

Міністерство освіти та науки України
УКРАЇНСЬКА ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ
Кафедра вищої та прикладної математики

О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер, Ю. І. Першина

СИСТЕМА КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ MATHCAD В НАУКОВО-ТЕХНІЧНИХ РОЗРАХУНКАХ

Навчально-методичний посібник

*Для студентів денної та заочної форм навчання
інженерних та інженерно-педагогічних спеціальностей*

Затверджено
Науково-методичною радою
Української інженерно-
педагогічної академії
протокол № 6
від 27.02.2017 р.

Харків
2017

УДК 004.42:51(075.8)

Литвин О. М.

Система комп'ютерної математики Mathcad в науково-технічних розрахунках: навч.-метод посібник для студ. денної та заоч. форм навч. інж. та інж.-пед. спец. / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер, Ю. І. Першина; Україн. інж.-пед. акад. – Харків : [б. в.], 2017. – 64 с.

Навчально-методичний посібник містить основні відомості для роботи з математичною системою Mathcad, яка застосовується для розв'язання задач в різних сферах: економіці, фізиці, астрономії, будівництві, організації виробництва, конструюванні електричних схем тощо. Видання включає як навчальний, так і довідковий матеріал.

Система Mathcad може виконувати обчислення будь-якої складності та об'єму в межах ресурсів вашого персонального комп'ютера. Крім звичних чисельних розрахунків Mathcad може робити символні перетворення, а такж дозволяє використовувати програмування. Mathcad має широкі графічні можливості. Різноманітність типів графіків полегшує візуалізацію та аналіз даних. Програма має текстовий редактор зі стандартними функціями, що дозволяє готувати статті, звіти, технічну документацію

Видання призначене студентам денної та заочної форм навчання інженерних та інженерно-педагогічних спеціальностей для роботи на лекціях, практичних та лабораторних заняттях.

Рецензент: О. Д. Пташний, канд. пед. наук, доц.

Відповідальний за випуск: О. М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, проф.

© Литвин О. М., Нечуйвітер О. П., Першина Ю. І. 2017
© УІПА, 2017

Зміст.

Передмова	4
1. Запуск Mathcad	5
2. Робота в системі Mathcad	5
2. 1. Приклади простих обчислень та роботи з текстом	5
2. 2. Панелі інструментів	6
2.3. Редагування в системі Mathcad	23
2.4. Створення графіків	25
3. Програмування в середовищі Mathcad	28
4. Вбудовані функції Mathcad	34
5. Приклади розв'язування задач за допомогою системи комп'ютерної математики Mathcad	43
6. Збереження робочого документу	54
7. Друкування	54
8. Вихід з Mathcad	54
Контрольні завдання	54
Література	62

Передмова.

На даний момент розроблено та існує багато різних математичних систем: Maple, Matlab, Mathematica ... Кожна з них має свої переваги та недоліки, а також свої сфери застосування.

Система Mathcad створена для чисельного розв'язування математичних задач, а також для виконання операцій символічної математики. Mathcad має вбудовану систему автоматичного перерахунку і контролю одиниць виміру в процесі обчислень. Однією з переваг системи Mathcad є також те, що вона може взаємодіяти з іншими системами: Excel, Matlab, AutoCad, Visual Basic тощо. Відмітимо деякі особливості системи Mathcad .

1. Інтерфейс:

- інтерфейс з вільною формою запису, як на класній дошці;
- можливість комбінування тексту, математичних формул і графіки в будь-якому місці екрану;
- повідомлення про помилку помічає формулу, в якій знаходиться помилка.

2. Чисельні методи:

- точність: 15 вірних десяткових цифр для результатів обчислень та точні відповіді для результатів символічних обчислень;
- система одиниць виміру і перевірки розмірностей;
- алгоритми розв'язку систем рівнянь і нерівностей;
- комплексні числа, змінні та функції;
- похідні та інтеграли;
- обчислення сум рядів, добутків;
- тригонометричні, гіперболічні, експоненціальні і Бесселеві функції ;
- статистичні функції, лінійна регресія, гамма-функція Ейлера, інтеграл помилок;
- апроксимація кривих кубічними сплайнами;
- швидкі перетворення Фур'є, одновимірні та двовимірні;
- функції, що задає користувач;
- вектори та матриці, операції множення матриць, знаходження оберненої та транспонованої матриць, обчислення визначника матриці, скалярний та векторний добутки векторів.

3. Символьні обчислення:

- символічне інтегрування та диференціювання;
- обчислення визначника матриці;
- розклад виразів на множники;
- розв'язок рівнянь;
- спрощення символічних виразів.

4. Побудова графіків:

- одного дотику клавіші достатньо для побудови графіка з можливістю його подальшого корегування;

- різноманітність типів графіків: графіки в декартових, полярних координатах, зображення поверхонь, ліній рівня, картини векторних полів, тривимірні гістограми, точкові графіки;
- вісі графіків можуть мати лінійні або логарифмічні масштаби, а на графіки може бути нанесена координатна сітка;
- може бути вибраний тип, товщина, колір лінії, що використовується у побудові графіка;
- один графік може містити одну або декілька кривих;
- можливість імпорту графіки через буфер обміну;
- анімація графіків і будь-яких інших об'єктів робочого документу.

5. Характеристики тексту і робочого документу:

- автоматичне згортання рядків;
- розміщення тексту у вільному місці робочого документу;
- перевірка правопису за допомогою словника;
- можливість використання комбінації шрифтів різних розмірів і стилей у будь-якій текстовій області.

1. Запуск Mathcad.

Для того, щоб увійти в Mathcad, знайдіть на робочому столі відповідну піктограму і натисніть два рази на ліву кнопку мишки. Якщо ж відповідної піктограми немає на робочому столі, то зайдіть в Пуск - Програми – MathSoft Apps - Mathcad Professional 2001, натисніть Enter. На екрані з'явиться заставка Mathcad Plus, а потім саме вікно Mathcad.

2. Робота в системі Mathcad.

2. 1. Приклади простих обчислень та роботи з текстом.

Mathcad використовується для складних математичних обчислень, але його можна використовувати і як простий калькулятор.

Якщо клацнути мишкою в будь-якому місці робочого документу, то з'явиться невеличкий хрестик. Всі введені з клавіатури символи будуть розміщуватися в робочому документі, починаючи з місця розташування червоного хрестика. Наприклад, щоб обчислити вираз $25 - \frac{4}{104.5}$, наберіть $25 - 4/104.5 =$. Після того, як наберете знак $=$, Mathcad обчислить вираз і виведе результат.

Для того, щоб визначити змінну x необхідно ввести символ x та двокрапку. Двокрапку Mathcad розглядає як знак присвоєння. На екрані з'явиться $x :=$. Надрукуйте 20; таким чином, ви задали, що x дорівнює 20. На екрані будете мати $x := 20$.

Mathcad читає робочий документ зверху вниз і справа наліво. Тому, якщо визначите змінну x , то можете її використовувати в обчисленнях всюди нижче і правіше рівності, де вона визначена. Якщо хочете ввести змінну або проводити обчислення, то натисніть Enter і червоний хрестик з'явиться під попередньою рівністю.

Якщо необхідно обчислити якийсь вираз в інтервалі значень x , то необхідно задати x як дискретну змінну. Натисніть мишку на 20 в рівності $x:=20$. Маркер вводу з'явиться за числом 20. Надрукуйте " , 21 ; 25". Mathcad зобразить символ ";" як символ "..". На екрані з'явиться $x:=20, 21 ..25$.

Щоб визначити функцію $y(x)$ (наприклад, $y(x)=x^2$), треба набрати $y(x)=x^2$. На екрані з'явиться $y(x):=x^2$.

Якщо необхідно:

1) знати значення функції в точці 22,5, то достатньо набрати $y(22,5)=$. Mathcad надрукує $y(22,5)=506,25$;

2) обчислити функцію для кожного значення x із раніше означеного інтервалу 20÷25, то достатньо натиснути мишку нижче всіх інших обчислень і ввести $y(x)=$. Mathcad виведе таблицю значень

400
441
484
529
576
625

Для того, щоб ввести текст, необхідно виконати **Insert /** (Вставка /Текстовая область) або натиснути клавішу з подвійними кавичками ("), або натиснути кнопку тексту на панелі інструментів. Після того, як виконаєте одну з цих операцій, Mathcad замінить хрестик на вертикальну лінію – маркер вводу. Цей маркер буде обрамлений рамкою і позначатиме текстову область. Текст буде вводитися після маркеру, текстова область буде розширюватися до розмірів тексту. Якщо необхідно вводити текст:

- 1) на другому рядку, то натисніть Enter в кінці першого ряду;
- 2) в іншому місці робочого документу, то натисніть мишку в іншому місці робочого документу. Тим самим ви закриєте текстову область, в якій працювали, вийдете з неї, створите нову текстову область.

2.2. Панелі інструментів.

Основним інструментом системи MathCad є головне меню, що включає в себе дев'ять пунктів, кожний з яких викликає відповідне спадне меню:

- **File** (Файл) – робота з файлами;
- **Edit** (Правка) – редагування;
- **View** (Вид) – перегляд;
- **Insert** (Вставка) – вставка;
- **Format** (Форматирование) – форматування;
- **Math** (Математика) – математичні оператори;
- **Symbolics** (Символы) – символні оператори;
- **Window** (Окно) – керування вікнами;
- **Help** (Помощь) – допомога.

Пункт меню	Пункт підменю	Призначення
1. File (Файл)	New (Новый)	відкриває новий робочий документ
	Open (Открыть)	читає з диску раніше створений документ
	Close (Закреть)	закриває активний документ
	Save (Сохранить) Save as (Сохранить как)	зберігає робочий документ в файл в поточній папці або у файл, ім'я та папка яких вказується при зберіганні
	Send (Посылать)	пересилає робочий документ по електронній пошті
	Page Setup (Параметры страницы) Print Preview (Предварительный просмотр) Print (Печать)	операції підготовки, перегляду та друку робочих документів Mathcad
	Список імен останніх чотирьох документів Mathcad	
	Exit (Выход)	Завершує сеанс роботи з Mathcad
2. Edit	Undo (Отменить последнюю операцию) Redo (Отменить последнюю операцию Undo) Cut (Вырезать) Copy (Копировать) Paste (Вставить) Paste Special (Специальная вставка) Delete (Удалить) Select All (Выделить все) Find (Найти) Replace (Заменить) Go to Page (Перейти к странице) Check Spelling (Проверка орфографии) Links (Связывание)	Стандартні для Windows операції редагування робочого документа

3. View (Просмотр)	Toolbar (Панель инструментов)	<p>відкриває доступ до панелей</p> <ul style="list-style-type: none"> - Standart (Стандартная) - Formatting (Форматирование) - Math (Математическая), а також до спеціальних панелей математичних інструментів: <p><i>Calculator</i> (Калькулятор) <i>Graph</i> (Графики) <i>Matrix</i> (Матрицы) <i>Evaluation</i> (Вычисления) <i>Calculus</i> (Математич. анализ) <i>Boolean</i> (Логические функции) <i>Programming</i> (Программирование) <i>Greek</i> (Греческие буквы) <i>Symbolic</i> (Символьные вычисления) <i>Modifier</i> (Преобразования)</p>
	Status Bar (Строка состояния) Rules (Линейка)	Якщо одна з панелей відмічена, то на екран з'явиться відповідна панель
	Region (Область) Zoom () Refresh (Перерисовывание)	мають операції перетворення зображення в робочому документі
	Animate (Анимация)	операція побудови анімації
	Playback (Воспроизвести)	операція запуску анімації
	Preferences (Настройки)	відкриває доступ до панелей настройки режиму запуску Mathcad, клавіатури та зв'язку з Internet
4. Insert (Вставить)	Graph (График)	<p>Відкриває доступ до операцій побудови різних типів графіків:</p> <p>X-Y Plot – графік функції однієї змінної в декартових координатах Polar Plot – графік функції однієї змінної в полярних координатах 3D Plot Wizard – відкриває діалог настройки параметрів тривимірного зображення Contour Plot – контурні лінії (лінії рівня функції двох змінних) в декартових координатах 3D Scatter Plot – зображення точок в тривимірному просторі 3D Bar Plot – тривимірні гістограми Vector Field Plot – векторні поля</p>

	Matrix (Матрица)	відкриває в робочому документі вікно для визначення розміру матриці (число рядків та стовпців), далі в робочому документі з'явиться поле вводу матриці
	Function (Функция)	відкриває вікно діалогу списку вбудованих функцій Matncad
	Unit (Единица)	відкриває вікно списку в Mathcad одиниць виміру
	Picture (Рисунок)	задає операцію вставки малюнку
	Area (Область)	в робочий документ можна вставити „закриваючу” область
	Text Region (Область текста)	використовується для визначення поля текстових коментарів
	Math Region (Математическая область)	В текстовий коментар вставляється поле вводу математичних символів
	Page Break (Разрыв страницы)	в робочий документ вставляє признак кінця сторінки
	Hyperlink	має набір операцій для створення гіпертекстових посилань
	Reference	операція створення перехресних посилань
	Component Object	Операції вставки компонентів та об'єктів з інших додатків
5. Format (Формат)	Result (Результат)	<p>всі операції цього меню призначені для визначення стиля, форми зображення в робочому документі виразів, даних, результатів обчислень, графіків. Наведемо найбільш поширені операції</p> <p>має операції визначення формату відображення обчислень.</p> <p>Number format (Числовий формат) - відкриває вікно визначення формату представлення числових результатів:</p> <p>General (спосіб змінюватися в залежності від величини результату)</p> <p>Decimal (число з десятковою точкою)</p> <p>Scientific (число з порядком та знаком в цілій частині)</p>

		<p>Engineering (число з порядком та вказаною кількістю знаків в цілій частині)</p> <p>Display Options (Параметри отображення) – дозволяють вибрати відображення матриць, уявної одиниці та систему числення</p> <p>Unit Display (Отображение единиц измерения) дозволяє настроїти режим відображення одиниць виміру, змінних з розмірністю</p> <p>Tolerance (Точность) – визначає границю для відображення нуля</p>
	Graph (Графики)	має операції форматування графіків
6. Math (Математика)	Calculate (Вычислить)	обчислює вирази, що розташовані вище та ліворуч курсора або виконує побудову графіків
	Calculate Work shut (Пересчитать рабочий документ)	виконує всі обчислення та перемальовує графіки, визначені в робочому документі
	Automatic Calculation (Вычислить автоматически)	якщо рядок помічений галочкою, то будь-який вираз обчислюється одразу після закінчення вводу, а графік будується після натиску мишки за полем графіку
	Optimization (Оптимизация)	якщо рядок відмічений галочкою, то включений режим оптимізації обчислень – це режим обчислень з включеним символьним процесором, тобто спочатку вираз спрощується, а потім оброблюється числовим процесором
	Options (Настройки)	відкриває меню настройки параметрів режиму обчислень: Calculation (Вычисление) Display (Отображение) Unit System (Системы единиц) Dimensions (Размерности), за допомогою якого можна встановити похибку в наближених обчисленнях, вибрати систему одиниць фізичних величин і т. ін.

