УДК 165

Дышкант Т.Н.

ПРИРОДА ЛОГИЧЕСКИХ ПАРАДОКСОВ

Дышкант Т.Н.
Природа логических парадоксов.
Проблема природы парадоксов является одной из важнейших проблем теории познания, где до сих пор четко не определена их роль. Тот факт, что исследователи расходятся в определении причин возникновения парадоксов, свидетельствует о сложности данной проблемы. Очевидная на первый взгляд причина (многозначность понятий) возникновения парадоксов и доступная возможность ее устранения вызывают недоумение по поводу «долгожительства» многих известных парадоксов. Данная статья представляет собой попытку анализа сложившейся ситуации и направлена на выявление природы логических парадоксов.
Ключевые слова: парадокс, число, множество, элемент множества.

Дишкант Т.М.
Природа логічних парадоксів.
Проблема природи парадоксів є однією з найважливіших проблем теорії пізнання, де дотепер чітко не визначена їх роль. Той факт, що дослідники розходяться у визначенні причин виникнення парадоксів, свідчить про складність даної проблеми. Очевидна на перший погляд причина (багатозначність понять) виникнення парадоксів і доступна можливість її усунення викликають нерозуміння з приводу «довголіття» багатьох відомих парадоксів. Дана стаття є спробою аналізу ситуації, що склалася, і спрямована на виявлення природи логічних парадоксів.
Ключові слова: парадокс, число, множина, елемент множини.

Dishkant T. N.
Nature of logical paradoxes.
The problem of nature of paradoxes is one of major problems of theory of cognition, where their role is not until now expressly certain. The fact remains that researchers differ in opinion from determination of reasons of origin of paradoxes. It testifies to complication of this problem. The reason (polisemanticy of concepts) of origin of paradoxes and accessible possibility of its removal obvious on the face of it cause bewilderment on an occasion the «long-liver» of many known paradoxes. This article is the attempt of analysis of the folded situation and directed on the exposure of nature of logical paradoxes.
Key words: paradox, number, great number, element of great number.

В теории познания к проблеме парадоксов сформировалось множество отношений, среди которых есть диаметрально противоположные: одни полагают эвристическую ценность парадоксов для развития познания, другие указывают на деструктивную их роль. О сложности проблемы свидетельствует также тот факт, что исследователи расходятся в определении причин возникновения парадоксов и, следовательно, не могут определить общий принцип, который ответственен за данный конкретный парадокс.

Понятие «парадокс», как и любое понятие естественного языка, является многозначным. В широком смысле парадокс – это положение идущее вразрез с общепринятыми мнениями. Такие парадоксы чаще всего являются знаком обнаружения ограниченности существующей теории. Их появление – признак того, что познание подошло к своему новому этапу. Парадокс в более узком и специальном значении в литературе по логике определяют как два противоположных, несовместимых утверждения, для каждого из которых имеются кажущиеся убедительными аргументы. При этом признают, что наиболее резкая форма парадокса антиномия [см. 3, стр. 189]. Однако это не вполне корректное определение, так как здесь не отражено то, что парадокс всегда возникает как результат в процессе рассуждения. Логический парадокс – это такое рассуждение, в котором последовательный ход мысли приводит к выводному положению, состоящему в отношении противоречия с исходным положением. Структура парадокса является не отличимой от структуры дедуктивного умозаключения по фигуре условно-категорического силлогизма («если…, то…»).

Из самой формы образования парадоксов можно сделать вывод, что решающую роль здесь играет наличие неточных (по различным причинам) понятий. Нарушаются закон тождества и требования непротиворечивости. Для научного познания это недопустимая ситуация, так как равнодоказательность двух несовместимых утверждений приводит к тому, что истина и ложь становятся неразличимыми, а всякое высказывание как средство передачи информации – бессмысленным. Однако очевидность причин возникновения противоречия (многозначность понятия) и вполне доступная возможность их устранения (уточнение понятия) оставляют непонятным историческое «долгожительство» многих известных парадоксов и появление новых. На самом деле, проблема парадоксов очень многослойная. Она, например, в скрытом виде включает в себя следующие проблемы:

- проблему соотношения конечного и бесконечного (бесконечное не может быть получено путём простого расширения конечного понятия. Тогда как соотносятся множества, построенные применением математической индукции, подразумевающей счет, и несчетное множество?):
- соотношение части и целого;
- проблему природы математики и логики, так как парадоксы, в собственном смысле этого слова, возникают именно там.

