:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_n + R_n .$$

3°. Якщо існує границя послідовності часткових сум $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, що дорівнює S (тобто: $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *збіжним рядом*, а число S – *сумою ряду*.

Приклади

1. Дослідіть збіжність ряду геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$.

2. Дослідіть збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, якщо члени ряду a_n можна представити у вигляді $a_n = b_{n+1} - b_n$, та існує $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

3. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.
4. Доведіть, що ряд збігається і обчисліть суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Розв'язання

1. Часткова сума ряду геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ дорівнює

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Якщо $|q| < 1$, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}$.

Якщо $|q| > 1$, то послідовність $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ є нескінченно великою.

При $q = -1$: $S_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n = 2k; \\ 1, & \text{якщо } n = 2k - 1. \end{cases}$ Границя такої послідовності не існує.

При $q = 1$: $S_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$. Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ збігається при $|q| < 1$ і розбігається при $|q| \geq 1$.

2. Якщо a_n представлено у вигляді: $a_n = (b_{n+1} - b_n)$, то:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \\ &= b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + b_4 - b_3 + \dots + b_{n+1} - b_n = b_{n+1} - b_1. \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - b_1) = b - b_1.$$

Таким чином, ряд збігається і його сума S дорівнює $(b - b_1)$.

3. У цьому випадку $a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$.

$$a_1 = \ln 2 - \ln 1,$$

$$a_2 = \ln 3 - \ln 2,$$

.....

$$a_n = \ln(n+1) - \ln(n).$$

$$S_n = a_1 + \dots + a_n = \ln(n+1),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty.$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ розбігається.

4. Загальний член ряду можна перетворити в різницю двох елементарних дробів:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Тобто,

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2},$$

$$a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

.....

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

$$S_n = a_1 + \dots + a_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ збігається і його сума дорівнює 1.

4°. Збіжний ряд має наступні властивості:

1) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається і має суму A , то $\forall C \in \mathbb{R}$:

$\sum_{n=1}^{\infty} (C \cdot a_n)$ також збігається і має суму $C \cdot A$;

2) якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються відповідно до A і B , то $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ збігається до $(A + B)$;

3) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то послідовність залишків $\{R_n\}$ збігається до нуля.

5°. Збіжність числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ еквівалентна збіжності послідовності часткових сум $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Відповідно до критерію Коші для збіжності такої послідовності необхідно і достатньо, щоб

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N(\varepsilon) \forall p \in \mathbb{N} : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Таким чином, для збіжності числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ необхідно і достатньо, щоб

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N(\varepsilon) \forall p \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

6°. Наслідком критерію Коші є необхідна ознака збіжності: якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Зауваження. Рівність нулю $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ є тільки необхідною ознакою: з того, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, не випливає збіжність ряду. Ознака використовується для встановлення розбіжності ряду: якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається.

Приклади

1. Дослідіть збіжність числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 2) \ln \left(\frac{n^2 + 1}{n^2} \right)$.
2. Використовуючи критерій Коші, доведіть розбіжність гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Розв'язання

1. Обчислимо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 2) \ln \left(\frac{n^2 + 1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 2) \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2}{n^2} = 1 \neq 0.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то, відповідно до необхідної ознаки, ряд розбігається.

2. Довести за допомогою критерію Коші, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається, означає довести, що $\exists \varepsilon > 0 \exists p$ таке, що яке б не було N , знайдеться $n > N$ таке, що: $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| > \varepsilon$.

У нашому випадку $a_n = \frac{1}{n}$. Нехай $p = n$. Тоді:

$$\begin{aligned} |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}| &= \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right| > \left| \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} \right| = \\ &= n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отже, вибираючи $\varepsilon = \frac{1}{2}$ і $p = n$, одержимо

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| > \varepsilon,$$

а отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається.

Ряди з невід'ємними членами

7°. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *невід'ємним рядом*, якщо $\forall n \ a_n \geq 0$.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ невід'ємний, то границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ або існує й додатна (у цьому випадку ряд збігається), або нескінченна (ряд розбігається). Ситуації, коли границі немає (скінченної або нескінченної), бути не може.

Справедлива **теорема**: для збіжності невід'ємного числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ необхідно і достатньо, щоб послідовність його часткових сум $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ була обмежена зверху, тобто:

$$\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} : S_n < M .$$

Основними ознаками, за допомогою яких досліджують збіжність невід'ємних рядів, є:

- ознаки порівняння;
- ознака Даламбера;
- радикальна та інтегральна ознаки Коші.

8°. Ознаки порівняння засновані на порівнянні даного ряду з рядом, про збіжність якого відомо. Як такий ряд часто вибирають *узагальнений гармонічний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, що збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \leq 1$.

Теорема 1 (ознака порівняння). Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – невід'ємні ряди, причому $0 \leq a_n \leq b_n$. Тоді зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а з розбіжності $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – розбіжність $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема 2 (гранична ознака порівняння). Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – невід’ємний ряд. Якщо a_n при $n \rightarrow \infty$ нескінченно мала такого ж порядку малості, як $\frac{1}{n^\alpha}$, тобто $a_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, то при $\alpha > 1$ ряд збігається, а при $\alpha \leq 1$ розбігається.

Приклади

Дослідіть збіжність додатних числових рядів.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right). \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(n^2 + 2n)}{3^n + n^2}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \arctg \frac{1}{2\sqrt{n}}. \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \cdot \sin \frac{1}{n}\right)^\alpha.$$

Розв’язання

1. В цьому випадку $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right)$. При $n \rightarrow \infty$ a_n – нескінченно мала величина. Якщо скористаємося еквівалентністю $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, то будемо мати:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right) \sim \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{n^{4/3}} \quad \left\| \alpha = \frac{4}{3} > 1 \right\| \Rightarrow \text{ряд збігається.}$$

2. Для дослідження збіжності скористаємося теоремою 1. Для цього оцінимо a_n :

$$a_n = \frac{\arctg(n^2 + 2n)}{3^n + n^2} < \frac{\frac{\pi}{2}}{3^n + n^2} < \frac{\pi}{n^2}.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається, то збігається і ряд $\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Відповідно до теореми 1, ряд, що досліджується, теж збігається.

3. У цьому випадку оцінити порядок малості a_n при $n \rightarrow \infty$ можна, скориставшись еквівалентністю $\arctg x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \arctg \frac{1}{2\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \text{ряд розбігається.}$$

4. Для дослідження збіжності за допомогою ознаки порівняння тут потрібно скористатися тим, що при великих n послідовність e^n зростає швидше за будь-який степінь n , тобто:

$$e^n > n^k \quad (\text{зокрема } k = 4).$$

$$a_n = n^2 \cdot e^{-n} = \frac{n^2}{e^n} < \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} \quad \|\alpha = 2 > 1\| \Rightarrow \text{ряд збігається.}$$

5. У цьому випадку оцінювати порядок малості a_n при $n \rightarrow \infty$, замінюючи $\sin \frac{1}{n}$ еквівалентною величиною $\frac{1}{n}$, не можна,

оскільки $\frac{1}{n}$ і $\sin \frac{1}{n}$ еквівалентні між собою. Тут потрібно використовувати той факт, що $(x - \sin x) = O(x^3)$ при $x \rightarrow 0$. Перетворимо загальний член ряду a_n :

$$a_n = \left(1 - n \sin \frac{1}{n}\right)^\alpha = n^\alpha \cdot \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)^\alpha,$$

тоді одержимо:

$$a_n = n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)^\alpha = n^\alpha O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

Отже, при $(2\alpha) > 1$ $\left(\alpha > \frac{1}{2}\right)$ ряд збігається, а при $\alpha \leq \frac{1}{2}$ – розбігається.

9°. Ознака Даламбера. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – додатний ряд і $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Якщо $l > 1$, то ряд розбігається, якщо $l < 1$ – збігається.

Зверніть увагу на те, що при $l = 1$ ознака Даламбера не дає відповіді на питання про збіжність ряду.

Приклади

За допомогою ознаки Даламбера дослідіть збіжність рядів.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!(2,7)^{n+1}}$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{3^n \cdot n!}$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n}$.

Розв'язання

- Оскільки $a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}$, то:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 = \frac{1}{3}.$$

Таким чином, границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ існує і менша за 1. Відповідно до ознаки Даламбера ряд збігається.

- У цьому випадку

$$a_n = \frac{n^n}{n!(2,7)^{n+1}}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)! \cdot (2,7)^{n+2}},$$

тоді:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!(2,7)^{n+1}}{(n+1)! \cdot (2,7)^{n+2} \cdot n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n \cdot 2,7} = \frac{e}{2,7} > 1,$$

$(e > 2,7) \Rightarrow$ ряд розбігається.

3. Тут

$$a_n = \frac{(2n+1)!!}{3^n \cdot n!}, \quad a_{n+1} = \frac{(2n+3)!!}{3^{n+1} \cdot (n+1)!},$$

тоді:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)!! \cdot 3^n \cdot n!}{3^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot (2n+1)!!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!! (2n+3)n!}{3 \cdot n! (n+1)(2n+1)!!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3(n+1)} = \frac{2}{3} < 1. \end{aligned}$$

Отже, ряд збігається.

4. Загальний член ряду $a_n = \frac{(2n)!!}{n!} \cdot \arctg \frac{1}{3^n}$, отже

$$a_{n+1} = \frac{(2n+2)!!}{(n+1)!} \cdot \arctg \frac{1}{3^{n+1}},$$

тоді

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n+2)!!}{(n+1)!} \cdot \arctg \frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{(2n)!!}{n!} \cdot \arctg \frac{1}{3^n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{(2n)!!} \cdot (2n+2) \cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{3^n}}{\cancel{(2n)!!} \cdot \cancel{n!} \cdot (n+1) \cdot \cancel{3^n} \cdot 3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)}{(n+1) \cdot 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \text{ряд збігається.} \end{aligned}$$

10°. Радикальна ознака Коші. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – невід’ємний числовий ряд, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Якщо $l > 1$, то ряд розбігається, при $l < 1$ – збігається.

Так само, як і ознака Даламбера, ознака Коші при $l = 1$ не дає відповіді на питання про збіжність ряду.

Приклади

Використовуючи радикальну ознаку Коші, дослідіть збіжність рядів.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n+5} \right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^{n^2} \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n+1}}{(3n-1)^n \cdot n}$$

Розв'язання

1. У цьому випадку

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_n} &= \frac{3n}{n+5} \cdot \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n+5} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3-1}{n+3} \right)^n = \\ &= 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n+3} \right)^{-(n+3)} \right)^{-\frac{n}{n+3}} = \frac{3}{e} > 1. \end{aligned}$$

Отже, ряд розбігається.

При дослідженні збіжності ряду за допомогою радикальної ознаки Коші часто доводиться обчислювати

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1.$$

2. У даному прикладі:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{(2n+1)^{1+\frac{1}{n}}}{(3n-1)\sqrt[n]{n}}.$$

Тоді:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n-1} \right) \cdot \frac{\sqrt[n]{2n+1}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{ряд збігається.} \end{aligned}$$

Аудиторне заняття 9.1

1. Доведіть, що ряди збігаються і обчисліть їх суму.

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$. 1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$.

1.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-n}{(n+3)(n+1)n}$.

2. Доведіть, що ряди розбігаються.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n+3}$. 2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1} \right)^{n^2}$.

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n+3} \cdot \arcsin \frac{1}{n^2+2}$.

3. Дослідіть збіжність рядів за допомогою ознак порівняння.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \arcsin \frac{1}{\sqrt[5]{n^4}}$. 3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+4}{n^2+3}$.

3.3. $\sum_{n=5}^{\infty} \ln \frac{1}{\cos \frac{2\pi}{n}}$. 3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n-1}{n^2+1}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4+4}}$.

4. З'ясуйте, при яких значеннях α ряд збігається:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \ln \frac{n+1}{n-1} - \frac{2}{n-1} \right|^{\alpha}.$$

5. Дослідіть збіжність рядів за допомогою ознак Даламбера і Коші.

5.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^n}{n!}$. 5.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$.

5.3. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$. 5.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(1,5)^n \cdot n!}$.

5.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3 \cdot 4^{3n}}$. 5.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+6} \right)^{n^3}$.

Самостійна робота 9.1

1. Доведіть, що ряди збігаються і обчисліть їх суму.

$$1.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 70n - 24}. \quad 1.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 7^n}{35^n}.$$

$$1.3. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{8n-10}{(n-1)(n+1)(n-2)}.$$

2. Використовуючи необхідну ознаку, ознаки порівняння, ознаку Даламбера і радикальну ознаку Коші, дослідіть збіжність рядів.

$$2.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!!}{2^n \cdot n!}. \quad 2.2. \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}.$$

$$2.3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{3n+1}{2n+2}. \quad 2.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{(n^\alpha+1)}} - 1}{n}.$$

$$2.5. \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right).$$

$$2.6. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+3}{n^2+2}} \cdot \arcsin \sqrt{\frac{n}{n^2+3}}.$$

$$2.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{n+4} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}.$$

9.2. Інтегральна ознака Коші. Знакозмінні ряди. Абсолютна і умовна збіжність

1°. Інтегральна ознака Коші збіжності числового ряду. Якщо функція $f(x)$ невід'ємна і спадає на проміжку $[a, +\infty)$ ($a \geq 1$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n = f(n)$, і інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ або обидва збігаються, або обидва розбігаються.

Приклади

Дослідіть збіжність числових рядів.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.
2. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^\beta n}$.
3. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + 2) \ln(n-2)}$.

Розв'язання

1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ називається узагальненим гармонічним рядом і часто використовується в ознаці порівняння. Дослідимо його збіжність інтегральною ознакою Коші. При $\alpha > 0$ функція $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ невід'ємна і спадає на проміжку $[1, +\infty)$. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ при $\alpha > 1$ збігається, при $\alpha \leq 1$ розбігається.

Таким чином, доведено, що при значенні $\alpha \leq 1$ узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ розбігається, а при $\alpha > 1$ збігається.

2. Розглянемо при $x \geq 3$ функцію $f(x) = \frac{1}{x \ln^\beta x}$. На проміжку $[3, +\infty)$ $f(x)$ – додатна, спадна функція, отже, вихідний ряд і інтеграл $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\beta x}$ поведуться однаково: або обидва збігаються, або обидва розбігаються.

При $\beta \neq 1$

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\beta x} = \int_3^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^\beta x} = \frac{\ln^{-\beta+1} x}{-\beta+1} \Big|_3^{+\infty} = \begin{cases} \infty, & \beta < 1; \\ \frac{\ln^{1-\beta} 3}{\beta-1}, & \beta > 1, \end{cases}$$

тобто при $\beta < 1$ інтеграл розбігається, а при $\beta > 1$ збігається.

При $\beta = 1$ $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x| \Big|_3^{+\infty}$, і інтеграл розбігається.

Таким чином, ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^\beta n}$ збігається при значеннях $\beta > 1$ і розбігається при $\beta \leq 1$.

3. При дослідженні цього ряду безпосередньо застосувати інтегральну ознаку важко. Спочатку відзначимо, що:

$$a_n = \frac{n}{(n^2 + 2) \ln(n-2)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(n-2) \ln(n-2)},$$

тобто, вихідний ряд і ряд $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-2) \ln(n-2)}$ або обидва збігаються,

або обидва розбігаються. Для дослідження ряду $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-2) \ln(n-2)}$

застосуємо інтегральну ознаку Коші:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2) \ln(x-2)} > 0, \quad x \in [4, +\infty),$$

$$f(x) \text{ – спадає, } x \in [4, +\infty),$$

$$\int_4^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)\ln(x-2)} = \int_4^{+\infty} \frac{d(\ln(x-2))}{\ln(x-2)} =$$

$$= \ln|\ln(x-2)| \Big|_4^{+\infty} = +\infty \Rightarrow \text{інтеграл розбігається.}$$

Отже, вихідний ряд розбігається.

2°. Числовий ряд називається *знакозмінним рядом*, якщо він містить нескінченну кількість додатних і нескінченну кількість від'ємних членів.

Наприклад, числові ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sqrt{n}}$$
 є знакозмінними.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sqrt{n}} = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} - \dots$$

3°. Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *абсолютно збіжним рядом*, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, і *умовно збіжним рядом*, якщо сам ряд збігається, а ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбігається.

4°. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно, то він збігається і у звичайному розумінні і $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Для дослідження ряду на абсолютну збіжність використовують всі ознаки збіжності додатних числових рядів.

5°. Якщо ряд збігається абсолютно, то він має всі властивості скінченної суми, зокрема, властивість комутативності (від перестановки членів його сума не зміниться) і властивість асоціативності (підсумовувати можна групами, поставивши дужки).

Для умовно збіжного ряду це не так. Справедлива **теорема Рімана**. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається умовно, то, яке б не було число A , знайдеться перестановка елементів ряду, така, що сума отриманого ряду дорівнює A і така перестановка, що отриманий ряд буде розбігатися.

6°. *Знакопереміжним рядом* називають ряд виду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$,

де $a_n > 0$.

7°. *Ознака Лейбніца*. Якщо:

- 1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ починаючи з деякого номера монотонно спадає;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ – збігається і його сума S не перевищує a_1 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n = S \leq a_1.$$

8°. *Наслідок*. Оскільки будь-який залишок знакопереміжного ряду $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k$ також є знакопереміжним рядом, то його сума не перевищує по модулю першого члена a_{n+1} :

$$|R_n| \leq a_{n+1}.$$

Зауваження. Монотонне спадання послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ є істотною вимогою.

