



Міністерство освіти і науки України  
УКРАЇНСЬКА ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ  
Кафедра інформаційних комп'ютерних технологій і математики

# ТЕХНОЛОГІЇ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

*Методичні вказівки  
до лабораторних робіт*

*Для магістрів денної та заочної форм навчання  
спеціальності 113"Прикладна математика"*

Харків

2019

Міністерство освіти і науки України  
УКРАЇНСЬКА ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ  
Кафедра інформаційних комп'ютерних технологій і математики

# ТЕХНОЛОГІЇ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

*Методичні вказівки  
до лабораторних робіт*

*Для магістрів денної та заочної форм навчання  
спеціальності 113 "Прикладна математика"*

Затверджено  
Науково-методичною радою  
Української інженерно-  
педагогічної академії  
протокол № 9  
від 24.04.19р.

Харків  
2019

УДК 004.42:51(075.5)

Технології чисельного моделювання: метод. вказівки до лабораторних робіт для магістрів денної та заочної форм навчання спеціальності 113"Прикладна математика". / Укр. інж.-пед. акад. ; упоряд.: О. П. Нечуйвітер, Ю. І. Першина. – Харків : [б. в.], 2019. –48 с.

Дані методичні вказівки містять основні теоретичні та практичні відомості для виконання лабораторного практикуму з дисципліни "Технології чисельного моделювання"; докладне розв'язування з його реалізацією в системі MathCad типових прикладів та завдання для лабораторних робіт; може бути використаний аспірантами, магістрами та спеціалістами всіх інженерних та інженерно-педагогічних спеціальностей

Рецензент: О. М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, проф

Відповідальний за випуск: Ю.І. Першина, д-р фіз.-мат. наук, доц.

© Першина Ю. І., Нечуйвітер О. П., упорядкування, 2019

© УПА, 2019

## Зміст

Лабораторна робота №1 .....	5
«Наближене обчислення визначеного інтегралу від функції однієї змінної».....	5
Лабораторна робота №2 .....	15
«Наближене обчислення подвійного інтегралу по області D від функції двох змінних» ...	15
Лабораторна робота №3 .....	26
«Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)».....	26
Лабораторна робота №4 .....	37
Розв'язання задачі Коші для систем лінійних диференціальних рівнянь.....	37
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .....	46

## Лабораторна робота №1

### «Наближене обчислення визначеного інтегралу від функції однієї змінної»

Мета роботи: навчитися обчислювати визначений інтеграл на основі заданих значень підінтегральної функції різними чисельними методами (квадратурні формули середніх прямокутників, трапецій, Гаусса та Сімпсона); ознайомитися із правилом вибору методу інтегрування та програмною реалізацією методів обчислення визначених інтегралів від функції однієї змінної; отримати досвід практичної реалізації квадратурних формул на ПЕОМ.

Для виконання лабораторної роботи № 3 студент повинен знати:

- 1) мету і зміст запропонованої роботи, порядок її виконання;
- 2) постановку задачі про наближене обчислення визначеного інтегралу від функції, заданої експериментально;
- 3) етапи побудови квадратурних формул;
- 4) квадратурні формули середніх прямокутників, трапецій, Гаусса та Сімпсона;
- 5) формули, за якими обчислюється похибка визначеного інтегралу, обчисленого за квадратурними формулами середніх прямокутників, трапецій, Гаусса та Сімпсона.

Студент зобов'язаний вміти:

- 1) проводити ручні розрахунки зі складання квадратурних формул для наближеного обчислення визначеного інтегралу від функції однієї змінної;
- 2) здійснювати програмну реалізацію задачі на основі використання системи комп'ютерної математики Mathcad;
- 3) аналізувати отримані результати.

### ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ №1

#### Розрахунково-практична частина

1. Побудувати квадратурні формули середніх прямокутників  $I_1$ , трапецій  $I_2$ , Сімпсона  $I_3$  та формулу Гаусса  $I_4$  для наближеного обчислення визначеного інтегралу в межах від  $a$  до  $b$  від функції однієї змінної, поділивши відрізок інтегрування на 6 частин, за даними таблиці 3.2.
2. Знайти похибки обчислення визначеного інтегралу та зробити висновок, яка квадратурна формула обчислює визначений інтеграл найгірше і найкраще.

Обчислювальна частина за допомогою ПЕОМ

1. Використовуючи програму в системі Mathcad, знайти наближене значення визначеного інтегралу в межах від  $a$  до  $b$  функції однієї змінної  $y = f(x)$  за даними таблиці 3.1, поділивши відрізок інтегрування на 6 частин за допомогою квадратурних формул середніх прямокутників, трапецій, Сімпсона та Гаусса.

2. Користуючись таблицею 1.1 знайти точне значення визначеного інтегралу. Знайти похибки обчислення визначеного інтегралу від функції, що задана своїми значеннями, за допомогою наведених вище квадратурних, та зробити висновок, яка квадратурна формула обчислює визначений інтеграл найгірше і найкраще.

3. Написати звіт по виконаній роботі.

Таблиця 1.1

Варіант	Підінтегральна функція $f(x)$	Інтервал інтегрування $[a, b]$	Первісна функція $F(x)$
1.	$x^2 \sin x$	$[0; 0,6]$	$2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x$
2.	$\frac{\ln^3 x}{x}$	$[1; 2, 2]$	$\frac{1}{4} \ln^4 x$
3.	$e^{2x} \sin x$	$[0; 0,6]$	$\frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x)$
4.	$x^2 \cos 4x$	$[0; 1, 2]$	$\frac{x^2 \sin 4x}{4} + \frac{x \cos 4x}{8} + \frac{\sin 4x}{32}$
5.	$\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$	$[1; 1, 2]$	$\cos \frac{1}{x}$
6.	$x 3^x$	$[2; 4, 4]$	$\frac{x 3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3}$
7.	$\frac{1}{x^2 + 4x + 7}$	$[-2; 0, 4]$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{3}}$
8.	$\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$	$[0, 4; 1]$	$\sqrt{4-x^2} - 2 \ln \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$
9.	$x e^{0,5x}$	$[1; 2, 2]$	$2 e^{0,5x} (x - 2)$
10.	$x \cos 2x$	$[0; 1, 2]$	$\frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4}$
11.	$e^{-2x} \cos x$	$[0; 0, 6]$	$\frac{1}{5} e^{-2x} (\sin x - 2 \cos x)$
12.	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$	$[0, 4; 1]$	$-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \operatorname{arc} \sin x$

13.	$\frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$	[2;2,6]	$-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
14.	$x^2 \ln x$	[1;1,6]	$\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$
15.	$\frac{x}{\sin^2 3x}$	[0,4;1]	$-\frac{x}{3} \operatorname{ctg} 3x + \frac{1}{9} \ln \sin 3x$
16.	$x^2 \sin x$	[2;2,6]	$2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x$
17.	$\frac{\ln^3 x}{x}$	[1,6;2,2]	$\frac{1}{4} \ln^4 x$
18.	$e^{2x} \sin x$	[-1;-0,4]	$\frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x)$
19.	$x^2 \cos 4x$	[0;0,6]	$\frac{x^2 \sin 4x}{4} + \frac{x \cos 4x}{8} - \frac{\sin 4x}{32}$
20.	$\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$	[1,6;2,2]	$\cos \frac{1}{x}$
21.	$x 3^x$	[0;0,6]	$\frac{x 3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3}$
22.	$\frac{1}{x^2 + 4x + 7}$	[-2;-1,4]	$\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{3}}$
23.	$\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$	[1,4;2]	$\sqrt{4-x^2} - 2 \ln \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$
24.	$x e^{0,5x}$	[-1;-0,4]	$2e^{0,5x} (x-2)$
25.	$x \cos 2x$	[0,6;1,2]	$\frac{x^2 \sin 4x}{4} + \frac{x \cos 4x}{8} - \frac{\sin 4x}{32}$
26.	$e^{-2x} \cos x$	[1;1,6]	$\frac{1}{5} e^{-2x} (\sin x - 2 \cos x)$
27.	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$	[0,6;1,2]	$-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \operatorname{arc} \sin x$
28.	$\frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$	[3;3,6]	$-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
29.	$x^2 \ln x$	[4;4,6]	$\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$
30.	$\frac{x}{\sin^2 3x}$	[-0,8;-0,2]	$-\frac{x}{3} \operatorname{ctg} 3x + \frac{1}{9} \ln \sin 3x$

Для обчислення визначеного інтегралу за формулою Гаусса з різними  $n$  потрібні вузли та вагові коефіцієнти можна взяти з наступної таблиці.

