

А.А. ПЕТКОВ, канд. техн. наук, НТУ "ХПИ"

### АПРОКСИМАЦИЯ ФОРМЫ ИМПУЛЬСНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ БИЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ

У роботі запропонована загальна методика розв'язання задачі мінімізації відхилень експериментальних даних, що описують імпульсні електромагнітні процеси, від значень біекспоненціальної функції, що апроксимує ці дані.

In work the general technique of the decision of the problem of a deviations minimization experimental data which describing pulse electromagnetic processes, from values of the biexponential function approximating these data is offered.

**Постановка проблемы.** Синтез разрядных цепей различных высоковольтных импульсных испытательных устройств (ВИИУ), несмотря на многочисленные публикации по этому вопросу (например [1 – 5]), по-прежнему остается актуальной задачей процесса проектирования испытательных устройств. Это, прежде всего, связано с постоянным расширением сферы использования ВИИУ и диапазона амплитудно-временных параметров воспроизводимых ими импульсных электромагнитных воздействий (ИЭМВ). Решение задачи синтеза, в свою очередь, требует математического описания формы воспроизводимого ИЭМВ, одним из возможных вариантов которого является описание с использованием экспоненциальных полиномов.

**Анализ публикаций.** Задача аппроксимации с использованием экспоненциальных полиномов имеет ряд аспектов, которые рассмотрены в различных работах.

В [6] предложены критерии совпадения тока молнии и аппроксимирующей его биэкспоненциальной функции (БЭФ) (длительность фронта и интеграл по времени от 0 до  $\infty$ ).

В [7] рассмотрен вопрос об аппроксимации БЭФ импульсных волн напряжения атмосферного происхождения, приведены методика расчета и графические материалы для определения коэффициентов БЭФ при аппроксимации импульсов стандартной формы (в частности, приведены коэффициенты для стандартных волн 1,5 / 40 мкс и 1,2 / 50 мкс).

В [8] рассмотрена методика аппроксимации временных функций экспоненциальными полиномами, использующая преобразование Лапласа. Данная методика дает представление аппроксимируемой зависимости в виде полиномов, которые включают как экспоненциальные, так и тригонометрические члены:

$$f(t) = e^{-\delta t} \left[ a_0 + \sum_{k=1}^{\ell} \left( a_k \cos \frac{2k\pi}{T} t + b_k \sin \frac{2k\pi}{T} t \right) \right].$$

Такое представление временной функции является формальным и слабо соответствует физическим процессам в случае, когда  $f(t)$  описывает однократные импульсные процессы в ВИИУ.

В настоящее время для аппроксимации ИЭМВ различного происхождения широко используется БЭФ. Это связано, во-первых, с близостью формы ряда реальных ИЭМВ к форме, описываемой БЭФ [2, 6, 9, 10], во-вторых, с простотой расчетов и реализации импульсов, описываемых БЭФ, в испытательных установках (например, [1 – 4]).

Таким образом, в настоящее время имеется ряд работ, освещающих различные аспекты проблемы аппроксимации формы ИЭМВ с помощью БЭФ, однако отсутствует описание общей методики определения ее коэффициентов.

**Целью** настоящей работы является разработка общей методики аппроксимации формы импульсного электромагнитного воздействия с помощью биэкспоненциальной функции.

**Материалы и результаты исследований.** В общем случае (см. рис. 1) отсутствует полное совпадение формы реального ИЭМВ и аппроксимирующей его БЭФ. Причиной несовпадения являются:

- более сложная зависимость формы реального ИЭМВ от времени, чем у БЭФ;
- погрешность измерения значений реального ИЭМВ.