Приклад

Дослідіть збіжність числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \right)$.

Розв'язання

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots$$

є знакопереміжним: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$, причому:

$$a_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{2k+1}-1}, \quad a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2k+1}+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Однак, ряд розбігається через відсутність монотонного спадання a_n .

Справді, часткова сума парного числа елементів цього ряду дорівнює:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k}$$

і при $n \rightarrow \infty$ прямує до ∞ , а отже, ряд розбігається.

Приклад говорить про те, що умову монотонного спадання $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ потрібно перевіряти.

9°. Дослідження знакопереміжного ряду на збіжність краще починати з дослідження абсолютної збіжності, тобто з дослідження збіжності додатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Це можна зробити за допомогою однієї з ознак збіжності для додатних числових рядів. Якщо цей ряд збігається, то вихідний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ збігається абсолютно. Якщо ж

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається, то у вихідного ряду абсолютної збіжності немає.

Для дослідження умовної збіжності потрібно застосовувати ознаку Лейбніца.

Приклади

Дослідіть збіжність знакозмінних рядів.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot \ln^2(n+1)}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln^2 n}{n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cos 2n}{\sqrt[3]{n^8 + 3n}}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2(n+1)} \cdot \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sin n}{n}$.

Розв'язання

1. Ряд є знакопереміжним. Дослідимо збіжність ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n+1)}, \quad a_n = \frac{1}{n \ln^2(n+1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}$ дослідимо на збіжність за допомогою

інтегральної ознаки Коші:

$$f(x) = \frac{1}{(x+1) \ln^2(x+1)} > 0, \quad f(x) \downarrow \quad x \in [1, +\infty);$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1) \ln^2(x+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{d(\ln(x+1))}{\ln^2(x+1)} = \frac{-1}{\ln(x+1)} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow$$

\Rightarrow інтеграл збігається,

а отже, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot \ln^2(n+1)}$ збігається.

Таким чином, вихідний ряд збігається абсолютно.

2. Цей ряд також є знакопереміжним. Дослідимо його на абсолютну збіжність.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n}$ – розбігається, тому що $\frac{\ln^2 n}{n} > \frac{1}{n}$, а гармонічний

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбігається. Виходить, абсолютної збіжності немає.

Дослідимо на умовну збіжність за ознакою Лейбніца:

а) для того, щоб установити монотонне спадання послідовності $\left\{ \frac{\ln^2 n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$, розглянемо функцію $\phi(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ і покажемо, що,

починаючи з деякого x , ця функція спадає, тобто $\phi'(x) < 0$:

$$\phi'(x) = \frac{\ln x \cdot (2 - \ln x)}{x^2} < 0 \text{ при } \ln x > 2, \text{ тобто } x > e^2,$$

тому $\left\{ \frac{\ln^2 n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ спадає при $n > e^2$.

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0.$$

(тут два рази застосовано правило Лопіталя). Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{n} = 0$.

Відповідно до ознаки Лейбніца ряд збігається умовно.

3. Даний ряд знакозмінний ($\cos 2n$ може набувати значень різних знаків), але знакопереміжним не є. Дослідимо його на абсолютну збіжність.

Оскільки:

$$\left| \frac{(n+1) \cos 2n}{\sqrt[3]{n^8 + 3n}} \right| = \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^8 + 3n}} |\cos 2n| < \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^8 + 3n}} < \frac{n}{n^{8/3}} = \frac{1}{n^{5/3}} \left\| \alpha = \frac{5}{3} > 1 \right\|,$$

то ряд збігається абсолютно.

4. У цьому випадку ряд очевидно знакопереміжний.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2(n+1)} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ збігається, оскільки

$$1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n},$$

а отже,

$$a_n = \frac{1}{\ln^2(n+1)} \cdot \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n \ln^2(n+1)}.$$

Збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n+1)}$ доведено в пункті 1).

Таким чином, вихідний ряд збігається умовно.

5. Даний ряд знакозмінний, але не знакопереміжний ($\sin n$ може набувати значень різних знаків). Дослідимо ряд на абсолютну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \cdot \left| \operatorname{arctg} \frac{\sin n}{n} \right|.$$

Тут

$$a_n = \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \cdot \left| \operatorname{arctg} \frac{\sin n}{n} \right| = \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \operatorname{arctg} \frac{|\sin n|}{n}.$$

Оскільки

$$\frac{|\sin n|}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0, \text{ то } \operatorname{arctg} \frac{|\sin n|}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{|\sin n|}{n}, \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}.$$

А отже:

$$a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \cdot \frac{|\sin n|}{n} < \frac{1}{n^{6/5}} \left\| \alpha = \frac{6}{5} > 1 \right\| \Rightarrow \text{ряд збігається.}$$

Таким чином, вихідний ряд збігається абсолютно.

10°. Наслідок 8° з теореми Лейбніца часто використовують при наближеному обчисленні суми знакопереміжного ряду, тобто оцінці похибки, що виникає при заміні ряду його частковою сумою.

Приклади

1. Обчисліть суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ з точністю до $\varepsilon = 10^{-3}$.

2. Яку похибку допускають при заміні суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}$ сумою перших 4-х членів?

Розв'язання

1. Похибка, що виникає в результаті заміни суми знако-переміжного ряду сумою перших n членів, тобто частковою сумою S_n , дорівнює модулю залишку ряду $|R_n|$, що, відповідно до теореми Лейбніца, не перевищує a_{n+1} . У задачі вимагається, щоб ця похибка не перевищувала $\frac{1}{1000}$, тобто

$$\frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{1000} \Rightarrow (n+1)^3 > 1000 \Rightarrow n+1 > 10,$$

тобто $n > 9$. Отже, заміняючи суму ряду частковою сумою за умови, щоб похибка не перевищувала $\frac{1}{1000}$, варто зберегти перші дев'ять членів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \approx 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64} + \frac{1}{125} - \frac{1}{216} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{8^3} + \frac{1}{9^3} \approx 0,902.$$

2. Якщо замінити суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}$ першими чотирма членами, то похибка ε не буде перевищувати a_5 :

$$\varepsilon < \frac{1}{9!} = \frac{1}{362880} \approx 0,000003.$$

Таким чином, $\varepsilon = 10^{-5}$.

Аудиторне заняття 9.2

1. Дослідіть збіжність рядів.

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{(n^3 + 3n) \ln(n+1)}$.

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(3n^2-1) \cdot \sqrt{\ln^3(n+2)}}$.

$$1.3. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \ln^2 n}.$$

2. Дослідіть збіжність знакозмінних рядів.

$$2.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2) \cdot \ln^2(n+1)}.$$

$$2.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot \sin n}{\sqrt[3]{n^5 + 1}}.$$

$$2.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \ln^3 n}{n}.$$

$$2.4. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1) \cdot \operatorname{arctg} \frac{\cos n}{n}.$$

3. Обчисліть наближено з точністю до $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$3.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}.$$

$$3.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot n!}.$$

Самостійна робота 9.2

1. Дослідіть збіжність рядів.

$$1.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{(n+1) \cdot \ln^2(n+1)}.$$

$$1.2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} \cdot \ln^3 n}.$$

$$1.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{(5n^2+2) \cdot \sqrt{\ln(n+2)}}.$$

2. Дослідіть збіжність знакозмінних рядів.

$$2.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^5+1}} \cdot \cos n.$$

$$2.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \ln^2(n+1)}{n+1}.$$

$$2.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3) \cdot \ln^3(n+1)}.$$

3. Обчисліть з точністю до $\varepsilon = 10^{-3}$ суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot n!}$.

9.3. Функціональні ряди. Область збіжності. Рівномірна збіжність функціональних рядів

1°. Нехай $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – функціональна послідовність, яка визначена на множині $A \subset \mathbb{R}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ називається *збіжним рядом* в точці $x_0 \in A$, якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ збігається.

Множину B всіх точок збіжності називають *множиною збіжності*. Очевидно, що $B \subseteq A$.

Суму $S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x)$ називають *частковою сумою*. Якщо існує границя послідовності часткових сум $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, що дорівнює $S(x)$, то функціональний ряд називають *збіжним рядом на множині B* , а функцію $S(x)$ – *сумою ряду*. У нерівностях це визначення виглядає так:

$$\forall x \in B \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x):$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon, x), \quad \forall n \geq N: |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Зверніть увагу на те, що номер N , починаючи з якого $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, залежить не тільки від ε , але й від точки x .

Така збіжність називається *поточковою збіжністю*.

2°. Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ називається *рівномірно збіжним рядом на множині $B \subseteq A$ до функції $S(x)$* , якщо послідовність часткових сум $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рівномірно збігається до функції $S(x)$ на цій множині, тобто:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in B \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N: |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Тут $N(\varepsilon)$ не залежить від точки x , тобто число $N(\varepsilon)$ може бути обране однаковим для всіх $x \in B$.

Це ж визначення в іншій формі більш зручне для дослідження рівномірної збіжності ряду на деякій множині.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ називається *рівномірно збіжним рядом на множині B* , якщо:

$$\sup_{x \in B} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x \in B} |R_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Позначення: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xrightarrow[B]{}$.

Приклади

Визначте множину збіжності і множину абсолютної збіжності функціональних рядів.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}. \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n. \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{\sqrt[3]{n}}.$$

Розв'язання

1. Функції $a_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ визначені для всіх дійсних x :

$x \in (-\infty, +\infty)$. Якщо $|x| < 1$, то $|a_n(x)| = \frac{|x|^n}{1+x^{2n}} < |x|^n$. При кожному

$|x| < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$ збігається, отже, вихідний ряд при $|x| < 1$ збігається абсолютно.

Нехай $|x| > 1$, тоді

$$|a_n(x)| = \frac{|x|^n}{|x|^{2n} \left(1 + \frac{1}{|x|^{2n}}\right)} < \frac{1}{|x|^n + \frac{1}{|x|^n}} < \frac{1}{|x|^n}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|x|^n}$ при значеннях $|x| > 1$ також збігається абсолютно.

Залишається дослідити поведінку ряду при значеннях $|x| = 1$, тобто при $x = 1$ та $x = -1$. У цих точках $|a_n| = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, і, відповідно до необхідної ознаки, ряд розбігається.

Таким чином, множина збіжності розглянутого ряду співпадає з множиною абсолютної збіжності і представляє собою множину, отриману з \mathbb{R} видаленням двох точок $x = 1$ і $x = -1$: $B = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

2. Функції $a_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ визначені скрізь, крім значення $x = -1$: $A = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Нехай $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1$, тоді: $-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \Rightarrow x > 0$,

$$|a_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left|\frac{1-x}{1+x}\right|^n < \left|\frac{1-x}{1+x}\right|^n \Rightarrow \text{ряд збігається абсолютно.}$$

При $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| > 1$ ($x < 0$) ряд розбігається.

При $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| = 1$ ($x = 0$) одержуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, що збігається

умовно.

Таким чином, область збіжності B – проміжок $[0, +\infty)$.

3. У цьому випадку $a_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{\sqrt[3]{n}}$ визначені при $x > 0$:

$$A = (0; +\infty).$$

Якщо $|\ln x| < 1$, то ряд збігається абсолютно, оскільки ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{\sqrt[3]{n}} \text{ при } |q| < 1 \text{ збігається.}$$

При $|\ln x| > 1$ ряд розбігається.

При $\ln x = 1$ ($x = e$), ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ розбігається, при $\ln x = -1$

$\left(x = \frac{1}{e}\right)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ збігається умовно.

Таким чином, множиною збіжності ряду є проміжок $[1/e; e)$, а множиною абсолютної збіжності є інтервал $(1/e; e)$.

3°. Рівномірну збіжність функціонального ряду можна дослідити за допомогою визначення: для рівномірної збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ на множині B необхідно і достатньо, щоб:

$$\sup_{x \in B} |R_n(x)| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Безпосереднє використання визначення передбачає можливість оцінити модуль залишку $R_n(x)$ на множині B .

Приклади

Доведіть, що ряди рівномірно збігаються на заданих множинах.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n^3 - 2}}$, $B: x \in [0, 1]$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+(n-1)x)(1+nx)}$, $B: x \in [\delta, +\infty)$ ($\delta > 0$).

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} + \sqrt{x}}$, $B: x \in [0, +\infty)$.

Розв'язання

1. У цьому випадку при $B: x \in [0, 1]$ ряд знакопереміжний і збіжний. Оцінити залишок ряду в цьому випадку нескладно (наслідок з теореми Лейбніца):

$$\sup_{x \in [0,1]} |R_n(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^k}{\sqrt[3]{k^3 - 2}} \right| \leq \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt[3]{(n+1)^3 - 2}} \right| = \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^3 - 2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Таким чином, на множині $[0,1]$ ряд збігається рівномірно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3 - 2}} \xrightarrow{[0,1]}.$$

2. У цьому випадку помітимо, що:

$$a_n(x) = \frac{x}{(1+(n-1)x)(1+nx)} = \frac{1}{1+(n-1)x} - \frac{1}{1+nx},$$

$$S_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_n(x) = 1 - \frac{1}{1+nx},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{1+nx} \right) = 1.$$

Але тоді:

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = 1 - 1 + \frac{1}{1+nx} = \frac{1}{1+nx},$$

$$\sup_{x \in [\delta, +\infty)} |R_n(x)| = \sup_{x \in [\delta, +\infty)} \frac{1}{1+nx} = \frac{1}{1+n\delta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

звідки й витікає рівномірна збіжність досліджуваного ряду на заданій множині:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+(n-1)x)(1+nx)} \xrightarrow{[\delta, +\infty)}.$$

3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$ при будь-якому $x \in [0, +\infty)$ – знакочередуваний ряд. Відповідно до ознаки Лейбніца він збігається:

$$1) \frac{1}{\sqrt[3]{n+1+\sqrt{x}}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}} \Rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}} \right\}_{n=1}^{\infty} \downarrow \forall n \in \mathbb{N};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n + \sqrt{x}}} = 0.$$

Отже, $|R_n(x)|$ не перевищує модуля першого члена:

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n+1+\sqrt{x}}}.$$

Тоді:

$$\sup_{x \in [0, +\infty)} |R_n(x)| \leq \sup_{x \in [0, +\infty)} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1+\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

а отже:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n + \sqrt{x}}} \xrightarrow{x \in [0, +\infty)}.$$

4°. **Теорема Вейєрштрасса.** Нехай $a_n(x)$ визначено на множині A , $\forall x \in B \subseteq A$ $|a_n(x)| \leq c_n$ і числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ збігається. Тоді

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ збігається абсолютно й рівномірно на множині B .

Приклади

Доведіть абсолютну й рівномірну збіжність функціональних рядів на заданій множині.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(nx) \cdot \sin(\sqrt{nx})}{n(\sqrt{n+1})}, B = \mathbb{R}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx}{1+n^\alpha x^2}, B = \mathbb{R}, \alpha > 4.$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x+2)^n}{(n+1) \cdot \sqrt[3]{n+2}}, B: [-3, -1].$$

Розв'язання

1. Оскільки для всіх $x \in \mathbb{R}$ і всіх n

$$|\operatorname{arctg}(nx)| < \frac{\pi}{2}, \quad \left| \sin(\sqrt{nx}) \right| \leq 1, \text{ то:}$$

$$|a_n(x)| = \left| \frac{\operatorname{arctg}(nx) \cdot \sin(\sqrt{nx})}{n \cdot (\sqrt{n} + 1)} \right| < \frac{\frac{\pi}{2}}{n(\sqrt{n} + 1)} < \frac{\pi}{n^{3/2}}.$$

Зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ витікає (відповідно до ознаки Вейерштрасса) абсолютна і рівномірна збіжність розглянутого ряду на \mathbb{R} .

2. При оцінці $a_n = \frac{2nx}{1+n^\alpha x^2}$ скористаємося нерівністю між середнім арифметичним і середнім геометричним:

$$1 + n^\alpha x^2 \geq 2n^{\alpha/2} \cdot |x|.$$

Одержимо:

$$|a_n(x)| = \frac{2n \cdot |x|}{1 + n^\alpha x^2} \leq \frac{2n \cdot |x|}{2n^{\alpha/2} \cdot |x|},$$

якщо $x = 0$, $a_n(0) = 0$, тобто: $|a_n(x)| \leq \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}} \quad (\forall x)$.

Оскільки $\alpha > 4$, то $\left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) > 1$, а отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}}$ збігається,

звідки витікає рівномірна і абсолютна збіжність вихідного ряду на множині \mathbb{R} .

3. У цьому випадку:

$$|a_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n (x+2)^n}{(n+1)\sqrt[3]{n+2}} \right| = \frac{|x+2|^n}{(n+1)\sqrt[3]{n+2}}.$$

На розглянутій множині

$$-3 \leq x \leq -1 \quad \max_{[-3; -1]} |x+2| = 1.$$

Тому:

$$|a_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n+2}} < \frac{1}{n^{4/3}}.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ збігається, то ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x+2)^n}{(n+1)\sqrt[3]{n+2}} \xrightarrow{[-3; -1]}$$

5°. Рівномірно збіжні ряди мають наступні властивості скінченних сум.

Теорема 1. Якщо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ – неперервні функції на відрізку $[a, b]$, а ряд збігається рівномірно на $[a, b]$, то сума ряду $S(x)$ є неперервною на $[a, b]$.