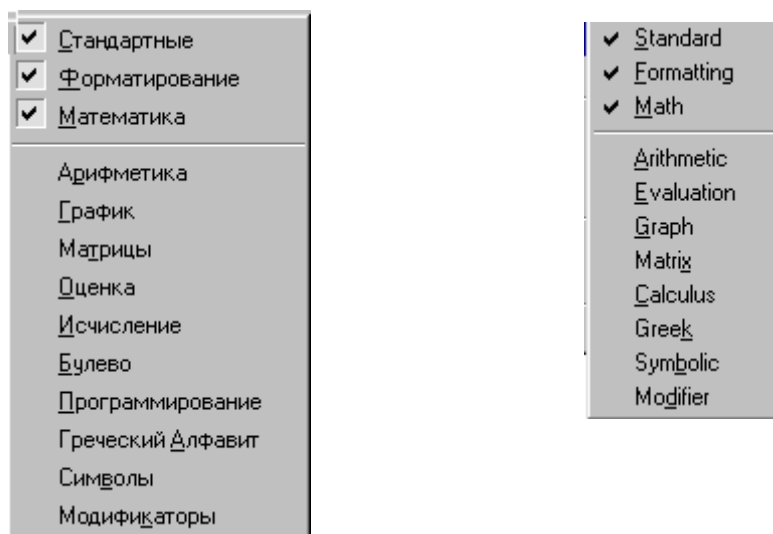
7. Symbolic (символь- ные вычис- ления)	Evaluate (Вычислить)	дозволяє обчислювати: - Symbolically (Символьное) - Floating Point (с плавающей запятой) - Complex (Комплексное).
	Simplify (Упростить)	символьному процесору передається вираз, що виділений в робочому документі, а перетворений вираз відображається справа або зліва від виділеного
	Expand (Развернуть)	у виділеному виразі розкриваються дужки
	Factor (Разложить на множители)	виділений вираз розкладається на множники
	Collect (Собрать)	у виділеному виразі приводяться подібні
	Polynomial Coefficients (коэффициенты полинома)	в робочому документі виводиться вектор-стовпець коефіцієнтів многочлену, записаних у порядку зростання степенів виділених виразів
	Variable (Переменная)	об'єднані операції математичного аналізу: - Solve – розв'язок рівнянь - Substitute - підстановка - Differentiate - диференціювання - Integrate - інтегрування - Expand to Series – розклад в ряд Тейлора - Convert to Partial Fraction – розклад на прості дроби
	Matrix (Матрица)	об'єднані символічні обчислення з матрицями: Transpose (Трансформирование) Invert (Обращение) Determinant (Определитель) -
	Transform (Преобразование)	об'єднані символічні обчислення прямих та обернених інтегральних перетворень: (Fourier, Inverse Fourier, Laplace, Inverse Laplace, Z, Inverse Z).

	Evaluation Style (Стиль выражения)	відкриває вікно, в якому визначається формат виводу результатів символічних обчислень
8. Window (Окно)		дозволяє встановити стиль розташування вікон, що утримують різні робочі документи Mathcad
9. Help (Справка)	Mathcad Help (Справка Mathcad)	відкриває вікно довідкового режиму зі стандартними закладками: Содержание, Предметный указатель, Поиск
	Resource Center (Центр ресурсов)	відкриває доступ до наступних розділів довідки: Overview and Tutorials (Обзор и учебники) – описує основні можливості Mathcad. Quick shuts and Reference Tables (Шпаргалки и справочные таблицы) – довідник функцій для тих, хто вчиться на прикладах, має збірник прикладів розв'язування задач з різних додатків. Entangling Mathcad (Расширение) Collaboratory (Форум пользователей Mathcad) Web Library (Библиотека Mathcad в Internet) Training / Support (Сопровождение и поддержка Mathcad) Web Store (Продажи в Internet)
	Tip of the Day (Полезные советы)	
	Open Book (Открыть книгу)	
	About Mathcad (О программе Mathcad)	

Панелі інструментів – це набори найбільш поширених інструментів, що дають можливість швидко та з мінімальними зусиллями впоратись з широким колом задач. Для появи панелі інструментів на екрані можна використати два способи:

1. Виділити пункт **View** (Вид) головного меню, далі **Toolbars...** (Панелі

інструментів) спадного меню. На екрані з'явиться таке меню:

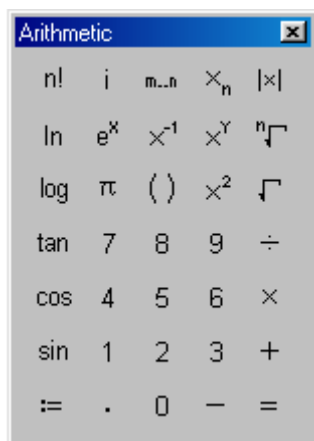


Якщо перед назвою пункту стоїть квадратик з пташечкою, значить відповідна панель знаходиться десь на екрані. Для того, щоб її прибрати необхідно натиснути мишкою на квадратик. Якщо пункт спадного меню не має пташечки, то панель в даний момент неактивна.

2. Вивести на екран панель інструментів **Math**, якщо її не має. Використовуючи перший спосіб, натиснути на панелі інструментів Math на кнопку, відповідній необхідним інструментам.

Як правило, панелі інструментів **Standard** (Стандартная) та **Formatting** (Форматирование) є активними. Панель інструментів Math (Математика) складається з дев'яти кнопок: **Calculator** (Калькулятор),..., **Modifies** (Модификаторы). Ми познайомимо вас з найбільш вживаними.

Панель інструментів Calculator (Калькулятор) складається з 35 кнопок: функцій, які часто використовуються, цифр, знаків, арифметичних операцій.



$n!$ - викликає на місце розташування курсору шаблон для обчислення факторіалу.

i - перетворює виділене число в уявне, додаваючи до числа символ i .

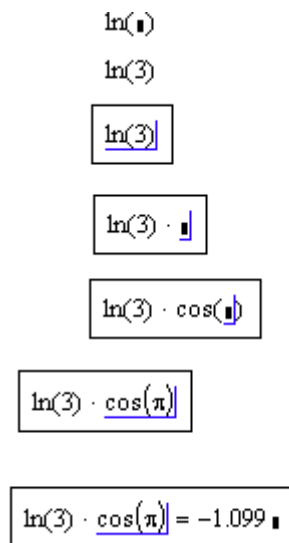
$m..n$ - викликає на місце курсору шаблон для введення області зміни дискретної величини.

$:=$ - викликає шаблон оператора присвоєння.

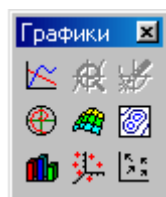
\tan - викликає шаблон функції тангенс.


Приклад. Обчисліть вираз $\ln 3 \cdot \cos(\pi)$.

Викличте шаблон функції $\ln(x)$. В позначці (чорний прямокутник) наберіть число 3 з клавіатури або з панелі. Переведіть курсор на кінець виразу, натисніть знак множення на панелі та в позначці викличте шаблон функції $\cos(x)$. В позначці наберіть π з панелі. Переведіть курсор в крайнє праве положення. Натисніть на панелі $=$, або введіть з клавіатури. На екрані послідовно матимемо такі зображення:



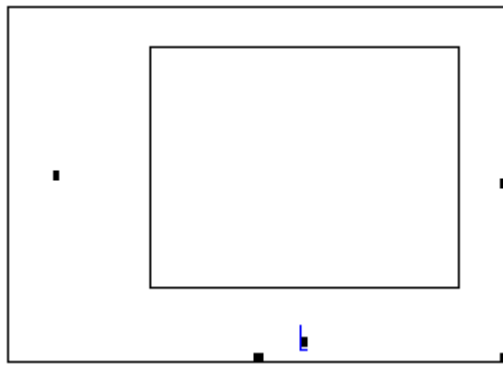
Панель інструментів Graph (График) має 9 кнопок, які викликають шаблони для побудови кривих в декартових і полярних координатах, поверхонь, гістограм.



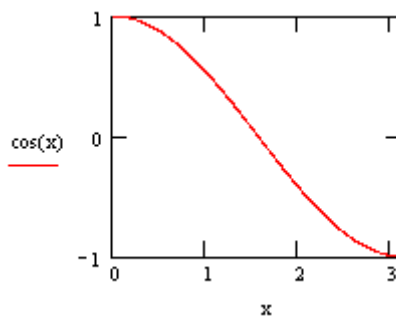
Наприклад, натиснувши на кнопку , викличете шаблон для побудови графіка в декартових координатах.

Приклад. Побудуйте графік функції $y(x)=\cos(x)$ на відрізку $[0,\pi]$.

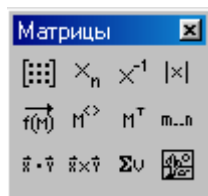
Викличте шаблон для побудови графіка в декартових координатах.




З'явиться пустий графік з полями вводу для виразів, що відображаються на осях. Під віссю $0x$ в середньому квадратику наберіть x ; з'являться ще дві позначки, куди треба ввести початок та кінець інтервалу (0 та π). По осі $0y$ в середньому квадратику наберіть $\cos(x)$. Якщо залишити останні поля пустими, то Mathcad автоматично заповнить їх при створенні графіку. Натисніть кнопку мишки за межами графіку. Ви матимете



Панель інструментів Matrix (Матриця) складається з 12 кнопок, які



відображають оператори роботи з матрицями, векторами, змінними.

Наприклад,  - викликає вікно **Insert Matrix** (Вставити матрицу), в якому треба вказати кількість **Rows** (Строк) та **Columns** (Столбцов). Після того, як натиснете ОК, на місці курсору з'явиться шаблон для введення необхідної матриці

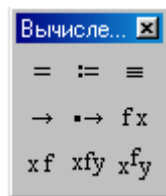
Приклад. Введіть матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ та знайдіть її обернену.

Наберіть на екрані **A** : і викличте шаблон для введення матриці, введіть в нього її елементи; для цього клацніть мишкою на лівому полі для вводу і наберіть **2**, а потім перемістіть відокремлюючу рамку в наступні поля і повторіть попередню дію. Викличте шаблон оберненої матриці та натисніть **=**. Послідовність дій зображена нижче.

$$A := \begin{pmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \quad \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Панель інструментів Evaluation (Вычисление) має дев'ять кнопок.



Для прикладу розглянемо деякі з них.

:= - викликає шаблон для присвоювання змінній, що стоїть зліва, значення або виразу, що стоїть справа:

$$\blacksquare := \blacksquare$$

xfy - позначає вид запису функції з двома змінними. Шаблоном буде три позначки.

...

В лівій вводиться перший аргумент функції, в другій - ім'я функції, в третій - другий аргумент.

Приклад. Знайти $f(2,1)$, якщо $f(x,y) = x + y$.

Означте спочатку функцію. Викличте шаблон функції з двома змінними. В першу мітку вводимо **2**, в другу **f**, в третю **1**. Натисніть **=**. На екрані маємо:

$$f(x,y) := x + y \quad 2 f 1 = 3.$$

→ - викликає шаблон для простого символічного перетворення.

З цим шаблоном Ви більш детально познайомитесь у панелі інструментів Calculations (Исчисление).

Панель інструментів Calculations (Исчисление) має 12 кнопок. Відповідні операції часто використовуються, тому познайомимось з ними детальніше.




 - викликає шаблон для знаходження першої похідної

$$\frac{d}{dx}$$


В нижній позначці вказується змінна, по якій береться похідна, а в позначці справа – вираз, який потрібно диференціювати.

Покажемо як здійснювати символічні обчислення.

Приклад. Знайти похідну $\cos(x)$.

Викличте шаблон . В нижній позначці наберіть “x”, в правій - натисніть **cos** з меню **Calculator (Арифметика)**; на екрані з’явиться

$$\frac{d}{dx} \cos(\cdot)$$

В позначці введіть “x”. Перемістіть курсор на кінець виразу $\cos(x)$. Натисніть клавішу  з меню **Вычисления**; з’явиться $\frac{d}{dx} \cos(x) \rightarrow$. Вийдіть за

межі поля вводу і клацніть мишкою. Ви отримаєте $\frac{d}{dx} \cos(x) \rightarrow -\sin(x)$.

 – виводить шаблон для похідної n-го порядку.

 – викликає знак нескінченності на місце курсору.

 – викликає шаблон для обчислення визначеного інтегралу.

Приклад. Обчислити $\int_0^{\pi} \cos(x) dx$.

Викличте необхідний шаблон. На екрані з’явиться

$$\int_{\cdot}^{\cdot} \cdot dx$$

Введіть нижній індекс інтегрування 0. Через панель **Calculator** або **Greek** (Греческий алфавит) введіть верхній індекс π . В позначці, що стоїть під знаком інтегралу наберіть $\cos(x)$ (вже описувалось, як це зробити), а також в позначці диференціала наберіть x. Натисніть знак =. Ви отримаєте

$$\int_0^{\pi} \cos(x) dx = 0$$

Якщо ж Вам необхідно взяти визначений інтеграл символно, то натисніть



і введіть необхідні дані. Наприклад, $\int_{\alpha}^{\beta} \sin(x) dx$. Натисніть з меню

Вычисления. Ви отримаєте

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin(x) dx \rightarrow -\cos(\beta) + \cos(\alpha)$$



– виводить на місце курсору шаблон для обчислення частинної суми ряду. Шаблон має вигляд

$$\sum_{i=1}^n \cdot$$

У двох нижніх позначках вводиться позначення та початкове значення індексу підсумовування. У верхній позначці задається його кінцеве значення, а в правій – вираз (загальний член ряду).

Приклад. Обчислити $\sum_{k=1}^5 \frac{1}{k}$.

Для цього натисніть клавішу , заповніть всі позначки, які з'являться при цьому. Щоб набрати вираз, в правій позначці натисніть “/” з панелі **Арифметика**. На екрані буде

$$\sum_{k=1}^5 \frac{1}{k}$$

У верхній позначці наберіть **1**, а у нижній **k**. Якщо натиснути $=$, то отримаємо відповідь 2.283, якщо ж \rightarrow з панелі **Evaluation**(Вычисление) то $\frac{137}{60}$.



– кнопка викликає шаблон для обчислення добутку значень виразу, що залежить (не залежить) від дискретної змінної. Шаблон має вигляд

$$\prod_{i=1}^n \cdot$$

В двох нижніх позначках вводиться ім'я та початкове значення дискретної змінної, у верхній – кінцеве. В правій вводиться вираз.

Кнопки , , викликають шаблони для обчислення невизначеного інтегралу, суми нескінченного числа доданків, тобто суми ряду, відповідного добутку;

Приклад. Обчислити $\prod_{m=3}^5 m^2$. Можна зробити так: задати $m:=3..5$; викликати



, та набрати в нижній позначці m , а в правій - x^2 з панелі **Арифметика**. На екрані з'явиться

$$\prod_m^2$$

В позначці наберіть m. Переведіть курсор на рівень m та наберіть =. Ви отримаєте

$$\prod_{m=3}^5 m^2 = 3.6 \cdot 10^3$$

Кнопки $\lim_{\rightarrow a}$, $\lim_{\rightarrow a^+}$, $\lim_{\rightarrow a^-}$ обчислюють границю та односторонні границі.