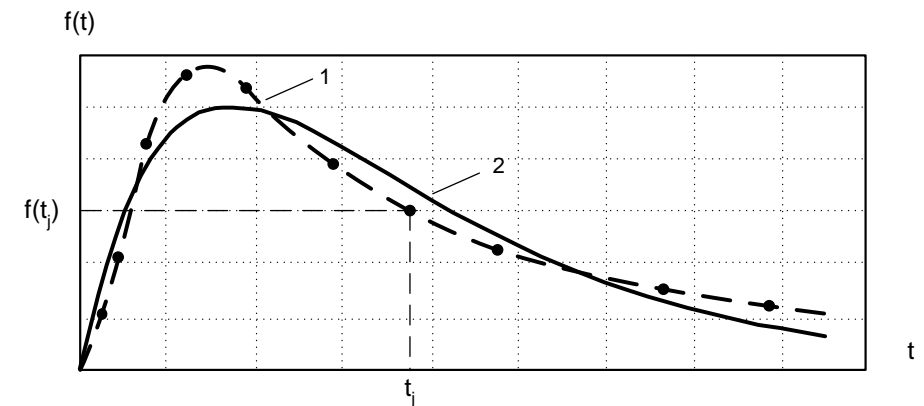


Рис. 1. Графики изменения ИЭМВ и БЭФ.

1 – экспериментальная зависимость ИЭМВ; 2 – аппроксимирующая БЭФ.

Такая ситуация вызывает необходимость определения коэффициентов БЭФ, при которых имеет место наиболее близкое совпадение формы ИЭМВ и аппроксимирующей его функции.

В общем случае процедура аппроксимации характеризуется:

- эквивалентными параметрами (ЭП) – параметрами реального ИЭМВ и аппроксимирующего выражения, совпадения которых добиваются;
- степенью совпадения (близости) ЭП.

При аппроксимации в качестве критерия близости чаще всего используют:

- максимальное значение модуля абсолютного отклонения ЭП;
- максимальное значение модуля относительного отклонения ЭП;
- среднее квадратическое абсолютное отклонение ЭП;
- среднее квадратическое относительное отклонение ЭП.

Выбор ЭП зависит от исследуемого при испытаниях эффекта, производимого ИЭМВ, и, чаще всего, применяются следующие величины.

1. Контрольные точки – значения ИЭМВ в моменты времени  $t$  от начала импульса, например, достигаемое значение в момент  $t = 1$  мкс.
2. Контролируемые параметры - отрезки времени (или некоторых функций от них), характеризующих ИЭМВ, например, длительность фронта между уровнями 0,1 и 0,9.
4. Производная в заданной контрольной точке  $t = t_k$  или интервале времени  $(t_1, t_2) - df(t) / dt$ .

5. Интеграл от функции - 
$$\int_0^t f(t) dt$$

6. Интеграл от квадрата функции - 
$$\int_0^t f(t)^2 dt$$

Сформулируем задачу аппроксимации формы ИЭМВ как задачу минимизации отклонения параметров ИЭМВ от параметров аппроксимирующей его БЭФ.

Пусть имеются массивы значений моментов времени  $t_j$  и соответствующих им значений ИЭМВ –  $A_j$ , где  $j = 1 \dots n$ , которые получены экспериментальным путем. Поставим задачу описать изменение величины  $A_j$  во времени с помощью БЭФ таким образом, чтобы имела место наибольшая близость БЭФ и массива значений  $A_j$ .

Учитывая ограниченность ИЭМВ во времени, для их аппроксимации представим описание БЭФ в следующем виде:

$$f(t) = \alpha_1 e^{-\beta_1 t} + \alpha_2 e^{-\beta_2 t} \quad (1)$$

где коэффициенты БЭФ обладают следующими свойствами:  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 = -\alpha_1$ ,  $\beta_1, \beta_2 > 0$ ,  $\beta_1 < \beta_2$ .