Теорема 2. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ рівномірно збігається на $[a, b]$, функції $a_n(x)$ – неперервні на $[a, b]$, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x a_n(t) dt$ ($x_0 \in [a, b]$)

збігається рівномірно на $[a, b]$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ можна почленно інтегрувати, тобто:

$$\int_{x_0}^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x a_n(t) dt.$$

Теорема 3. Якщо функції $a_n(x)$ мають неперервні похідні на $[a, b]$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x) \xrightarrow{[a, b]}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ збігається хоча б в одній точці

$x_0 \in [a, b]$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xrightarrow{[a, b]}$, його сума має неперервну похідну на

$[a, b]$ і його можна почленно диференціювати, тобто:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x).$$

Приклади

1. Доведіть, що функція $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-nx}$ неперервна при значеннях $x > 0$ і обчисліть $\int_{\ln 2}^{\ln 5} f(x) dx$.

2. Знайдіть множину E , на якій визначена функція $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^5}}$, і дослідіть її на диференційовність.

3. Знайдіть суму ряду.

$$3.1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)x^{n+1}}.$$

$$3.2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

$$3.3. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 8n + 6)x^{n+1}.$$

Розв'язання

1. Доведемо спочатку, що при $x > 0$ ряд збігається і його сума неперервна. Для цього потрібно показати, що функція $a_n(x) = ne^{-nx}$ неперервна $\forall n$, а ряд на даній множині збігається рівномірно. Те, що функції ne^{-nx} неперервні при $x > \delta > 0$, очевидно. Для доведення рівномірної збіжності скористаємося ознакою Вейерштрасса і тим, що при $n \rightarrow \infty$, $x > \delta > 0$ e^{nx} зростає швидше за будь-який степінь nx :

$$n \cdot e^{-nx} = \frac{n}{e^{nx}} < \frac{n}{n^3 x^3} < \frac{1}{n^2 \delta^3}.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається, розглянутий ряд збігається рівномірно на проміжку $[\delta, +\infty)$. З неперервності $a_n(x)$ і рівномірної збіжності ряду витікає неперервність його суми $f(x)$.

Рівномірно збіжний ряд можна почленно інтегрувати:

$$\begin{aligned} \int_{\ln 2}^{\ln 5} f(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\ln 2}^{\ln 5} n \cdot e^{-nx} dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{e^{-nx}}{-n} \Big|_{\ln 2}^{\ln 5} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-n \cdot \ln 2} - e^{-n \cdot \ln 5}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{5^n} \right) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

2. Функції $a_n(x) = \frac{\cos nx}{n^{5/2}}$ визначені та неперервні $\forall x$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ на множині \mathbb{R} збігається; рівномірно збігається на $E = \mathbb{R}$, тому що:

$$\forall x \quad \left| \frac{\cos nx}{n^{5/2}} \right| \leq \frac{1}{n^{5/2}} \text{ і ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}} \text{ збігається.}$$

Сума ряду $f(x)$, відповідно до теореми 1, неперервна на \mathbb{R} .

Ряд, складений з похідних $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin nx}{n^{3/2}}$, очевидно, теж збігається рівномірно на \mathbb{R} $\left(\left| \frac{-\sin nx}{n^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}, \text{ а ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \text{ збігається} \right)$.

Отже, сума ряду – диференційовна на \mathbb{R} функція.

$$3.1. \text{ Ряд } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)x^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{x}\right)^{n+1}}{n+1}.$$

Позначимо $\frac{3}{x} = y$. Очевидно, що ряд збігається рівномірно при

$|y| = \left| \frac{3}{x} \right| < 1$ (тобто для значень $|x| > 3$) до деякої функції $f(y)$. Ряд,

складений з похідних $\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)y^n}{n+1}$, рівномірно збігається на тій же

множині $|y| < 1$.

Відповідно до теореми 2, ряд можна почленно диференціювати:

$$f'(y) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-y}, \quad |y| < 1;$$

$$f'(y) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-y} \Rightarrow f(y) = -\frac{1}{3} \ln|1-y| + C;$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Таким чином $f(y) = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{1}{1-y} \right|$, а отже:

$$f(x) = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x-3} \right|, \quad |x| > 3.$$

3.2. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$ рівномірно збігається на проміжку

$(-1; 1)$, отже, можемо скористатися теоремою 3. Нехай

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = S(x),$$

тоді

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)},$$

$$S''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Оскільки $|x| < 1$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow S''(x) = \frac{1}{1-x}; S''(0) = 1.$$

Отже,

$$S'(x) = \int_0^x S''(x) dx = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x| \Big|_0^x = -\ln|1-x|; S'(0) = 0.$$

$$S(x) = \int_0^x S'(x) dx = -\int_0^x \ln(1-x) dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \\ u = \ln(1-x), du = -\frac{dx}{1-x} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right\| = -\left(x \cdot \ln(1-x) \Big|_0^x + \int_0^x \frac{x dx}{1-x} \right) =$$

$$= -x \cdot \ln(1-x) + \int_0^x \frac{(x-1)+1}{x-1} dx = -x \cdot \ln(1-x) + \int_0^x dx + \int_0^x \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -x \cdot \ln(1-x) + x + \ln|x-1| = (1-x) \cdot \ln(1-x) + x.$$

Отже, $S(x) = (1-x) \cdot \ln(1-x) + x$.

3.3. З огляду на представлення

$$n^2 + 8n + 6 = (n+3)(n+2) + 3(n+2) - 6,$$

ряд можна розкласти на суму трьох рядів:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 8n + 6) x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2) x^{n+1} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) x^{n+1} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}.$$

Запровадимо позначення:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 8n + 6) x^{n+1}, \quad S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2) x^{n+1},$$

$$S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) x^{n+1}, \quad S_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}.$$

Звідси, $S(x) = S_1(x) + 3S_2(x) - 6S_3(x)$.

$$S_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = x + x^2 + \dots = \frac{x}{1-x}, \quad |x| < 1;$$

$$\begin{aligned} \int_0^x S_2(x) dx &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+2)x^{n+1} dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = x^2 + x^3 + \dots = \frac{x^2}{1-x}, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

Отже, $S_2(x) = \left(\int_0^x S_2(x) dx \right)' = \frac{2x(1-x) + x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}$.

$$\begin{aligned} \int_0^x S_1(x) dx &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+3)x^{n+1} dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+2)(n+3)x^{n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{n+2}, \\ \int_0^x \left[\int_0^x S_1(x) dx \right] dx &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{n+2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+3)x^{n+2} dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3} = x^3 + x^4 + \dots = \frac{x^3}{1-x}, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \int_0^x S_1(x) dx &= \left(\frac{x^3}{1-x} \right)' = \frac{3x^2(1-x) + x^3}{(1-x)^2} = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2}, \\ S_1(x) &= \left(\frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2} \right)' = \frac{(6x - 6x^2)(1-x)^2 + 2(1-x)(3x^2 - 2x^3)}{(1-x)^4} = \\ &= \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Остаточно маємо

$$S(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x}{(1-x)^3} + 3 \frac{2x - x^2}{(1-x)^2} - 6 \frac{x}{1-x} = \frac{-x^3 - 3x^2 + 6x}{(1-x)^2}.$$

Аудиторне заняття 9.3

1. Визначте множину збіжності й множину абсолютної збіжності функціональних рядів.

$$1.1. \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot x^n \cdot \operatorname{tg} \frac{3x}{n}. \quad 1.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2 - 6x + 12)^n}{4^n (n^2 + 1)}.$$

$$1.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$$

2. Доведіть рівномірну збіжність рядів на заданих множинах.

$$2.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{7n-13}, \quad B: [0,1].$$

$$2.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}, \quad B: [-5,-1].$$

$$2.3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}, \quad B: [\delta, +\infty), \quad \delta > 0.$$

$$2.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx}{n^5 x^2 + 1}, \quad B: \mathbb{R}.$$

3. Знайдіть множину E , на якій визначена і неперервна функція $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{5/2}}$, і дослідіть її на диференційовність.

4. Знайдіть суми рядів.

$$4.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{tg}^n x}{n(n+1)}.$$

$$4.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)x^{n+1}}.$$

$$4.3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(n+1)x^{n+1}}.$$

Самостійна робота 9.3

1. Визначте множину збіжності й множину абсолютної збіжності функціональних рядів.

$$1.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n \sin \frac{2x}{\sqrt{n}}}{2^{n+1}}.$$

$$1.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{3^n (x-2)^n}.$$

2. Доведіть рівномірну збіжність рядів на заданих множинах.

$$2.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx}{4 + n^6 x^2}, B: \mathbb{R}.$$

$$2.2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{(1+2nx)(1+(2n+1)x)}, B: [\delta, +\infty), \delta > 0.$$

$$2.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-5)^n}{n^n}, B: [4, 6].$$

3. Знайдіть множину E , на якій визначена і неперервна функція $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^{7/2}}$, і дослідіть її на диференційовність.

4. Знайдіть суми рядів.

$$4.1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(n+1)x^{n+1}}.$$

$$4.2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (\operatorname{ctg} x)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

9.4. Степеневі ряди. Область збіжності. Властивості степеневих рядів

1°. *Степеневим рядом* називається функціональний ряд виду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}. \quad (1)$$

Замість цього ряду часто розглядають ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

який утворюється з ряду виду (1) лінійною заміною змінної.

2°. Степеневий ряд може збігатися тільки в точці $x = x_0$, або на всій числовій осі, або на скінченному проміжку, симетричному відносно x_0 . Це витікає з двох теорем.

Теорема 1 (Абеля). Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ збігається при $x = x_0 \neq 0$, то він збігається, і притому абсолютно, при кожному $|x| < |x_0|$. Якщо цей ряд розбігається при $x = x_1$, то він розбігається $\forall x: |x| > |x_1|$.

Теорема 2. Для всякого степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ існує число R таке, що ряд збігається абсолютно при $|x| < R$ і розбігається при $|x| > R$. Число R називається *радіусом збіжності*. Для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ інтервалом збіжності є проміжок $|x - x_0| < R$, а в області $|x - x_0| > R$ ряд розбігається.

Число R може бути рівним нулю (це означає, що ряд може збігатися тільки в точці $x = x_0$), R може бути нескінченністю (у цьому випадку ряд збігається на всій числовій осі).

Теорема 2 (Абеля). Якщо R – радіус збіжності степеневого ряду, причому $0 < R < \infty$ і ряд збігається при $x = R$, то він збігається рівномірно на $[0, R]$, і його сума неперервна на цьому відрізку.

3°. Дослідити степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ на збіжність означає знайти його інтервал збіжності й з'ясувати, збігається чи розбігається цей ряд на кінцях інтервалу збіжності. Область збіжності степеневого ряду складається з його інтервалу збіжності й, можливо, граничних точок цього інтервалу.

4°. Радіус збіжності степеневого ряду може бути обчислений за однією з формул:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (2)$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (3)$$

Приклади

Знайдіть область збіжності степеневих рядів.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{5n^2+1} \cdot (x-5)^n. \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+5)^n}{n \ln^3(n+1)}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+3} \right)^{2n} \cdot x^n.$$

Розв'язання

1. За формулою (2) знаходимо радіус збіжності ряду

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)(5(n+1)^2+1)}{(5n^2+1)(3n+2)} = 1.$$

Отже, у проміжку $|x-5| < 1$ ряд збігається. Розв'язуючи нерівність, одержуємо інтервал збіжності: $x \in (4, 6)$.

Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності.

При $x = 4$ одержуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{5n^2+1} (-1)^n$, збіжність якого витікає з ознаки Лейбніца:

$$1) \quad a_{n+1} < a_n: \frac{3n+2}{5(n+1)^2+1} < \frac{3n-1}{5n^2+1};$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{5n^2+1} = 0.$$

При $x = 6$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{5n^2+1}$ розбігається, тому що

$$a_n = \frac{3n-1}{5n^2+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3}{5n} \quad \|\alpha = 1\|.$$

Таким чином, область збіжності $4 \leq x < 6$.

2. Радіус збіжності цього ряду теж зручно знайти за формулою (2):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n (n+1) \ln^3 (n+2)}{n \ln^3 (n+1) 2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

При $|x+5| < \frac{1}{2}$, тобто на інтервалі $\left(-\frac{11}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ ряд збігається.

На межі інтервалу при $x = -\frac{11}{2}$, $x = -\frac{9}{2}$ ряд збігається абсолютно. Справді:

$$x = -\frac{11}{2}: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (-1/2)^n}{n \ln^3 (n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^3 (n+1)},$$

$$x = -\frac{9}{2}: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (1/2)^n}{n \ln^3 (n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 (n+1)}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3(n+1)}$ збігається, тому що

$$a_n = \frac{1}{n \ln^3(n+1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(n+1) \ln^3(n+1)},$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^3(n+1)}$, як легко перевірити за інтегральною ознакою, збігається.

Отже, область збіжності даного степеневого ряду – відрізок

$$x \in \left[-\frac{11}{2}, -\frac{9}{2} \right].$$

3. Радіус збіжності цього ряду зручніше обчислити за формулою (3):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n+3}\right)^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^2 = 4.$$

Дослідимо поведінку ряду на межі інтервалу в точках $x = \pm 4$:

$$x = 4: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+3}\right)^{2n} \cdot 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{2n},$$

$$x = -4: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+3}\right)^{2n} \cdot (-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{2n}.$$

Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{2n} = e \neq 0 \Rightarrow$$

\Rightarrow відповідно до необхідної ознаки ряди розбігаються.

Область збіжності – інтервал $(-4, 4)$.

5°. Якщо R – радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$,

то:

1) в інтервалі $(x_0 - R, x_0 + R)$ функція $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

має похідні будь-якого порядку, отримані почленним диференціюванням ряду, тобто:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) (x-x_0)^{n-k};$$

2) усередині інтервалу збіжності $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ ряд можна почленно інтегрувати, тобто:

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

6°. Степеневі ряди, отримані почленним диференціюванням і почленним інтегруванням, мають той самий радіус збіжності, що і вихідний ряд.

7°. Степеневі ряди можна використовувати при обчисленні сум числових рядів.

Якщо відомо, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ – збігається, то його суму можна знайти, переходячи до границі:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Якщо збігається $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, то:

$$\lim_{n \rightarrow 1} (-1)^n a_n = \lim_{x \rightarrow -1+0} a_n x^n.$$

Приклади

1. Доведіть, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

2. Знайдіть суми рядів.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (2n^2 + n - 1)x^n$.

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1} (-1)^{n+1}}{2n(2n+1)}$.

Розв'язання

1. Обчислимо спочатку суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, використовуючи суму нескінченно спадної геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$. Радіус збіжності цього ряду $R=1$. При $|x| < 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$. Інтегруючи ряд, одержимо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x x^{n-1} dx = \int_0^x \frac{dx}{1-x},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln|1-x|.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ збігається, то його суму можна обчислити, переходячи до границі:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{n \rightarrow -1+0} (-\ln(1-n)) = -\ln 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2,$$

що і було потрібно довести.

Властивості степеневих рядів, перераховані в пунктах 5° і 6°, часто використовують для обчислення їхніх сум.

2.1. При підсумовуванні цього ряду можна використовувати відомий факт:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad |x| < 1,$$

і можливість почленного інтегрування степеневого ряду усередині інтервалу збіжності. Інтегруючи почленно цей ряд, одержимо суму заданого ряду:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{x^n}{n} dx &= -\int_0^x \ln(1-x) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} &= -x \ln(1-x) \Big|_0^x - \int_0^x \frac{x}{1-x} dx = \\ &= -x \ln(1-x) + \int_0^x \frac{1-x-1}{1-x} dx = -x \ln(1-x) + x + \ln(1-x) = \\ &= (1-x) \ln(1-x) + x. \end{aligned}$$

Звідси

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{(1-x) \ln(1-x)}{x} + 1.$$

2.2. Ряд, суму якого потрібно обчислити, представимо сумою 2-х рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n^2 + n - 1)x^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n.$$

Радіус збіжності кожного з цих рядів дорівнює одиниці.

Суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$ можна обчислити, диференціюючи почленно ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}, \quad |x| < 1;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n = \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

Диференціюючи це співвідношення ще раз, одержимо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = \left(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2} \right)' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Остаточо, маємо:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (2n^2 + n - 1)x^n &= 2x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n = \\ &= \frac{4x}{(1-x)^3} - \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} = \frac{-x^3 + 3x^2 + 2x}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

2.3. Радіус збіжності цього ряду $R=1$. У середині інтервалу збіжності ряд рівномірно збігається до деякої функції $f(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1} (-1)^{n+1}}{2n(2n+1)} = f(x).$$

Диференціюючи почленно двічі дане співвідношення, одержимо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) \cdot 2n \cdot x^{2n-1} (-1)^{n+1}}{2n(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n-1} = f''(x), \quad |x| < 1.$$

Ряд ліворуч легко підсумується:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} (-1)^{n+1} = x - x^3 + x^5 - \dots = \frac{x}{1+x^2} = f''(x), \quad |x| < 1,$$

тоді

$$f'(x) - f'(0) = \int_0^x \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

Очевидно, $f'(0) = 0$, тому що

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{2n}$$

i

$$f'(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2),$$

а значить:

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \frac{1}{2} \int_0^x \ln(1+x^2) dx = \\ &= \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{x^2}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) - x + \arctg x. \end{aligned}$$

Оскільки $f(0) = 0$, остаточно одержуємо:

$$f(x) = \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) - x + \arctg x.$$

Отже,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{2n+1}}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) - x + \arctg x.$$

Переходячи до границі при $x \rightarrow (1-0)$, можна обчислити суму числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2} \ln 2 - 1 + \frac{\pi}{4}.$$

Аудиторне заняття 9.4

1. Знайдіть область збіжності степеневих рядів.

$$1.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}.$$

$$1.2. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{3^n} (x+5)^n.$$

$$1.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4) \ln(n+4)}.$$

$$1.4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2} \right)^{2n} (x-1)^n.$$

2. Обчисліть суми рядів.

$$2.1. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 9n + 5) x^{n+1}.$$

$$2.2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

$$2.3. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n + 2) x^{n+2}.$$

$$2.4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n} \right) x^{n-1}.$$

Самостійна робота 9.4

1. Знайдіть область збіжності степеневих рядів.

$$1.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(x-5)^n}{(n^2+n+1) \cdot 3^{n+1}}.$$

$$1.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{3^n}}{\sqrt{n}} \cdot (x+5)^n.$$

$$1.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-4} \right)^{2n} \cdot (x+3)^n.$$

2. Обчисліть суми рядів.

$$2.1. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 8n + 5) x^n.$$

$$2.2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n + (-1)^n}{n-1} x^n.$$

9.5. Ряди Тейлора та їх застосування

1°. Якщо функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 і має в цій точці похідні всіх порядків, то степеневий ряд:

$$f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$$

називають *рядом Тейлора функції $f(x)$ в точці x_0* .

Якщо $x_0 = 0$, то ряд

$$f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

називають *рядом Маклорена*.

2°. Якщо функція $f(x)$ представлена степеневим рядом:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad |x-x_0| < R, \text{ то}$$

вона нескінченно диференційовна в околі точки x_0 і дорівнює сумі свого ряду Тейлора, коефіцієнти степеневого ряду дорівнюють коефіцієнтам ряду Тейлора:

$$a_0 = f(x_0), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad \forall n \geq 1.$$

Зворотне твердження не є вірним: існують функції, нескінченно диференційовні в околі точки x_0 , ряд Тейлора яких не збігається при $x \neq x_0$ до функції $f(x)$. Прикладом такої функції є:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Можна показати, що існують всі похідні $f(x)$ в точці $x=0$ і вони дорівнюють нулю. Сума ряду Тейлора цієї функції збігається зі значенням цієї функції тільки в точці $x=0$.

3°. **Теорема (достатня ознака розкладності функції в ряд Тейлора).** Якщо функція $f(x)$ та всі її похідні обмежені в сукупності на деякому інтервалі $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, тобто існує така постійна $M > 0$, що $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f^{(n)}(x)| \leq M$ ($n=0,1,2,\dots$), то функція $f(x)$ представляється в кожній точці $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ збіжним до неї рядом Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n.$$

Доказ цієї теореми засновано на тому, що за перерахованих умов залишок ряду Тейлора $|R_n(x)|$ при $n \rightarrow \infty$ рівномірно прямує до нуля на множині $|x - x_0| < \delta$.

4°. Умови теореми пункту 3° виконуються для функцій e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ на будь-якому проміжку $|x| \leq \delta$, тому справедливим є розклад у ряд Тейлора для:

1) показникової функції:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty); \quad (4)$$

2) тригонометричних функцій:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty); \quad (5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty); \quad (6)$$

3) гіперболічних функцій:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty); \quad (7)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (8)$$

Радіус збіжності ряду Тейлора для функції $(1+x)^\alpha$ дорівнює одиниці:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_\alpha^k x^k, \quad (9)$$

де

$$C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}, \quad \alpha \neq 0, \alpha \neq n \in \mathbb{N}, |x| < 1.$$

В окремих випадках для розкладення функції у ряд Тейлора можна використати уже відомі результати:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad R=1; \quad (10)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad R=1; \quad (11)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad R=1. \quad (12)$$

(у розкладі (11) x замінено на x^2).

Ряд Тейлора логарифмічної функції може бути отриманий почленним інтегруванням розкладів (10) і (11):

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad R=1; \quad (13)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}, \quad R=1. \quad (14)$$

Інтегруючи почленно ряд (12), можна отримати розклад $\arctg x$:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}; \quad (15)$$

Диференціюючи почленно ряд (10), отримаємо:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k, \quad R=1. \quad (16)$$

Якщо у розкладі (9) змінити x на $(-x^2)$, а α обрати рівним $\left(-\frac{1}{2}\right)$, то можемо отримати розклад:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k}, \quad R=1. \quad (17)$$

5°. Коефіцієнти ряду Тейлора звичайно знаходять за допомогою відомих розкладів ((4)-(17)), застосовуючи різні прийоми: подання функції у вигляді суми більш простих функцій, заміну змінної, почленне інтегрування і диференціювання ряду, метод невизначених коефіцієнтів та інші.

Приклади

Розкладіть в ряд Тейлора функції в заданій точці x_0 . Знайдіть радіус збіжності.

1. $f(x) = \frac{3x+4}{x^2+x-6}$, $x_0 = 0$.
2. $f(x) = \ln(4+3x-x^2)$, $x_0 = 2$.
3. $f(x) = \cos^4 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
4. $f(x) = \arctg \frac{x+3}{x-3}$, $x_0 = 0$.

Розв'язання

1. Представимо раціональну функцію у вигляді суми елементарних раціональних дробів:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x+4}{(x^2+x-6)} = \frac{3x+4}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} = \\ &= \left\| \begin{array}{l} 3x+4 = A(x-2) + B(x+3) \\ x=2: \quad 10 = 5B \Rightarrow B=2 \\ x=-3: \quad -5 = -5A \Rightarrow A=1 \end{array} \right\| = \frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-2} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{3}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1-\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Використовуючи розклади (10) і (11), одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\frac{x}{3}} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} x^k, \quad \left|\frac{x}{3}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 3; \\ \frac{1}{1-\frac{x}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}, \quad \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 2. \end{aligned}$$

Остаточно:

$$\frac{3x+4}{x^2+x-6} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{3^{k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{3^{k+1}} - \frac{1}{2^k} \right) x^k,$$

де $|x| < 2$.

2. У цьому випадку потрібно розкласти функцію в околі точки $x_0 = 2$, тобто за степенями $(x-2)$. Поклавши $(x-2) = t$, одержимо:

$$\begin{aligned} \ln(4+3x-x^2) &= \ln(4+3(t+2)-(t+2)^2) = \ln(-t^2-t+6) = \\ &= \ln(2-t)(3+t) = \ln 6 + \ln\left(1-\frac{t}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{t}{3}\right). \end{aligned}$$

Використовуючи формули (13) і (14), знаходимо:

$$\ln(2-t)(3+t) = \ln 6 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k \cdot 2^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k \cdot 3^k}, \quad |t| < 2.$$

Звідси остаточно одержимо:

$$f(x) = \ln 6 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{(-1)^k}{3^k} - \frac{1}{2^k} \right) (x-2)^k, \quad |x-2| < 2.$$

3. Оскільки $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$:

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{8} = \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x. \end{aligned}$$

Позначимо $x - \frac{\pi}{4} = t$, $x = t + \frac{\pi}{4}$, тоді:

$$\cos 2x = \cos \left(2t + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin 2t,$$

$$\cos 4x = \cos(4t + \pi) = -\cos 4t.$$

І тому:

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{8} \cos 4t.$$

Використовуючи формули (5) і (6), одержимо:

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot t^{2k+1} - \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^{2k} t^{2k}}{(2k)!} = \\ &= \frac{3}{8} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k+1)!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{4k-3}}{(2k)!} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. Обчислимо похідну заданої функції $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+3}{x-3}$,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2} \cdot \frac{-6}{(x-3)^2} = -\frac{3}{x^2+9} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{9}}.$$

З розкладу (12) витікає, що

$$f'(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{9}} = -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{3^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k}}{3^{2k+1}}, \quad \left| \frac{x}{3} \right| < 1.$$

Інтегруючи отриманий ряд почленно, одержуємо:

$$\int_0^x f'(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{(2k+1) \cdot 3^{2k+1}}, \quad \left| \frac{x}{3} \right| < 1,$$

$$f(0) = \operatorname{arctg} \frac{3}{-3} = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Остаточно маємо:

$$\operatorname{arctg} \frac{x+3}{x-3} = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{(2k+1) 3^{2k+1}}, \quad |x| < 3.$$

6°. Ряди Тейлора часто використовують для обчислення сум числових рядів, інтегралів, обчислення наближених значень функцій, інтегралів, розв'язання диференціальних рівнянь.

Приклади

1. Обчисліть $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

2. Обчисліть інтеграл $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$ з точністю до 0,01.

3. Обчисліть з точністю до ε .

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

4. Знайдіть розв'язок рівняння $y'' - xy = 0$, що задовольняє початковим умовам: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання

1. Використовуючи розклад:

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad |x| < 1, \text{ одержимо:}$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n}.$$

Звідси знаходимо:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n^2} \Big|_0^1 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \\ &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \right). \end{aligned}$$

2. Перетворимо підінтегральну функцію

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{64+x^3}} = \frac{1}{4 \left(1 + \left(\frac{x}{4} \right)^3 \right)^{1/3}} = \frac{1}{4} \left(1 + \left(\frac{x}{4} \right)^3 \right)^{-\frac{1}{3}}$$

і у вихідному інтегралі зробимо заміну змінної:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}} = \frac{1}{4} \int_0^2 \left(1 + \left(\frac{x}{4}\right)^3\right)^{-1/3} dx = \left\| \begin{array}{l} \frac{x}{4} = t, \quad dx = 4dt \\ t_{\text{н}} = 0, \quad t_{\text{в}} = \frac{1}{2} \end{array} \right\| =$$

$$= \int_0^{1/2} (1+t^3)^{-1/3} dt.$$

Розкладаючи тепер у ряд Маклорена функцію:

$$(1+t^3)^{-1/3} = 1 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}{2!}t^6 + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{3!}t^9 + \dots,$$

одержимо:

$$\int_0^{1/2} \left(1 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{4}{9 \cdot 2!}t^6 - \frac{4 \cdot 7}{27 \cdot 3!}t^9 + \dots\right) dt =$$

$$= \left(t - \frac{1}{3} \cdot \frac{t^4}{4} + \frac{4}{9 \cdot 2!} \cdot \frac{t^7}{7} - \frac{4 \cdot 7}{27 \cdot 3!} \cdot \frac{t^{10}}{10} + \dots\right) \Big|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{192} + \frac{1}{4032} - \dots$$

Якщо зберегти тільки два члени, то похибка не буде перевищувати $\frac{1}{4032} < 10^{-3}$.

Таким чином:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{192} = \frac{95}{192} \approx 0,495, \quad \varepsilon < 10^{-3}.$$

3. Запишемо ряд Маклорена для функції $f(x) = \arctg x$:

$$\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Для $x = \frac{1}{3}$ ця рівність набуде вигляду:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1} (2n+1)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^3 \cdot 3} + \frac{1}{3^5 \cdot 5} - \dots \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{81} \approx 0,321,$$

$$\varepsilon < \frac{1}{1215} < 10^{-3}.$$

4. Будемо шукати розв'язок рівняння у вигляді степеневого ряду:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Тоді

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1},$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n.$$

Рівняння виду $y'' = xy'$ набуде вигляду:

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , одержимо:

$$a_2 = 0, \quad (n+1)(n+2) a_{n+2} = a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $a_2 = 0$, то відповідно до рекурентного співвідношення:

$$a_5 = 0, \quad a_8 = 0, \quad \dots, \quad a_{3n-1} = 0 \quad \forall n.$$

Із цього ж співвідношення:

$$a_{3n} = \frac{a_0}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6) \cdot \dots \cdot ((3n-1)3n)},$$

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{(3 \cdot 4)(6 \cdot 7) \cdot \dots \cdot ((3n+1)3n)}.$$

Оскільки

$$a_0 = y(0) = 1, a_1 = y'(0) = 0,$$

то розв'язок рівняння $y(x)$ матиме вигляд:

$$y(x) = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6)} + \dots + \frac{x^{3n}}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6) \cdot \dots \cdot ((3n-1)3n)} + \dots$$

Аудиторне заняття 9.5

1. Розкладіть в ряд Тейлора дані функції в точці x_0 . Знайдіть радіус збіжності.

1.1. $f(x) = \frac{5-2x}{x^2-5x+6}, x_0 = 0.$

1.2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-12x+40}}, x_0 = 6.$

1.3. $f(x) = \sin^3 x, x_0 = \frac{\pi}{4}.$

1.4. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x-3}{x+6}, x_0 = 0.$

2. Обчисліть з точністю до 10^{-3} .

2.1. $\arcsin \frac{1}{3}.$

2.2. $\int_0^{2.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}.$

2.3. $\int_0^{0.2} e^{-3x^2} dx.$

3. Покажіть, що функція $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$ є розв'язком диференціального рівняння $xy' = (x+1)y$.

Самостійна робота 9.5

1. Розкладіть дані функції в ряд Тейлора в точці x_0 . Знайдіть радіус збіжності.

1.1. $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$, $x_0 = -1$.

1.2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 8x + 24}}$, $x_0 = 4$.

1.3. $f(x) = \frac{2 + x^2}{2 - x^2}$, $x_0 = 0$.

2. Обчисліть з точністю до 10^{-3} .

2.1. $\arctg \frac{1}{4}$.

2.2. $\int_0^{0.1} \frac{1 - e^{-3x}}{x} dx$.

2.3. $\int_0^1 \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{3}\right)}{x} dx$.

3. Покажіть, що функція $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!!}$ є розв'язком диференціального рівняння $y'' - xy' - y = 0$.

9.6. Ряди Фур'є I

1°. Простір $R_{[a,b]}$ являє собою простір функцій, інтегровних за Ріманом на відрізьку $[a,b]$.

Скалярним добутком двох елементів простору

$$f(x) \in R_{[a,b]} \text{ і } g(x) \in R[a,b]$$

називається число

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Це визначення задовольняє основним властивостям скалярного добутку:

- 1) $\forall f \in R_{[a,b]} : (f, f) \geq 0; (f, f) = 0 \Rightarrow f = 0;$
- 2) $\forall f, g \in R_{[a,b]} : (f, g) = (g, f);$
- 3) $\forall f, g \in R_{[a,b]} \quad \forall \alpha \in R : (\alpha \cdot f, g) = \alpha(f, g);$
- 4) $\forall \{f_1, f_2, g\} \in R_{[a,b]} : (f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g);$
- 5) $\forall \{f, g\} \in R_{[a,b]} : (f, g)^2 \leq (f, f) \cdot (g, g).$

2°. Простір $R_{[a,b]}$ – нормований. Нормою функції $f(x) \in R_{[a,b]}$ називається число:

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.$$

Із цього визначення випливають основні властивості норми:

- 1) $\|\alpha \cdot f\| = |\alpha| \cdot \|f\|, \quad \forall \alpha \in R \text{ і } \forall f \in R_{[a,b]};$
- 2) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|;$
- 3) $\|f\| = 0 \Rightarrow f(x)$ дорівнює нулю у всіх точках неперервності.

3°. Відстанню між функціями $f(x)$ і $g(x)$ у $R_{[a,b]}$ називається $\|f(x) - g(x)\|$. Відстань між функціями вважається рівною нулю, якщо ці функції збігаються у всіх точках неперервності.

4°. Функції $f(x)$ і $g(x)$ із простору $R_{[a,b]}$ називаються *ортogonalними функціями на $[a,b]$* , якщо їхній скалярний добуток дорівнює нулю:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Функція $f(x)$ називається *нормованою функцією*, якщо її норма дорівнює одиниці:

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} = 1.$$

5°. Метричний простір $R([a,b], \|f - g\|)$ є неповним, тобто не будь-яка фундаментальна послідовність функцій збігається до елемента простору.

6°. Система функцій $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ називається *ортонормованою*, якщо всі вони нормовані й попарно ортогональні, тобто:

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \begin{cases} 0, & i \neq k; \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Послідовність функцій $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ називається *ортонормованою*, якщо виконуються рівності:

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \begin{cases} 0, & i \neq k; \\ 1, & i = k \end{cases} \quad \forall i, k \geq 1.$$

Прикладом ортонормованої на $[0, 2\pi]$ послідовності є тригонометрична послідовність:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

7°. Нехай $H_n \subset R_n[a, b]$ – n -вимірний підпростір $R_{[a, b]}$, $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ – ортонормований базис у H_n .

Нехай $f \in R_{[a, b]}$, $f \notin H_n$. Тоді многочлен $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \dots + \alpha_n\varphi_n$ якнайкраще (у значенні норми $R_{[a, b]}$) наближає $f(x)$, якщо $\alpha_i = (f, \varphi_i)$, тобто:

$$\left\| f - \sum_{i=1}^n (f, \varphi_i) \cdot \varphi_i \right\| = \min.$$

Приклад

Для функції $f(t) = \frac{\pi - t}{2}$, $t \in [0, 2\pi]$ визначте тригонометричний многочлен виду $T_n = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt))$, що мінімізує відстань між T_n і $f(t)$.