Приклад. Обчислити першу важливу границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

Для обчислення цієї границі викличте відповідний шаблон границі. Наберіть x, 0, $\frac{\sin(x)}{x}$ у відповідних позначках. Натисніть \rightarrow з меню **Evaluation**(Вычисления).

Ви отримаєте $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$.

Приклад. Обчислити самостійно другу важливу границю..

Ви повинні отримати

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$$

Панель інструментів Boolean (Булевы) складається з кнопок, що викликають булеві оператори, які повертають нуль або одиницю. Ці оператори використовуються в програмуванні та при визначенні функції.



$=$ - викликає шаблон для обчислення виразу з заданими значеннями аргументів.

Панель інструментів Programming (Программирование) має 10 клавiш.

Add Line - викликає шаблон для створення блоків виразів. Шаблон має вигляд



`←` - викликає шаблон присвоювання локальній змінній конкретного значення. Локальна змінна – це змінна, яка діє в межах даної програми. Шаблон має вигляд `←`.

`if` - викликає шаблон для введення умовного оператора **if (якщо)** в програму. Шаблон має вигляд

`if`

В другу позначку вводиться умова, а в першу – результат виконаної дії.

Приклад. Нехай задана функція $f(x) = \begin{cases} x, & x > 2, \\ x - 1, & x \leq 2 \end{cases}$. Необхідно обчислити

$f(5)$, $f(-3)$.

Наберіть **f(x)**: і в позначку введіть оператор `Add Line`. На екрані з'явиться

$f(x) :=$

У верхній та у нижній позначках введіть умовний оператор **if**, тобто натисніть на **if** у панелі управління. На екрані будете мати

$f(x) :=$ `if`

Задайте відповідно умови та вирази для обчислення функції. Для введення символів $>$, \leq користуйтеся панеллю управління **Boolean (Булевы)**. В результаті матимете

$f(x) :=$ `x if x > 2`
`x - 1 if x ≤ 2`

Виконавши обчислення так, як описано раніше, отримаєте $f(5)=5$, $f(-3)=-4$.

`otherwise`

- викликає шаблон оператора **otherwise** для задання допоміжної гілки в умовному операторі. Шаблон має вигляд

`otherwise`

Приклад.

$f(x) :=$ `cos(x) if x > π`
`sin(x) otherwise`

`for`

-викликає шаблон з оператором циклу **for**. В циклі задається початкове, кінцеве значення параметру, крок – на який змінюється параметр циклу. Шаблон має вигляд:

`for` `∈`

В позначці зліва вводиться ім'я параметру, справа – діапазон значень параметру циклу, в позначці внизу – оператор циклу.

Приклад. Обчислити $f(2)$, якщо $f(x) = \sum_{n=1}^3 x^n$.

Вводимо $f(x)$: `Add Line`. В верхній позначці вводимо локальну змінну s для накопичення суми, а в нижній - оператор циклу **for**. Маємо

$$f(x) := \left| \begin{array}{l} \bullet \\ \bullet \end{array} \right. \quad f(x) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow \bullet \\ \bullet \end{array} \right. \quad f(x) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow \bullet \\ \text{for } \bullet \in \bullet \\ \bullet \end{array} \right.$$

В лівій позначці оператора циклу вводимо локальну змінну, яка є індексом підсумовування, тобто n , в правій – діапазон n , а в нижній $s \leftarrow s + x^n$, тобто формулу. Маємо

$$f(x) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ \text{for } n \in 1..3 \\ s \leftarrow s + x^n \end{array} \right.$$

Обчисливши $f(2)$, отримаємо $f(2) = 14$.

`while`

-викликає шаблон оператора **while** для створення оператора циклу з передумовою. Шаблон має вигляд

$$\text{while } \bullet \\ \bullet$$

В верхній позначці вводиться логічний (булевий) вираз, внизу оператор циклу. Перевірка правильності логічного виразу відбувається перед виконанням нової ітерації.

`break`

-при необхідності перериває виконання обчислень в циклу.

Приклад. Обчислити $\prod_{n=1}^4 2^n$.

Програма обчислення матиме вигляд.

$$\text{dob}(n) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 1 \\ n \leftarrow 1 \\ \text{while } n \leq 4 \\ \left| \begin{array}{l} s \leftarrow s \cdot 2^n \\ n \leftarrow n + 1 \end{array} \right. \\ s \end{array} \right.$$

$\text{dob}(4) = 1.024 \times 10^3$

`continue`

-викликає оператор **continue** для продовження обчислень.

`return`

-викликає шаблон оператора **return** для відновлення виконання циклу.

Шаблон має вигляд

`return` ■

По умовчання програма повертає результат виконання останнього оператора, але можна повертати значення, що знаходиться в іншому місці програми.

`on error`

-викликає оператор **on error** для отримання повідомлення при наявності помилок у операторі, в якому був розміщений цей оператор. Шаблон має вигляд

■ `on error` ■

Панель інструментів Greek (Греческий) включає 48 кнопок, які позначають грецькі букви.

Панель інструментів Symbolic (Символи) має 24 кнопки. Розглянемо деякі з них.

З `→`, `■→` - оператором простого символного перетворення та розширеним оператором символного перетворення ви були вже познайомлені при описі панелі інструментів **Calculus (Исчисление)**.

`solve`

- викликає шаблон розв'язування рівняння відносно виділеної змінної. Шаблон має вигляд

■ `solve`, ■ `→`

В першій позначці вводиться рівняння, яке необхідно розв'язати, у другій – змінна, відносно якої шукається розв'язок.

Приклад. Розв'язати рівняння $x^2 + 4 = 0$.

Викличте шаблон розв'язування рівнянь. В першій позначці введіть $x^2 + 4$, у другій – x і клацніть мишкою за межами поля вводу. В результаті отримаємо:

$$x^2 + 4 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2i \\ -2i \end{pmatrix}.$$

`simplify`

- викликає шаблон для спрощення виразу. Шаблон має вигляд

■ `simplify` `→`

В позначці треба ввести вираз, який потрібно спростити, а потім натиснути клавішу Enter.

Приклад. Спростити вираз $\frac{x^3 - x}{x - 1}$.

Маємо

$$\frac{x^3 - x}{x - 1} \text{ simplify} \rightarrow (x + 1) \cdot x$$

expand - викликає шаблон для розкладу виразу. Шаблон має вигляд

$$\blacksquare \text{ expand, } \blacksquare \rightarrow$$

В першій позначці вводиться вираз, друга мітка прибирається.

Приклад. Розкрити дужки у виразі $(x - 1)(y - 1)$.

Матимемо $(x - 1) \cdot (y - 1) \text{ expand} \rightarrow x \cdot y - x - y + 1$

Кнопки **$M^T \rightarrow$** , **$M^{-1} \rightarrow$** , **$|M| \rightarrow$** - викликають відповідно шаблони транспонування матриці, знаходження оберненої матриці та обчислення її визначника. Шаблони мають вигляд: **$\blacksquare^T \rightarrow$** , **$\blacksquare^{-1} \rightarrow$** , **$|\blacksquare| \rightarrow$** .

Приклад. Знайти визначник матриці $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Викличте шаблон знаходження визначника матриці. В позначці викличте шаблон матриці 2×2 , введіть елементи. Натисніть курсор за областю, матимете

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \right| \rightarrow 6.$$

Панель інструментів Modifiers (Модифікаторы) може включатися у панель **Symbolic (Символы)**. Панель має меню з модифікованими командами.

real - надає змінній дійсного значення. Шаблон має вигляд **$\blacksquare = \text{real}$** .

Приклад. Запис виду $a = \text{real}$ означає, що a - дійсна величина.

2.3. Редагування в системі Mathcad

Введення та редагування формул в документі .

Курсор – обов'язково знаходиться у середині документу в одному з трьох положень:

курсор вводу – хрестик червоного кольору, який відмічає місце в документі, куди можна вводити текст або формулу;

лінія вводу – синій трикутничок: горизонтальна і вертикальна лінія синього кольору, які виділяють в тексті або у формулі певну частину;

1. лінія вводу тексту – вертикальна лінія, аналог лінії вводу для текстових областей.

Ввести математичний вираз можна в будь-якому місці документу. Для цього необхідно помістити курсор в бажане місце, натиснути на ньому мишкою та просто починати вводити формулу. При цьому в документі створиться математична область, у якій буде один введений символ, що виділений лініями вводу. Наприклад, щоб ввести вираз $x + y$ необхідно виконати такі дії:

-ставите курсор в бажане місце;

-з клавіатури вводите x , який стане обмеженим у математичній області синім кутом ;



-натискаєте оператор додавання, в математичній області крім $+$ з'явиться позначка;



-в позначку вводите символ y з клавіатури.



Щоб змінити формулу, натисніть на ній мишкою. З'явиться лінія вводу, яку можна пересувати в межах області такими способами:

- клавішами зі стрілками \uparrow , \downarrow , \rightarrow , \leftarrow , (переводять лінії вводу вгору, вниз, вправо, вліво);
- пропуск російською мовою “пробел” (виділяє різні частини формули);
- клавіші **Home**, **End** (переводять вертикальну лінію вводу з одного кінця горизонтальної лінії вводу на протилежний).

Комбінаціями клавіш зі стрілками та пропуском можна легко пересуватись всередині формули.

Щоб вставити оператор у формулу необхідно помістити лінію вводу на ту її частину, яка повинна стати першою. Далі введіть оператор, натиснувши кнопку на панелі інструментів або комбінацією клавіш.

Наприклад, виділити частину формули в математичній області можна наступним чином:

-натискайте клавіші із стрілками при утриманні клавіші **Shift**. В цьому випадку замість пересування лінії вводу відбудеться виділення відповідної частини формули;

-помістіть мишку на вертикальну лінію вводу, утримуючи кнопку мишки та пересувайте вказівник мишки вздовж горизонтальної лінії вводу. При цьому виділяється частина формули і кнопку мишки можна відпустити.

Знищити частину формули можна таким чином:

-виділити її натиснувши клавішу **Del**;

-розташувати частину формули перед вертикальною лінією вводу і натиснути клавішу **BackSpace**;

-клавішами **Ctrl+x** частина формули буде відправлена в буфер обміну і при необхідності цей фрагмент формули може бути використаний.

- Вирізати, скопіювати та вставити частину формули можна таким чином:
- виділити її;
 - скористатись або верхнім меню **Edit**(Правка) або контекстним меню, або кнопкою на панелі інструментів або відповідними гарячими клавішами:
 - **Cut** або **Ctrl+x** – для вирізання частини формули та відправлення в буфер;
 - **Copy** або **Ctrl+C** для копіювання в буфер;
 - **Paste** або **Ctrl+N** – для вставки з буфера в необхідне місце формули.

Введення та редагування тексту в документі.

Mathcad має достатньо розвинуті засоби по оформленню тексту. Варто розрізняти коментарі та оформлення документів для створення якісних звітів в друкованій та електронній формі. Як вже було зазначено, перед початком набору тексту необхідно натиснути клавішу < ” >. З’явиться так звана тектова область. Курсор при цьому має вид вертикальної лінії червоного кольору, що аналогічно лінії вводу в математичній області.

Щоб змінити текст в документі необхідно:

- натиснути мишкою в області тексту – вона прийме характерний вигляд;
- при необхідності перемістити лінію вводу тексту в середині текстової області за допомогою мишки або клавіш зі стрілками та клавішами **Home** та **End**;
- відредагувати текст.

Для редагування тексту застосовуються ті ж самі засоби, що і при редагуванні формул: виділення частини тексту, вирізання, копіювання та вставка частини тексту.

Mathcad імпортує фрагменти текстів з інших редакторів: Notepad, Microsoft Word та інших. Можливо це зробити одним з таких способів:

1. Створіть в документі тектову область. Знаходячись в ній, вставте з буферу обміну необхідний фрагмент. Фрагмент буде вставлений в документ у вигляді текстової області, яку потім можна буде редагувати стандартними можливостями Mathcad.

2. Не створюючи текстової області, вставте фрагмент з буферу обміну. Текст буде вставлений у вигляді об’єкту **OLE**, тобто для редагування кожний раз буде викликатися той редактор, у якому був створений текст. Інші способи використовують, коли спеціальне форматування тексту неможливі всередині за допомогою стандартних можливостей редагування.

2.4. Створення графіків.

Для того, щоб **створити графік** необхідно:

- помістити курсор вводу в місце робочого документу, куди необхідно вставити графік;
- натиснути на панелі **Graph** кнопку **X-Y Plot** для створення декартового графіку або іншу кнопку для іншого бажаного типу графіка;

- в позначеному місці документу з'явиться пуста область графіка з декількома позначками, які необхідно заповнити;
- натиснути курсор вводу за межами області графіка.

Створений графік можна змінити, змінюючи самі дані, форматуючи зовнішній вигляд та додаючи додаткові елементи оформлення.

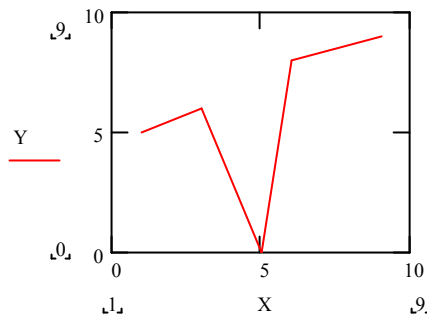
Щоб **знищити графік**, можна:

- в меню **Edit** вибрати пункт **Delete**;
- зайти в область графіка, помітити всю область (кнопкою **Backspace**) та натиснути кнопку **Del**.

Двовимірний графік.

Двовимірний графік – це графік в декартовій та полярній системах координат. Для побудови такого графіка необхідно два ряди даних, що відкладаються по осі X та по осі Y . Щоб створити **графік двох векторів** необхідно сформулювати два вектора даних X та Y . В області графіка в позначки біля осей вводяться імена векторів.

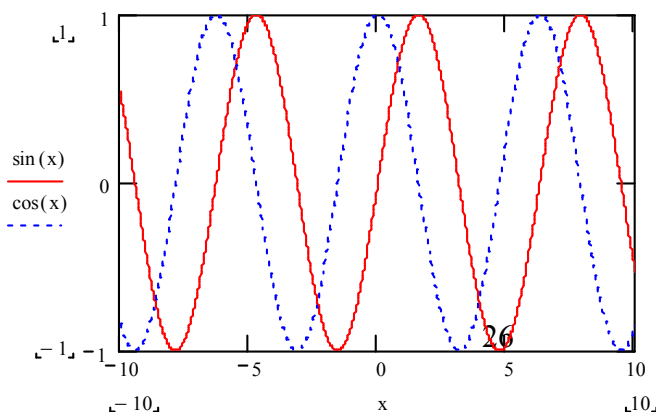
$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$



Для побудови **графіка вектора та ранжированої змінної** необхідно в якості змінних, що відкладаються по будь-якій з осей використати саму ранжировану змінну, на другій осі відкласти вираз, що включає саму ранжировану змінну або елемент вектора з індексом по цій ранжированій змінній, але не сам вектор.