Таблиця 1.2. Вузли і вагові коефіцієнти формули Гаусса.

$x_1^{(1)} = 0$	$n=1$	$A_1^{(1)} = 2$
$x_2^{(2)} = -x_1^{(2)} = 0,5773502691$	$n=2$	$A_1^{(2)} = A_2^{(2)} = 1$
$x_2^{(3)} = 0$ $x_3^{(3)} = -x_1^{(3)} = 0,7745966692$	$n=3$	$A_2^{(3)} = 0,8888888889$ $A_1^{(3)} = A_3^{(3)} = 0,5555555556$
$x_3^{(4)} = -x_2^{(4)} = 0,3399810436$ $x_4^{(4)} = -x_1^{(4)} = 0,8611363116$	$n=4$	$A_2^{(4)} = A_3^{(4)} = 0,6521451549$ $A_1^{(4)} = A_4^{(4)} = 0,3478548451$
$x_3^{(5)} = 0$ $x_4^{(5)} = -x_2^{(5)} = 0,5384693101$ $x_5^{(5)} = -x_1^{(5)} = 0,9061798459$	$n=5$	$A_3^{(5)} = 0,5688888889$ $A_2^{(5)} = A_4^{(5)} = 0,4786286705$ $A_1^{(5)} = A_5^{(5)} = 0,2369268850$
$x_4^{(6)} = -x_3^{(6)} = 0,2386191861$ $x_5^{(6)} = -x_2^{(6)} = 0,6612093864$ $x_6^{(6)} = -x_1^{(6)} = 0,9324695142$	$n=6$	$A_3^{(6)} = A_4^{(6)} = 0,4679139346$ $A_2^{(6)} = A_5^{(6)} = 0,3607615730$ $A_1^{(6)} = A_6^{(6)} = 0,1713244923$
$x_4^{(7)} = 0$ $x_5^{(7)} = -x_3^{(7)} = 0,4058451513$ $x_6^{(7)} = -x_2^{(7)} = 0,7415311856$ $x_7^{(7)} = -x_1^{(7)} = 0,9491079123$	$n=7$	$A_4^{(7)} = 0,4179591837$ $A_3^{(7)} = A_5^{(7)} = 0,3818300505$ $A_2^{(7)} = A_6^{(7)} = 0,2797053914$ $A_1^{(7)} = A_7^{(7)} = 0,1294849662$
$x_5^{(8)} = -x_4^{(8)} = 0,1834346425$ $x_6^{(8)} = -x_3^{(8)} = 0,5255324100$ $x_7^{(8)} = -x_2^{(8)} = 0,7966664774$ $x_8^{(8)} = -x_1^{(8)} = 0,9602898564$	$n=8$	$A_4^{(8)} = A_5^{(8)} = 0,3626837834$ $A_3^{(8)} = A_6^{(8)} = 0,3137066459$ $A_2^{(8)} = A_7^{(8)} = 0,2223810345$ $A_1^{(8)} = A_8^{(8)} = 0,1012285363$
$x_5^{(9)} = 0$ $x_6^{(9)} = -x_4^{(9)} = 0,3242534234$ $x_7^{(9)} = -x_3^{(9)} = 0,6133714327$	$n=9$	$A_5^{(9)} = 0,3302393550$ $A_4^{(9)} = A_6^{(9)} = 0,3123470770$ $A_3^{(9)} = A_7^{(9)} = 0,2606106964$



$x_8^{(9)} = -x_2^{(9)} = 0,8360311073$		$A_2^{(9)} = A_8^{(9)} = 0,1806481607$
$x_9^{(9)} = -x_1^{(9)} = 0,9681602395$		$A_1^{(9)} = A_9^{(9)} = 0,0812743884$

## ЗРАЗОК ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

### Розрахунково-практична частина

Завдання. Побудувати квадратурні формули середніх прямокутників  $I1$ , трапецій  $I2$ , Сімпсона  $I3$  та формулу Гаусса  $I4$  для наближеного обчислення визначеного інтегралу в межах від  $a$  до  $b$  від функції однієї змінної, поділивши відрізок інтегрування на 6 частин, за даними таблиці 1.3.

Таблиця 1.3

Підінтегральна функція $f(x)$	Інтервал інтегрування $[a, b]$	Первісна функція $F(x)$
$x\sqrt{x^2 + 4}$	$[0; 1.2]$	$\frac{(x^2 + 4)^{\frac{3}{2}}}{3}$

Знайти похибки обчислення визначеного інтегралу.

Розв'язування. Побудуємо квадратурну формулу середніх прямокутників. Візьмемо  $n = 6$  і знайдемо значення підінтегральної функції у вузлах  $x_k = a + (2k - 1)\frac{h}{2}$ ,  $k = 1, \dots, 6$ ;  $h = \frac{1.2 - 0}{6} = 0.2$ ,  $a = 0$  (див. табл. 1.3).

Таблиця 1.3

$k$	$x_k$	$f(x_k)$
1	0,1	0,2002
2	0,3	0,6067
3	0,5	1,0308
4	0,7	1,4833
5	0,9	1,9739
6	1,1	2,5108
		$s = 7,8057$

Згідно з формулою середніх прямокутників

$$\int_0^{1.2} x\sqrt{x^2 + 4} dx \approx h \sum_{k=1}^6 f(x_k) = 0.2 \cdot 7,8057 = 1.56114 \approx 1.5611.$$

Тепер обчислимо інтеграл за допомогою квадратурної формули трапецій. Знайдемо значення підінтегральної функції  $y_i$  у вузлах  $x_i = a + \frac{b-a}{n}i, i = \overline{0, n}$ , тобто  $x_i = 0 + \frac{1.2-0}{6} \cdot i, i = \overline{0, 6}$  (див. табл. 1.4)

Таблиця 1.4

$i$	$x_i$	$y_i$	$i$	$x_i$	$y_i$
0	0,0	0,0000	4	0,8	1,7233
1	0,2	0,4020	5	1,0	2,2361
2	0,4	0,8158	6	1,2	2,7989
3	0,6	1,2528			

Згідно з формулою трапецій

$$\int_0^{1.2} x\sqrt{x^2+4}dx \approx \frac{1.2-0}{6} \cdot \left( \frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^5 y_i + \frac{y_6}{2} \right) =$$

$$0.2 \cdot \left[ \frac{0}{2} + 0.4020 + 0.8158 + 1.2528 + 1.723 + 2.2361 + \frac{2.2789}{2} \right] = 1.56589 \approx 1.5659.$$

Тепер використаємо для обчислення заданого визначеного інтегралу формулу Сімпсона.

Використаємо дані з таблиці 1.4. Тоді, згідно з формулою Сімпсона маємо

$$\int_0^{1.2} x\sqrt{x^2+4}dx \approx \frac{1.2-0}{18} (f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)) + 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6))) =$$

$$= 1.56271 \approx 1.5627.$$

І, останнім кроком, обчислимо заданий інтеграл, використовуючи квадратурну формулу Гаусса.

$$\int_0^{1.2} x\sqrt{x^2+4}dx \approx \frac{1.2-0}{2} \cdot \sum_{k=1}^5 A_k f(x_k),$$

де  $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i = 0.6 + 0.6t_i$

Значення  $t_i, x_i, A_i, f(x_i), i = \overline{1,5}$  наведені в таблиці 3.5.