Постановка задачи. Требуется найти минимум целевой функции

$$F_C = \varphi[t_j, A_j, \alpha_1, \beta_1, \beta_2] \quad (2)$$

где  $\varphi$  - функция, определяемая критерием близости;

$j = 1 \dots n$ ,

при изменении коэффициентов БЭФ в диапазоне:

$$\alpha_{1\min} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{1\max}; \quad \beta_{1\min} \leq \beta_1 \leq \beta_{1\max}; \quad \beta_{2\min} \leq \beta_2 \leq \beta_{2\max}. \quad (3)$$

Для случая, когда в качестве критерия близости используется максимальное значение модуля относительного отклонения значений контрольных точек, целевая функция имеет вид:

$$F_C = \text{MAX} \left\{ \text{ABS} \left[ A_j - \left( \alpha_1 e^{-\beta_1 t_j} - \alpha_2 e^{-\beta_2 t_j} \right) \right] / A_j \right\} \quad (4)$$

где  $\text{MAX}(\cdot)$  – функция, определяющая максимальное значение нескольких аргументов;

$\text{ABS}(\cdot)$  – функция, вычисляющая абсолютное значение аргумента;

$j = 1 \dots n$ .

Данная задача является задачей нелинейного программирования, имеющей многоэкстремальный характер в трехмерном пространстве. Как известно [11], для задач такого класса отсутствуют общие методы решения, одновременно удовлетворяющие требованиям минимальности затрачиваемых ресурсов ЭВМ, точности и достоверности решения. В связи с этим, автором для решения поставленной задачи разработан комбинированный метод поиска глобального минимума целевой функции, базирующийся на использовании известных методов [11]: случайного поиска, Хука-Дживса, штрафных функций.

Блок-схема вычислений данным методом приведена на рис. 2. В блоке 1 производится присвоение начальных значений всем переменным вычислительного процесса, в т.ч. вычисляются границы диапазонов изменения коэффициентов БЭФ (3). Границы определяются в предположении, что исходные данные обладают следующими свойствами, которые обеспечиваются их предварительной подготовкой: все значения  $A_j$  положительны; отсутствуют резко выделяющиеся значения  $A_j$ ; последняя точка на спаде импульса  $A_n$  имеет наименьшее значение большее нуля.

Определение границ диапазона значений  $\beta_1$ :  $\beta_{1\min}$  и  $\beta_{1\max}$ .

Пусть аппроксимируемая зависимость описывается выражением (1).

Учитывая, что  $\beta_1 < \beta_2$ , для точек на спаде импульса  $e^{-\beta_2 t} \ll e^{-\beta_1 t}$ , тогда,

полагая  $e^{-\beta_2 t} = 0$ , для двух значений на спаде импульса имеет место следующее отношение

