

МЕТОД МІНІМАКСА ПРИ НАБЛИЖЕННІ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай задано функцію однієї змінної $f(x)$ на інтервалі $[a, b]$ з можливими розривами першого роду в точках $x_k, k = \overline{1, n-1}$. Припускаємо, що хоча б в одному вузлі x_k функція має розрив першого роду. Задані вузли розбивають інтервал $[a, b]$ на $n-1$ частин.

Визначення 1. Розривним інтерполяційним лінійним сплайном на відрізку $[x_k, x_{k+1}], k = \overline{1, n-1}$ наступну функцію:

$$S(x) = Sp_k(x, C) = C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, k = \overline{1, n-1}, \quad (1)$$

де $C_k^+, C_{k+1}^-, k = \overline{1, n-1}$ – параметри сплайну $S(x)$, що визначаються у вигляді односторонніх границь $C_k^+ = \lim_{x \rightarrow x_k + 0} f(x), C_{k+1}^- = \lim_{x \rightarrow x_{k+1} - 0} f(x)$.

Треба знайти такі параметри $C_k^+, C_{k+1}^-, k = \overline{1, n-1}$ у розривному інтерполяційному сплайні (1), щоб наближення було найкращим у тому чи іншому сенсі. Для розв'язування цієї задачі використовуємо методом мінімакса.

Теорема 1. Якщо на кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}], k = \overline{1, n-1}$ невідомі параметри $C_k^+, C_{k+1}^-, k = \overline{1, n-1}$ знаходити з умови

$$\max_{1 \leq k \leq n-1} |f(x) - Sp_k(x)| \rightarrow \min, \quad (2)$$

то отримаємо розривний сплайн найкращого наближення.

Теорема 2. Якщо наближувана функція $f(x)$ є розривною кусково-лінійною функцією з точками розриву $x = x_k, k = \overline{1, n}$ і наближуємо її кусково-лінійним розривним сплайном $S(x)$, що визначається формулами (1), і невідомі параметри-елементи $C_k^+, C_{k+1}^-, k = \overline{1, n-1}$ знаходимо з умови (2), то отримаємо точно наближувану функцію, тобто $S(x) = f(x)$.

Точки розриву функції збігаються з точками розриву наближувального сплайна і найкраще наближення сплайна до функції виконуємо аналітично. На кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}], k = \overline{1, n-1}$ знаходимо максимальне значення відхилення сплайна від функції, яке буде дорівнювати одному із значень:

$$J_{[x_k, x_{k+1}]}(C) = \max_{[x_k, x_{k+1}]} \{|f_k(x_k) - Sp_k(x_k, C)|, |f_k(x_{k+1}) - Sp_k(x_{k+1}, C)|, |f_k(a_2) - Sp_k(a_1, C)|, \dots, |f_k(a_m) - Sp_k(a_m, C)|\} \quad (3)$$

де $a_l, l = \overline{1, m}$ – стаціонарні точки функції $J_k(x, C) = f_k(x) - Sp_k(x, C)$ на k -ому інтервалі.

Потім знаходимо мінімум від отриманого максимуму по всіх інтервалах:

$$W = \min_{1 \leq k \leq n-1} (J_{[x_k, x_{k+1}]}(C)) = \min_{1 \leq k \leq n-1} (\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - Sp_k(x, C)|).$$

Отримуємо матрицю W , яка і представляє собою шукану матрицю параметрів $C_k^+, C_{k+1}^-, k = \overline{1, n-1}$.

Висновки. В роботі запропоноване найкраще наближення функції однієї змінної з розривами першого роду розривним лінійним сплайном. В подальшому планується узагальнити цей метод на випадок, коли вузли сплайна не співпадають з точками розриву функції $f(x)$.

1. Сергієнко І.В. Теорія розривних сплайнів та її застосування в комп'ютерній томографії: монографія / І.В.Сергієнко, В.К. Задірака, О.М.Литвин, Ю.І. Першина – К. : Наук. думка, 2017. – 314 с