Користуючись квадратурною формулою Гаусса, дістаємо

$$\int_0^{1.2} x\sqrt{x^2+4}dx \approx 0.6 \cdot 2.6045 = 1.5627.$$

Таблиця 1.5

$i$	$t_i$	$x_i$	$f(x_i)$	$A_i$	$A_i f(x_i)$
1	-0,906180	0,0563	0,1126	0,236927	0,0267
2	-0,538470	0,2769	0,5591	0,478629	0,2676
3	0	0,6000	1,2528	0,568889	0,7127
4	0,538470	0,9231	2,0333	0,478629	0,9732
5	0,906180	1,1437	2,6350	0,236927	0,6243

$s = 2,6045$

Обчислимо абсолютні похибки формул чисельного інтегрування, наведених вище.

Обчислимо абсолютні похибки формул чисельного інтегрування функції за формулою  $\Delta = |I^* - I|$ ; тут  $I^*$  – це точне значення інтеграла, а  $I$  – значення інтеграла, отримане в результаті застосування певної формули інтегрування.

Згідно табл. 3.3 точне значення інтеграла дорівнює

$$I^* = \frac{(x^2 + 4)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^{1.2} = \frac{1}{3} (\sqrt{5.44^3} - \sqrt{4^3}) = \frac{12.6882 - 8}{3} = 1.5627$$

Отже, абсолютні похибки наближення рівні:

$$\Delta_{np} = |1,5627 - 1,5611| = 0,0016, \quad \Delta_{mp} = |1,5627 - 1,5659| = 0,0032,$$

$$\Delta_{\text{Сімпсона}} = |1,5627 - 1,5627| = 0,0000, \quad \Delta_{\text{Гаусса}} = |1,5627 - 1,5627| = 0,0000.$$

Якщо необхідні значення функції обчислювати з більшою кількістю знаків після коми, то похибка наближення даного інтеграла за формулою Сімпсона буде  $7 \cdot 10^{-6}$ , а за формулою Гаусса  $9 \cdot 10^{-7}$ .

Висновок: квадратурна формула Гаусса дає найточніший результат в порівнянні з іншими формулами при обчисленні даного інтеграла.

## Розрахункова частина за допомогою ПЕОМ

## Чисельне інтегрування функцій однієї змінної

Знайдемо наближене значення визначеного інтегралу в межах від  $a=0$  до  $b=1,2$  від функції  $f(x)=x \cdot (x^2+4)^{0.5}$  за формулами середніх прямокутників, трапецій та Сімпсона, поділивши відрізок інтегрування на 6 частин, та за формулою Гаусса з п'ятьма вузлами.

### Формула середніх прямокутників

$$a := 0 \quad b := 1.2 \quad n := 6$$
$$f(x) := x \cdot \sqrt{x^2 + 4} \quad h := \frac{b - a}{n}$$

$$I1 := \frac{b - a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{2k-1}{2} \cdot h\right)$$

I1 = 1.5611

### Формула трапецій

$$I2 := \frac{b - a}{n} \cdot \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k \cdot h) \right)$$

I2 = 1.5659

### Формула Сімпсона

$$I3 := \frac{b - a}{3n} \cdot \left[ f(a) + 4 \cdot \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} f[a + (2k-1) \cdot h] + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f(a + 2k \cdot h) + f(b) \right]$$

I3 = 1.5627

### Формула Гаусса

Обчислимо заданий визначений інтеграл за формулою Гаусса з п'ятьма вузлами ( $n=5$ ).

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad n := 5$$

Для того, щоб скористатися формулою Гаусса введемо спочатку вузли  $t$  і вагові коефіцієнти  $A_i$

$$t := \begin{pmatrix} -0.906180 \\ -0.538470 \\ 0 \\ 0.538470 \\ 0.906180 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 0.236927 \\ 0.478629 \\ 0.568889 \\ 0.478629 \\ 0.236927 \end{pmatrix}$$

$$I_4 := \frac{b-a}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \left( A_i \cdot f \left( \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot t_i \right) \right)$$

$$I_4 = 1.5627$$

Обчислимо точне значення інтегралу

$$F(x) := \frac{(x^2 + 4)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$I_t := F(b) - F(a)$$

$$I_t = 1.5627$$

Враховуючи це, знайдемо абсолютні похибки наближених значень інтеграла, отриманих за наведеними формулами.

$$\Delta_1 := |I_1 - I_t|$$

$$\Delta_2 := |I_2 - I_t|$$

$$\Delta_3 := |I_3 - I_t|$$

$$\Delta_4 := |I_4 - I_t|$$

$$\Delta_1 = 0.0016$$

$$\Delta_2 = 0.0032$$

$$\Delta_3 = 7.2568 \times 10^{-6}$$

$$\Delta_4 = 8.5988 \times 10^{-7}$$

Порівнюючи отримані результати, робимо висновок, що в заданому прикладі найгірша точність результату, отриманого за формулою трапецій, а найменшу похибку дала формула Сімпсона.

## Лабораторна робота №2

### «Наближене обчислення подвійного інтегралу по області D від функції двох змінних»

Мета роботи: навчитися обчислювати подвійний інтеграл по області D на основі заданих значень підінтегральної функції від двох змінних різними чисельними методами (кубатурні формули центральних прямокутників, Сімпсона, Гаусса та мішана кубатурна формула центральних прямокутників); ознайомитися із правилом вибору методу інтегрування та програмною реалізацією методів обчислення подвійних інтегралів по області D від функції двох змінних; отримати досвід практичної реалізації кубатурних формул на ПЕОМ.

Для виконання лабораторної роботи № 4 студент повинен знати:

- 1) мету і зміст запропонованої роботи, порядок її виконання;
- 2) постановку задачі про наближене обчислення подвійного інтегралу по області D від функції двох змінних, заданої експериментально;
- 3) етапи побудови кубатурних формул;
- 4) кубатурні формули центральних прямокутників, Сімпсона, Гаусса та мішана кубатурна формула центральних прямокутників;

Студент зобов'язаний вміти:

- 1) проводити ручні розрахунки зі складання кубатурних формул для наближеного обчислення подвійного інтегралу по області D від функції двох змінних;
- 2) здійснювати програмну реалізацію задачі на основі використання системи комп'ютерної математики Mathcad;
- 3) аналізувати отримані результати.

## ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ №2

### Розрахунково-практична частина

1. Знайти наближене значення подвійного інтегралу  $\iint_D f(x,y)dx dy$ ,

$D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , використовуючи:

- а) кубатурні формули центральних прямокутників  $II1$  та формулу Сімпсона  $II2$ , розбивши відрізок інтегрування  $[a,b]$  на 4 частини та  $[c,d]$  на 2 частини;
- б) кубатурну формулу Гаусса  $II3$  з чотирма вузлами по осі OX та двома вузлами по OY.
- в) мішану кубатурну формулу центральних прямокутників  $II4$ ,  $II2$ , розбивши відрізок інтегрування  $[a,b]$  на 4 частини та  $[c,d]$  на 2 частини;

2. Знайти похибки обчислення подвійного інтегралу та зробити висновок, яка кубатурна формула обчислює подвійний інтеграл найгірше і найкраще.

### Обчислювальна частина за допомогою ПЕОМ

1. Використовуючи програму в системі Mathcad, знайти наближене значення визначеного інтегралу  $\iint_D f(x, y) dx dy$ ,  $D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  в межах від  $a$  до  $b$  функції однієї змінної  $y = f(x)$  за даними таблиці 2.1, розбивши відрізок інтегрування  $[a, b]$  на 4 частини та  $[c, d]$  на 2 частини за допомогою кубатурних формул центральних прямокутників, Сімпсона, гамма та мішаної формули центральних прямокутників.
2. Користуючись таблицею 2.1 знайти точне значення подвійного інтегралу. Знайти похибки обчислення подвійного інтегралу від функції, що задана своїми значеннями, за допомогою наведених вище кубатурних формул, та зробити висновок, яка кубатурна формула обчислює подвійний інтеграл найгірше і найкраще.
3. Написати звіт по виконаній роботі.