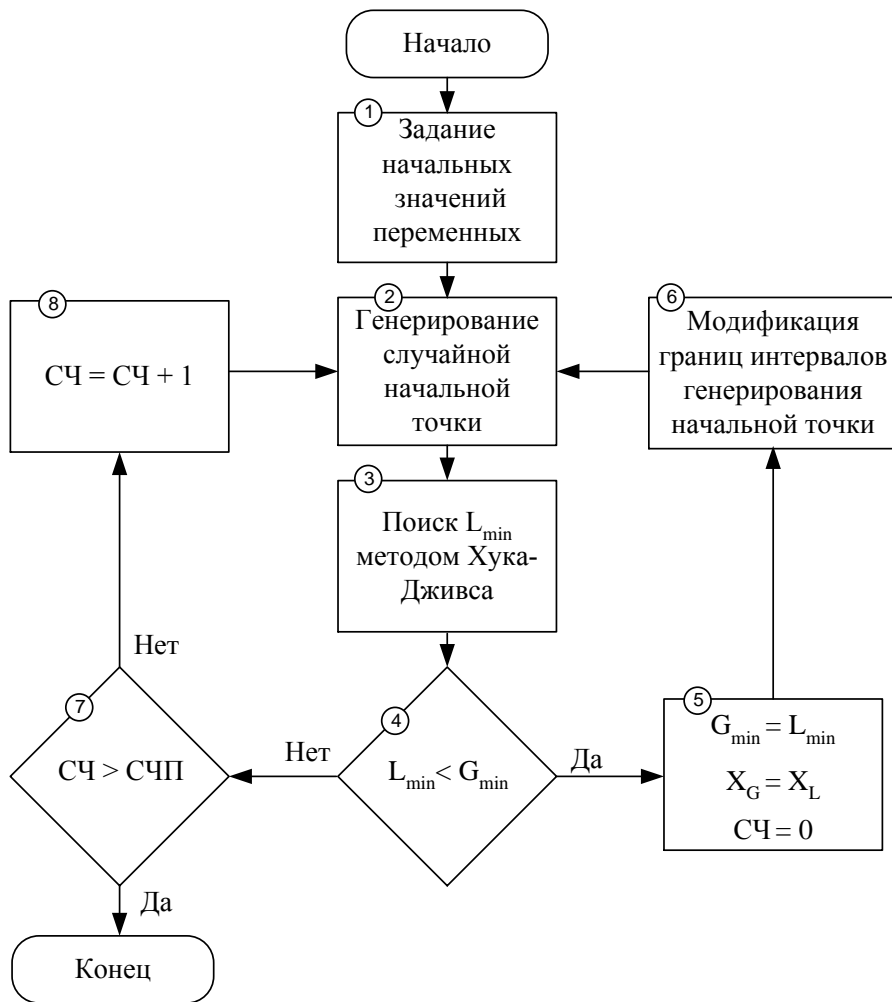


Рис. 2. Блок-схема программы.

$G_{\min}$  – значение глобального минимума;  $L_{\min}$  – значение локального минимума;  $X_G$  – набор коэффициентов БЭФ, соответствующих  $G_{\min}$ ;  $X_L$  – набор коэффициентов БЭФ, соответствующих  $L_{\min}$ ; СЧ – значение счетчика количества определений  $L_{\min}$ , не изменяющих  $G_{\min}$ ; СЧП – предельное значение СЧ в текущем процессе вычислений.

$$\frac{f(t_k)}{f(t_j)} = e^{-\beta_1(t_k - t_j)}, \quad (5)$$

откуда для точек на спаде импульса, для которых выполняются следующие условия

$$t_j \geq t_{\max}, f(t_j) > f(t_n), f(t_j) > 0, f(t_n) > 0, \quad (6)$$

где  $t_{\max}$  – время достижения импульсом максимального значения,  $t_n$  – время, соответствующее последнему элементу массива -  $A_n$ ,

вычисляем

$$\beta_1 = -\frac{1}{t_n - t_j} \ln \frac{f(t_n)}{f(t_j)} \quad (7)$$

и из них выбираем наименьшее -  $\beta_{1\min}$  и наибольшее -  $\beta_{1\max}$ . Используя полученные границы, вычисляем диапазон изменения  $\alpha_1$  для точек, удовлетворяющих (6), по формуле:

$$\alpha_1 = \frac{f(t_k)}{e^{-\beta_1 t_k}} \quad (8)$$

Выбираем из рассчитанных по (8) значений наименьшее и наибольшее -  $\alpha_{1\min}$  и  $\alpha_{1\max}$ . Аналогично, для точек в интервале  $0 < t_j < t_{\max}$ , определяем границы диапазона изменения  $\beta_2$ :  $\beta_{2\min}$  и  $\beta_{2\max}$ .

$$\beta_2 = -\frac{1}{t_k} \ln \left( e^{-\beta_1 t_k} - \frac{f(t_k)}{\alpha_1} \right) \quad (9)$$

Найденные интервалы изменения коэффициентов БЭФ используются для нахождения случайной начальной точки в блоке 2, которая далее применяется для начала поиска минимума целевой функции методом Хука-Дживса (см. блок 3). Генерирование случайных значений коэффициентов осуществляется по выражению:

$$X^* = \text{СРРЧ}(X_{\min}, X_{\max}), \quad (10)$$

где  $X^*$  – случайное значение одного из коэффициентов БЭФ -  $\alpha_1, \beta_1, \beta_2$ ;

$X_{\min}, X_{\max}$  – минимальное и максимальное значение интервала изменения значений коэффициентов, определяемых с использованием (7) - (9);

СРРЧ(a, b) – функция, вычисляющая случайное равномерно распределенное число в интервале от a до b.