Розв'язання

Оскільки система функцій

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \left\{ \varphi_k^{(1)} = \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}, \varphi_k^{(2)} = \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{k=1}^n$$

ортонормована на $[0, 2\pi]$, то многочлен має вигляд:

$$\begin{aligned} & \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^n \left[\left(f, \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} \right) \cdot \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} + \left(f, \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} \right) \cdot \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} \right], \\ & \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) = \left(\frac{\pi - t}{2}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} (\pi - t) dt = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{(\pi - t)^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0, \\ & \left(f, \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} \right) = \int_0^{2\pi} \frac{\pi - t}{2} \cdot \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{2\pi} (\pi - t) \cos kt dt \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left((\pi - t) \frac{\sin kt}{k} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \sin kt \, dt \right) = 0, \\
&\left(f, \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} \right) = \int_0^{2\pi} \frac{\pi - t}{2} \cdot \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} \, dt = \\
&= -\frac{\pi - t}{2} \cdot \frac{\cos kt}{k\sqrt{\pi}} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2k\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \cos kt \, dt = \frac{\pi}{k\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

Таким чином:

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{\pi}}{k} \cdot \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kt}{k}.$$

8°. Нехай $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормована послідовність функцій у просторі $R_n[a, b]$. Для функції $f \in R_{[a, b]}$ числа

$$c_n(f) = (f, \varphi_n) = \int_a^b f(t) c_n(t) dt, \quad n \geq 1$$

називаються *коефіцієнтами Фур'є* функції $f(x)$ за ортонормованою системою $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n$$

називають *рядом Фур'є* цієї функції відносно даної ортонормованої системи.

Коефіцієнти Фур'є функції $f \in R_{[a, b]}$ за будь-якою ортонормованою системою мають наступні властивості:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)^2 \leq \|f\|^2$ (нерівність Беселя);
- 2) $c_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

9°. *Послідовність функцій* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається *замкненою* в R_n , якщо будь-яка функція $f \in R_{[a,b]}$ може бути як завгодно точно наближена лінійними комбінаціями функцій системи $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, тобто:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k : \|f - T_n\| < \varepsilon.$$

Прикладом замкненої системи в просторі $R_{[-\pi, \pi]}$ є тригонометрична система: $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$

Якщо $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – замкнена ортонормована система функцій в $R_{[a,b]}$, то для будь-якої функції $f \in R_{[a,b]}$ її ряд Фур'є:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \varphi_n(x), \quad x \in [a, b].$$

збігається за нормою простору $R_{[a,b]}$ (у середньоквадратичному) до функції $f(x)$, тобто:

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k(f) \varphi_k(x) \right\| = \sqrt{\int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=1}^n c_k(f) \varphi_k(x) \right)^2 dx} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

При цьому має місце *рівність Парсеваля-Ляпунова*:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(f).$$

Ряд Фур'є по тригонометричній системі функцій

10°. Тригонометрична система функцій:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

на відріжку $[-\pi, \pi]$ є замкненою ортонормованою системою в просторі $R_{[-\pi, \pi]}$.

Коефіцієнти Фур'є функції $f \in R_{[-\pi, \pi]}$ за тригонометричною системою функцій визначають у такий спосіб:

$$a_n = a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n \geq 0,$$

$$b_n = b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n \geq 1.$$

Кожній функції $f \in R_{[-\pi, \pi]}$ можна поставити у відповідність функціональний ряд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in [-\pi, \pi],$$

що називається її *тригонометричним рядом Фур'є*.

Всі члени цього ряду – періодичні з періодом $T = 2\pi$ функції. Якщо ряд збігається, то і його сума буде періодичною функцією, тому зручно вважати, що $f(x)$ задана на всій числовій осі $x \in (-\infty, +\infty)$, періодична з періодом $T = 2\pi$ і належить $R_{[-\pi, \pi]}$.

Із загальної теорії витікає, що:

$$1) \quad a_n, b_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty;$$

$$2) \quad \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx$$

(рівність Парсеваля-Ляпунова);

$$3) \quad \left\| f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right\|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

(ряд Фур'є збігається до функції $f(x)$ у середньоквадратичному).

11°. Достатню умову поточної збіжності ряду Фур'є дає наступна *теорема*. Якщо функція $f(x)$ періодична з періодом $T = 2\pi$, кусково-монотонна і обмежена на відрізку $[-\pi, \pi]$, то її ряд Фур'є збігається в будь-якій точці x і його сума становить:

$$S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

З теореми витікає, що в точках неперервності ряд Фур'є функції збігається до значення функції, а в точках розриву – до півсуми лівого й правого значень.

Приклад

Розкладіть в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi)$ з періодом $T = 2\pi$. Використовуючи отриманий розклад,

обчисліть $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Розв'язання

Графік даної функції показано на рис. 1.

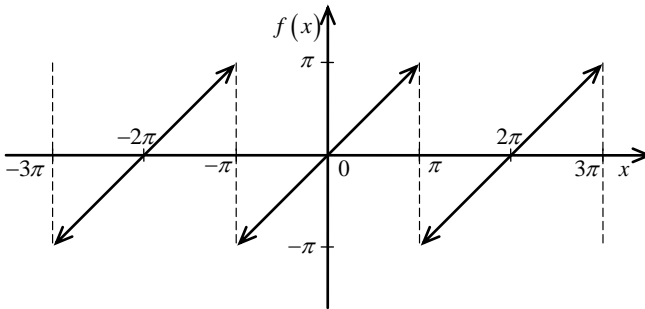


Рисунок 1

Обчислимо коефіцієнти Фур'є даної функції:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{2\pi} x^2 \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos nx dx =$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \begin{aligned} \int u \, dv = uv - \int v \, du \\ u = x, \, du = dx \\ dv = \cos nx \, dx, \, v = \frac{\sin nx}{n} \end{aligned} \right\| = \frac{x}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = \\
& = \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \\
& \left\| \begin{aligned} \int u \, dv = uv - \int v \, du \\ u = x, \, du = dx; \, dv = \sin nx \, dx, \, v = -\frac{\cos nx}{n} \end{aligned} \right\| = \\
& = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x \cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx \right) = \\
& = -\frac{2\pi \cos(\pi n)}{\pi n} + \frac{1}{\pi n^2} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{-2(-1)^n}{n}.
\end{aligned}$$

Таким чином, ряд Фур'є даної функції має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Функція $f(x)$ задовольняє всім умовам теореми: вона періодична з періодом 2π , монотонна і обмежена на проміжку $(-\pi, \pi)$, має розриви тільки на кінцях проміжку, отже, у всіх точках, крім кінців проміжку, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n} \sin nx$ збігається до значення вихідної функції:

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

У точках $x = -\pi$ і $x = \pi$ значення суми ряду дорівнює півсумі лівого і правого значень функції, тобто нулю.

Підставимо в отриману рівність $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \left\| \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^{k+1}, & n = 2k-1 \end{cases} \right\| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (-1)^{2k}}{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}. \end{aligned}$$

Таким чином, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$.

Обчислити суму $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ можна, використовуючи рівність

Парсеваля-Ляпунова: $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \|f\|^2$.

$$a_0 = a_n = 0, \quad b_n = \frac{-2 \cdot (-1)^n}{n},$$

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3},$$

звідси: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3}$, а отже $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

12°. Якщо функція $f(x) \in R_{[-\pi, \pi]}$ періодична з періодом 2π і на основному проміжку парна, то її коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx = 0 \quad \forall n,$$

а ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

тобто функція $f(x)$ може бути розкладена за косинусами кратних дуг.

Якщо ж $f(x)$ – непарна на $[-\pi, \pi]$, то:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx,$$

а a_0 і $a_n \forall n$ дорівнюють нулю. У цьому випадку функція може бути розкладена по синусах кратних дуг:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Приклад

Розкладіть в ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$. Використовуючи отриманий розклад, обчисліть $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Розв'язання

Графік заданої функції показано на рис. 2.

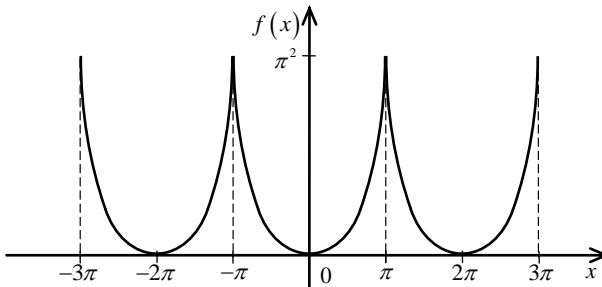


Рисунок 2

Функція задовольняє всім умовам теореми і є парною на основному проміжку, тому може бути представлена рядом Фур'є за косинусами кратних дуг:

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

де

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3\pi} = \frac{2\pi^2}{3}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cdot \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(x^2 \cdot \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \cdot \sin nx dx \right) = \\ &= -\frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} x \cdot \sin nx dx = \left\| \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \\ u = x, du = dx \\ \sin nx dx = dv, v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right\| = \\ &= -\frac{4}{\pi n} \left(-\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = \\ &= \frac{4\pi \cos n\pi}{\pi n^2} - \frac{4}{\pi n^3} \sin nx \Big|_0^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

Отже,
$$x_{[-\pi, \pi]}^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Дана функція неперервна на всьому відрізьку $[-\pi, \pi]$. Сума ряду в будь-якій точці дорівнює значенню функції в цій точці.

Підставляючи $x = \pi$, одержимо:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n \Rightarrow \frac{2\pi^2}{3} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Звідки:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ можна обчислити, використовуючи рівність

Парсеваля-Ляпунова, що у цьому випадку має вигляд:

$$\frac{1}{\pi} \|x^2\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

Тут

$$\|x^2\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^5}{5}, \quad a_0 = \frac{2\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{4 \cdot (-1)^n}{n^2},$$

тобто:

$$\frac{1 \cdot 2\pi^5}{5 \cdot \pi} = \frac{2\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \Rightarrow 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{8\pi^4}{45} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

13°. Якщо функція $f(x)$ задана тільки на проміжку $[0, \pi]$, то її продовжують на $[-\pi, 0]$ парним або непарним способом (залежно від того, чи потрібно знайти розклад за синусами або косинусами кратних дуг), а потім з періодом 2π на всю числову вісь.

Приклади

1. Розкладіть в ряд Фур'є за косинусами кратних дуг функцію $f(x) = \sin x$ на відріжку $[0, \pi]$.
2. Розкладіть в ряд Фур'є за синусами кратних дуг функцію $f(x) = e^x$, $x \in [0, \pi]$.

Розв'язання

1. Оскільки функцію потрібно розкласти за косинусами кратних дуг, її варто продовжити на $[-\pi, 0]$ парним способом, а потім з періодом 2π на всю числову вісь. Графік такої функції показано на рис. 3.

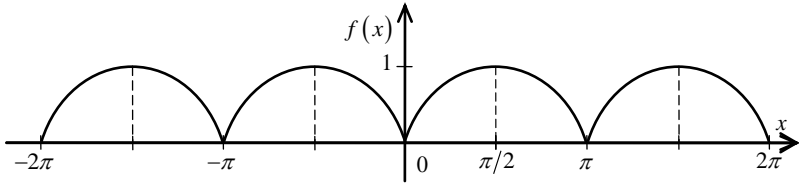


Рисунок 3

Обчислимо коефіцієнти Фур'є такої функції:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi} (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right) \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{((-1)^{n+1} - 1)}{n^2 - 1} = \\ &= \left\| \begin{aligned} (-1)^{n+1} - 1 &= 0, & n = 2k - 1; \\ -2, & n = 2k. \end{aligned} \right\| = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4k^2 - 1}. \end{aligned}$$

Оскільки функція неперервна на $[-\pi, \pi]$, значення ряду Фур'є і функції збігаються у всіх точках:

$$\sin x_{[0, \pi]} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1}.$$

Підставляючи точку $x = 0$, можна обчислити $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$:

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

2. У цьому випадку функцію варто продовжити непарно на проміжок $[-\pi, 0]$, а потім періодично з періодом 2π . Графік такої функції показано на рис. 4.

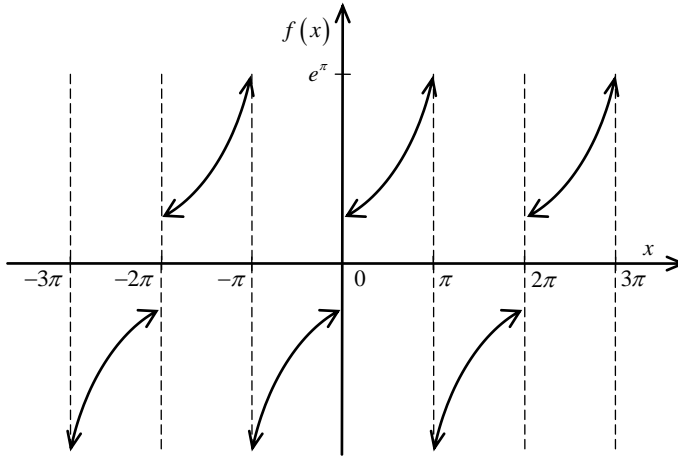


Рисунок 4

На проміжку $[-\pi, \pi]$ функція має розриви в точках $-\pi, 0, \pi$. У цих точках значення ряду дорівнює півсумі лівого і правого значень, тобто нулю.

Обчислимо коефіцієнти ряду Фур'є:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin nx - n \cos nx}{1+n^2} \cdot e^x \right) \Big|_0^{\pi} = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{e^{\pi} \cdot (-1)^{n+1} \cdot n}{1+n^2} + \frac{n \cdot 1}{1+n^2} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{n}{n^2+1} (e^{\pi} (-1)^{n+1} + 1).
 \end{aligned}$$

Таким чином:

$$e_{(0,\pi)}^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\pi(n^2+1)} (e^{\pi} (-1)^{n+1} + 1) \sin nx.$$

Аудиторне заняття 9.6

1. Розкладіть в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \in [-\pi, 0]; \\ 0, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$; періодичну з періодом 2π , задану на відрізку $[-\pi, \pi]$. Використовуючи цей розклад, обчисліть суму $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

2. Розкладіть в ряд Фур'є за косинусами кратних дуг функцію: $f(x) = e^x$, $x \in [0, \pi]$.

3. Розкладіть в ряд Фур'є функцію $f(x) = \sin 3x$ в інтервалі $(0, \pi)$ за косинусами кратних дуг. Використовуючи отриманий розклад, обчисліть $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 9}$.

Самостійна робота 9.6

1. Розкладіть в ряд Фур'є функцію $f(x)$ періодичну з періодом 2π : $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi, 0); \\ 3, & x \in (0, \pi). \end{cases}$ Використовуючи цей розклад, обчисліть суму $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

2. Розкладіть в ряд Фур'є функцію $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ в інтервалі $(-\pi, \pi)$ за косинусами кратних дуг. Використовуючи отриманий розклад, обчисліть суму ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$.

9.7. Ряди Фур'є II

1°. Якщо функція $f(x) \in R[-l, l]$ і періодична з періодом $2l$, то їй можна поставити у відповідність ряд за ортонормованою на $[-l, l]$ системою функцій:

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{\cos \frac{\pi x}{l}}{\sqrt{l}}, \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{\sqrt{l}}, \dots, \frac{\cos \frac{n\pi x}{l}}{\sqrt{l}}, \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{\sqrt{l}}, \dots$$
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx,$$
$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$
$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Як витікає із загальної теорії, цей ряд збігається до функції $f(x)$ у середньоквадратичному. Достатню ознаку поточної збіжності дає наступна *теорема*. Якщо $f(x)$ – періодична функція з періодом $2l$, кусково-монотонна і обмежена на $[-l, l]$, то її ряд Фур'є в точках неперервності збігається до значення функції, а в точках розриву – до півсуми лівого і правого значень.

Приклад

Розкладіть в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < 0, \\ 2, & 0 \leq x \leq 2, \end{cases}$ періодичну з періодом $T = 4$, яка показана на рис. 5.

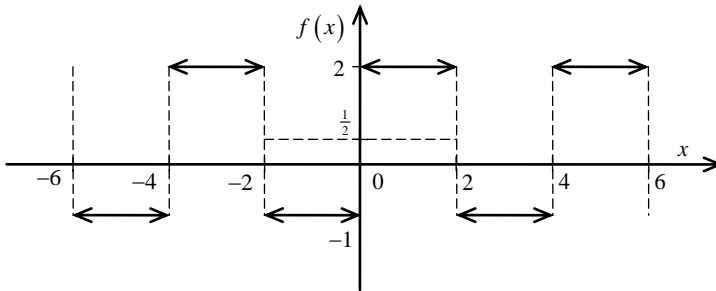


Рисунок 5

Використовуючи отриманий розклад, обчисліть $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

Розв'язання

Знаходимо коефіцієнти ряду Фур'є:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \left\| \frac{T=2l=4}{l=2} \right\| = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 (-1) dx + \int_0^2 2 dx \right) = \frac{1}{2} \left(-x \Big|_{-2}^0 + 2x \Big|_0^2 \right) = 1, \\
 a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-1) \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^2 2 \cdot \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\
 &= -\frac{2}{n\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_{-2}^0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 = 0, \\
 b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 (-1) \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \int_0^2 2 \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_{-2}^0 - \frac{4}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 \right) = \\
&= \frac{3}{n\pi} (\cos n\pi - 1) = \frac{3}{n\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ -\frac{6}{\pi(2k-1)}, & n = (2k-1). \end{cases}
\end{aligned}$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд, одержимо:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2} \right).$$

Цей ряд у всіх точках неперервності функції збігається до значення функції, а в точках $x = -2, 0, 2$ функція збігається до $\frac{1}{2}$ (півсуми лівого і правого значень).