На одному графіку може бути відкладено до 16 різних залежностей. Щоб побудувати на графіку ще одну криву, необхідно:

- помістити курсор таким чином, щоб він повністю охоплював вираз в позначці, що відповідає осі Oy .
- натиснути клавішу з комою.
- з'явиться нова позначка, в яку необхідно ввести вираз для другої кривої.
- натиснути кнопку мишки за межами поля графіку.

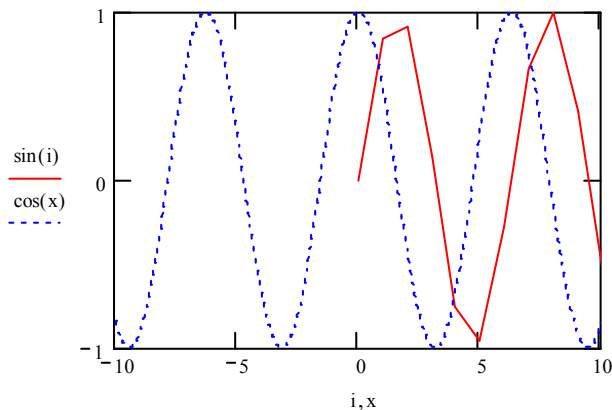


Щоб прибрати один або декілька рдків з графіку, знищить клавішами **Backspace** тобто **Del** відповідні їм вирази у координатних осях.

При побудові на одному і тому ж графіку декількох залежностей необхідно слідкувати за відповідністю типу даних для кожної пари точок окремо.

Форматування вісей.

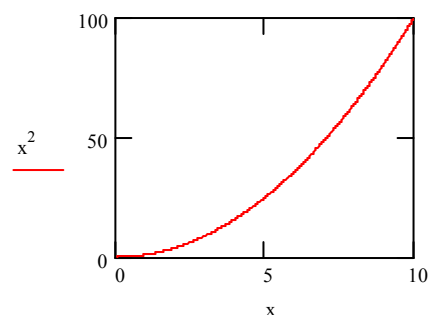
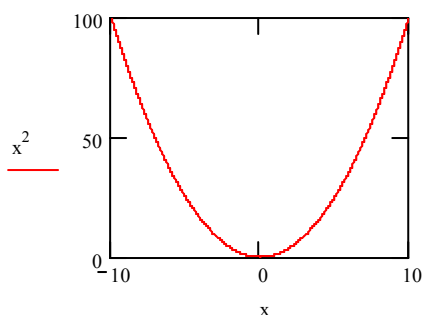
$i := 0..10$



Можливості форматування осей включають в себе управління зовнішнім виглядом осей, діапазоном, шкалою, нумерацією та відображенням деяких значень на осях за допомогою маркерів.

Щоб змінити діапазон осей необхідно:

- увійти в область графіка;
- біля кожної з осей з'явиться два поля з числами. Натисніть мишку в області одного з полів, щоб ви мали редагувати відповідну границю осі;
- клавішами **Backspace** та **Del** знищить зміст поля;
- введіть нове значення діапазону;
- натисніть мишку за межами поля графіка. Mathcad перемалює автоматично графік в нових межах.



Щоб вернути автоматичний вибір якого-небудь діапазону знищить число з відповідного поля та натисніть на нього.

3. Програмування в середовищі Mathcad.

Програма Mathcad є частинний випадок виразу Mathcad. Як і будь – який вираз програма повертає значення, якщо після неї стоїть знак рівності. Цим значенням є значення останнього виразу, виконаного програмою. Повертатися може число, або масив чисел, або навіть їх комбінація. Подібно тому, як змінну або функцію можна визначити виразом, їх можна визначити за допомогою програми, якщо це виявляється простішим. Головною відміною програми від виразу є спосіб організації обчислень. При використанні виразу алгоритм отримання відповіді повинен бути описаний одним оператором. В програмі ж може бути використана будь-яка кількість операторів. Можна розглядати програму як складовий вираз.

Для вставки програмного коду (програми, програмного модуля) в документ в Mathcad є спеціальна панель інструментів **Programming** (програмування), котру можна викликати на екран натисканням кнопки **Programming Toolbar** на панелі **Math** (математика) (кнопка із зображенням блок-схеми).

Створення програми.

Щоб створити програмний модуль, потрібно виконати наступні дії:

1. Ввести частину виразу, яка буде знаходитися зліва від знаку присвоювання і сам знак присвоювання (наприклад, $f(x) :=$).
2. При необхідності треба викликати на екран панель інструментів **Programming**.
3. Натиснути на цій панелі кнопку **Add Line** (додати лінію).
4. Якщо хоча б приблизно відомо скільки рядків буде містити програма, можна створити потрібну кількість ліній повторним натисканням кнопки **Add Line** відповідну кількість разів.
5. В місцезаповнювачі, які з'явилися при виконанні п.4, ввести розроблений програмний код, використовуючи програмні оператори.

Після того, як програмний модуль повністю визначений, і жодний місцезаповнювач на залишився порожнім, функція може використовуватися звичайним чином, як в чисельних, так і в символічних розрахунках.

Зауважимо, що не можна вводити імена програмних операторів з клавіатури. Для їх вставки можна використовувати лише панель **Programming**.

Підкреслимо, що основний принцип створення програмних модулів полягає в правильному розташуванні рядків коду. Орієнтуватися в їх дії досить легко, оскільки фрагменти коду одного рівня групуються в програмі за допомогою вертикальних ліній.

Розглянемо тепер основні оператори панелі інструментів **Programming**.

I. Локальне присвоювання (\leftarrow).

На початку програми, як правило, необхідно ввести вихідні (початкові) дані, використовуючи локальні змінні. Для цього потрібно задати ім'я локальної змінної, наприклад Z , а потім натиснути на кнопку із зображенням стрілки вліво \leftarrow . З'явиться шаблон оператора локального присвоювання значень локальних змінних – стрілка вліво і місцезаповнювач, в який потрібно ввести значення

локальної змінної. Підкреслимо, що локальні змінні діють лише в межах даної програми.

II. Умовні оператори (**if, otherwise**).

Дія оператора **if** складається з двох частин. Спочатку перевіряється логічний вираз (умова) справа від нього. Якщо він істинний, то виконується вираз зліва від оператора **if**, якщо хибний – нічого не виконується, а виконання програми продовжується переходом до її наступного рядка. Вставити умовний оператор в програму можна наступним чином:

- 1) Якщо необхідно, створіть новий рядок програмного коду, натиснувши кнопку **Add Line**.
- 2) Натисніть кнопку умовного оператора **if**.
- 3) Справа від оператора **if** введіть умову. Користуйтеся логічними операторами, вводючи їх з панелі **Boolean** (Бульові оператори).
- 4) Вираз, котрий повинен виконуватися, якщо умова виявляється виконаною, введіть зліва від оператора **if**.
- 5) Якщо в програмі передбачається не одна, а кілька умов, то додайте ще рядки натисненням кнопки **Add Line** і введіть їх таким же чином, використовуючи оператор **if** або **otherwise**. Зазначимо, що оператор *otherwise* використовується сумісно з одним або декількома умовними операторами **if** і вказує на вираз, який буде виконуватися, якщо жодна з умов не виявилася останньою.

III. Оператори циклу (**for, while, break, continue**).

При програмуванні в середовищі Mathcad застосовується два оператори циклу: **for, while**. Перший з них (**for**) дає можливість організувати цикл по деякій змінній, примушуючи її приймати значення з усякого діапазону. Другий (**while**) створює цикл з виходом із нього за деякою логічною умовою. Вставити в програму оператор циклу можна наступним чином:

1. Створіть новий рядок програмного модулю натисненням кнопки **Add Line**.
2. Введіть один з операторів циклу **for** або **while** натисненням відповідної кнопки на панелі **Programming**.
3. Якщо введено оператор **for**, то у відповідні місцезаповнювачі введіть ім'я змінної і діапазон її значень, а якщо **while** – то логічний вираз, при порушенні якого повинен здійснюватися вихід із циклу.
4. В нижній місцезаповнювач введіть тіло циклу, тобто вирази, які повинні виконуватися циклічно.
5. Якщо необхідно додайте ще рядки і введіть в них потрібні оператори.

Оператор програмування **for** (для) застосовується для створення циклу, коли відома необхідна кількість повторювань (ітерацій) в процесі розв'язання задачі. Цей цикл повторюється до тих пір, поки задане число ітерацій не буде виконане.

Оператор **while** (поки) застосовується для створення циклу з умовою при невідомих кількостях повторювань (ітерацій) в процесі розв'язання задачі. Цикл здійснюється доти, поки задана умова виконується.

Оператор програмування **break** (перервати) застосовується при необхідності перервати цикл, щоб зупинити виконання обчислень.

Коли Mathcad зустрічається з оператором **break** в тілі циклу **for** або **while**, то цикл перериває виконання і повертає останнє обчислене значення. Виконання програми продовжується з наступного рядка програми після переривання циклу.

Оператор програмування **continue** (продовжити) дозволяє продовжити обчислення після того, як вони були призупинені з тієї чи іншої причини. Вводиться цей оператор натисненням відповідної кнопки на панелі **Programming** або комбінацією клавіш **Ctrl +]**. Підкреслимо: для того, щоб більш чітко позначити межу закінчення тіла циклу в його кінці може бути використаний додатковий рядок з оператором **continue**. При цьому наявність оператора **continue** не впливає на результат програми.

IV. Оператор повернення значень (**return**).

За означенням програма повертає значення останнього обчисленого оператора. Але можна повернути значення також і з іншого місця програми, використовуючи оператор програмування **return** (повернути).

Якщо для означення змінної або функції застосовується програмний модуль, то його рядки виконуються послідовно при обчисленні в документі цієї змінної або функції. Відповідно з цим результат, який розраховується, змінюється. Як кінцевий результат видається останнє присвоювань значення. Щоб підкреслити повернення програмним модулем певного значення в останньому рядку програмного модуля вказують явно ім'я цього значення.

Вказане ілюструє наступний програмний модуль:

$$f(x) := \begin{cases} y \leftarrow \sqrt[3]{x} \\ z \leftarrow 3y + 1 \\ z \end{cases}$$

$$f(8) = 7$$

(Даний програмний модуль повертає значення змінної z).

Разом з тим, застосовуючи оператор **return**, можна перервати виконання програми в будь-якій її точці (наприклад, за допомогою умовного оператора) і видати деяке значення, відмінне від кінцевого в цьому програмному модулі. При виконанні згаданої умови значення, введене в місцезаповнювач після **return**, повертається в якості результату, а ніякий інший код в програмі більше не виконується.

В програмний модуль оператор **return** вставляється натисненням однойменній кнопки панелі **Programming**.

Ілюструє сказане наступний програмний модуль.

$$f(x) := \begin{cases} \text{return "zero" if } x = 0 \\ \text{return "k" if } x = 5 \\ y \leftarrow \sqrt[3]{x} \\ z \leftarrow 3y + 1 \\ z \end{cases}$$

$f(-8) = -5$ $f(-1) = -2$ $f(0) = \text{"zero"}$ $f(5) = \text{"k"}$

V. Оператор повідомлення про помилку.

Для отримання повідомлення при наявності помилки при обчисленні деякого виразу використовується оператор програмування **on error** (на помилці). Ввести цей оператор можна натисненням кнопки **on error** на панелі **Programming**. З'являється рядок з двома місцезапонювачами і оператором **on error** посередині. В місцезапонювачі зліва від оператора **on error** вводиться деяке повідомлення, яке з'являється, якщо виникає помилка у виразі, що вміщений у місцезапонювач справа від оператора **on error**.

Застосування оператора **on error** (перехоплення помилки ділення на нуль) ілюструє наступний програмний модуль.

$$f(x) := \begin{cases} y \leftarrow x^2 \\ \text{"user error: can't divide by zero" on error } \frac{1}{y-4} \end{cases}$$

$f(0) = -\frac{1}{4}$
 $f(2) = \text{"user error: can't divide by zero"}$

Наведемо ще деякі приклади програмування в середовищі Mathcad для проведення чисельних і символьних обчислень.

Приклад. Перевірити, що матриця A розміру $n \times n$ вигляду

$$A = \frac{2}{3(n+1)} \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0.25 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.25 & 1 \end{pmatrix}$$

невироджена і знайти обернену до неї при $n = 3$.

Розв'язування.

$$\begin{array}{l}
 \text{for } j \in 1..n \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{i,j} \leftarrow \frac{2}{3 \cdot (n+1)} \text{ if } i=j \\
 c_{i,j} \leftarrow \frac{1}{6 \cdot (n+1)} \text{ if } |i-j|=1 \\
 c_{i,j} \leftarrow 0 \text{ otherwise} \\
 c
 \end{array} \right. \\
 c
 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.16667 & 0.04167 & 0 \\ 0.04167 & 0.16667 & 0.04167 \\ 0 & 0.04167 & 0.16667 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 6.42857 & -1.71429 & 0.42857 \\ -1.71429 & 6.85714 & -1.71429 \\ 0.42857 & -1.71429 & 6.42857 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0.00405$$

Нагадаємо, що при написанні цього модуля користуємося кнопками з панелі **Programming і Boolean**, а не клавіатурою.

Приклад. Методом Рунге – Кутта з кроком h знайти на відрізку $[a,b]$ розв'язок задачі Коші $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$. ($x_0 = a$)

Розв'язування. Згідно з методом Рунге – Кутта послідовні значення шуканого розв'язку y_i визначаються формулою

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i;$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} (k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i});$$

$$k_{1,i} = h f(x_i, y_i);$$

$$k_{2,i} = h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_{1,i}}{2}\right);$$

$$k_{3,i} = h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_{2,i}}{2}\right);$$

$$k_{4,i} = h f(x_i + h, y_i + k_{3,i}), \quad i = \overline{0, n-1}$$

Тут $x_i = x_0 + h$, $i = \overline{0, n}$, $x_n = b$. Програмний модуль для розв'язання даної задачі має наступний вигляд. (Для кращого розуміння програми наведено деякий текстовий коментар.)