В блоке 4 производится сравнение локального минимума целевой функции  $L_{\min}$ , вычисленного методом Хука-Дживса для текущей начальной точки, со значением глобального минимума целевой функции  $G_{\min}$ . Если локальный

минимум меньше глобального, то глобальному минимуму присваивается значение локального минимума (блок 5); всем коэффициентам, обеспечивающим глобальный минимум -  $X_G$  присваиваются значения коэффициентов, обеспечивающих локальный минимум -  $X_L$  для текущей начальной точки; обнуляется СЧ – значение счетчика количества определений  $L_{min}$ , не изменяющих  $G_{min}$ . Далее (блок 6) производится модификация границ интервалов поиска начальной точки и процесс поиска минимума продолжается. Процедура модификации обеспечивает постоянное нахождение значений параметров  $X_G$  в интервале случайного генерирования их значений при сокращении размеров интервала. Сущность модификации границ интервалов определения начальной точки заключается в следующем:

если  $X_G \in (X_{min}, X_{max})$ , то производим сокращение интервала генерирования начальной точки

$$X_{min} = X_G - KS \cdot (X_G - X_{min})$$

$$X_{max} = X_G + KS \cdot (X_{max} - X_G);$$

если  $X_{min} > X_G$  ( $X_{max} < X_G$ ), то производим расширение интервала генерирования начальной точки  $X_{min} = X_G$  ( $X_{max} = X_G$ ),

где  $X_{min}$ ,  $X_{max}$  – минимальное и максимальное значение интервала генерирования начальной точки;

$KS$  – коэффициент сокращения интервала.

В случае, если при сравнении в блоке 3  $L_{min} > G_{min}$ , то производится сравнение текущего значения СЧ с СЧП. Если СЧП достигнуто, то процесс минимизации окончен. Если СЧП не достигнуто, то значение СЧ увеличивается на единицу (блок 8) и процесс поиска минимума продолжается.

Величина СЧП выбирается из условия получения достоверного результата процедуры поиска глобального минимума и определяется по формуле [12]:

$$\text{СЧП} = \ln(1 - \beta) / \ln(1 - p), \quad (11)$$

где  $p$  – верхняя граница вероятности того, что существует локальный минимум, значение которого меньше найденного в процессе вычисления глобального минимума (нижняя граница равна нулю);

$\beta$  – доверительная вероятность вычисления СЧП.

При вычислении целевой функции в блоке 3 используется метод штрафных функций: если нарушаются свойства коэффициентов БЭФ (1), то целевой функции присваивается значение заведомо большее, чем значение глобального минимума и алгоритм Хука-Дживса обеспечивает дальнейший поиск минимума целевой функции в области, где выполняются свойства коэффициентов.

Для исследования эффективности предложенного метода аппроксимации были проведены два численных эксперимента. В первом эксперименте производилась аппроксимация значений точно описываемых известной БЭФ.

Эксперимент проводился для различных значений  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Как видно из рис. 3, на котором приведены графики изменения целевой функции  $F_C$  в зависимости от количества ее вычислений  $N$ , произведенных в процессе аппроксимации, увеличение величины  $N$  позволяет практически точно определить коэффициенты аппроксимируемой БЭФ.

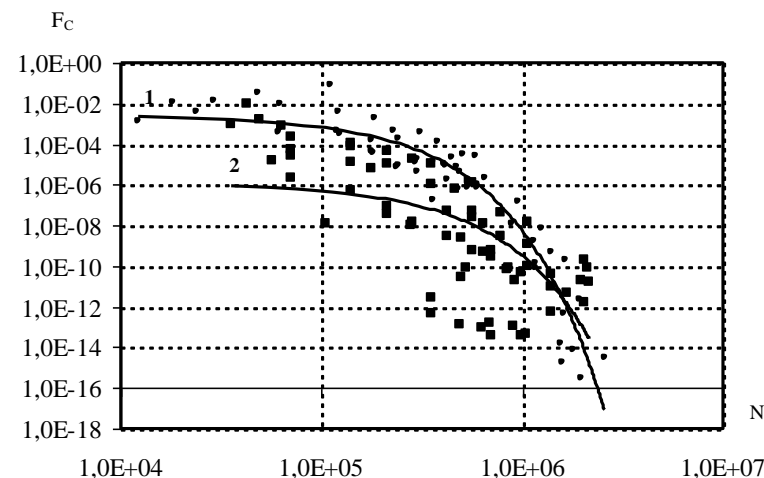


Рис. 3. Изменение целевой функции при аппроксимации значений, точно описываемых БЭФ.

$$1 - \beta_2 / \beta_1 = 10, 2 - \beta_2 / \beta_1 = 100$$

( $\beta_1$  в экспериментах изменялось в диапазоне 1 ... 1000).