При значенні $x = 1$ (точка неперервності):

$$\begin{aligned}
2 &= \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2}, \\
\frac{3}{2} &= \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

2°. Якщо функція $f(x)$, що задовольняє умовам теореми, парна на $[-l, l]$, то вона розкладається в ряд за косинусами кратних дуг:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \\
a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \\
a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.
\end{aligned}$$

Якщо функція непарна, то вона розкладається за синусами кратних дуг:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Приклад

Розкладіть функцію $f(x) = |x|$, $x \in [-2, 2]$, періодичну з періодом 4 у ряд Фур'є. Використовуючи отриманий розклад, обчисліть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

Розв'язання

Графік заданої функції показано на рис. 6.

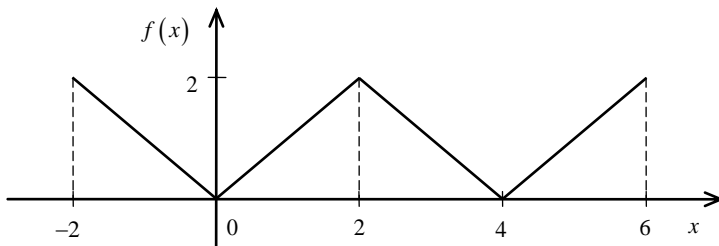


Рисунок 6

Оскільки функція $f(x) = |x|$ парна, то вона може бути розкладена за системою косинусів кратних дуг $\left\{ \cos \frac{n\pi x}{2} \right\}_{n=0}^{\infty}$ ($l=2$). Знайдемо коефіцієнти:

$$b_n = 0,$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^2 |x| dx = \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2,$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{l} \int_0^2 |x| \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\
&= \left\| \int u dv = uv - \int v du \right. \\
&= \left\| u = x, du = dx \right. \\
&= \left\| dv = \cos \frac{n\pi x}{2} dx, v = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right\| = \\
&= x \cdot \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 - \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 = \\
&= \frac{4}{n^2 \pi^2} \left((-1)^n - 1 \right) = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ -\frac{8}{(2k-1)^2 \pi^2}, & n = 2k-1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Таким чином:

$$|x|_{[-2,2]} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \left(\frac{(2n-1)\pi}{2} x \right).$$

Отриманий ряд представляє періодичну функцію з періодом 4, що дорівнює $|x|$, $x \in [-2, 2]$ на всій числовій осі, оскільки функція неперервна. Зокрема при $x = 2$ сума ряду дорівнює 2:

$$\begin{aligned}
2 &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot \cos \left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \cdot 2 \right) = 1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}$$

Для обчислення $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ використовуємо рівність Парсеваля-

Ляпунова:

$$\frac{1}{l} \|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

$$\left\| \begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_{-2}^2 f^2(x) dx = \int_{-2}^2 |x|^2 dx = 2 \int_0^2 x^2 dx = 2 \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{16}{3} \\ l &= 2, \quad a_{2n-1} = -\frac{8}{\pi^2} \frac{1}{(2n-1)^2}, \quad a_0 = 2. \end{aligned} \right\|$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{2^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^4} \cdot \frac{1}{(2n-1)^4} \Rightarrow \frac{2\pi^4}{3 \cdot 64} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

3°. У ряди Фур'є розкладають і неперіодичні функції, задані на довільному проміжку (a, b) . Під розкладом у ряд Фур'є в цьому проміжку розуміють розклад в ряд Фур'є періодичної функції з періодом $2l = (b - a)$, що на проміжку (a, b) збігається із заданою функцією.

Приклад

Розкладіть функцію $f(x) = x$ в проміжку $(3, 5)$ в ряд Фур'є.

Розв'язання

Продовжимо функцію $f(x) = x$, $x \in (3, 5)$ на всю числову вісь із періодом 2. Одержимо кусково-неперервну функцію з кусково-неперервною похідною, графік якої показано на рис. 7.

При обчисленні коефіцієнтів Фур'є краще використовувати проміжок $(3, 5)$. У нашому випадку $2l = 5 - 3 \Rightarrow l = 1$, тоді:

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_3^5 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_3^5 = 8,$$

$$a_n = \int_3^5 x \cos \frac{n\pi x}{1} dx = x \left. \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \right|_3^5 - \frac{1}{n\pi} \int_3^5 \sin n\pi x dx =$$

$$= \frac{1}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi x) \Big|_3^5 = 0,$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \int_3^5 x \sin \frac{n\pi x}{1} dx = -x \frac{\cos n\pi x}{n\pi} \Big|_3^5 + \frac{1}{n\pi} \int_3^5 \cos n\pi x dx = \\
 &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{1}{n^2 \pi^2} \sin n\pi x \Big|_3^5 = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.
 \end{aligned}$$

Отже, $f(x) = x_{(3,5)} = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin n\pi x$.

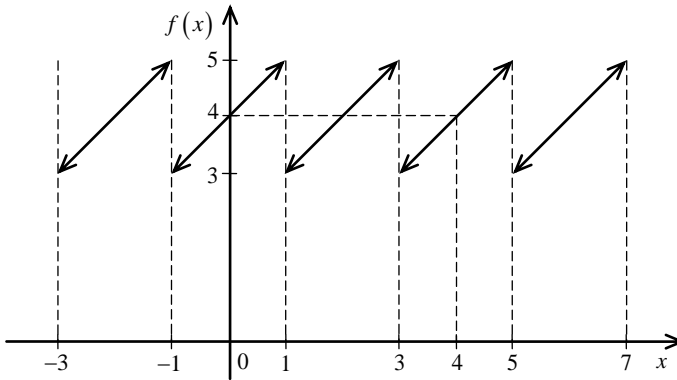


Рисунок 7

У всіх точках неперервності ряд збігається до значення функції, у точках $x = 3$ і $x = 5$ – до півсуми лівого і правого значень: $\frac{3+5}{2} = 4$.

4°. Ряд Фур'є функції $f(x)$, періодичної з періодом $2l$, може бути представлений у комплексній формі:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i n \pi x}{l}},$$

де

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{i n \pi x}{l}} dx.$$

У деяких випадках така форма ряду Фур'є більш зручна, ніж звичайна тригонометрична.

Приклад

Розкладіть в ряд Фур'є функцію $f(x) = e^{-x}$, $x \in (-\pi, \pi)$, періодичну з періодом 2π , графік якої показано на рис. 8.

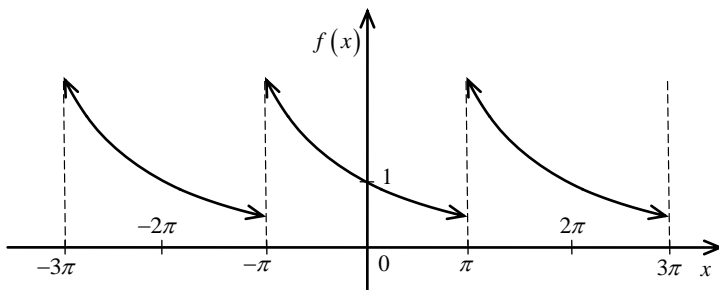


Рисунок 8

Розв'язання

У цьому випадку зручно скористатися комплексною формою ряду Фур'є. Обчислимо коефіцієнти c_n :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+in)x} dx = -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{-(1+in)x}}{1+in} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{-(1+in)\pi} - e^{(1+in)\pi}}{1+in} \right) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1+in)}. \end{aligned}$$

Таким чином, ряд Фур'є функції e^{-x} в комплексній формі має вигляд:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{inx}}{1+in} = \frac{\text{sh } \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{inx}}{1+in}.$$

В інтервалі $(-\pi, \pi)$ ряд представляє функцію e^{-x} , а в точках $x = \pm\pi$ його сума дорівнює $\frac{1}{2}(e^{\pi} + e^{-\pi}) = \text{ch } \pi$.

Якщо потрібно перетворити отриманий ряд у комплексній формі до звичайної тригонометричної форми ряду Фур'є, варто об'єднати доданки з індексами n і $(-n)$ і замінити за формулою Ейлера показникові функції тригонометричними:

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{n+1} e^{inx}}{1+in} + \frac{(-1)^{-n-1} e^{inx}}{1-in} = \\ & = (-1)^{n+1} \frac{(1-in)e^{inx} + (1+in)e^{inx}}{1+n^2} = \\ & = 2(-1)^{n+1} \frac{\cos nx + n \sin nx}{1+n^2}; \\ & a_0 = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi}. \end{aligned}$$

Отже:

$$e_{(-\pi, \pi)}^{-x} = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2} (\cos nx + n \sin nx) \right).$$

5°. Якщо функція $f(x)$ задана кількома різними формулами на різних частинах проміжку $[-l, l]$, то при обчисленні коефіцієнтів Фур'є інтервал інтегрування варто розбити точками, у яких змінюється аналітичний вираз функції.

Приклад

Розкладіть в ряд Фур'є функцію $f(x)$, періодичну з періодом $T = 4$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 0; \\ x, & 0 \leq x < 1; \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

Розв'язання

Побудуємо графік функції $f(x)$ (див. рис. 9):

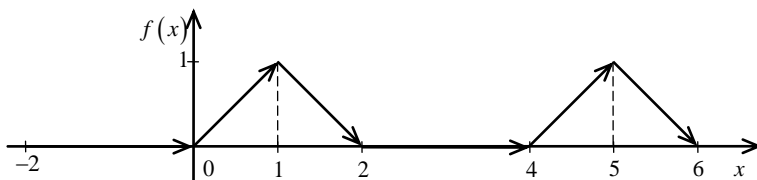


Рисунок 9

Ця функція неперервна на всій числовій осі, періодична з періодом $T = 4$ ($l = 2$). Її ряд Фур'є збігається до значення функції у всіх точках. Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 0 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x dx + \frac{1}{2} \int_1^2 (2-x) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 - \frac{1}{2} \left. \frac{(2-x)^2}{2} \right|_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\
 a_n &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (2-x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right) = \\
 &= \left\| 2-x=t, x=2-t, 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 0 \right\| = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \int_0^1 t \cos \frac{n\pi(2-t)}{2} dt \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx + (-1)^n \int_0^1 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right) = \\
 &= \frac{1}{2} (1 + (-1)^n) \left(x \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right) = \\
 &= \frac{1}{2} (1 + (-1)^n) \left(\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(1 + (-1)^n \right) \left(\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2 \pi^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right) \right) = \\
&= \begin{cases} 0, & n = 2k - 1; \\ 1 \cdot \left(\frac{2}{2k} \sin k\pi + \frac{1}{k^2 \pi^2} \left((-1)^k - 1 \right) \right), & n = 2k. \end{cases}
\end{aligned}$$

Отже:

$$a_n = \begin{cases} -\frac{2}{(2l-1)^2 \pi^2}, & n = 2(2l-1); \\ 0, & n \neq 2(2l-1), \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (2-x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right) = \left\| \begin{array}{l} 2-x=t \\ x=2-t \\ dx=-dt \end{array} \right\| = \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_0^1 x (-\cos n\pi) \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - (-1)^n \right) \int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ \int_0^1 x \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2} dx, & n = 2k-1, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2} dx = \\
&= -x \frac{\cos \frac{(2k-1)\pi x}{2}}{(2k-1)\pi/2} \Big|_0^1 + \frac{2}{\pi(2k-1)} \int_0^1 \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2} dx = \\
&= \frac{2 \cdot 2}{\pi(2k-1)\pi(2k-1)} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2} \Big|_0^1 = \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi^2(2k-1)^2}.
\end{aligned}$$

Отже,

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi^2(2k-1)^2}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Остаточню одержуємо:

$$f(x) = \frac{1}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos(2k-1)\pi x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi^2(2k-1)^2} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2}.$$

Аудиторне заняття 9.7

1. Розкладіть в ряд Фур'є за косинусами кратних дуг функцію $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1]; \\ 2-x, & x \in (1, 2]. \end{cases}$ Знайдіть суми $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ і $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.
2. Розкладіть в ряд Фур'є функцію, графік якої показано на рис. 10.

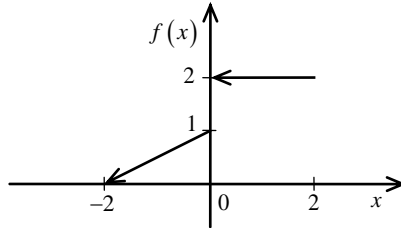


Рисунок 10

Обчисліть $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

3. Скориставшись розкладом у ряд Фур'є функції $f(x) = |\cos x|$, $x \in (-\pi, \pi)$, обчисліть: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.
4. Використовуючи комплексну форму ряду Фур'є, розкладіть в ряд Фур'є функцію $y = 8^{\frac{x}{2}}$, $x \in (0, \pi)$, довизначивши її парним способом.

Самостійна робота 9.7

1. Розкладіть функцію $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 2, \\ 0, & 2 < |x| < \pi \end{cases}$ періодичну з періодом 2π у ряд Фур'є. Використовуючи отриманий розклад, обчисліть $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2n}{n^2}$.

2. Функцію $f(x) = \cos 2x$, задану на $(0, \pi)$, розкладіть в ряд Фур'є за $\{\sin nx\}$. Використовуючи отриманий розклад, обчисліть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^2}{(4-(2n-1)^2)^2}.$$

3. Розкладіть в ряд Фур'є функцію, графік якої показано на рис. 11 і обчисліть $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

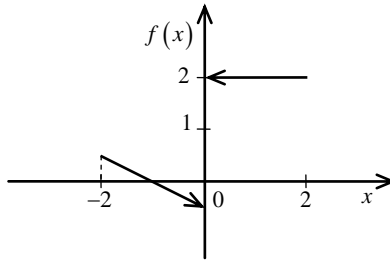


Рисунок 11

4. Функцію $f(x) = \operatorname{ch} x$, задану на $(0, \pi)$, розкладіть в ряд Фур'є за $\{\cos nx\}$. Використовуючи отриманий розклад, обчисліть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)^2}.$$

5. Використовуючи комплексну форму ряду Фур'є, розкладіть в ряд Фур'є функцію $y = 5^{\frac{x}{25}}$, $x \in (0, \pi)$, довизначивши її парним і непарним способом.

9.8. Теоретичні питання з теми «Ряди»

1. Числові ряди (основні визначення).
2. Найпростіші властивості збіжних рядів.
3. Критерій Коші збіжності числового ряду.
4. Дослідження збіжності гармонічного ряду.
5. Необхідна ознака збіжності ряду.
6. Критерій збіжності невід'ємного числового ряду.
7. Ознаки порівняння.
8. Ознака Даламбера.
9. Радикальна ознака Коші.
10. Інтегральна ознака Коші.
11. Знакозмінні ряди. Ознака Лейбніца.
12. Абсолютна й умовна збіжність.
13. Поточкова й рівномірна збіжність функціональних послідовностей.
14. Критерій Коші збіжності функціональної послідовності.
15. Функціональні ряди (основні визначення).
16. Ознаки рівномірної збіжності функціонального ряду.
17. Теорема про неперервність суми ряду.
18. Теорема про почленне диференціювання функціонального ряду.
19. Теорема про почленне інтегрування функціонального ряду.
20. Степеневі ряди. Область збіжності степеневого ряду.
21. Обчислення радіуса збіжності степеневого ряду.
22. Ряди Тейлора (необхідна й достатня ознаки збіжності ряду).
23. Розклад основних елементарних функцій у ряд Маклорена.

24. Простір $R_{[a;b]}$. Ортонормовані системи функцій у просторі $R_{[a;b]}$.
25. Задача про найкраще наближення в просторі $R_{[a;b]}$. Нерівність Бесея.
26. Замкнені системи функцій у просторі $R_{[a;b]}$. Рівність Парсеваля-Ляпунова.
27. Ряд Фур'є за тригонометричною системою функцій на проміжку $[-\pi; \pi]$.
28. Рівність Парсеваля-Ляпунова для тригонометричної системи функцій.
29. Розклад в ряд Фур'є на проміжку $[-l; l]$.
30. Розклад в ряд Фур'є парних і непарних функцій.
31. Розклад в ряд Фур'є на довільному проміжку.
32. Комплексна форма ряду Фур'є.

9.9. Зразки модульної контрольної роботи з теми «Ряди»

Варіант № 1

1. Критерій Коші збіжності числового ряду.
2. Ряд Фур'є по тригонометричній системі функцій на проміжку $[-\pi; \pi]$.

3. Знайдіть суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 8n + 3}.$$

4. Дослідіть на збіжність ряди.

$$4.1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^3 - 3n}}.$$

$$4.2. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2 \cdot \sqrt[3]{n+5}}.$$

$$4.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}.$$

$$4.4. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln n)^n}.$$

5. Знайдіть область збіжності функціональних рядів.

$$5.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(x+e)}.$$

$$5.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n(2n-1)}.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \forall x \in [0; 1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3 - 2}}, [0; 1].$$

7. Розкладіть функцію

$$f(x) = \frac{7}{12 - x - x^2}$$

в ряд Тейлора за степенями x .