Таблиця 2.1

Варіант	Підінтегральна функція $f(x, y)$	Інтервал інтегрування $[a, b] \times [c, d]$	Точне значення ( $I_{It}$ )
1.	$y^2 \sin x$	$\left[0; \frac{\pi}{4}\right] \times [0, 0.6]$	0,012204
2.	$e^{x+y}$	$[0; 1] \times [0, 1]$	2,95492
3.	$e^x \cdot y$	$[0; 0.8] \times [0, 1.2]$	0,882389
4.	$x^2 + y$	$[0; 0.5] \times [1, 1.5]$	0,3333333
5.	$\cos(x - y)$	$\left[0; \frac{\pi}{4}\right] \times \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$	0,607206
6.	$\frac{x}{y^2 + 1}$	$[0; 0.6] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$	0,119839
7.	$e^{2x} \cos(y)$	$[0; 1] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$	2,258872
8.	$\frac{x}{\sin^2 y}$	$[0; 6] \times \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$	0,138177
9.	$x^2 y + x$	$[0; 0.6] \times [0, 0.2]$	0,16704



10.	$\sin(2x + y)$	$\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$	0,292893
11.	$e^{x-2y}$	$[0; 0.5] \times [0, 1]$	0,280463
12.	$\frac{x^2}{\sin^2 y}$	$[0; 0.5] \times \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$	-0,017610
13.	$x \cdot \arctg(y)$	$[0; 1] \times [0, 0.6]$	0,085255
14.	$x^2 \cdot \cos(y)$	$[0; 0.2] \times \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$	0,001886
15.	$\frac{y}{x^2 + 4x + 7}$	$[0; 0.8] \times [0, 1.2]$	0,066406
16.	$\frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{y}}$	$[1; 1.6] \times [0.2, 1]$	0,4145560
17.	$x^2 \ln y$	$[0; 0.8] \times [0.5, 1]$	-0,026185
18.	$e^{2x} \sin y$	$[-1; 0] \times \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$	0,216166
19.	$x^3 \cos(4x)$	$[0; 0.5] \times [0, 0.9]$	-0,001729
20.	$y \cos(2x)$	$[0; 1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	0,560900
21.	$e^{2x-y}$	$[0; 1] \times [0, 1.3]$	2,323918
22.	$\sin(1 - x - y)$	$[0; 1.6] \times [0.2, 1.5]$	-1,050928
23.	$\ln(x + y)$	$[0.1; 0.8] \times [0.2, 1.5]$	0,182261
24.	$y \sin(3x)$	$[0; 1] \times [0.2, 0.6]$	0,106133
25.	$e^{5x-y}$	$[0; 1] \times [0; 1]$	18,636578
26.	$\sin(y - 4x)$	$\left[0; \frac{\pi}{4}\right] \times \left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$	0,250000
27.	$\frac{x}{1 + y^2}$	$[0; 0.5] \times \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$	0,022928
28.	$\frac{x^2}{\sqrt{1 - y^2}}$	$[0; 0.5] \times [0.1; 0.8]$	0,034464
29.	$2x^2 \cos(3y)$	$[0; 0.5] \times [0.1; 0.8]$	0,010554
30.	$\ln(3x + 1 + y)$	$[0.2; 0.5] \times [0.1; 1]$	0,255225

## ЗРАЗОК ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

### Розрахунково-практична частина

Завдання. Знайти наближене значення подвійного інтегралу  $\iint_D \cos(x+y) dx dy$ , де область  $D$  – прямокутник, використовуючи кубатурні формули центральних прямокутників *II1* та формулу Сімпсона *II2*, розбивши відрізок інтегрування  $[a,b]$  на 4 частини та  $[c,d]$  на 2 частини; кубатурну формулу Гаусса *II3* з чотирма вузлами по осі  $OX$  та двома узлами по  $OY$ . Порівняти отримані результати з точним значенням заданого інтегралу, яке дорівнює  $-0,41421356$ .

Розв'язування.  $n_x = 4, n_y = 2$ .

Спочатку скористаємося кубатурною формулою центральних прямокутників

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y) dx dy &\approx J_{n_0}(f) = h_x h_y \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m f(\xi_i, \eta_k) = \\ &= \frac{b-a}{n} \frac{d-c}{m} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m f\left(a + \frac{2i-1}{2} h_x, c + \frac{2k-1}{2} h_y\right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Обчислимо вузли інтегрування:

$$h_x = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{4} = \frac{\pi}{8}, \quad h_y = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}, \quad X_i = a + \frac{2i-1}{2} h_x, \quad Y_k = c + \frac{2k-1}{2} h_y,$$

$$X = \begin{pmatrix} 0.1963 \\ 0.589 \\ 0.9817 \\ 1.3744 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0.9817 \\ 1.3744 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо значення функції  $f(X_i, Y_k)$ ,  $i = \overline{1,4}$ ,  $k = \overline{1,2}$ . (табл. 4.2)

Таблиця 2.2

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
$Y_1$	0,3827	0	-0,3827	-0,7071
$Y_2$	0	-0,3827	-0,7071	-0,9239

$S = -2.7208$
---------------

За формулою (2.1) маємо

$$I_1 = \iint_D f(x, y) dx dy \approx$$

$$\frac{\pi}{8} \cdot \frac{\pi}{8} \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^2 f\left(0 + \frac{2i-1}{2} \cdot \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4} + \frac{2k-1}{2} \cdot \frac{\pi}{8}\right) = 0.1542 \cdot (-0.2708) = -0.4196.$$

Тепер для обчислення подвійного інтегралу скористаємося формулою Сімпсона. Обчислимо вузли інтегрування:

$$x_0 = a = 0, x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{\pi}{4}, x_3 = \frac{3\pi}{8}, x_4 = b = \frac{\pi}{2};$$

$$y_0 = c = \frac{\pi}{4}, y_1 = \frac{3\pi}{8}, y_2 = d = \frac{\pi}{2}.$$

Треба обчислити наступний інтеграл

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y) dy.$$

Позначимо  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y) dy = F(x)$ . Тоді  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x) dx$ .

і, застосовуючи формулу Сімпсона по змінній  $x$  при  $n_x = 4$ , маємо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x) dx \approx \frac{\pi}{4} [F(x_0) + 4F(x_1) + 2F(x_2) + 4F(x_3) + F(x_4)].$$

Отже,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y) dy \approx \frac{\pi}{24} [F(x_0) + 4F(x_1) + 2F(x_2) + 4F(x_3) + F(x_4)]. \quad (2.2)$$

Інтеграл  $F(x_i) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x_i + y) dy, i = \overline{0,4}$  обчислимо наближено за

формулою Сімпсона по змінній  $y$  при  $n_y = 2$ . Послідовно отримуємо:

$$F(x_0) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x_0 + y) dy \approx \frac{\pi}{24} [\cos(0 + y_0) + 4\cos(0 + y_1) + \cos(0 + y_2)] =$$

$$= \frac{\pi}{24} \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{\pi}{24} \cdot 2.237841;$$

$$F(x_1) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x_1 + y) dy \approx \frac{\pi}{24} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{8} + y_0\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{8} + y_1\right) + \cos\left(\frac{\pi}{8} + y_2\right) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{24} \left( \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) \right) = 0;$$

$$F(x_2) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x_2 + y) dy \approx \frac{\pi}{24} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + y_0\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{4} + y_1\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + y_2\right) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{24} \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) = \frac{\pi}{24} \cdot (-2.237841);$$

$$F(x_3) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x_3 + y) dy \approx \frac{\pi}{24} \left[ \cos\left(\frac{3\pi}{8} + y_0\right) + 4\cos\left(\frac{3\pi}{8} + y_1\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8} + y_2\right) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{24} \left( \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + 4\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) \right) = \frac{\pi}{24} \cdot (-4.134990);$$

$$F(x_4) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x_4 + y) dy \approx \frac{\pi}{24} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} + y_0\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + y_1\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + y_2\right) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{24} \left( \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 4\cos\left(\frac{7\pi}{24}\right) + \cos(\pi) \right) = \frac{\pi}{24} \cdot (-5.402625).$$