1) Означення правої частини рівняння та початкових умов

$$f(x, y) := \frac{\cos^2 x - y \sin x}{\cos x}$$

$$x_0 := 0 \quad y_0 := 1 \quad h := 0.1 \quad n := 5$$

2) Програма розв'язання задачі Коші методом Рунге – Кутта.

```

Rk(f, x0, y0, h, n) :=
  x0 ← x0
  y0 ← y0
  for i ∈ 0..n-1
    k1 ← f(xi, yi)
    k2 ← h f(xi + h/2, yi + k1/2)
    k3 ← h f(xi + h/2, yi + k2/2)
    k4 ← h f(xi + h, yi + k3)
    xi+1 ← xi + h
    yi+1 ← yi + 1/6 (k1 + 2k2 + 2k3 + k4)
  z ← augment(x, y)
  z

```

3) Розв'язання задачі Коші методом Рунге – Кутта.

$$R := Rk(f, x_0, y_0, h, n)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.1 & 1.0945 \\ 0.2 & 1.17608 \\ 0.3 & 1.24194 \\ 0.4 & 1.28948 \\ 0.5 & 1.31637 \end{pmatrix}$$

Зауважимо, що в першому стовпці матриці R знаходяться значення аргументу x_i , для яких обчислювався шуканий розв'язок, а в другому – відповідні значення самого розв'язку.

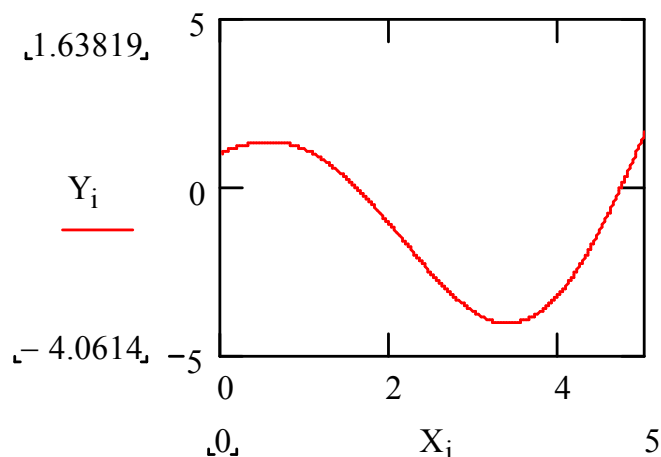
4) Графік шуканого розв'язку.

Для побудови графіку візьмемо значно менший крок ($h = 0.01$) і відповідно більше вузлів ($n = 500$).

$$R_1 := Rk(f, x_0, y_0, 0.01, 500)$$

$$X := R_1^{<0>} \quad Y := R_1^{<1>}$$

$$i := 0.. \text{length}(X) - 1$$



Нагадаємо, що функція **augment(A,B)** формує матрицю, в перших стовпцях якої міститься матриця A , а в наступних стовпцях – матриця B . (Матриці A і B повинні мати однакову кількість рядків.)

4. Вбудовані функції Mathcad

Всі функції, вбудовані в Mathcad, певним чином класифіковані, що полегшує їх використання. Будь – який оператор функції може вмістити в робочий документ за допомогою ділового вікна **Insert Function** (Вставити функцію). Для цього потрібно:

- натиснути лівою кнопкою миші по пункту **Insert** (Вставити) головного меню, а потім по пункту **Function** (функція) спадаючого меню або натиснути комбінацію клавіш **Ctrl+E**. З'явиться діалогове вікно **Insert Function**;
- виділити в розділі **Function Category** (категорія функції) за допомогою миші або клавіш переміщення курсору потрібну категорію, наприклад **Log and Exponential** (логарифмічні або експоненціальні функції), внаслідок чого в розділі **Function Names** (назви функцій) справа з'явиться список вбудованих функцій цієї категорії;
- виділити потрібну функцію в розділі **Function Names**. Після виділення потрібної функції в нижній частині вікна **Insert Function** в першому текстовому полі з'явиться загальний вид функції, а в другому – довідка про цю функцію. Виділимо, наприклад, функцію $asin(z)$ в межах від 0 до 2π , котра повертає кут (в радіанах), синус якого дорівнює z ;
- натиснути за допомогою миші на кнопку **Insert**. В місці, де стояв візир, на робочому документі з'явиться шаблон функції, котрий потрібно заповнити. В нашому прикладі виглядає так:

$$asin(\blacksquare).$$

Якщо ввести в місце заповнювач деяке число, наприклад 1, а потім знак рівності, то отримаємо результат – величину шуканого кута.

$$asin(1) = 1,5708$$

В сучасних версіях Mathcad виділені наступні категорії вбудованих функцій:

В виділяють такі категорії функцій:

- **All**-усі функції, розміщені в алфавітному порядку;
- **Bessel**-функції Беселя;
- **Complex Number**-функції роботи з комплексними числами;
- **Curve Fitting**-функції, що апроксимують данні тої чи іншої кривої;
- **Differential Equation Solving**-функції для розв'язку диференціальних рівнянь;
- **File Access**-функції роботи з файлами;
- **Fourier Transform**-функції перетворення Фур'є;
- **Hyperbolic**-гіперболічні функції;
- **Interpolation and Prediction**-функції інтерполяції та передбачення;
- **Log and Exponential**-логорифмічні та експоненціальні функції;
- **Number Theory/Combinatorics**-функції теорії чисел та комбінаторики;
- **Probability Density**-функції щільності ймовірності;
- **Probability Distribution**-функції розподілу ймовірності;
- **Random Number**-функції випадкових чисел;
- **Regression and Smoothing**-функції регресії та згладжування;
- **Solving**-функції розв'язку алгебраїчних рівнянь та систем;
- **Special**-спеціальні функції;
- **Statistic**-статистичні функції;
- **Trigonometric**-тригонометричні функції;
- **Truncation and Round-Off**-функції заокруглення і роботи з частиною числа;
- **User defined**-функції, визначені користувачем;
- **Vector and Matrix**-функції роботи з векторами і матрицями;
- **Wavelet Transform**-функції хвильового перетворення.

Розглянемо докладно деякі з них.

I. Функції комплексних чисел.

- **Arg(z)** – повертає кут в радіанах (в межах від $-\pi$ до π) між додатнім напрямком вісі Ox і вектором, що зображує число z .

$$z := 5i \quad \arg(z) = 1.5708$$

- **Re(z)** - повертає дійсну частину комплексного числа z .

$$z := 3 + 4i \quad \operatorname{Re}(z) = 3$$

- **Im(z)** - повертає уявну частину комплексного числа z :

$$z := 2 - 5i \quad \operatorname{Im}(z) = -5$$

- **Signum(z)** - повертає 1, якщо $z = 0$ і $\frac{z}{|z|}$ - в усіх інших випадках:

$$z := 0 \quad \operatorname{signum}(z) = 1$$

$$z := 5.45 + 19.45 i \quad \operatorname{signum}(z) = 0.2698 + 0.9629i$$

$$z := -4 \quad \operatorname{signum}(z) = -1$$

$$z := 5 \quad \operatorname{signum}(z) = 1$$

Зауважимо, що функція **sign(x)** повертає 0, якщо $x = 0$, і 1, якщо $x > 0$ і -1, якщо $x < 0$ (x - дійсне число).

$$\text{sign}(10) = 1$$

$$\text{sign}(-3) = -1$$

II. Логарифмічні та експоненціальні функції.

Exp(z) - повертає число e , підведене до степеня z ;

log(z,[b]) - логарифм числа z за основою b ;

log(z) - логарифм числа z за основою 10;

ln(z) - логарифм числа z за основою e (натуральний логарифм числа z).

Аргумент z повинен бути скалярною величиною. Для функції \log і \ln він повинен бути відмінним від нуля і додатнім.

Якщо ж z комплексне або від'ємне, то логарифмічні функції повертають значення із головної вітки:

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i \arg(z).$$

$$z := -3i \quad \ln(z) = \ln 3 - \frac{\pi}{2}i = 1,0986 - 1,5708i.$$

III. Функції роботи з векторами і матрицями.

Функції, призначені для розв'язання задач лінійної алгебри, зібрані в категорії **Vector and Matrix** (вектори і матриці), їх можна поділити на три групи: функції означення матриць і операції з блоками матриць, функції обчислення числових характеристик матриць і функції, що реалізують чисельні алгоритми розв'язання задач лінійної алгебри. Розглянемо деякі з них, найбільш часто вживані.

а). Функції означення матриць і операції з блоками матриць.

Matrix(m,n,f) - створює і заповнює матрицю вимірності $m \times n$, елемент якої розташований в i - тому рядку і j - тому стовпці дорівнює $f(i, j)$;

diag(V) - створює діагональну матрицю, елементи головної діагоналі якої співпадають з елементами вектора V ;

identity(n) - створює одиничну матрицю порядку n ;

augment(A,B) - складає матрицю, в перших стовпцях якої міститься матриця A , а в останніх – матриця B (матриці A і B повинні мати однакову кількість рядків);

stack(A,B) - повертає матрицю, в перших рядках якої міститься матриця A , а в останніх – матриця B (матриці A і B повинні мати однакову кількість стовпців);

submatrix(A,ir,jr,ic,jc) - повертає матрицю, котра є блоком матриці A , розташованим в рядках з номерами з ir по jr і в стовпцях з номерами з ic по jc ($ir \leq jr$; $ic \leq jc$).

Зазначимо, що в Mathcad номер першого рядка (стовпця) матриці або першої компоненти вектора зберігаються в змінних **ORIGIN**. По умовчанням в Mathcad координати векторів, стовпці і рядки матриці нумеруються, починаючи з нуля ($ORIGIN:=0$). Щоб змінити цю ситуацію перед початком роботи з матрицями надаємо змінній **ORIGIN** значення 1

Приклади застосування вказаних функцій наведено в наступному робочому документі Mathcad:

$$f(x,y) := x^2 + y^2$$

$$A := \text{matrix}(3,4, f)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 5 & 10 \\ 4 & 5 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

$$V := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$B := \text{diag}(V)$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E := \text{identity}(4)$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C := \text{augment}(A,B)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 10 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 8 & 13 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D := \text{stack}(A,E)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 5 & 10 \\ 4 & 5 & 8 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F := \text{submatrix}(D,3,5,2,3)$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Функції обчислення числових характеристик матриць:

last(V) - повертає номер останньої компоненти вектора V ;

length(V) - обчислює кількість компонент вектора V ;

max(A),min(A) - повертають відповідно найбільший та найменший елемент матриці A ;

rows(A),cols(A) - обчислюють відповідно кількість рядків та кількість стовпців матриці A ;

tr(A) - обчислює слід квадратної матриці A , тобто суму її діагональних елементів;

rank(A) - обчислює ранг матриці A .

Як продовження попереднього робочого документу, наведемо наступний.

$$\text{last}(V) = 2 \qquad \text{length}(V) = 3$$

$$\text{rows}(V) = 3 \qquad \text{cols}(C) = 7$$

$$\text{max}(D) = 25 \qquad \text{min}(D) = 0$$

$$\text{tr}(B) = 6 \qquad \text{rank}(B) = 3$$

IV. Функції розв'язання алгебраїчних та трансцендентних рівнянь та їх систем.

Polyroots(V) - знаходить корені полінома (інакше алгебраїчного рівняння), коефіцієнти якого містяться у векторі V . Перш ніж користуватися цією функцією треба записати коефіцієнти полінома (рівняння) у вектор V .

Root(f(x),x) - знаходить корені рівняння з однією невідомою $f(x) = 0$. Перш ніж користуватися цією функцією потрібно задати початкове наближення до кореня. Якщо рівняння має декілька коренів, то знайдене значення кореня буде залежати від початкового наближення.

Розглянемо приклади на застосування цих функцій.

Приклад. Знайти корені рівняння $2x^3 + 3x^2 - 11x - 3 - 6 = 0$ і зробити перевірку правильності отриманих результатів.

Розв'язування. Розв'язування даної задачі наведемо у вигляді наступного програмного модуля.

Розв'язання кубічного рівняння $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ за допомогою вбудованої функції $\text{polyroots}(V)$.

Введемо значення коефіцієнтів рівняння

$$a := 2 \qquad b := 3 \qquad c := -11 \qquad d := -6$$

Запишемо коефіцієнти рівняння у вигляді вектора

$$V := (d \ c \ b \ a)^T.$$

Знайдемо корені рівняння за допомогою функції $\text{polyroots}(V)$.

$$x := \text{polyroots}(V)$$

$$x = \begin{pmatrix} -3 \\ -0.5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

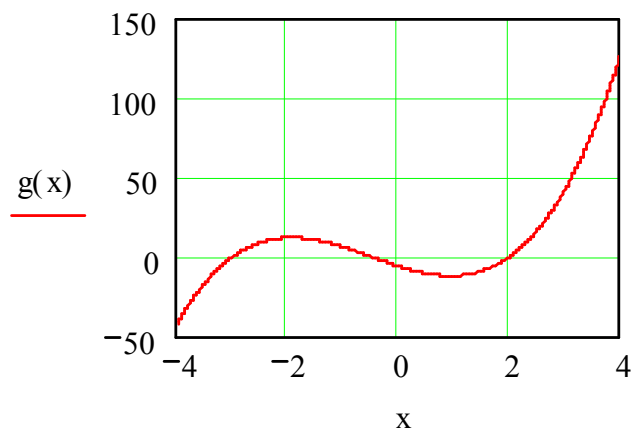
Перевіримо, чи задовольняють знайдені корені Дане рівняння.

$$f(x) := ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f(-3) = 0 \quad f(-0.5) = 0 \quad f(2) = 0$$

Розв'яжемо дане рівняння графічно

$$g(x) := 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$$



$$\begin{aligned} x := -4 & \quad \text{root}(g(x), x) = -3 \\ x := -1 & \quad \text{root}(g(x), x) = -0.5 \\ x := 1 & \quad \text{root}(g(x), x) = 2 \end{aligned}$$

Знайдемо корені цього ж рівняння за допомогою функції $\text{root}(f(x), x)$. Для цього візьмемо початкове наближення

$$x_1^{(0)} = -4.0$$

$$x := -4$$

$$x := \text{root}(f(x), x)$$

$$x = -3$$

Аналогічно можна знайти і інші корені розглядуваного рівняння. Mathcad дає можливість розв'язувати також і системи рівнянь виду

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) &= 0; \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) &= 0; \\ \dots\dots\dots; \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_m) &= 0. \end{aligned}$$

Тут $f_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$ - деякі скалярні функції від скалярних аргументів x_1, x_2, \dots, x_m . Зазначимо, що кількість рівнянь n може співпадати з кількістю невідомих m , може бути більшим або меншим за m . Результати розв'язання системи є чисельні значення шуканих невідомих.

Для розв'язування системи складається обчислювальний блок, який містить три частини, які йдуть послідовно друг за другом. Розглядувана процедура використовує для пошуку розв'язку системи ітераційні метод, тому як і для функції *root* спочатку треба задати початкові значення для всіх невідомих x_1, x_2, \dots, x_m . Першою частиною обчислювального блоку є ключове слово *Given*. Воно вказує Mathcad, що далі буде система рівнянь. Другу частину складає система, записана логічними операторами у вигляді рівностей, а, можливо, і нерівностей. Третя частина – вбудована функція $Find(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що призначена для розв'язання системи відносно змінних x_1, x_2, \dots, x_m . Значенням функції *Find* є вектор, компоненти якого будуть шукані значення змінних. Отже кількість елементів вектора співпадає з кількістю невідомих системи m .