Второй численный эксперимент состоял в том, что аппроксимировались значения, полученные путем изменения и точек известной БЭФ на случайную величину, равномерно распределенную в интервале  $(-\Delta, \Delta)$ . На рис. 4 представлено изменение целевой функции в зависимости от величины СЧП для двух значений  $\Delta$ , составляющих 10% и 15% от значения БЭФ в изменяемой точке. Как видно из графиков, при увеличении СЧП значения целевой функции стабилизируются, причем, чем больше значение случайного разброса  $\Delta$ , тем быстрее происходит стабилизация, и ее значение стремится к  $\Delta / 2$ , т.е. к среднему значению случайной величины, равномерно распределенной в интервале  $(0, \Delta)$ . Это подтверждает наибольшую близость экспериментальных данных и аппроксимирующей их БЭФ.

На рис. 5 в качестве примера приведены результаты аппроксимации тока, протекающего по первичной обмотке системы электроснабжения здания при поражении молнией молниеприемника защищающего это здание [13].

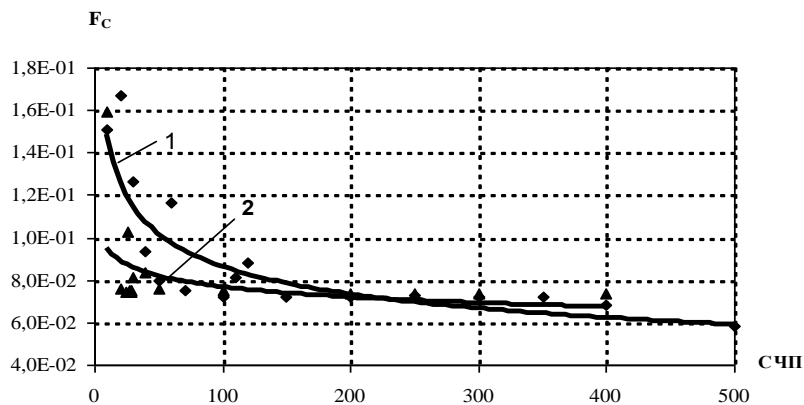


Рис. 4. Изменение целевой функции при аппроксимации значений известной БЭФ с наложением случайных отклонений.

- 1 – максимальное значение случайного разброса  $\Delta$  составляет 10%;  
 2 – максимальное значение случайного разброса  $\Delta$  составляет 15%

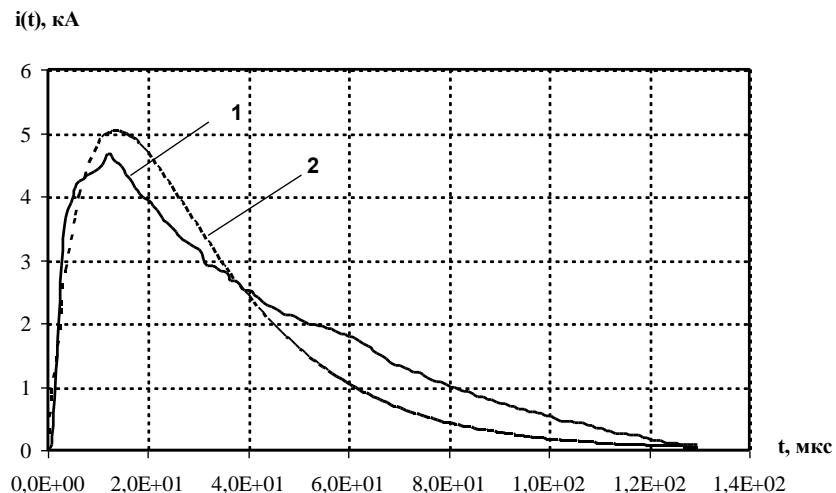


Рис. 5. Импульс тока, протекающий по первичной обмотке трансформатора.  
 1 – реальный импульс тока; 2 – аппроксимирующая БЭФ.