Парадоксы – верхушка айсберга, указывающая на существование глубинных проблем внешнего (парадокс в широком значении как соотнесённость теории и практики) и внутреннего характера.

При самом общем подходе различают два типа парадоксов:

1) семантические парадоксы;
2) парадоксы, связанные с употреблением теоретико-множественных понятий (логические парадоксы).

Семантические парадоксы возникают в естественных языках и научных теориях из-за неограниченного и неоговариемого специальным образом отношения именования. Типичный пример семантического парадокса – парадокс «Лжец», известный в нескольких модификациях. Логические парадоксы – парадоксы, связанные с употреблением теоретико-множественных понятий, поскольку эти понятия допускают чисто логическое описание, например в терминах теории множеств. Проанализируем, насколько правомерной является такая классификация парадоксов.

К логическим парадоксам относится знаменитый парадокс Б. Рассела о «множестве всех обычных множеств». Начинается формулировка данного парадокса с утверждения, что относительно любого произвольно взятого множества представляется осмысленным спросить, является оно своим собственным элементом или нет. Множествам, не содержащих себя в качестве элемента, присваивают название «обычных». Например, множество всех людей не является человеком, так же как множество рек — это не река. Необычными будут множества, являющиеся собственными элементами. Например, множество, объединяющее все множества, представляет собой множество и, значит, содержит само себя в качестве элемента. Данное множество строится через задание свойства «быть обычным». Дальнейшее рассуждение, приводящее к парадоксу, выглядит следующим образом. Рассмотрим **множество всех обычных множеств**. Поскольку оно множество, о нем тоже можно спрашивать, обычное оно или необычное. Если оно обычное, то должно содержать само себя в качестве элемента, поскольку содержит все обычные множества. Но это означает, что оно является необычным множеством. Допущение, что данное множество представляет собой обычное множество, приводит, таким образом, к противоречию. Значит, оно не может быть обычным. С другой стороны, оно не может быть также необычным: необычное множество содержит само себя в качестве элемента, а элементами данного множества являются только обычные множества. В итоге приходим к заключению, что множество всех обычных множеств не может быть ни обычным, ни необычным множеством. Итак, множество всех множеств, не являющихся собственными элементами, есть свой элемент в том и только том случае, когда оно не является таким элементом. Это явное противоречие. И получено оно на основе самых правдоподобных предположений и с помощью бесспорных как будто шагов. Человеческое мышление, как показывал еще И. Кант, характеризуется стремлением к всеобщности. Именно поэтому возникает такая паника при обнаружении противоречивости понятия «множество всех множеств». Понятие «множество» не универсально! Оно не применимо ко всем классам объектов!

На самом деле ошибка возникает уже тогда, когда образуют понятие «обычное множество». То, что мы легко находим аналог в действительности понятию «река» не отменяет абстрактности этого понятия. Поэтому «множество всех рек» всё-таки будет «рекой». В этом случае речь идет всего лишь об объеме данного понятия. Когда же утверждают, что «множество всех рек» «рекой» не является, то незаметно соскальзывают с логического уровня на онтологический.

Суждение – это форма мышления, которую всегда можно характеризовать как истинную или ложную. Как говорится в учебной литературе по логике: «Если какой-нибудь предмет является элементом некоего множества, то он тем самым оказывается десигнатом имени этого множества, а значит, относительно его можно построить истинное утвердительное высказывание, взяв в качестве субъекта **имя элемента**, а в качестве предиката – имя множества…Если же предмет не является элементом множества, то построенное таким способом высказывание будет ложным» [1, стр. 320]. Например, если планета является элементом множества небесных тел, то высказывание «планета – это небесное тело» будет истинным. Поскольку же книга не является элементом множества библиотек, то высказывание «Книга – это библиотека» является ложным.