Нагадаємо, що вставити логічні оператори слід, користуючись панеллю інструментів *Boolean* (Бульові оператори).

Зазначимо, що обчислювальним блоком з функцією *Find* можна знайти і корінь рівняння з однією невідомою. Задача пошуку кореня розглядається як розв'язання системи, яка складається з одного рівняння. Єдиною відміною є те, що повертати функція *Find* в цьому випадку буде одне число, а не вектор.

Розглянутий програмний модуль дозволяє ефективно розв'язати конкретну систему рівнянь. Але він має наступні обмеження:

- як тільки використано ім'я функції *Find*, це означає, що блок розв'язування системи завершено. Якщо цю функцію використати ще раз, то з'явиться повідомлення про помилку „немає відповідного *Given*”;
- якщо в системі потрібно змінити значення деяких параметрів або констант, наприклад, для того, щоб вивчити їх вплив на розв'язок системи, то необхідно повернутися знову в обчислювальний блок, щоб здійснити ці зміни.

Обидва ці обмеження можна усунути, якщо використати можливість Mathcad визначати функцію з використанням блоку розв'язання системи рівнянь. Якщо означити функцію із застосуванням функції *Find* в правій частині цього означення, то означена таким чином функція буде розв'язувати систему рівнянь кожен раз, коли до неї будуть звертатися. Більш того, якщо ця функція буде мати в якості аргументів ті параметри системи, котрі бажано змінити перед розв'язуванням системи, то для цього досить вказати нові значення аргументів функції. Таким чином, можна подолати обидва обмеження, про які йшла мова вище.

Проілюструємо ці положення на наступному програмному модулі.

Приклад. Знайти точки перетину еліпсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ з прямою $y = kx + m$.

Для розрахунків взяти наступні значення параметрів $a=4$, $b=1$, $k=1$, $m=0$.

Розв'язування. Сформульована задача зводиться до розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ y - kx - m = 0 \end{cases}$$

Складемо відповідний програмний модуль з використанням обчислювального блоку *Given/Find*.

Знаходження точок перетину еліпса з прямою.

Початкове наближення $x := 0.5$ $y := 1.0$

Given

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$y - kx - m = 0$$

$$fr(a, b, k, m) := Find(x, y)$$

$$fr(4, 1, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0,97014 \\ 0,97014 \end{pmatrix}$$

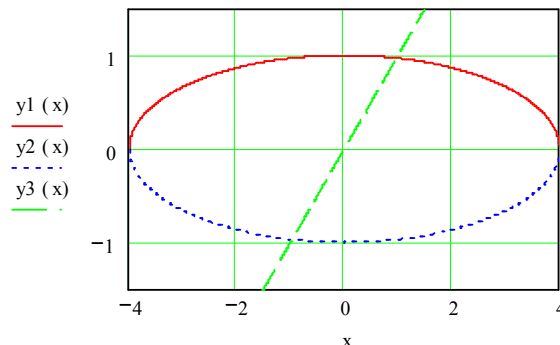
$$a := 4$$

$$b := 1$$

$$k := 1$$

$$m := 0$$

$$y1(x) := b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad y2(x) := -b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad y3(x) := k \cdot x + m$$



V. Функції округлення і роботи з частиною числа.

$ceil(x)$ - повертає найменше ціле число, більше або рівне x ; x повинно бути дійсним числом;

$$\text{ceil}(3.6) = 4$$

$$\text{ceil}(-5.7) = -5$$

$$\text{ceil}(10) = 10$$

$\text{floor}(x)$ - повертає найбільше ціле число, менше або рівне x ; x повинно бути дійсним числом;

$$\text{floor}(3.6) = 3.0$$

$$\text{floor}(-5.7) = -6$$

$$\text{floor}(10) = 10$$

$\text{round}(x, n)$ - округляє дійсне число x до n знаків справа від десяткової точки. Якщо n відсутнє, x округляється до найближчого цілого числа.

$$\text{round}(7.56885) = 8.0$$

$$\text{round}(7.56885, 3) = 7.569$$

$\text{trunc}(x)$ - повертає ціле значення дійсного числа x , відкидаючи дробову частину.

$$\text{trunc}(-4.75) = -4.0$$

$$\text{trunc}(5.0) = 5.0$$

VI. Функції розв'язання звичайних диференціальних рівнянь та їх систем.

Розглянемо основні вбудовані функції Mathcad, призначені для чисельного розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь та їх систем. Ці функції призначені для розв'язання задачі Коші для нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь, тобто наступної задачі: знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases}$$

який задовольняє умови $y_1(x_0) = y_{1,0}$, $y_2(x_0) = y_{2,0}$, ..., $y_n(x_0) = y_{n,0}$.

Чисельний розв'язок цієї задачі полягає в побудові таблиці наближених значень $y_{1,i}, y_{2,i}, \dots, y_{n,i}$, $i = \overline{1, N}$ розв'язку $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ на відрізку $[x_0, x_N]$ в точках x_0, x_1, \dots, x_N , які називають вузлами сітки. В системі комп'ютерної математики Mathcad розв'язати цю задачу можна, по-перше, склавши відповідний програмний модуль, а по-друге, скориставшись певними вбудованими функціями, наприклад, такими:

$\text{rkfixed}(y, x1, x2, \text{npoints}, D)$ - розв'язує задачу на відрізку методом Рунге-Кутта із постійним кроком;

$\text{rkadapt}(y, x1, x2, \text{npoints}, D)$ - розв'язує задачу на відрізку методом Рунге-Кутта з автоматичним вибором кроку;

$rkadapt(y, x1, x2, acc, npoints, D, kmax, save)$ - розв'язує задачу в заданій точці методом Рунге-Кутта з автоматичним вибором кроку.

Тут y - вектор початкових умов; $x1, x2$ - початкова і кінцева точка відрізка, на якому шукається розв'язок системи (для функції $rkadapt$ $x1$ - початкова точка, $x2$ - задана точка, в якій шукається розв'язок); $npoints$ - кількість вузлів на відрізку $[x_1, x_2]$; результат розв'язування містить $npoints+1$ рядок; D - ім'я вектора –функції, яка містить праві частини $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), i = \overline{1, n}$ рівнянь системи.

acc - параметр, який контролює похибку розв'язку при автоматичному виборі кроку інтегрування (якщо похибка розв'язку більше ніж acc , то крок сітки зменшується; крок зменшується доти, поки його значення не стане менше за $save$);

$save$ - найменше припустиме значення кроку нерівномірної сітки.

Результат роботи перелічених функцій – матриця, яка містить $n+1$ стовпець; її перший стовпець містить координати вузлів сітки; другий, третій, . . . , $n+1$ - й стовпці складаються з обчислених значень y у вузлах сітки функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, які є розв'язком системи.

Якщо розв'язується задача Коші для одного диференціального рівняння першого порядку, то результатом є матриця, в першому стовпці якої містяться вузли сітки, а в другому – наближені значення шуканого розв'язку у відповідних вузлах.

В бібліотеці вбудованих функцій Mathcad є ще функція $odesolve$, яка призначена для знаходження чисельного розв'язку лінійного диференціального рівняння, яке задовольняє умови $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^{(1)}, y''(x_0) = y_0^{(2)}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Перед звертанням до функції $odesolve(x, b, step)$ або $odesolve(x, b)$ необхідно записати ключове слово *Given*, потім ввести рівняння і початкові умови.

Тут x - ім'я змінної інтегрування (аргументу шуканої функції), b - правий кінець відрізка інтегрування, $step$ - крок, який використовується при інтегруванні рівняння методом Рунге – Кутта (цей параметр можна пропустити). Щоб ввести рівняння і початкові умови слід використовувати знак символічної рівності (з панелі *Boolean* або комбінацію клавіш $Ctrl+=$), а для запису похідних можна використовувати як оператор диференціювання, так і знак похідної. Функція $odesolve$ розв'язує задачу методом Рунге – Кутта з фіксованим кроком. Для розв'язання задачі з автоматичним вибором кроку потрібно клацнути в робочому документі по імені функції правою кнопкою миші і помітити в контекстному меню пункт *Adaptive*.

5. Приклади розв'язання задач за допомогою системи комп'ютерної математики Mathcad.

Приклад . Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

розкладом його за елементами першого стовпця.

Розв'язування. Відомо, що $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$ або $\Delta = a_{11}M_{11} + a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} + a_{14}M_{14}$. Тут A_{ij}, M_{ij} - відповідно алгебраїчне доповнення та мінор елемента a_{ij} . $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Розв'язок задачі в середовищі Mathcad ілюструє наступний програмний модуль.

ORIGIN := 1

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

M11 := *submatrix*(*A*, 1,3,1,3)

M12 := *augment*(*submatrix*(*A*,1,3,0,0), *submatrix*(*A*,1,3,2,3))

M13 := *augment*(*submatrix*(*A*,1,3,0,1), *submatrix*(*A*,1,3,3,3))

M14 := *submatrix*(*A*,1,3,0,2)

$$M11 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M12 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M13 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M14 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta := 3|M11| - 4|M12| + (-1)|M13| - 2|M14|$$

$$\Delta = 16$$

Обчислимо даний визначник як детермінант матриці A , користуючись функцією Mathcad

$$\Delta := |A|$$

$$\Delta = 16$$

Результати співпадають, як і повинно бути.

Приклад. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 2 \end{cases}$$

- a) за правилом Крамера;
- b) за допомогою оберненої матриці;
- c) методом Жордана-Гауса.

Розв'язування. Розв'язування даної системи рівнянь всіма методами ілюструє наступний програмний модуль.

ORIGIN := 1

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta := |A|$$

$$\Delta = -52$$

Оскільки визначник системи відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок.

Розв'язування системи за правилом Крамера.

$$\Delta_1 := \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{vmatrix} \quad \Delta_2 := \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 10 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 := \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 10 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{vmatrix} \quad \Delta_4 := \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 10 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = -52$$

$$\Delta_2 = -52$$

$$\Delta_3 = 52$$

$$\Delta_4 = -104$$

$$x_1 := \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$x_2 := \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$x_3 := \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$x_4 := \frac{\Delta_4}{\Delta}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = -1$$

$$x_4 = 2$$

Розв'язування системи за допомогою оберненої матриці.
Запишемо дану систему рівнянь у матричному вигляді.

$$AX = B$$

$$\text{Звідси } X := A^{-1}B \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Розв'язування системи методом Жордана-Гауса.
 $AR := \text{augmrnt}(A, B)$

$$AR = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & 10 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$AG := \text{rref}(AR)$

$$AG = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$X := \text{submatrix}(A, 0, 3, 4, 4)$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Перевіримо правильність отриманого результату.

$$AX - B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

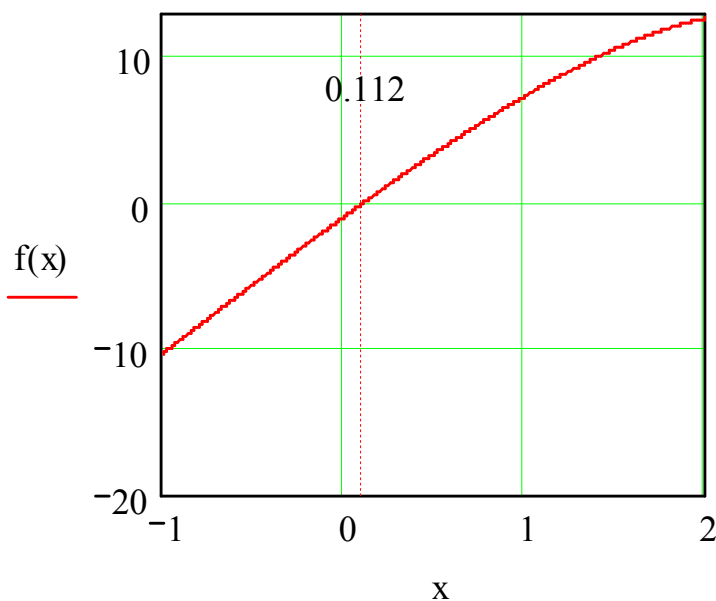
Отже систему розв'язано правильно.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = 10x - e^x$ на відрізку $[0, 2]$ та корінь рівняння $10x - e^x = 0$, який належить цьому відрізку.

Розв'язування. Зауважимо, що похідна від заданої функції $f'(x) = 10 - e^x$ є додатньою на відрізку $[0, 2]$. Отже, функція на цьому відрізку монотонно зростає і приймає найменше значення на лівому кінці (в точці $x=0$), а найбільше на

правому кінці (в точці $x=2$). Ці значення відповідно дорівнюють $f(0) = -1$ та $f(2) = 20 - e^2 \approx 12.611$. Оскільки на кінцях відрізка функція приймає значення різних знаків і є монотонно зростаючою на ньому, то рівняння $f(x) = 0$ має лише один корінь на відрізку $[0, 2]$. Результати розрахунків в середовищі Mathcad повністю підтверджують ці міркування.

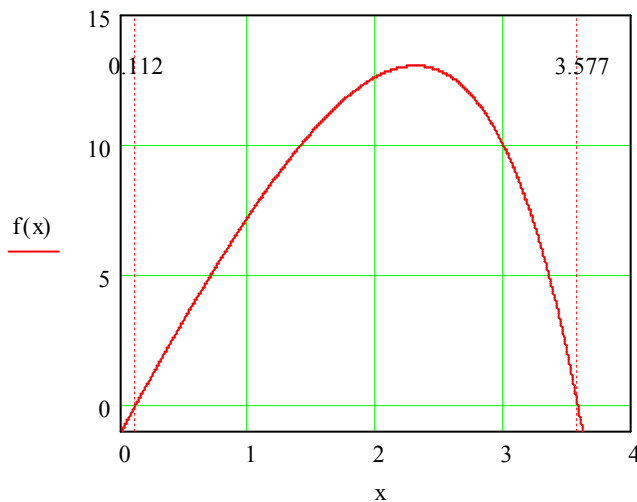
$$f(x) := 10x - e^x$$



$m:=f(0)$	$m=-1$	$M:=f(2)$	$M=12.611$
$x:=0$	$\text{root}(f(x),x)=0.112$		$0.054756 \quad 0.11$
$x:=1$	$\text{root}(f(x),x)=0.112$		
$x:=2$	$\text{root}(f(x),x)=0.112$	$f(0.112)=0.001$	

Зазначимо, що для розв'язання рівняння скористалися вбудованою функцією **root**. Для обчислення кореня взяли три різних початкових наближення, результати при цьому отримали однакові. В кінці зробили перевірку правильності отриманого розв'язку рівняння. Для порівняння розглянемо цю ж функцію на відрізку $[0, 4]$. На цьому відрізку похідна набуває різних знаків, отже функція на деякому проміжку зростає, а потім спадає, а значить, має максимальне значення. Як показують подальші розрахунки в середовищі Mathcad рівняння $10x - e^x = 0$ на відрізку $[0, 4]$ має вже 2 корені.

$$f(x) := 10x - e^x$$



$x := 0$	$\text{root}(f(x), x) = 0.112$	$f(0.112) = 0.001$
$x := 3$	$\text{root}(f(x), x) = 3.577$	$f(3.577) = 0.004$

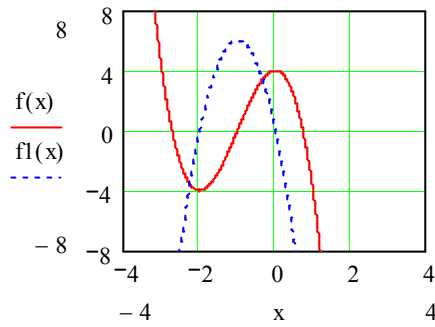
Приклад. Побудувати графік функції $y = x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x$ і провести її аналітичне дослідження за допомогою першої похідної.