Определенные коэффициенты аппроксимирующей функции имеют следующие значения:  $\alpha_1 = 14,8 \text{ кА}$ ;  $\beta_1 = 0,045 \text{ мкс}^{-1}$ ;  $\beta_2 = 0,11 \text{ мкс}^{-1}$ . Расчеты показывают, что при аппроксимации модуль максимального абсолютного отклоне-

ния с вероятностью  $p^* = 0,95$  (нижняя граница доверительного интервала вероятности, верхняя граница равна 1) не превышает  $0,85 \text{ кА}$  при доверительной вероятности  $\beta = 0,9$ .

#### Выводы.

1. Сформулирована задача аппроксимации экспериментальных значений импульсных электромагнитных воздействий, как задача минимизации отклонений эквалентруемых параметров.

2. Для решения поставленной задачи применена методика аппроксимации экспериментальных данных биэкспоненциальной функцией, использующая разработанный автором комбинированный метод минимизации отклонений экспериментальных данных и значений аппроксимирующей функции.

3. Результаты проведенных исследований подтвердили эффективность предложенного алгоритма в обеспечении точности и достоверности решения задачи аппроксимации.

**Список литературы:** 1. *Смирнов С.М., Терентьев П.В.* Генераторы импульсов высокого напряжения. – М.: Энергия, 1964. – 239 с. 2. *Ашнер А.М.* Получение и измерение импульсных высоких напряжений: Пер. с нем. – М.: Энергия, 1979. – 120 с. 3. *Кутаев Г.И.* Выбор параметров разрядной цепи генератора импульсов тока // Электротехника. – 1987. – №4. – С. 15. 4. *Петков А.А.* Выбор параметров разрядной цепи генератора импульсов тока при разряде на последовательную активно-индуктивную нагрузку // Электротехника. – 1990. – №10. – С. 35-36. 5. *Петков А.А.* Формирование испытательных импульсов тока сложной формы // Вестник национального технического университета "Харьковский политехнический институт". Сборник научных трудов. Тематический выпуск: "Энергетика и преобразовательная техника". – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2004. №4. – С. 22 – 30. 6. *Коломиец Е.В.* Оценка электромагнитных полей внутри здания при поражении его молнией // Сборник докладов седьмой научно-технической конференции по электромагнитной совместимости ЭМС-2002. – Санкт-Петербург, 2002. – С.67 – 72. 7. *Лоханин А.К., Иванова Н.С.* Соотношения между расчетными параметрами импульсной волны // Электричество. – 1968. – №12. – С. 80 – 81. 8. *Кочанов Н.С.* Основы синтеза линейных электрических цепей во временной области. – М.: Связь, 1967. – 200 с. 9. *Рикетс Л.У., Бриджес Дж.Э., Майлетта Дж.* Электромагнитный импульс и методы защиты: Пер. с англ. – М.: Атомиздат, 1979. – 328 с. 10. *Мырова Л.О., Чепиженко А.З.* Обеспечение стойкости аппаратуры связи к ионизирующим и электромагнитным излучениям. – М.: Радио и связь, 1988. – 296 с. 11. *Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К.* Оптимизация в технике. – М.: Мир, 1986. – Кн. 1. – 349 с. 12. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с. 13. *Vladimir A. Rakov, Martin A.Uman, Mark I. Fernandez, Carlos T. Mata, Keith J. Rambo, Michel V.Stapleton and Rafael R Sutil.* Direct Lightning Strikes to the Lightning Protective System of a Residential Building: Triggered- Lightning Experiments. IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 17, No. 2, April, 2002. – p. 575 – 586.

Поступила в редколлегию 25.06.05.