Варіант № 2

1. Ознаки рівномірної збіжності функціонального ряду.
2. Розклад в ряд Фур'є парних і непарних функцій.
3. Знайдіть суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 + 8n - 15}.$$

4. Дослідіть на збіжність ряди.

$$4.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^3 (2 + \sin(n\pi/2))}.$$

$$4.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

$$4.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + 7n}{5^n + n}.$$

$$4.4. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}.$$

5. Знайдіть область збіжності функціональних рядів.

$$5.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n}{x-1}}{e^{n\sqrt{x}}}.$$

$$5.2. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} (x-2)^n.$$

6. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

7. Обчисліть інтеграл

$$\int_0^{0.4} e^{-3x^2/4} dx$$

з точністю до 0,001.

**9.10. Варіанти обов'язкових домашніх завдань з теми
«Ряди»**

Варіант № 1

ОДЗ-І

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)(2n+7)}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2n}{n^3}.$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}}.$

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} \cdot 2^n}{(n+1)^{n^2}}.$

3.4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\sqrt{\ln(3n-1)}}.$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+2}}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \operatorname{tg}^{2n} x}{n}.$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{7n-11}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1} \cos nx}{\sqrt[3]{n^5+1}}, [0, 2].$$

8. Знайдіть суми рядів.

$$8.1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n-1}. \quad 8.2. \sum_{n=0}^{\infty} (4n^2 + 9n + 5) x^{n+1}.$$

ОДЗ-П

1. Розкладіть функцію $f(x) = \frac{1}{(2x+5)^2}$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 3$. Знайдіть область збіжності.
2. Обчисліть наближено із заданою точністю ε .

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2}, \varepsilon = 10^{-3}.$$

3. Розкладіть функцію $f(x) = x^2$, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

4. Розкладіть функцію $f(x) = e^x$, задану на проміжку $(0, \pi)$, за синусами кратних дуг. Побудуйте графік.

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 0); \\ \frac{1}{2}, & x = 0; \\ x, & x \in (0, 1], \end{cases} \quad T = 2.$$

Варіант № 2

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}).$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

$$3.1. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(2^{\frac{1}{n}} - 1 \right)^2.$$

$$3.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(3n-1)!!}.$$

$$3.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} \cdot 3^n}{(n+1)^{n^2}}.$$

$$3.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2(5n-1)}.$$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 \cdot 2^n}{3^n + 1}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \sin^{2n} x}{\sqrt[3]{n}}.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \quad \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{5n-6}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}, \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right].$$

8. Знайдіть суми рядів.

$$8.1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)}. \quad 8.2. \sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 7n + 4)x^n.$$

ОДЗ-II

1. Розкладіть функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 . Знайдіть область збіжності.

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}, \quad x_0 = 1.$$

2. Обчисліть наближено $\sin 1^\circ$ із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

4. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(0, \pi)$, за синусами кратних дуг. Побудуйте графік.

$$f(x) = 2^x.$$

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = e^x, \quad x \in (-2, 2); \quad T = 4.$$

Варіант № 3

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)(n+8)}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=3}^{\infty} (\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}).$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n (2^n - 1)}.$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$

3.3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{(\ln n)^n}.$

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + 3) \ln^2(n+1)}.$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{tg}^n x.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4n-6}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізьку.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}, [-2, 2].$$

8. Знайдіть суми рядів.

$$8.1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) x^{n+2}. \quad 8.2. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + n + 1) x^{n+3}.$$

ОДЗ-II

1. Розкладіть функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 . Знайдіть область збіжності.

$$f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}, \quad x_0 = 2.$$

2. Обчисліть наближено $\cos 10^\circ$ із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

4. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(0, \pi)$, за косинусами кратних дуг. Побудуйте графік.

$$f(x) = \operatorname{ch} x.$$

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = 3 - |x|, \quad x \in (-5, 5); \quad T = 10.$$

Варіант № 4

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{15^n}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+3} - 2\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}).$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

$$3.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{1+4n} - 1}{n+1}.$$

$$3.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{6n^n}.$$

$$3.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}.$$

$$3.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)\sqrt[3]{\ln(n+1)}}.$$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1) \ln \ln(n+2)}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n^2 + 4}.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \quad \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3 - 5}}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

8. Знайдіть суми рядів.

$$8.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{4^n (2n-1)}.$$

$$8.2. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 4n + 3)x^{n+2}.$$

ОДЗ-II

1. Розкладіть функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 . Знайдіть область збіжності.

$$f(x) = \ln(5x+3), \quad x_0 = \frac{2}{5}.$$

2. Обчисліть наближено $\sqrt[5]{250}$ із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-2}$.

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = x \sin x, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)^2}.$$

4. Розкладіть функцію $f(x) = \operatorname{sh} 2x$, задану на проміжку $(0, \pi)$, за косинусами кратних дуг. Побудуйте графік.

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \in (-2, 1); \\ 1, & x \in [-1, 1]; \\ 2-x, & x \in (1, 2), \end{cases} \quad T = 4.$$

Варіант № 5

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 + 8n - 15}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2(n+2)^2}.$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^5}}.$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 \cdot 3^n}{(2n+1)^n}.$

3.4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1) \ln \ln(n+1)}.$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}).$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \quad \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4n-5}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}, \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

8. Знайдіть суми рядів.

8.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

8.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 5n + 3)x^n$.

ОДЗ-II

1. Розкладіть функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 . Знайдіть область збіжності.

$$f(x) = \ln \frac{1}{x^2 - 2x + 2}, \quad x_0 = 1.$$

2. Обчисліть наближено $\operatorname{arctg} \frac{\pi}{10}$ із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = \pi^2 - x^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

4. Розкладіть функцію $f(x) = e^{-x}$, задану на проміжку $(0, \pi)$, за косинусами кратних дуг. Побудуйте графік.

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x \in (-3, 0); \\ \frac{3}{2}, & x = 0; \\ -x, & x \in (0, 3), \end{cases} \quad T = 6.$$

Варіант № 6

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 21n - 8}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)^2 (n+1)^2}.$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

3.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n^3 + 1}{n^3 - 1}.$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n+3} \right)^{n^2}.$

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n+1)}}.$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln 2n}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} (x+3)^n}.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{5n-9}, [0,1].$$

7. Для функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$ побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на відріжку $[-1, 6]$.

8. Знайдіть суми рядів.

8.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{x^n}$. 8.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 5n + 3)x^{n+1}$.

ОДЗ-II

1. Розкладіть функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 . Знайдіть область збіжності.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x}}, \quad x_0 = -3.$$

2. Обчисліть наближено $\sqrt[6]{738}$ із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = \operatorname{sh} 3x, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + 9)^2}.$$

4. Розкладіть функцію $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$, задану на проміжку $(0, \pi)$, за косинусами кратних дуг. Побудуйте графік.

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-2, 0); \\ -1/2, & x = 0; \\ x/2, & x \in (0, 2), \end{cases} \quad T = 4.$$

Варіант № 7

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n - 3^n}{24^n}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2(n+3)^2}.$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2 + \cos(n\pi/2))}{2n^2 + 1}.$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}.$

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n}.$

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n^2+1)\ln(n+1)}.$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4} \left(\frac{x+2}{2x+1} \right)^n.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \quad \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3n-4}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізьку.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}, [2, 4].$$

8. Знайдіть суми рядів.

8.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(n-1)}.$

8.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 8n + 5)x^{n+2}.$

ОДЗ-П

1. Розкладіть функцію $f(x) = \cos x$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = \pi/4$. Знайдіть область збіжності.

2. Обчисліть наближено $\arcsin \frac{1}{3}$ із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = \operatorname{sh} 4x, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + 16)^2}.$$

4. Розкладіть функцію $f(x) = 4^{\frac{x}{3}}$, задану на проміжку $(0, \pi)$, за синусами кратних дуг. Побудуйте графік.

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x \in (-2, 0); \\ 2, & x = 0; \\ 4, & x \in (0, 2), \end{cases} \quad T = 4.$$

Варіант № 8

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 - 5n - 6}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2 (n+2)^2}.$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

3.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}.$ 3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{3^{n^2}}.$

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{7n+1} \right)^{n^2}.$ 3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1) \ln^2(n+1)}.$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2x}{x^2+1} \right)^n.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \quad \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-2}}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi - x) \cos^2 nx}{\sqrt[4]{n^7 + 1}}, [0, \pi].$$

8. Знайдіть суми рядів.

8.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n+1}.$

8.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 8n + 5)x^n.$

ОДЗ-II

1. Розкладіть функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 . Знайдіть область збіжності.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}, x_0 = 2.$$

2. Обчисліть наближено $\frac{1}{\sqrt[3]{30}}$ із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = x^2 + 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

4. Розкладіть функцію $f(x) = e^{4x}$, задану на проміжку $(0, \pi)$, за синусами кратних дуг. Побудуйте графік.

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-\pi, 0]; \\ \frac{x^2}{2}, & x \in (0, \pi], \end{cases} T = 2\pi.$$

Варіант № 9

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+7)(2n+9)}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3 + n + 1}.$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n}.$

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot 4^n.$

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n+1)}}.$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n(n+1)}.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{6n-11}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізьку.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}, [-1, 3].$$

8. Знайдіть суми рядів.

8.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$

8.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 7n + 5)x^{n+1}.$

ОДЗ-П

1. Розкладіть функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 . Знайдіть область збіжності.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}, x_0 = 2.$$

2. Обчисліть наближено $\frac{1}{e}$ із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{5}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(25n^2 + 1)^2}.$$

4. Розкладіть функцію $f(x) = \operatorname{ch} 4x$, задану на проміжку $(0, \pi)$, за косинусами кратних дуг. Побудуйте графік.

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 0); \\ x, & x \in [0, 1], \end{cases} \quad T = 2.$$

Варіант № 10

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right).$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n\pi/6)}{3^n + 1}.$

3.2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n (n-1)!}{(n-1)^{n-1}}.$

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \cdot \frac{1}{3^n}.$

3.4. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2) \ln^3(n+1)}.$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\pi \sqrt{n^2 + x^2} \right).$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \quad \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3 - 7}}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}, [-5, -1].$$

8. Знайдіть суми рядів.

8.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+2}}{16^n (2n+1)}.$

8.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 7n + 5)x^n.$

ОДЗ-П

1. Розкладіть функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 . Знайдіть область збіжності.

$$f(x) = \ln(5x+3), x_0 = 1.$$

2. Обчисліть наближено $\sqrt[4]{90}$ із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2 + 1)^2}.$$

4. Розкладіть функцію $f(x) = x^2 + 1$, задану на проміжку $(0, \pi)$, за синусами кратних дуг. Побудуйте графік.

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1; \\ 0, & 1 < |x| < \pi, \end{cases} \quad T = 2\pi.$$

Варіант № 11

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{(n-1)^2} \right).$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}(1/n)}{\sqrt[3]{n}}.$

3.2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n (n-1)!}{(n-1)^{n-1}}.$

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2} \cdot 3^n.$

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n^2+2)\sqrt{\ln^2(n+1)}}.$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n-1)}{n\sqrt{n+1}} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n-1}}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\pi x}{n} \right)^{n^2}.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{7n-10}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{2n}}{(n+1)^2 \ln(n+1)}, [1, 3].$$

8. Знайдіть суми рядів.

$$8.1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}. \quad 8.2. \sum_{n=0}^{\infty} n(2n-1)x^{n+2}.$$

ОДЗ-П

1. Розкладіть функцію $f(x) = \ln x$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 1$. Знайдіть область збіжності.

2. Обчисліть наближено $\operatorname{sh} 2$ із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{3}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(9n^2 + 1)^2}.$$

4. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(0, \pi)$, за синусами кратних дуг. Побудуйте графік.

$$f(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{5}.$$

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (-\pi, 0]; \\ -3x, & x \in (0, \pi), \end{cases} \quad T = 2\pi.$$

Варіант № 12

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 2^n}{14^n}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}.$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

$$3.1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arctg \sqrt[3]{n^2-1}}{\pi \sqrt{n^2-n}}.$$

$$3.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n}.$$

$$3.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n} \right)^{n^2}.$$

$$3.4. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1) \ln(n+1)}.$$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n x}.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{6n-8}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, [-3, 3].$$

8. Знайдіть суми рядів.

$$8.1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) x^n. \quad 8.2. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n + 1) x^n.$$

ОДЗ-II

1. Розкладіть функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 . Знайдіть область збіжності.

$$f(x) = \frac{1}{x+3}, x_0 = 1.$$

2. Обчисліть наближено $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = |x|, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

4. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(0, \pi)$, за синусами кратних дуг. Побудуйте графік.

$$f(x) = x^2.$$

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} -3x, & x \in (-\pi, 0); \\ 2x, & x \in (0, \pi), \end{cases} T = 2\pi.$$

Варіант № 13

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 4^n}{20^n}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)(n+6)}.$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - \sin^2 5n}.$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}.$

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n}\right)^{n^2}.$

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln 2n}}.$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(\pi/n)}{n}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(x+e)}.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3 - 4}}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{(4n-3)^2}, \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right].$$

8. Знайдіть суми рядів.

8.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$

8.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - n - 1)x^n.$

ОДЗ-II

1. Розкладіть функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 . Знайдіть область збіжності.

$$f(x) = \ln \frac{1}{x^2 - 4x + 5}, \quad x_0 = 2.$$

2. Обчисліть наближено $\sqrt[3]{8,36}$ із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = x^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

4. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(0, \pi)$, за косинусами кратних дуг. Побудуйте графік.

$$f(x) = x^2.$$

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-2, 0); \\ x^2/\pi, & x \in (0, 2], \end{cases} \quad T = 4.$$

Варіант № 14

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n-2}{(n^2-1)(n-2)}.$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

3.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arctg \sqrt{n^2-1}}{\pi(n^2+n)}.$ 3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{n^n}.$

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n+7}{3n+2} \right)^{n^2}.$ 3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n \cdot \ln^2(n+7)}.$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(\pi/n)}{n+1}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln(1+x^3)}.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n-3}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізьку.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n \cdot \ln n}, \quad [-2, 2].$$

8. Знайдіть суми рядів.

8.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}.$

8.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 5n + 4)x^{n+1}.$

ОДЗ-II

1. Розкладіть функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 . Знайдіть область збіжності.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}, \quad x_0 = 2.$$

2. Обчисліть наближено $\int_0^{0.5} \frac{\arctg x}{x}$ із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

4. Розкладіть функцію $f(x) = e^x$, задану на проміжку $(0, \pi)$, за косинусами кратних дуг. Побудуйте графік.

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-2, 0); \\ 2, & x \in (0, 2], \end{cases} \quad T = 4.$$

Варіант № 15

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{14^n}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n(n+1)(n+2)}.$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

3.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \ln n}.$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!}.$

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(\ln(n+1))^{n+1}}.$

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\sqrt{\ln(3n+2)}}.$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{tg}(\pi/n)}{n+2}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln|x|}}.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{8n-12}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{n^2 4^n}, [-7, -3].$$

8. Знайдіть суми рядів.

8.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n(2n-1)}.$

8.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 7n + 4)x^n.$

ОДЗ-II

1. Розкладіть функцію $f(x) = 1/(x+3)^2$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = -1$. Знайдіть область збіжності.

2. Обчисліть наближено із заданою точністю ε .

$$\int_0^{0.2} \sqrt{x} e^{-x} dx, \varepsilon = 10^{-3}.$$

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x), \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

4. Розкладіть функцію $f(x) = 2^x$, задану на проміжку $(0, \pi)$, за синусами кратних дуг. Побудуйте графік.

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} -3x, & x \in (-\pi, 0]; \\ 2x, & x \in (0, \pi), \end{cases} \quad T = 2\pi.$$

Варіант № 16

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 + 8n - 15}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-n}{n(n+1)(n+3)}.$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

$$3.1. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2+1}{n^2-1} \right). \quad 3.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n-1)!}{(3n)!}.$$

$$3.3. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^{n^2}. \quad 3.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n \ln^2(2n+1)}.$$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg}(1/\sqrt{n})}{\sqrt{5n-1}}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n \left(x + \frac{1}{n} \right)}{\sqrt{x-e}}.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \quad \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{6n-7}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}, \quad [-3, -1].$$

8. Знайдіть суми рядів.

8.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{n} \right] x^{2n}.$

8.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - n - 2) x^{n+1}.$

ОДЗ-II

1. Розкладіть функцію $f(x) = \ln(2x+3)$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = -1$. Знайдіть область збіжності.

2. Обчисліть наближено із заданою точністю ε .

$$\int_0^{0.5} \ln(1+x^3) dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = x \sin x, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - 1)^2}.$$

4. Розкладіть функцію $f(x) = \operatorname{ch} x$, задану на проміжку $(0, \pi)$, за синусами кратних дуг. Побудуйте графік.

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x \in (-4, 0); \\ 4, & x \in [0, 4), \end{cases} \quad T = 8.$$

Варіант № 17

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n - 3^n}{24^n}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2 + 12n - 35}.$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

3.1. $\sum_{n=3}^{\infty} n \cdot \operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{n}.$

3.2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n-2)!!}.$

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}.$

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln 2n \cdot (\ln \ln 2n)^2}.$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\left(\sqrt[3]{n}\right)}{n\sqrt{n}}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^4 \cdot \sin \frac{1}{n^2 x^2}}.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \quad \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{5n-8}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

8. Знайдіть суми рядів.

$$8.1. \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right] x^{n-1}. \quad 8.2. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 2n + 1) x^n.$$

ОДЗ-II

1. Розкладіть функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 . Знайдіть область збіжності.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}, \quad x_0 = -2.$$

2. Обчисліть наближено $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = \pi^2 - x^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

4. Розкладіть функцію $f(x) = \operatorname{sh} 2x$, задану на проміжку $(0, \pi)$, за синусами кратних дуг. Побудуйте графік.