Розв'язування. Відомо: якщо функція диференційовна на інтервалі (a, b) , за виключенням, можливо, скінченної кількості точок цього проміжку, то її поведінку (зростання, спадання, точки екстремуму) можна дослідити за допомогою похідної першого порядку. Якщо неперервна в точці x_0 функція диференційовна на проміжках (a, x_0) і (x_0, b) , то там, де $f'(x) > 0$ функція зростає, а на тому проміжку, де $f'(x) < 0$ функція спадає. Якщо ж при переході через точку x_0 похідна змінює знак, то в цій точці функція має екстремум: при зміні знака похідної з “+” на “-” – максимум, а з “-” на “+” – мінімум. Виходячи з цих міркувань ми і проводимо дослідження заданої функції, причому, для наочності, будуємо ще і графік похідної заданої функції.

$$f(x) := 4 - 6x^2 - 2x^3 \qquad f1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

$$f1(x) \rightarrow -12x - 6x^2$$

$$V := (0 \quad -12 \quad -6)^T \qquad \text{polyroots}(V) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{array}{lll}
 f_1(-2) = 0 & f(-2) = -4 & \text{Точка мінімуму } (-2, -4) \\
 f_1(0) = -0 & f(0) = 4 & \text{Точка максимуму } (0, 4)
 \end{array}$$

Приклад. Записати для функції $f(x) = x \cos x$ формулу Тейлора п'ятого порядку в околі точки $x_0 = 0$. Зобразіть графік цієї функції і її многочленів Тейлора, а також, для ілюстрації точності наближення функції многочленом Тейлора, графіки залишкових членів.

Розв'язування. Якщо функція $f(x)$ має похідні до n -го порядку включно в околі точки x_0 , то для неї справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

($R_n(x)$ -залишковий член: $R_n(x) = O((x - x_0)^n)$). Права частина цього виразу без залишкового члену називається многочленом Тейлора $T_n(x)$. Тобто

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

і має місце наближена рівність $f(x) \approx T_n(x)$, яка дозволяє в різноманітних аналітичних та чисельних розрахунках замінити функцію її многочленом Тейлора. Із формули Тейлора видно, що чим ближче точка x до точки x_0 , тим більша точність апроксимації функції многочленом Тейлора і ця точність збільшується із зростанням степеня многочлена.

За умовою задачі $x_0 = 0$, $n = 5$.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x - x_0)^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}(x - x_0)^5 + O(x^5)$$

Для того, щоб отримати розклад функції за формулою Тейлора в околі точки $x_0 = 0$, треба ввести функцію $f(x) = x \cos(x)$, виділити змінну x , натиснути по рядку **Expand to Series** в пункті **Variable** меню **Symbolics** і вказати у вікні діалогу порядок залишкового члену. Потім означити многочлени Тейлора як функції змінної x і скопіювати в них потрібну кількість доданків з отриманого раніше виразу. Залишковий член означаємо як функцію від x , рівну різниці між даною

функцією і відповідним многочленом Тейлора. Все сказане ілюструє нижче наведений програмний модуль.

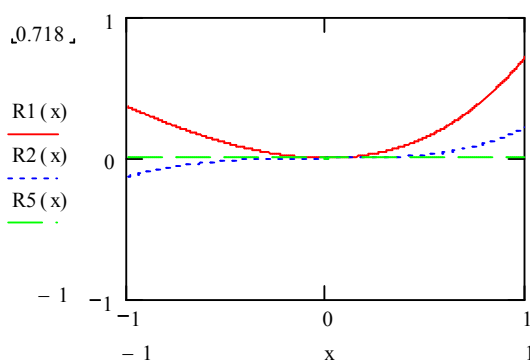
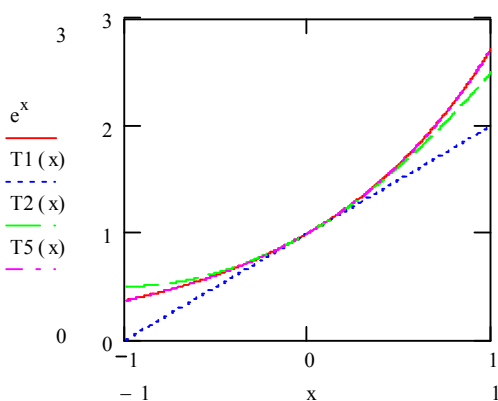
$$e^x$$

$$1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{120} \cdot x^5 + O(x^6)$$

$$T1(x) := 1 + 1 \cdot x \qquad R1(x) := e^x - T1(x)$$

$$T2(x) := 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2 \qquad R2(x) := e^x - T2(x)$$

$$T5(x) := 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{120} \cdot x^5 \qquad R5(x) := e^x - T5(x)$$



Приклад. Обчислити значення виразу $a = \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{11} - \frac{13}{12}\right) : \frac{4}{7} + 3,5$. Результат представити у вигляді десяткового дробу з трьома та п'ятьма знаками після коми, а також у вигляді звичайного дробу.

Розв'язування.

$$a := \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{11} - \frac{13}{12} \right) \div \frac{4}{7} + 3.5$$

Результат у вигляді десяткового дробу з трьома знаками після коми:

$$a = 2.495$$

Результат у вигляді десяткового дробу з п'ятьма знаками після коми:

$$a = 2.49508$$

Результат у вигляді звичайного дробу:

$$a = \frac{6587}{2640}$$

Приклад. Дана функція $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & -4 \leq x \leq 1 \\ 5 - x, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$. Знайти її похідну $f'(x)$.

Обчислити значення функції $f(x)$ та її похідних $f'(x)$ в точках $x = -3.2$, $x = 2.6$. Побудувати графіки функції $f(x)$ і її похідної $f'(x)$.

Розв'язування.

$$f(x) := \begin{cases} 3 \cdot x^2 + 1 & \text{if } -4 \leq x \leq 1 \\ 5 - x & \text{if } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Знайдемо похідну функції $f(x)$, позначив її $Df(x)$:

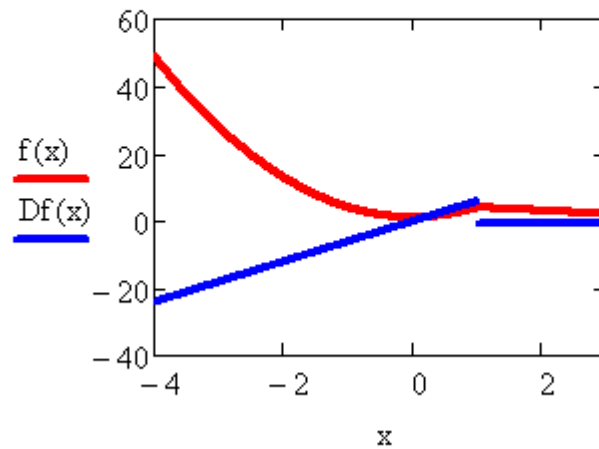
$$Df(x) := \begin{cases} \frac{d}{dx} (3 \cdot x^2 + 1) & \text{if } -4 \leq x \leq 1 \\ \frac{d}{dx} (5 - x) & \text{if } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Обчислимо значення функції та її похідної в точках $x = -3.2$ и $x = 2.6$:

$$f(-3.2) = 31.72 \quad f(2.6) = 2.4$$

$$Df(-3.2) = -19.2 \quad Df(2.6) = -1$$

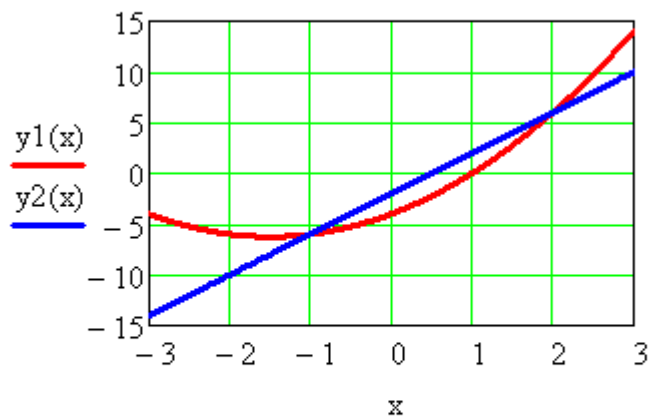
Побудуємо графік функції $f(x)$ та її похідної $Df(x)$:



Приклад. За допомогою визначеного інтеграла обчислити площу області, обмеженої параболою $y = x^2 + 3x - 4$ та прямою $y = 4x - 2$. Область зобразити графічно.

Розв'язування.

Зобразимо область графічно



+ Знайдемо спочатку точки перетину заданої параболи та прямої. Для цього розв'яжемо систему рівнянь. Складемо відповідний програмний модуль з використанням обчислювального блоку **Given/Find**.

1) Початкове наближення

$$x := -1.1 \quad y := -7$$

Given

$$y - x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$y - 4x + 2 = 0$$

$$a1 := \text{Find}(x, y)$$

$$a1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

2) Початкове наближення

$$\underline{x} := 2.2 \quad \underline{y} := 5.5$$

Given

$$y - x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$y - 4x + 2 = 0$$

$$a2 := \text{Find}(x, y)$$

$$a2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Перевірка

$$y1(-1) = -6 \quad y2(-1) = -6$$

$$y1(2) = 6 \quad y2(2) = 6$$

Обчислимо тепер площу заданої області за формулою

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

В даному прикладі $a=-1$, $b=2$.

$$\underline{S} := \int_{-1}^2 (y2(x) - y1(x)) dx$$

$$S = 4.5$$

6. Збереження робочого документу.

Щоб зберегти робочий документ необхідно вибрати пункт "Сохранить" з меню "Файл", або натиснути кнопку з дискетою на панелі інструментів. Якщо файл до цього часу не зберігався, то з'явиться діалогове вікно "Сохранить как". Введіть ім'я файлу, вказавши повний опис шляху. Інакше Mathcad збереже файл в каталозі, в якому він встановлений, або з якого зчитаний останній робочий документ.

7. Друкування.

Для того, щоб надрукувати файл необхідно вибрати пункт "Печать" з меню Файл, або натиснути кнопку з принтером на панелі інструментів. Mathcad використовує принтер, що встановлений в Windows.

8. Вихід з Mathcad .

Для того, щоб вийти з системи Mathcad по закінченню роботи, необхідно вибрати пункт "Выход" з меню "Файл" або натиснути Alt+F4. Mathcad закриє всі відкриті ним вікна і вийде в диспетчер програм. Якщо в робочому документі будуть не збережені раніше зміни, то Mathcad виведе діалогове вікно з запитанням зберегти чи не зберегти ці зміни.

Контрольні завдання.

1-30. Обчислити значення виразу a . Результат представити у вигляді десяткового дробу з трьома та п'ятьма знаками після коми, а також у вигляді звичайного дробу. Завдання взяти з таблиці 1.

31-60. Дані матриці A і B . Знайти матриці αA , $A - \alpha B$, AB , матриці, транспоновані до матриць A і B . Перевірити, чи є невиродженими матриці A і B та знайти, якщо можливо, обернені до них. Знайти обернену до $A - \alpha B$, α - номер варіанту.

61-90. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{212}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

а) за правилом Крамера;

б) за допомогою оберненої матриці;

в) методом Жордана-Гаусса.

Коефіцієнти систем рівнянь взяти з таблиці 2.

91-120. Знайти корені рівняння $f(x) = 0$ і зробити перевірку правильності отриманих результатів. Дані взяти з таблиці 3.

121-150. Дана функція $f(x)$. Знайти її похідну $f'(x)$. Обчислити значення функції $f(x)$ та її похідних $f'(x)$ в точках $x = x_1$, $x = x_2$. Побудувати графіки функції $f(x)$ і її похідної $f'(x)$. Дані взяти з таблиці 4.

151-180. Знайти найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на даному відрізку $[a, b]$ і корінь рівняння $f(x) = 0$, який належить цьому відрізку. Функцію $f(x)$ та відрізок взяти з таблиці 5.

181-210. Побудувати графік функції $y = f(x)$ і провести її дослідження за допомогою похідних першого та другого порядку. Функцію $f(x)$ взяти з таблиці 3.

211-240. За допомогою визначеного інтеграла обчислити площу області, обмеженої параболою $y = ax^2 + bx + c$ та прямою $y = tx + n$. Область зобразити графічно. Дані взяти з таблиці 6.

Таблиця 1.