Підставляючи значення  $F_i, i = \overline{0,4}$  у формулу (4.2), отримуємо

$$\begin{aligned} II2 \approx \left( \frac{\pi}{24} \right)^2 (2.237841 + 0 + 2(-2.237841) + 4(-4.134990) - \\ - 5.402625) = -0.414325. \end{aligned}$$

Тепер для обчислення подвійного інтегралу використаємо кубатурну формулу Гаусса.

$$I_3 = \iint_D f(x, y) dx dy \approx \frac{b-a}{2} \frac{d-c}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^2 q_i r_k f(\xi_i, \eta_k),$$

$$\text{де } \xi_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} q_i = 0.7854 + 0.7854 q_i, \quad \eta_k = \frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{2} r_k = 1.1781 + 0.3927 r_k.$$

Значення  $\xi_i, q_i, \eta_k, r_k, i = \overline{1,4}, k = \overline{1,2}$  наведені в таблиці 3.1.

$$\xi = \begin{pmatrix} -0.861136 \\ -0.339981 \\ 0.339981 \\ 0.861136 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 0.347854 \\ 0.652145 \\ 0.652145 \\ 0.347854 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} -0.577350 \\ 0.577350 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Значення виразу  $q_i r_k f(\xi_i, \eta_k), i = \overline{1,4}, k = \overline{1,2}$  наведені в таблиці 2.3

Таблиця 2.3

		$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$
		$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$
$\eta_1$	$r_1$	0,1699	0,0658	-0,2736	-0,2596
$\eta_2$	$r_2$	0,0198	-0,2251	-0,5053	-0,3348
					$S = -1.3429$

Користуючись кубатурною формулою Гаусса, дістаємо

$$I_3 \approx \frac{\pi^2}{32} \cdot (-1.3429) = -0.4142.$$

Згідно заданим даним, точне значення інтегралу: -0,41421356.

Обчислимо абсолютні похибки формул чисельного інтегрування, наведених вище.

Обчислимо абсолютні похибки формул чисельного інтегрування функції за формулою  $\Delta = |I^* - I|$ ; тут  $I^*$  – це точне значення інтеграла, а  $I$  – значення інтеграла, отримане в результаті застосування певної формули інтегрування.

Отже, абсолютні похибки наближення рівні:

$$\Delta_{np} = |-0.4142 + 0.4196| = 0,0054, \quad \Delta_{\text{сiмсона}} = |-0.4142 + 0.4143| = 0,0001$$
$$\Delta_{\text{Гаусса}} = |-0.4142 + 0.4142| = 0.$$

Висновок: кубатурна формула Гаусса дає найточніший результат в порівнянні з іншими формулами при обчисленні даного інтеграла.

**Чисельне інтегрування функцій двох змінних**

Знайдемо наближене значення подвійного інтегралу по області D - прямокутник x змінюється від 0 до  $\pi/2$ , y змінюється від  $\pi/4$  до  $\pi/2$  від функції  $f(x,y)=\cos(x+y)$

$$\begin{aligned} nx &:= 4 & ny &:= 2 \\ a &:= 0 & b &:= \frac{\pi}{2} \\ c &:= \frac{\pi}{4} & d &:= \frac{\pi}{2} \\ f(x,y) &:= \cos(x+y) \end{aligned}$$

**Кубатурна формула центральних прямокутників**

$$\begin{aligned} h_x &:= \frac{b-a}{nx} & h_y &:= \frac{d-c}{ny} \\ h_x &= 0.3927 & h_y &= 0.3927 \end{aligned}$$

$$I := \frac{b-a}{nx} \cdot \frac{d-c}{ny} \cdot \sum_{i=1}^{nx} \sum_{k=1}^{ny} f\left(a + \frac{2i-1}{2} \cdot h_x, c + \frac{2k-1}{2} \cdot h_y\right)$$

$I = -0.4196$

**Формула Сімпсона**

Обчислимо вузли інтегрування:

$$\begin{aligned} i &:= 0..nx & j &:= 0..ny \\ X_i &:= a + i \cdot h_x & Y_j &:= c + (j) \cdot h_y \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3927 \\ 0.7854 \\ 1.1781 \\ 1.5708 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0.7854 \\ 1.1781 \\ 1.5708 \end{pmatrix}$$

$$I(x) := \frac{d-c}{3ny} \cdot \left[ f(x,c) + 4 \cdot \sum_{j=1}^{\frac{ny}{2}} f[x, c + (2j-1) \cdot h_y] + f(x,b) \right]$$

$$I(X_i) =$$

0.2929
0
-0.2929
-0.5413
-0.7072

$$\Pi_2 := \frac{b-a}{3nx} \left[ I(a) + 4 \cdot \sum_{k=1}^{\frac{nx}{2}} I[a + (2k-1) \cdot hx] + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\frac{nx}{2}-1} I(a + 2k \cdot hx) + I(b) \right]$$

$$\Pi_2 = -0.414325$$

### Формула Гаусса

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$nx := 4$$

$$ny := 2$$

$$\xi := \begin{pmatrix} -0.861136 \\ -0.339981 \\ 0.339981 \\ 0.861136 \end{pmatrix} \quad q := \begin{pmatrix} 0.347854 \\ 0.652145 \\ 0.652145 \\ 0.347854 \end{pmatrix} \quad \eta := \begin{pmatrix} -0.577350 \\ 0.577350 \end{pmatrix} \quad r := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_3 := \frac{b-a}{2} \cdot \frac{d-c}{2} \cdot \sum_{i=1}^{nx} \sum_{k=1}^{ny} \left( q_i \cdot r_k \cdot f\left( \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \xi_i, \frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{2} \cdot \eta_k \right) \right)$$

$$\Pi_3 = -0.414176$$

### Мішана кубатурна формула центральних прямокутників

$$nx := 4$$

$$ny := 2$$

$$S := (b-a) \cdot (d-c) \quad n := 6$$

$$\begin{aligned} \Pi_4 := & \frac{S}{nx \cdot ny^2} \cdot \sum_{k=1}^{nx} \sum_{l=1}^{ny^2} f \left[ a + \frac{k-0.5}{nx} \cdot (b-a), c + \frac{l-0.5}{ny^2} \cdot (d-c) \right] \dots \\ & + \frac{S}{nx^2 \cdot ny} \cdot \sum_{k=1}^{nx^2} \sum_{l=1}^{ny} f \left[ a + \frac{k-0.5}{nx^2} \cdot (b-a), c + \frac{l-0.5}{ny} \cdot (d-c) \right] \dots \\ & + \frac{S \cdot (-1)}{nx \cdot ny} \cdot \sum_{k=1}^{nx} \sum_{l=1}^{ny} f \left[ a + \frac{k-0.5}{nx} \cdot (b-a), c + \frac{l-0.5}{ny} \cdot (d-c) \right] \end{aligned}$$

$$\Pi_4 = -0.41503$$



Зазначимо, що точне значення заданого визначеного інтегралу (з точністю до чотирьох знаків після коми) дорівнює  $-0.4142141356$ . Враховуючи це, знайдемо абсолютні похибки наближених значень інтеграла, отриманих за наведеними формулами.

$$\Pi_t := -0.41421356$$

$$\Delta_1 := |\Pi_1 - \Pi_t| \quad \Delta_2 := |\Pi_2 - \Pi_t| \quad \Delta_3 := |\Pi_3 - \Pi_t| \quad \Delta_4 := |\Pi_4 - \Pi_t|$$

$$\Delta_1 = 0.0054 \quad \Delta_2 = 1.115037 \times 10^{-4} \quad \Delta_3 = 3.7552 \times 10^{-5} \quad \Delta_4 = 8.20646 \times 10^{-4}$$

Порівнюючи отримані результати, робимо висновок, що в заданому прикладі найгірша точність результату, отриманого за формулою центральних прямокутників, а найменшу похибку дала формула Гаусса.