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-2, 0); \\ x, & x \in (0, 2), \end{cases} \quad T = 4.$$

Варіант № 18

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+2)}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}.$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

3.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n + \sqrt[3]{\ln^2 n}}$.

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}$.

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+4n+5}$.

3.4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \sqrt{\ln \ln n}}$.

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n \ln(\ln n)}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 9^n \cdot (x-1)^{2n}}.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{6n-10}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^4 x^{2n}}{2n+1}, \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

8. Знайдіть суми рядів.

8.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)x^{n+1}}.$

8.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n - 1)x^{n+1}.$

ОДЗ-П

1. Розкладіть функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 . Знайдіть область збіжності.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}, \quad x_0 = -1.$$

2. Обчисліть наближено із заданою точністю ε .

$$\int_0^{0.5} \sqrt{1+x^2} dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = \operatorname{sh} 3x, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + 9)^2}.$$

4. Розкладіть функцію $f(x) = e^{-x}$, задану на проміжку $(0, \pi)$, за синусами кратних дуг. Побудуйте графік.

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\pi, 0]; \\ 3x, & x \in [0, \pi), \end{cases} \quad T = 2\pi.$$

Варіант № 19

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 4^n}{20^n}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n(n+1)} \right).$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{2n}}.$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n (n!)^2}{n^{2n}}.$

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 5}{n^2 + 6} \right)^{n^3}.$

3.4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3 + 1) \ln n}.$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln(n+2) (x-3)^{5n}}.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4n-7}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{n}, \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right].$$

8. Знайдіть суми рядів.

$$8.1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

$$8.2. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n + 2) x^{n+2}.$$

ОДЗ-II

1. Розкладіть функцію $f(x) = \ln(3x-2)$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 1$. Знайдіть область збіжності.

2. Обчисліть наближено із заданою точністю ε .

$$\int_0^{0,8} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = \operatorname{sh} 4x, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + 16)^2}.$$

4. Розкладіть функцію $f(x) = 3^{\frac{x}{2}}$, задану на проміжку $(0, \pi)$, за синусами кратних дуг. Побудуйте графік.

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-2, 0); \\ -x, & x \in [0, 2), \end{cases} \quad T = 4.$$

Варіант № 20

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n} \cos \frac{3}{2^n}.$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

3.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n} \ln n}.$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n (n!)^2}{n^{2n}}.$

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{\frac{3}{n^2}}.$

3.4. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n/3-1) \ln^2(n/2)}.$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(x+e)}.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{5n-7}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n^2}, [-6, -4].$$

8. Знайдіть суми рядів.

8.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n(n-1)}$.

8.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 4n + 3)x^{n+1}$.

ОДЗ-II

1. Розкладіть функцію $f(x) = \sin x$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = a$. Знайдіть область збіжності.

2. Обчисліть наближено із заданою точністю ε .

$$\int_0^1 \sin x^2 dx, \varepsilon = 10^{-3}.$$

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = x^2 + 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

4. Розкладіть функцію $f(x) = 4^{\frac{x}{3}}$, задану на проміжку $(0, \pi)$, за косинусами кратних дуг. Побудуйте графік.

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < 1; \\ 0, & 1 < |x| < 2, \end{cases} \quad T = 4.$$

Варіант № 21

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 6^n}{18^n}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sin \frac{1}{2^{n-1}} \cos \frac{3}{2^{n-1}}.$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right).$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n (n!)^2}{4n^{2n}}.$

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n(n-1)}.$

3.4. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n+1}{(5n^2-9)\ln(n-2)}.$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 8^n \cdot x^{3n} \cdot \ln \frac{x}{4\sqrt{n}}.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \quad \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{7n-13}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1) \cdot 2^n}, [1,3].$$

8. Знайдіть суми рядів.

8.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}.$

8.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 5n + 4)x^{n+2}.$

ОДЗ-П

1. Розкладіть функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 . Знайдіть область збіжності.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-3}}, x_0 = 1.$$

2. Обчисліть наближено із заданою точністю ε .

$$\int_0^1 \cos \sqrt[3]{x} dx, \varepsilon = 10^{-3}.$$

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{5}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(25n^2 + 1)^2}.$$

4. Розкладіть функцію $f(x) = e^{4x}$, задану на проміжку $(0, \pi)$, за косинусами кратних дуг. Побудуйте графік.

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < 2; \\ 0, & 2 < |x| < 4, \end{cases} \quad T = 8.$$

Варіант № 22

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 - 3n - 2}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

$$3.1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \frac{n+1}{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

$$3.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n (n!)^3}{n^{3n}}.$$

$$3.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{\sqrt{n^4+1}}.$$

$$3.4. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{(3n^2/2+2)\ln(n/2)}.$$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2 \cdot 3^n}{4^n + 1}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \quad \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{8n^3 - 21}}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)\sin^2 nx}{n\sqrt{n+1}}, \quad [-3, 0].$$

8. Знайдіть суми рядів.

8.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) x^n.$

8.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - 2n + 1) x^n.$

ОДЗ-II

1. Розкладіть функцію $f(x) = \ln \sqrt{x}$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 1$. Знайдіть область збіжності.

2. Обчисліть наближено із заданою точністю ε .

$$\int_0^1 \cos \frac{x^2}{4} dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

3. Розкладіть функцію $f(x)$, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = \operatorname{sh}(x/2), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2 + 1)^2}.$$

4. Розкладіть функцію $f(x) = \operatorname{ch} 4x$, задану на проміжку $(0, \pi)$, за синусами кратних дуг. Побудуйте графік.

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1; \\ 0, & 1 \leq |x| \leq 2, \end{cases} \quad T = 4.$$

Варіант № 23

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2 - 9}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{49n^2 + 7n - 12}.$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

$$3.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1}{\sqrt[3]{n}}.$$

$$3.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{27^n (n!)^3}{n^{3n}}.$$

$$3.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^{n(n-1)}.$$

$$3.4. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)\ln n}.$$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)\ln n}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \quad \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3n-5}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}, \quad [-1, 1].$$

8. Знайдіть суми рядів.

8.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$

8.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 2n - 1)x^{n+1}.$

ОДЗ-II

1. Розкладіть функцію $f(x) = \sqrt{2x+3}$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 2/5$. Знайдіть область збіжності.

2. Обчисліть наближено із заданою точністю ε .

$$\int_0^1 \sqrt{x} \sin x dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(9n^2 + 1)^2}.$$

4. Розкладіть функцію $f(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{5}$, задану на проміжку $(0, \pi)$, за косинусами кратних дуг. Побудуйте графік.

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & |x| \leq 2; \\ 0, & 2 \leq |x| \leq 3, \end{cases} \quad T = 6.$$

Варіант № 24

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 3^n}{21^n}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}.$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

$$3.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \cos n}{3^n + \sin n}. \quad 3.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n}.$$

$$3.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+2}} \right)^{n^{3/2}}. \quad 3.4. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}.$$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arcsin(1/\sqrt{n})}{\sqrt{5n-1}}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^n.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \quad \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{8n^3 - 19}}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n (n+3)}, [0, 2].$$

8. Знайдіть суми рядів.

$$8.1. \sum_{n=1}^{\infty} \left[2^n + \frac{(-1)^n}{n} \right] x^n. \quad 8.2. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 2n + 2) x^n.$$

ОДЗ-II

1. Розкладіть функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 . Знайдіть область збіжності.

$$f(x) = \frac{1}{(x+5)^2}, x_0 = -2.$$

2. Обчисліть наближено із заданою точністю ε .

$$\int_0^1 \sqrt[3]{1 + \frac{x^2}{4}} dx, \varepsilon = 10^{-3}.$$

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = |x|, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

4. Розкладіть функцію $f(x) = x^3$, задану на проміжку $(0, \pi)$, за синусами кратних дуг. Побудуйте графік.

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} 2|x|, & |x| \leq 1; \\ 0, & 1 < |x| < 3, \end{cases} \quad T = 6.$$

Варіант № 25

ОДЗ-I

1. Доведіть, що ряд збігається. Знайдіть суму ряду.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}.$$

2. Обчисліть часткову суму S_n , остачу R_n і суму S ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right).$$

3. Дослідіть збіжність рядів.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2}{n^5 + \sin 2^n}.$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} n! \operatorname{tg} \frac{\pi}{n^n}.$

3.3. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^{n^2+4n+5}.$

3.4. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}.$

4. Дослідіть збіжність знакопереміжного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} \sqrt{n}}{\sqrt{5n-1}}.$$

5. Визначте множину A точок збіжності й множину B точок абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$$

6. Доведіть, виходячи з визначення, рівномірну збіжність даного функціонального ряду на зазначеному відрізку. При яких n абсолютна величина залишкового члена ряду не перевищує $0,1 \forall x \in [0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{8n-11}, [0,1].$$

7. Для даного функціонального ряду побудуйте мажорантний ряд і доведіть рівномірну збіжність на зазначеному відрізку.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{3^{n^2}}, \quad [-2, 2].$$

8. Знайдіть суми рядів.

8.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-2)(2n-1)}$.

8.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 2n - 2)x^{n+1}$.

ОДЗ-П

1. Розкладіть функцію $f(x) = \ln \sqrt{5x+3}$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 1$. Знайдіть область збіжності.

2. Обчисліть наближено із заданою точністю ε .

$$\int_0^1 \arctg \frac{x^2}{2} dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

3. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-\pi, \pi)$ й періодичну з періодом 2π , у ряд Фур'є. За допомогою отриманого розкладу обчисліть суму ряду.

$$f(x) = x^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

4. Розкладіть функцію $f(x) = x^3$, задану на проміжку $(0, \pi)$, за косинусами кратних дуг. Побудуйте графік.

5. Розкладіть функцію, задану на проміжку $(-l, l)$ й періодичну з періодом $T = 2l$, у ряд Фур'є. Накресліть графік функції й суми її ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} 2|x|, & |x| \leq 1; \\ 0, & 1 < |x| < 3, \end{cases} \quad T = 6.$$

9.11. Довідковий матеріал

1. Основні формули диференціального числення

Основні правила диференціювання

1. $C' = 0$.
2. $(Cu)' = Cu'$.
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$.
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$, $v \neq 0$.
6. $(f(u))'_x = f'_u \cdot u'_x$.
7. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$, де $x = x(y)$ – обернена функція до функції

$y = y(x)$.

Тут C – постійна, $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Основні формули диференціювання

1. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$.
3. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$.

4. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'.$
5. $(e^u)' = e^u \cdot u'.$
6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'.$
7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$
8. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'.$
9. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'.$
10. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$
11. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$
12. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$
13. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$
14. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'.$
15. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'.$
16. $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'.$
17. $(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'.$

Тут $u = u(x)$. Якщо $u(x) = x$, то $u'(x) = x' = 1$.

2. Основні формули елементарної математики

2.1. Алгебраїчні функції

Властивості степенів

Для будь-яких x , y і додатних a і b є вірними рівності:

$$a^0 = 1;$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y};$$

$$a^x : a^y = a^{x-y};$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y};$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Многочлени

Для будь-яких a , b і c є вірними рівності:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$\text{або } (a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b);$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1 і x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Властивості арифметичних коренів

Для будь-яких натуральних n і k , більших за 1, і будь-яких невід'ємних a і b є вірними рівності:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; & \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0); \\ (\sqrt[n]{a})^k &= \sqrt[n]{a^k}; & \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} &= \sqrt[nk]{a}; \\ \sqrt[n]{a} &= \sqrt[nk]{a^k}; & \sqrt[n]{a^n} &= a \quad (a \geq 0); \\ \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, & \text{ якщо } 0 \leq a < b; & \sqrt{a^2} &= |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0; \end{cases} \\ \sqrt[2n]{a^{2n}} &= |a|; & \sqrt[2n+1]{-a} &= -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \geq 0).\end{aligned}$$

2.2. Тригонометричні функції

Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}; \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}; \\ 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Формули додавання

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta ;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta ;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta ;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta ;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha, \beta, (\alpha + \beta) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha, \beta, (\alpha - \beta) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формули подвійного аргументу

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha ;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha ;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Формули половинного аргументу

(формули зниження степеня)

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} ;$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} ;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формули перетворення суми в добуток

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формули перетворення добутку в суму

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)].$$

Співвідношення між $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, і $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формули зведення

Назва функції не змінюється				Назва функції змінюється			
u	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
	$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}$			$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}$			
$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
	$\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$			$\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$			

Властивості обернених тригонометричних функцій

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, |a| \leq 1; \quad \arccos(-a) = \pi - \arccos a, |a| \leq 1;$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a, a \in \mathbb{R}; \quad \operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a, a \in \mathbb{R};$$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, |a| \leq 1; \quad \operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}, a \in \mathbb{R}.$$

Найпростіші тригонометричні рівняння

$$\sin x = a \quad |a| \leq 1; \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = a \quad |a| \leq 1; \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = a \quad a \in \mathbb{R}; \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} x = a \quad a \in \mathbb{R}; \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Окремі випадки:

$$\sin x = 0; \quad x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \cos x = 1, \quad x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Властивості логарифмів

1. Якщо $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$x = a^{\log_a x}.$$

(основна логарифмічна тотожність)

2. Логарифм одиниці дорівнює нулю:

$$\log_a 1 = 0.$$

3. Логарифм основи дорівнює одиниці:

$$\log_a a = 1.$$

4. Якщо $x_1 > 0$ і $x_2 > 0$, то

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2;$$

(формула для логарифма добутку)

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2.$$

(формула для логарифма частки)

5. Якщо $x > 0$, то

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x,$$

(формула для логарифма степеня)

де p – будь-яке дійсне число.

6. Якщо $x > 0$, то

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$$

(формула переходу до нової основи логарифма)

для будь-якого дійсного числа $b > 0$.

Зокрема

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad \text{або} \quad \log_a b \cdot \log_b a = 1;$$

$$\log_a b = \log_{a^p} b^p, \quad (p \in \mathbb{R}, p \neq 0).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРИ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособ. для вузов. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 384 с.
2. Виленкин Н. Я. и др. Задачник по курсу математического анализа : учеб. пособ. для студентов заоч. отделений физ.-мат. фак-тов пединститутов : в 2-х ч. / Н. Я. Виленкин, К. А. Бохан, И. А. Марон и др.; под ред. Н. Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – Ч. I. – 1971. – 343 с.; Ч. II. – 1971. – 336 с.
3. Демидович Б. Н. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособ. для вузов. – М. : Наука, 1977.
4. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа : в 2-х ч. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971 – 1973. – Ч. 1. – 1971. – 600 с.; Ч. 2. – 1973. – 448 с.
5. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : учеб. пособ. для студентов университетов и вузов : в 3-х т. – М. : Высш. шк., 1988 – 1989. – Т. 1. – 1988. – 712 с.; Т. 2. – 1988. – 576 с.; Т. 3. – 1989. – 352 с.
6. Кудрявцев Л. Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость : учеб. пособ. / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 592 с.
7. Кудрявцев Л. Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды : учеб. пособ. / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 528 с.
8. Кудрявцев Л. Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных : учеб. пособ. / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1994. – 496 с.
9. Рябушко А. П. и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3-х ч. / А. П. Рябушко, В. В. Баршатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть; под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Высш. шк., 1990 – 1991. – Ч. 1. – 1990. – 270 с.; Ч. 2. – 1991. – 352 с.; Ч. 3. – 1991. – 288 с.

10. Ляшко І. І. та ін. Математичний аналіз. / І. І. Ляшко, В. Ф. Ємельянов, О. К. Боярчук. – К., 1992 – 1993. – Ч. 1, 2.
11. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. – К., 1993. – Ч. 1, 2.
12. Сенчук Ю. Ф. Математичний аналіз для інженерів : навч. посіб. : Ч.І. – Харків : НТУ «ХПІ», 2004. – 408 с. – Рос. мовою.
13. Сенчук Ю. Ф. Математичний аналіз для інженерів : навч. посіб. : Ч.ІІ. – Харків : НТУ «ХПІ», 2006. – 408 с. – Рос. мовою.
14. Заблоцький М. В. та ін. Математичний аналіз : підр. / М. В. Заблоцький, О. Г. Сторож, С. І. Тарасюк. – К. : Знання, 2008. – 421 с.
15. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3-х т. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966 – 1969. – Т. 1. – 1966. – 608 с.; Т. 2. – 1988. – 800 с.; Т. 3. – 1969. – 656 с.

Навчальне видання

ЯСНИЦЬКА Неля Миколаївна
АХІЄЗЕР Олена Борисівна
БОЄВА Анна Анатоліївна
ГЕЛЯРОВСЬКА Оксана Анатоліївна

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник
Для студентів навчальних закладів

У дев'яти модулях

Модуль 9

Ряди

Роботу до видання рекомендував проф. *О. В. Горілий*
Редактор *М. П. Ефремова*

План 2010 р., поз. 89 / 137-10

Підп. до друку 10.09.2010. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Папір офісний
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 9,4. Наклад 30 прим.
Зам. № 378. Ціна договірна.

ТОВ «Видавництво «Підручник» НТУ «ХП».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.