Второй шаг состоит в выявлении двусмысленности утверждения «множество А является элементом множества В» с помощью простого вопроса: «Из каких элементов в этом случае сформировано множество В?». Здесь возможны два варианта объяснения. Первое это то, что элементами множества В являются имена некоторых множеств и, в том числе, имя или обозначение множества А. Например, множество всех собак содержится как элемент в множестве всех млекопитающих. Но в этом случае оказывается, что элементом множества является не само по себе множество А, а его имя. В этом случае неявно устанавливается отношение эквивалентности между множеством и его обозначением, что неприемлемо даже с точки зрения здравого смысла. Во втором случае можно утверждать, что элементами множества В являются все элементы множества А, например, каждая собака является элементом множества всех млекопитающих. В этом случае оказывается, что множество А включено в множество В и является его подмножеством, а не элементом. В математике же отношение включения множеств и отношение принадлежности (быть элементом множества) имеют различный смысл, поэтому здесь можно говорить о подмене понятий. Таким образом, парадокс «множество всех обычных множеств» также можно классифицировать как семантический. Впрочем, различение парадоксов на семантические и логические можно было бы поставить под сомнение на более общих основаниях, не прибегая к конкретному примеру в виде парадокса «множества всех обычных множеств». Любая научная теория должна быть не только системой знаков, но должна обладать определенным онтологическим содержанием, которое ученый и отображает с помощью знакового построения. (Именно поэтому и потерпела поражение программа формализации математики Д. Гильберта, идея которой состояла в том, чтобы выразить классическую математику в виде формализованной аксиоматической системы, а затем доказать ее непротиворечивость). Скрытая за знаковой, содержательная структура научного знания обнаруживается при семантическом подходе, учитывающем значение знаков.

В качестве шутливого аналога парадокса «множество всех обычных множеств» Б. Рассел использовал парадокс «Брадобрей». Деревенский брадобрей должен брить только тех мужчин деревни, которые не бреются сами. Кто же бреет самого брадобрея? (Предполагается, что в деревне только один брадобрей). Если он бреет сам себя, то нарушает условие. Если он не бреет себя, то, значит, он бреет не всех мужчин. Условие опять оказывается нарушенным. Однако упускают из вида, что понятие «парикмахер» в данном примере только кажется общим понятием. На самом деле здесь используется единичное понятие «единственный брадобрей такой-то деревни». Если бы в деревне было два парикмахера, то данное понятие представляло бы собой универсальное, и парадокс не возник бы. В парадоксе «множество всех обычных множеств» на самом деле также происходит смешение двух понятий: множество «обычных множеств» - несобирательное, и, следовательно, общее понятие и «множество обычных множеств» - собирательное и, значит, единичное понятие. То есть данные понятия по языковой форме одинаковые, но имеют различную логическую природу. В первом значении слово «множество» обозначает количество обычных множеств, во втором – название самого себя [см. 1, стр. 321]. Таким образом, и в парадоксе «Брадобрей», и в парадоксе «множество всех обычных множеств» неправомерным образом соотносят объемно определённое понятие с понятием, не являющимся объемно определённым. Это смешение Б. Рассел пытался устранить с помощью своей теории типов, запрещающей ставить в один ряд элемент и множество.

То, что самые известные парадоксы математики возникли в таком ее направлении как теория множеств, предполагает поиск их источника в выявлении и уточнении смысла понятия «множество». Стремясь к общезначимости и не имея возможности задать несчетное множество через его характеристические свойства, сторонники логицизма предположили фундаментальность понятия «множество». Это означает, что в теоретико-множественных системах не свойство предшествует множеству, а множество предшествует свойству. Тем не менее, понятию «множество» присваивают такое свойство как мощность. С точки зрения Г. Кантора, создателя теории множеств, мощность это то общее, что есть у множеств самой различной природы, но эквивалентных друг другу (т.е. элементы этих множеств приводимы во взаимооднозначное соответствие). Оказывается, что мощности множества натуральных чисел и множества вещественных чисел не одинаковы, так как эти множества не приводимы во взаимооднозначное соответствие. Но из всего вышесказанного следует вывод, что данные множества не эквивалентны, и если для множества натуральных чисел можно найти эквивалентное множество, например, множество четных чисел, то для множества вещественных чисел мы этого сделать не можем. Поэтому так называемое множество вещественных чисел на самом деле множеством не является, так как не обладает отличительным для любого множества свойством – не имеет мощности. Множество вещественных чисел обретает целостность, и тем самым становится самопротиворечивым, рождая парадоксы. Например, Р. Дедекинд проводил аналогию между множеством вещественных чисел (именно они составляют несчетное множество) и прямой линией, которой свойственна непрерывность. Если каждой точке на прямой соответствует какое-либо число, то по аналогии с множеством чисел, мы можем говорить и о множестве точек. Ни одна точка не обладает свойством континуума, почему же тогда говорят о континууме как о множестве точек именно в логическом аспекте? В общем, в математической теории множеств, пытаясь решить проблему структуры континуума, смешивают отношения рода и вида (вид обладает всеми признаками рода), рассматриваемого в логике, и отношение части и целого (часть не обладает признаками целого). Отсутствует иерархичность, свойственная родовидовым отношениям, поэтому и возникает целостность, которая в логике предстает как единичное (собирательное) понятие.