Лабораторна робота №3  
«Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)»

Мета роботи: навчитися розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь прямими методами (матричний метод, правило Крамера, метод Гаусса) та ітераційними методами (метод простої ітерації, метод Зейделя); отримати досвід практичної реалізації вказаних методів на ПЕОМ.

Для виконання лабораторної роботи № 3 студент повинен знати:

- 1) мету і зміст запропонованої роботи, порядок її виконання;
- 2) постановку задачі про розв'язання СЛАР;
- 3) точні методи: матричний метод, правило Крамера, метод Гаусса;
- 4) етапи ітераційних методів: метод простої ітерації, метод Зейделя;
- 5) оцінки ітераційних методів.

Студент зобов'язаний вміти:

- 1) проводити ручні розрахунки згідно точних та ітераційних методів розв'язання СЛАР;
- 2) здійснювати програмну реалізацію задачі на основі використання системи комп'ютерної математики Mathcad;
- 3) аналізувати отримані результати.

### ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ №3

#### Розрахунково-практична частина

1. Розв'язати СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

де коефіцієнти  $a_{ij}, b_i, i, j = \overline{1,3}$  задані таблицею 3.1 методом Гаусса.

2. Розв'язати СЛАР, задану таблицею 3.1, ітераційними методами: методом простої ітерації, методом Зейделя із заданою точністю  $\varepsilon = 0.01$
3. Проаналізувати отримані результати.

#### Обчислювальна частина за допомогою ПЕОМ

1. Використовуючи програму в системі Mathcad знайти розв'язок СЛАР, заданої таблицею 3.1, за допомогою вбудованих функцій:

2. Використовуючи програму в системі Mathcad знайти розв'язок СЛАР, заданої таблицею 5.1, прямими методами: матричним методом, за правилами Крамера, методом Гаусса;

3. Використовуючи програму в системі Mathcad знайти розв'язок СЛАР, заданої таблицею 3.1, ітераційними методами: методом простої ітерації, методом Зейделя із заданою точністю  $\varepsilon = 0.01$ ;

Порівняти отримані результати, та зробити висновок, який метод розв'язує СЛАР краще.

4. Написати звіт по виконаній роботі.

Таблиця 3.1

Номер варіанта	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$b_1$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$b_2$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$b_3$
1	10	2	-1	8	0,5	-20	0,4	10,9	1	2	-25	-25
2	25	-1	-2	50	1	-10	-2	11	3	-2	-20	-2
3	20	3	-1	9	3	40	-0,5	1	2	-1	-25	-24
4	10	-0,5	1	4	2	-20	-1	-39	4	1	-20	4
5	40	1	2	-38,5	1	20	-4	7	1	-2	10	3
6	25	-1	2	0	1	10	-3	-8,5	3	1	10	-6
7	10	1	-1	16	2	-10	1	-7	1	3	20	4,5
8	20	-4	1	8	4	-10	-0,5	-3	2	1	-10	1,5
9	10	1	-1	4	3	20	1	-18,5	2	1	20	0
10	20	2	1	0	1	10	2	3	3	2	10	-9
11	25	-3	-1	-24,5	3	10	2	-4	2	-1	-10	3
12	25	2	-1	49	1	10	-1	-3	3	1	-25	5,5
13	10	1	2	7	3	20	-4	-13	1	1	-10	10
14	25	1	1	-1	1	10	2	6	1	-1	5	-11
15	10	1	-1	4	3	20	1	-18,5	2	1	20	0
16	40	1	1	19	1	40	1	-0,5	2	-1	20	-19
17	10	-5	-1	25	2	-10	1	-4	1	1	-10	4
18	25	1	-1	0	1	25	-5	-20	3	1	10	-11
19	20	5	-2	-15	3	20	1	17	1	1	-10	0
20	10	1	1	0	2	5	1	4	3	1	10	-9
21	20	-3	-1	7	4	-10	2	-8	2	1	-10	2
22	40	3	-1	37	4	10	1	-6	1	1	-20	0
23	25	5	3	47,5	1	10	-1	-3	3	2	-10	5
24	10	-1	2	3	3	20	4	-38	1	1	10	3
25	20	4	-3	15	1	10	1	-3	2	4	-10	-10
26	25	5	-1	19	2	20	-3	-21	1	1	-5	-5
27	10	3	-4	9	3	-15	2	-10	4	-3	-20	-19
28	40	-17	-3	37	2	10	-1	1	1	3	-10	-9
29	20	-3	-2	-22	3	10	-1	-4	1	-5	20	19
30	10	1	-3	-2	1	-20	5	-15	3	7	15	22



## ЗРАЗОК ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

### Розрахунково-практична частина

Завдання 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 20x_1 - 2x_2 + x_3 = 15, \\ -x_1 + 25x_2 + 3x_3 = 46, \\ 2x_1 - 5x_2 - 15x_3 = 7 \end{cases}$$

методом Гаусса.

Розв'язування. Розв'яжемо задану систему методом Гаусса. Знаходимо  $x_3$  з першого рівняння системи:  $x_3 = 15 - 20x_1 + 2x_2$ .

Підставимо його в друге і третє рівняння. Привівши подібні члени, одержимо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} -61x_1 + 31x_2 = 1 \\ 302x_1 - 35x_2 = 232 \end{cases}$$

Тепер знаходимо  $x_2$  з першого рівняння:  $x_2 = \frac{61}{31}x_1 + \frac{1}{31}$ .

Підставивши його значення в друге рівняння, одержимо:  $\frac{7227}{31}x_1 = \frac{7227}{31}$

Звідси знаходимо  $x_1 = 1$ . Тоді  $x_2 = \frac{61}{31} + \frac{1}{31} = 2$ ,  $x_3 = 15 - 20 + 4 = -1$

Таким чином,  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$ .

Завдання 2. Розв'язати СЛАР

$$\begin{cases} 20x_1 - 2x_2 + x_3 = 15, \\ -x_1 + 25x_2 + 3x_3 = 46, \\ 2x_1 - 5x_2 - 15x_3 = 7 \end{cases}$$

ітераційними методами: методом простої ітерації, методом Зейделя із заданою точністю  $\varepsilon = 0.01$

Розв'язання. Спочатку розв'яжемо систему методом простої ітерації. Зведемо систему до вигляду, придатного для ітерацій. Для цього розв'яжемо систему відносно діагональних невідомих. Одержимо систему

$$\begin{cases} x_1 = 0.75 + 0.1x_2 - 0.05x_3 \\ x_2 = 1.84 + 0.04x_1 - 0.15x_3 \\ x_3 = 0.133x_1 - 0.333x_2 - 0.467, \end{cases} \quad (3.1)$$

для якої виконуються умови збіжності ітераційного процесу.

$$\text{Дійсно, } \sum_{j=1}^3 |c_{i1}| = 0.15, \quad \sum_{j=1}^3 |c_{i2}| = 0.16, \quad \sum_{j=1}^3 |c_{3j}| = 0.467.$$

Отже,  $q_0 = \max(0.15, 0.16, 0.467) = 0.467$ .