№ вар-та	Значення виразу	№ вар-та	Значення виразу
1.	$a = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{15} - \frac{3}{5}\right) : \frac{5}{12} - 4,7$	16	$a = \left(1,2 - \frac{21}{4}\right) \cdot 5 - \frac{21}{6} : \frac{13}{28} + 3,4$
2.	$a = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - 5\right) : \frac{15}{22} + \frac{3}{11}$	17	$a = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{15} - 2 : \frac{6}{5} + 0,3$
3.	$a = \left(\frac{3}{7} : \frac{15}{14} - \frac{3}{4} \cdot 2\right) \cdot 3,6 - 7,8$	18	$a = \frac{1}{7} : \frac{13}{14} - 0,6 \cdot 2 + \frac{5}{27} \cdot \frac{11}{17}$
4.	$a = \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{7}{8} - \frac{2}{3}\right) : 12 - \frac{3}{7} \cdot 4,3$	19	$a = \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{7}{5} - \frac{2}{3}\right) + \frac{31}{7} : \frac{5}{6} - 0,5$
5.	$a = \left(\frac{2}{5} - 2,5\right) : 7 + 3,6 \cdot \frac{8}{17}$	20	$a = 2 : \left(\frac{1}{5} + 0,2\right) - \frac{23}{7} \cdot \frac{8}{11} + 0,4$
6.	$a = \frac{3}{11} \cdot \left(\frac{7}{9} - 2\right) : \frac{3}{8} + 5,7 - \frac{1}{13}$	21	$a = \left(\frac{1}{3} - 1,5\right) : 7 - \frac{12}{7} \cdot \frac{5}{23} + 0,6$
7.	$a = 3 + \left(1,3 - \frac{1}{4}\right) : \frac{7}{10} - \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{11}$	22	$a = \frac{2}{17} \cdot \left(\frac{5}{8} - 0,2\right) - \frac{1}{8} : 4,8 + \frac{3}{14}$
8.	$a = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{6} + 7,9$	23	$a = \frac{13}{27} + \left(0,9 - \frac{1}{5}\right) : \frac{7}{10} + 7,7$
9.	$a = \frac{1}{4} \cdot \left(1,5 - \frac{3}{5}\right) - \frac{1}{10} : 4,9$	24	$a = \frac{11}{2} - 0,5 : \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6}$
10.	$a = 0,4 \cdot \frac{5}{8} - \frac{6}{11} : \frac{5}{23} + 33,6$	25	$a = \frac{7}{2} \cdot \left(0,5 - \frac{2}{5}\right) - \frac{3}{10} : \frac{9}{13} - 1,3$

11.	$a = \left(1 - \frac{1}{5}\right) : 1,3 + \frac{26}{3} \cdot \frac{5}{7} - 16,4$	26	$a = \frac{7}{9} + \left(1,2 - \frac{53}{3}\right) \cdot \frac{14}{5} - 0,7$
12.	$a = 5,2 - \frac{3}{2} \cdot \left(2 + \frac{3}{4}\right) - 11 \cdot \frac{5}{32}$	27	$a = 0,7 \cdot \frac{8}{7} - \frac{9}{11} : 3,4 + \frac{5}{16} : \frac{4}{31}$
13.	$a = 6,2 : \frac{31}{25} + \left(3 - \frac{12}{7}\right) \cdot \frac{4}{11}$	28	$a = \left(-1 + \frac{1}{5}\right) : 0,6 + \frac{9}{8} \cdot \frac{11}{25} - 2,3$
14.	$a = 0,5 : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{11}{3} \cdot \frac{7}{18}$	29	$a = 3,1 - \frac{7}{2} \cdot \left(1 - \frac{5}{4}\right) + \frac{34}{11} : 6,7$
15.	$a = \frac{2}{9} + \left(0,2 - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{14}{5} - 0,7$	30	$a = \left(1,2 - \frac{3}{7}\right) \cdot 5 - \frac{21}{5} : \frac{6}{19} + 8,5$

Таблица 2.

№ вар-та	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
1	10	2	-1	8	0,5	-20	0,4	10,9	1	2	-25	-25
2	25	-1	-2	50	1	-10	-2	11	3	-2	-20	-2
3	20	3	-1	9	3	40	-0,5	1	2	-1	-25	-24
4	10	-0,5	1	4	2	-20	-1	-39	4	1	-20	4
5	40	1	2	38,5	1	20	-4	7	1	-2	10	3
6	25	-1	2	0	1	10	-3	-8,5	3	1	10	-6
7	10	1	-1	16	2	-10	1	-7	1	3	20	4,5
8	20	-4	1	8	4	-10	-0,5	-3	2	1	-10	1,5
9	10	1	-1	4	3	20	1	18,5	2	1	20	0
10	20	2	1	0	1	10	2	3	3	2	10	-9
11	25	-3	-1	24,5	3	10	2	-4	2	-1	-10	3
12	25	2	-1	49	1	10	-1	-3	3	1	-25	5,5
13	10	1	2	7	3	20	-4	-13	1	1	-10	10
14	25	1	1	-1	1	10	2	6	1	-1	5	-11
15	40	1	1	19	1	40	1	-0,5	2	-1	20	-19
16	10	-5	-1	25	2	-10	1	-4	1	1	-10	4
17	25	1	-1	0	1	25	-5	-20	3	1	10	-11
18	20	5	-2	-15	3	20	1	17	1	1	-10	0
19	10	1	1	0	2	5	1	4	3	1	10	-9

20	20	-3	-1	7	4	-10	2	-8	2	1	-10	2
21	40	3	-1	37	4	10	1	-6	1	1	-20	0
22	25	5	3	47,5	1	10	-1	-3	3	2	-10	5
23	10	-1	2	3	3	20	4	-38	1	1	10	3
24	20	4	-3	15	1	10	1	-3	2	4	-10	-10
25	25	5	-1	19	2	20	-3	-21	1	1	-5	-5
26	20	-3	4	14	2	10	-7	22	3	-4	25	-5
27	25	-2	1	26	3	-10	2	8	4	2	-25	3
28	10	3	-2	8	8	-20	3	11	2	5	-25	-23
29	20	3	-2	39,5	7	-10	2	11	3	2	25	32
30	10	-3	4	33	2	-20	3	26	3	5	-10	4

Таблица 3.

№ вар	$f(x)$	№ вар	$f(x)$	№ вар	$f(x)$
1.	$6x^3 - 13x^2 - 13x + 30$	11	$2x^3 + 11x^2 + 17x + 30$	21	$x^3 + 4x^2 + x - 6$
2.	$3x^3 - 2x^2 - 23x + 30$	12	$2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$	22	$3x^3 + 8x^2 - 5x - 6$
3.	$12x^3 + 10x^2 - 68x + 30$	13	$4x^3 - 8x^2 + x + 3$	23	$3x^3 + 14x^2 + 17x + 6$
4.	$12x^3 + 58x^2 + 52x - 42$	14	$2x^3 + x^2 - 2x - 1$	24	$3x^3 + 4x^2 - 13x + 6$
5.	$6x^3 + 5x^2 - 27x - 14$	15	$2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$	25	$4x^3 - 3x^2 - 4x + 3$
6.	$2x^3 + 7x^2 + x - 10$	16	$2x^3 - x^2 - 13x - 6$	26	$8x^3 - 2x^2 - 7x + 3$
7.	$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$	17	$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	27	$8x^3 + 6x^2 - 17x + 6$
8.	$2x^3 - x^2 - 13x - 6$	18	$x^3 - 4x^2 + x + 6$	28	$2x^3 - x^2 - 11x + 10$
9.	$2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$	19	$x^3 - 7x - 6$	29	$2x^3 + 3x^2 - 9x - 10$
10	$x^3 + 6x^2 + 11x + 6$	20	$x^3 + 6x^2 + 11x + 6$	30	$2x^3 + 11x^2 + 19x + 10$

Таблица 4.

№ варианта	$f(x) =$	x_1	x_2	№ варианта	$f(x) =$	x_1	x_2
1.	$\begin{cases} \frac{4}{5}\left(\frac{x}{\pi}+3\right), & -3\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right), & -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \end{cases}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{4}$	2.	$\begin{cases} \frac{1}{5}(25-x^2), & -5 \leq x \leq 0 \\ 5-\frac{5x}{4}, & 0 < x \leq 4 \end{cases}$	-3	2,5
3.	$\begin{cases} \operatorname{tg} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{4}{3}-\frac{4x}{3\pi}, & \frac{\pi}{4} < x \leq \pi \end{cases}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	4.	$\begin{cases} 3\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right), & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ 4-\frac{x}{\pi}, & \pi < x \leq 4\pi \end{cases}$	$\frac{3\pi}{4}$	2π
5.	$\begin{cases} (x+1)^2, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-\frac{x}{2}, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	6.	$\begin{cases} 2\operatorname{tg} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ -\frac{x}{\pi}+\frac{9}{4}, & \frac{\pi}{4} \leq x \leq 3\pi \end{cases}$	$\frac{\pi}{6}$	2π
7.	$\begin{cases} \frac{5}{3}\left(\frac{x}{2}+2\right), & -4 \leq x \leq 2 \\ 9-x^2, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$	0	$\frac{5}{2}$	8.	$\begin{cases} 0,5x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 8-3x, & 2 < x \leq \frac{8}{3} \end{cases}$	1	$\frac{7}{3}$
9.	$\begin{cases} 3\left(\frac{6x}{\pi}+1\right), & -\frac{\pi}{6} \leq x \leq 0 \\ 3\cos\frac{x}{2}, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	10.	$\begin{cases} \frac{4}{3\pi}\left(x+\frac{\pi}{2}\right), & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{ctg} x, & \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$	0	$\frac{3\pi}{8}$
11.	$\begin{cases} 4-x^2, & -2 \leq x \leq 0 \\ 4-x, & 0 < x \leq 4 \end{cases}$	-1	3	12.	$\begin{cases} \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{4}{3}-\frac{2x}{3\pi}, & \frac{\pi}{2} < x \leq 2\pi \end{cases}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$
13.	$\begin{cases} (x+2)^2, & -2 \leq x \leq 0 \\ 4-x^2, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$	-1	$\frac{3}{2}$	14.	$\begin{cases} 4(x-2)^2, & 2 \leq x \leq 3 \\ 4-x, & 3 < x \leq 4 \end{cases}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
15.	$\begin{cases} \frac{x}{2\pi}+2, & -4\pi \leq x \leq -2\pi \\ \cos x, & -2\pi < x \leq -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$	-3π	$-\frac{7\pi}{4}$	16.	$\begin{cases} 4(x-1)^2, & 1 \leq x \leq 3 \\ 16(4-x), & 3 < x \leq 4 \end{cases}$	2	$\frac{5}{2}$
17.	$\begin{cases} x+4, & -4 \leq x \leq 0 \\ 4-x^2, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$	-3	$\frac{3}{2}$	18.	$\begin{cases} x+2, & -2 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{4-x}, & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$	-1	3
19.	$\begin{cases} 3\cos\frac{t}{2}, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 3, & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	20.	$\begin{cases} x+2, & -2 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{4-x}, & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$	-1	3

21.	$\begin{cases} \operatorname{tg} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{16x}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right), & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	22.	$\begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \\ 2 \sin \frac{3}{2} x, & \frac{\pi}{3} \leq x \leq 3 \end{cases}$	$\frac{\pi}{8}$	2
23.	$\begin{cases} 2(x+1), & -1 \leq x \leq 0 \\ 2 \cos \frac{3}{2} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$	-0,5	$\frac{\pi}{8}$	24.	$\begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 3 \\ 2(6-x), & 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$	1	5
25.	$\begin{cases} \frac{3}{2}(x+1), & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{3}{2} - x, & 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$	-0,5	1	26.	$\begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{3} \left(\frac{5}{2} - 1 \right), & 1 \leq x \leq \frac{5}{2} \end{cases}$	0,5	2
27.	$\begin{cases} \frac{4}{5}(x+2), & -2 \leq x \leq 3 \\ \frac{4}{3}(6-x), & 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$	-1,5	4	28.	$\begin{cases} 9-x^2, & -3 \leq x \leq 0 \\ 3(3-x), & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$	-2,5	2,5
29.	$\begin{cases} 3 \sin \frac{3}{2} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \\ \frac{9}{\pi} \left(\frac{2\pi}{3} - x \right), & \frac{\pi}{3} < x \leq \frac{2\pi}{3} \end{cases}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	30.	$\begin{cases} 5 \cos \frac{2}{3} x, & -\frac{3\pi}{4} \leq x \leq 0 \\ 5 - \frac{20}{3\pi} x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

Таблица 5.

№ вар	$f(x)$	$[a, b]$	№ вар	$f(x)$	$[a, b]$
1	$e^{2x} + 3x$	$[-2, 3]$	16	$2 - x \ln x$	$[1, e]$
2	$3^x - 4x$	$[0, 1]$	17	$1 - \sqrt{3x + x^2}$	$[0, 5, 4]$
3	$\cos x - 0,1x - 0,4$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	18	$2 \sin x + 0,3x - 0,6$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
4	$2^x + 3x + 2$	$[-2, 0]$	19	$5 - \sqrt[3]{4x^2 + 3x + 1}$	$[1, 3]$
5	$5x + 2 - 3^x$	$[-1, 0]$	20	$0,6 - x - \sin x$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
6	$x \ln x - 2$	$[1, e]$	21	$e^{4x} + 2x$	$[-3, 1]$
7	$3 \cos x - 2x - 1$	$\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$	22	$\sqrt[3]{x^2 + 2} - 2$	$[0, 3]$

8	$2\cos x - 0,5x - 0,3$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	23	$0,9\sin x + 0,1x - 0,9$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
9	$\sqrt{x^2 + x} - 1$	$[0,5, 2]$	24	$e^{3x} + 2x$	$[-2, 0]$
10	$3\cos x - 0,7x - 0,4$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	25	$4x - 3^x$	$[0, 1]$
11	$\sin x + x - 0,5$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	26	$2\sin x + 0,3x - 0,6$	$\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
12	$\sqrt[4]{3x^2 + 1} - 2$	$[0, 5]$	27	$2 - \sqrt{3x^2 + 2x}$	$[0, 5, 2]$
13	$e^{2x} + 2x + 1$	$[-1, 1]$	28	$0,7 - 0,2x - \sin x$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
14	$3 - \sqrt[3]{x^2 + x}$	$[1, 4]$	29	$2 - x \ln x$	$[1, e]$
15	$e^{2x} + 5x$	$[-1, 1]$	30	$1 - \sqrt{3x + x^2}$	$[0, 5, 4]$

Таблица 6.

№ варианта	a	b	c	m	n
1.	1	3	3	2	5
2.	3	1	-4	-1	1
3.	3	-5	-2	2	8
4.	2	3	-5	4	-2
5.	2	5	-7	2	-2
6.	1	4	-5	1	-1
7.	1	-4	-5	-2	-2
8.	2	-5	-7	-4	-4
9.	3	4	-7	2	-2
10.	1	6	-7	3	-3
11.	1	3	3	3	7
12.	3	1	-4	-3	3
13.	3	-5	-2	-1	5
14.	2	3	-5	-2	2
15.	2	5	-7	4	-4
16.	1	4	-5	2	-2
17.	1	-4	-5	-3	-3
18.	2	-5	-7	-3	-3
19.	3	4	-7	1	-1

20.	1	6	-7	2	-2
21.	1	3	3	5	6
22.	3	1	-4	-3	-5
23.	3	-5	-2	-4	2
24.	2	3	-5	6	0
25.	2	5	-7	4	-4
26.	1	4	-5	3	-3
27.	1	-4	-5	-1	-1
28.	2	-5	-7	-1	-1
29.	3	4	-7	3	-3
30.	1	6	-7	1	-1

Література.

1. Алексеев Е. Р. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, Matlab 7, Maple 9 / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова. – М. : НТ Пресс, 2006. – 496 с.
2. Mathcad. Руководство пользователя / пер. с англ. – М. : Информационно-издательский дом “Филинь”, 1996. – 712 с.
3. Плис А. И. Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров : учеб. пособие / А. И. Плис, Н. А. Сливина. – М. : Финансы и статистика, 2000. – 656 с.
4. Кудрявцев Е. М. Mathcad 2000 Pro. / Е. М. Кудрявцев. – М. : ДМК Пресс, 2001. – 576 с.
5. Дьяконов В. Mathcad 2000 : учебный курс / В. Дьяконов. – СПб. : Питер, 2001. – 592 с.
6. Кирьянов Д. Самоучитель Mathcad 2001 / Д. Кирьянов. – СПб., 2001. – 544 с.
7. Литвин О. М. Математичні методи та моделі в розрахунках на ПЕОМ (із застосуванням системи Mathcad) : навч. посіб. / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова. – Харків : УІПА. – 152 с.

Для нотаток

Для нотаток