Вернемся к парадоксу о брадобрее. В его случае имеет место некоторое искусственное условие, то есть условие, не вытекающее из самой природы вещей. Из того, что мужчины могут бриться, не следует, что брадобрей должен брить только тех мужчин, которые не бреются сами. Подобные рассуждения Х. Карри называл «псевдопарадоксами, потому что здесь нет настоящего противоречия» [4, стр. 22]. Является ли парадоксы теории множеств такими же искусственными, или для их возникновения были какие-либо объективные причины?

То, что Г. Кантор положил понятие «множество» в его неограниченной абстрактной общности в основу математической теории не было делом произвола. Потребность в новых представлениях возникла как реакция на необходимость дать логически строгую теорию непрерывных функций и преодолеть кризис идеи бесконечности. Понятие «множество» использовалось также для выявления природы числа. Например, Р. Дедекинд понимал действительное число как актуально бесконечное множество рациональных чисел. Фреге трактовал числа как множества всех множеств, равномощных данному, так как в этом случае сложение натуральных чисел сводилось к объединению множеств. И именно в этом подходе крылась возможность возникновения парадоксов теории множеств. То есть данные парадоксы имели объективную причину возникновения и поэтому не являются псевдопарадоксами. Проблема определения понятия числа до сих пор не имеет окончательного решения.

Исследуя генезис понятия «число», опираются, во-первых, на природу наших пространственных представлений, во-вторых, на процесс счета. Это обнаруживает двойственную природу числа, обладающего порядковой и количественной характеристиками. На основе этого некоторые философы утверждают противоречивость понятия числа, которое совмещает в себе два определения – быть одновременно и «одним» и «многим», элементом и множеством. «Оно и «девять» и «девятка», обозначение определенного количества и одновременно его определитель, показатель, индекс» [5, стр. 6]. Или если обратиться к диалектическому учению Гегеля, утверждавшему объективное существование противоречий: «Численность и единица составляют моменты числа» [2, стр. 277]. Но к такому подходу возникает ряд вопросов, например, Действительно ли понятие «число» неотъемлемо включает в себя операцию счета, благодаря которому оно возникло? Можно ли отождествлять объект и процесс, с помощью которого он получен? Отрицательный ответ дает классический парадокс Фреге. 2 + 3 состоит из знаков: 2, +, 3. Но 2 + 3 = 5. Следовательно, 5 содержит 3. Различие контекстов очевидно. Один раз 2 + 3 имеет значение знакосочетания. Другой раз 2 + 3 принимает значение числа. С точки зрения Фреге, имена 2 + 3 и 5 имеют различные смыслы. То есть трудности возникают уже при попытке выявить природу натуральных чисел. Расширение же понятия числа ставит вопрос об его общем определении, что еще более затруднительно. Этим и объясняется «долгожительство» логических парадоксов.

Список литературы:

1. *Бартон В.И.* Логика. – Минск: Новое знание, 2005. – 336 с.
2. *Гегель Г.В.Ф.* Наука логики. Т. 1. – М.: Мысль, 1970. – 501 с.
3. *Ивин А.А*. Логика. – М.: Знание, 1998. – 240 с.
4. *Карри Х.* Основания математической логики. – М.: Мир, 1969. – 568 с.
5. *Мареев С.Н.* Диалектическая логика и развитие современной науки. – М.: Знание, 1979. – 48 с.