Ітераційний процес треба закінчити при виконанні умови

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq \frac{1 - q_0}{q_0} \varepsilon = \frac{1 - 0.467}{0.467} \cdot 0.01 = 0.0114 = \varepsilon_1, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (3.2)$$

Візьмемо за початкове наближення розв'язку

$x_1^{(0)} = 0.75, \quad x_2^{(0)} = 1.84, \quad x_3^{(0)} = -0.467$ . Тоді

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0.75 + 0.1 \cdot 1.84 - 0.05 \cdot (-0.467) = 0.957, \\ x_2^{(1)} = 1.84 + 0.04 \cdot 0.75 - 0.12 \cdot (-0.467) = 1.926, \\ x_3^{(1)} = -0.467 + 0.133 \cdot 0.75 - 0.333 \cdot 1.84 = -0.980. \end{cases}$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = |0.957 - 0.75| = 0.207;$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = |1.926 - 1.84| = 0.086;$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = |-0.980 - (-0.467)| = 0.513.$$

$\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(1)} - x_i^{(0)}| = 0.513 > \varepsilon_1$ , отже (3.2) не виконується (потрібна точність ще не досягнута), знаходимо наступне наближення.

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0.75 + 0.1 \cdot 1.926 - 0.05 \cdot (-0.980) = 0.992, \\ x_2^{(2)} = 1.84 + 0.04 \cdot 0.957 - 0.12 \cdot (-0.980) = 1.996, \\ x_3^{(2)} = -0.467 + 0.133 \cdot 0.957 - 0.333 \cdot 1.926 = -0.981. \end{cases}$$

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0.035; \quad |x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = 0.07; \quad |x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = 0.001.$$

$$\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(2)} - x_i^{(1)}| = 0.07 > \varepsilon_1.$$

І знову потрібна точність не досягнута. Знаходимо третє наближення:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0.75 + 0.1 \cdot 1.926 - 0.05 \cdot (-0.981) = 0.999, \\ x_2^{(3)} = 1.84 + 0.04 \cdot 0.992 - 0.12 \cdot (-0.981) = 1.997, \\ x_3^{(3)} = -0.467 + 0.133 \cdot 0.992 - 0.333 \cdot 1.926 = -0.9997 = -1.000. \end{cases}$$

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = 0.007; |x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = 0.001; |x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = 0.019.$$

$$\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(3)} - x_i^{(2)}| = 0.019 > \varepsilon_1.$$

Отже (5.2) не виконується (потрібна точність ще не досягнута), знаходимо наступне наближення.

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 0.75 + 0.1 \cdot 1.997 - 0.05 \cdot (-1.000) = 0.9997 = 1.000, \\ x_2^{(4)} = 1.84 + 0.04 \cdot 0.999 - 0.12 \cdot (-1.000) = 1.9999 = 2.000, \\ x_3^{(4)} = -0.467 + 0.133 \cdot 0.999 - 0.333 \cdot 1.997 = -0.999. \end{cases}$$

$$|x_1^{(4)} - x_1^{(3)}| = 0.001; |x_2^{(4)} - x_2^{(3)}| = 0.003; |x_3^{(4)} - x_3^{(3)}| = 0.001.$$

$$\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(4)} - x_i^{(3)}| = 0.003 < \varepsilon_1.$$

Тепер потрібна точність досягнута. Отже, з точністю до 0,01 можна покласти:  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$ , що збігається з точним розв'язком системи, знайденим в завданні 1.

Тепер розв'яжемо цю ж систему методом Зейделя з точністю  $\varepsilon = 0.01$ .

Розв'язання. Розв'яжемо систему відносно діагональних невідомих. Одержимо систему (3.1), для якої виконуються умови збіжності ітераційного процесу.

За методом Зейделя ітераційний процес треба закінчити при виконанні умови  $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = \varepsilon = 0.01$ .

Візьмемо за початкове наближення розв'язку  $x_1^{(0)} = 0.75, x_2^{(0)} = 1.84, x_3^{(0)} = -0.467$ . Тоді

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0.75 + 0.1 \cdot 1.84 - 0.05 \cdot (-0.467) = 0.957, \\ x_2^{(1)} = 1.84 + 0.04 \cdot 0.957 - 0.12 \cdot (-0.467) = 1.934, \\ x_3^{(1)} = -0.467 + 0.133 \cdot 0.957 - 0.333 \cdot 1.934 = -0.984. \end{cases}$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = |0.957 - 0.75| = 0.207;$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = |1.934 - 1.84| = 0.094;$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = |-0.984 - (-0.467)| = 0.517.$$

$\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(1)} - x_i^{(0)}| = 0.517 > 0.01$ . Оскільки потрібна точність ще не досягнута, знаходимо наступне наближення.

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0.75 + 0.1 \cdot 1.934 - 0.05 \cdot (-0.984) = 0.993, \\ x_2^{(2)} = 1.84 + 0.04 \cdot 0.993 - 0.12 \cdot (-0.984) = 1.998, \\ x_3^{(2)} = -0.467 + 0.133 \cdot 0.993 - 0.333 \cdot 1.998 = -1.000. \end{cases}$$

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0.036; |x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = 0.064; |x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = 0.016.$$

$$\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(2)} - x_i^{(1)}| = 0.064 > 0.01$$

І знову потрібна точність не досягнута. Знаходимо третє наближення:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0.75 + 0.1 \cdot 1.998 - 0.05 \cdot (-1.000) = 0.9998 = 1.000, \\ x_2^{(3)} = 1.84 + 0.04 \cdot 1.000 - 0.12 \cdot (-1.000) = 2.000, \\ x_3^{(3)} = -0.467 + 0.133 \cdot 1.000 - 0.333 \cdot 2.000 = -1.000. \end{cases}$$

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = 0.007; |x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = 0.002; |x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = 0.000.$$

$$\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(3)} - x_i^{(2)}| = 0.007 < 0.01$$

Тепер потрібна точність досягнута. Таким чином, з точністю до 0,01  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$ , що збігається з точним розв'язком.

Порівнюючи застосування різних методів для розв'язування наведеної в прикладах системи, можна сказати, що найкращим є метод Гаусса, а серед ітераційних методів більш ефективним є метод Зейделя, бо він дозволяє знайти розв'язок системи за меншу кількість ітерацій.



## Розрахункова частина за допомогою ПЕОМ

## Розв'язання СЛАР

### Символьне розв'язання СЛАР

Given

$$20 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 = 15$$

$$-1 \cdot x_1 + 25 \cdot x_2 + 3x_3 = 46$$

$$2 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 - 15x_3 = 7$$

$$\text{Find}(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

### Матричний метод

$$A := \begin{pmatrix} 20 & -2 & 1 \\ -1 & 25 & 3 \\ 2 & -5 & -15 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 15 \\ 46 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$x := A^{-1} \cdot B \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

### Метод Гаусса

ORIGIN:= 1

n := 3

m := 3

Сформуємо розширену матрицю

$$Ar := \text{augment}(A, B) \quad Ar = \begin{pmatrix} 20 & -2 & 1 & 15 \\ -1 & 25 & 3 & 46 \\ 2 & -5 & -15 & 7 \end{pmatrix}$$

Приведемо матрицю Ar до ступінчастого вигляду

$$Ag := \text{rref}(Ar) \quad Ag = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Сформуємо стовбець розв'язку системи

$$x := Ag \langle 4 \rangle \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

### Правило Крамера

$$\Delta := \begin{vmatrix} 20 & -2 & 1 \\ -1 & 25 & 3 \\ 2 & -5 & -15 \end{vmatrix} \quad \Delta = -7227 \quad \Delta_1 := \begin{vmatrix} 15 & -2 & 1 \\ 46 & 25 & 3 \\ 7 & -5 & -15 \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = -7227$$

$$\Delta_2 := \begin{vmatrix} 20 & 15 & 1 \\ -1 & 46 & 3 \\ 2 & 7 & -15 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = -14454 \quad \Delta_3 := \begin{vmatrix} 20 & -2 & 15 \\ -1 & 25 & 46 \\ 2 & -5 & 7 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = 7227$$

$$x1 := \frac{\Delta 1}{\Delta} = 1 \qquad x2 := \frac{\Delta 2}{\Delta} = 2 \qquad x3 := \frac{\Delta 3}{\Delta} = -1$$

### Метод простої ітерації

$$i := 1..3 \qquad j := 1..3 \qquad \varepsilon := 0.01$$

$$d_i := \frac{B_i}{A_{i,i}} \qquad C_{i,j} := \frac{-A_{i,j}}{A_{i,i}} \qquad C_{i,i} := 0$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & -0.05 \\ 0.04 & 0 & -0.12 \\ 0.133 & -0.333 & 0 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 1.84 \\ -0.467 \end{pmatrix}$$

Перевіримо виконання умови збіжності ітераційного процесу

$$S1 := \sum_{j=1}^3 |C_{1,j}| \qquad S2 := \sum_{j=1}^3 |C_{2,j}| \qquad S3 := \sum_{j=1}^3 |C_{3,j}|$$

$$S1 = 0.15$$

$$S2 = 0.16$$

$$S3 = 0.467$$

$$q0 := \max(S1, S2, S3)$$

$$q0 = 0.467$$

Оскільки  $q0 < 1$ , то ітераційний процес буде збігатися до єдиного розв'язку незалежно від вибору початкового наближення

$$\varepsilon 1 := \frac{1 - q0}{q0} \cdot \varepsilon \qquad \varepsilon 1 = 0.011429$$

Ітераційний процес можна закінчувати, як тільки абсолютна величина різниці між двома послідовними наближеннями всіх змінних не буде перевищувати  $\varepsilon 1$ .

$$X^{(1)} := d$$

$$XX := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow 1 \\ s \leftarrow X^{(1)} \\ s1 \leftarrow d + C \cdot s \\ \Delta \leftarrow |s1 - s| \\ \text{while } \Delta > \varepsilon 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} s \leftarrow s1 \\ s1 \leftarrow d + C \cdot s \\ \Delta \leftarrow |s1 - s| \\ k \leftarrow k + 1 \end{array} \right. \\ s1 \end{array} \right.$$

$$XX = \begin{pmatrix} 0.9997 \\ 1.9999 \\ -0.9993 \end{pmatrix}$$

$$\text{nom} := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow 1 \\ s \leftarrow X^{(1)} \\ s1 \leftarrow d + C \cdot s \\ \Delta \leftarrow |s1 - s| \\ \text{while } \Delta > \varepsilon 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} s \leftarrow s1 \\ s1 \leftarrow d + C \cdot s \\ \Delta \leftarrow |s1 - s| \\ k \leftarrow k + 1 \end{array} \right. \\ k \end{array} \right.$$

$$\text{nom} = 4$$

Висновок: роз'язок задної СЛАР знайдений із точністю E1 за 4 ітерації

### Метод Зейделя

```

X := d
Zeid := | k ← 1
        | s ← d
        | for i ∈ 1..n
        |   s1_i ← d_i + ∑_{j=1}^n (C_{i,j} · s_j)
        |   Δ ← max(|s1 - s|)
        |   while Δ ≥ 0.01
        |     | s ← s1
        |     | s1_1 ← d_1 + ∑_{j=1}^n (C_{1,j} · s_j)
        |     | for i ∈ 2..n
        |     |   | s1_i ← d_i + ∑_{j=1}^n (C_{i,j} · s1_j)
        |     |   | s1
        |     |   Δ ← max(|s1 - s|)
        |     |   k ← k + 1
        |     |   s1
        |   s1
nom := | k ← 1
        | s ← d
        | for i ∈ 1..n
        |   s1_i ← d_i + ∑_{j=1}^n (C_{i,j} · s_j)
        |   Δ ← max(|s1 - s|)
        |   while Δ ≥ 0.01
        |     | s ← s1
        |     | s1_1 ← d_1 + ∑_{j=1}^n (C_{1,j} · s_j)
        |     | for i ∈ 2..n
        |     |   | s1_i ← d_i + ∑_{j=1}^n (C_{i,j} · s1_j)
        |     |   | s1
        |     |   Δ ← max(|s1 - s|)
        |     |   k ← k + 1
        |     |   k
        |   k

```

$$\text{Zeid} = \begin{pmatrix} 0.9997 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

nom = 3

Висновок: роз'язок задної СЛАР знайдений із заданою точністю за 3 ітерації.

Порівнюючи застосування різних методів для розв'язання СЛАР, можна сказати, що серед ітераційних методів більш ефективним є метод Зейделя, бо він дозволяє знайти розв'язок системи за меншу кількість ітерацій.

## Лабораторна робота №4

### Розв'язання задачі Коші для систем лінійних диференціальних рівнянь

Мета роботи: навчитися розв'язувати задачу Коші для звичайних диференціальних рівнянь за методами Ейлера та Рунге-Кутта і оцінювати похибку наближеного результату; ознайомитися з точністю, яка забезпечується кожним методом; вивчити особливості програмної реалізації методів чисельного розв'язання задачі Коші на ПЕОМ і набути практичних навиків розв'язання задачі Коші за допомогою системи Mathcad.

Для виконання лабораторної роботи №6 студент повинен знати:

- 1) мету і зміст запропонованої роботи, порядок її виконання;
- 2) алгоритм розв'язання задачі Коші методом Ейлера та методом Рунге-Кутта;
- 3) оцінки похибки методів наближеного розв'язку задачі Коші;
- 4) порівняльну характеристику методів чисельного розв'язання задачі Коші.

Студент повинен уміти:

- 1) проводити ручні розрахунки по знаходженню чисельного розв'язку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння обраним методом;
- 2) оцінити похибку отриманого результату;
- 3) аналізувати одержані результати.

### ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

#### Розрахунково-практична частина

1. Скласти на відрізку  $[x_0; x_0 + 0.4]$  таблицю значень розв'язку рівняння  $y' = f(x, y)$  з початковою умовою  $y(x_0) = y_0$ , вибравши крок  $h = 0,2$  (табл. 6.1), застосовуючи:
  - а) метод Ейлера;
  - б) метод Рунге-Кутта.
2. Знаючи точний розв'язок диференціального рівняння (табл. 6.1) обчислити абсолютні похибки наближених розв'язків, знайдених за методами Ейлера та Рунге-Кутта за формулою  $\Delta = |y_n^* - y_n|$ ; тут  $y_n^*$  - значення точного розв'язку диференціального рівняння в кінцевій точці відрізка  $[x_0; x_0 + 0.4]$ ;  $y_n$  - наближене значення розв'язку диференціального рівняння в тій самій точці, отримане в результаті застосування методів, вказаних вище.  
Всі обчислення проводити з чотирма знаками після коми. Результати обчислень занести у таблицю.

Розрахункова частина за допомогою ПЕОМ

1. Використовуючи систему комп'ютерної математики Mathcad, знайти на відрізку  $[x_0; x_0 + 0.4]$  таблицю значень розв'язку рівняння  $y' = f(x, y)$ , що задовольняє умову  $y(x_0) = y_0$ , вибравши крок  $h = 0.2$  (перевірити ручні розрахунки) і  $h = 0.1$  (табл. 4.1) за методом:  
а) Ейлера; б) Рунге-Кутта.
2. Знайти абсолютні похибки наближення. Порівняти отримані результати між собою та з точним розв'язком.
3. Оформити звіт з виконаної лабораторної роботи.

Таблиця 4.1

Варіант	Диференціальне рівняння	Початкова умова	Точний розв'язок
1.	$y^2 y' = 1 - 2x$	$y(1) = 2$	$y = \sqrt[3]{8 + 3x - 3x^2}$
2.	$y^3 y' = 3 - 2x$	$y(2) = 2$	$y = \sqrt[4]{8 + 12x - 4x^2}$
3.	$yy' = 1 - 3x^2$	$y(1) = 4$	$y = \sqrt{16 + 2x - 2x^3}$
4.	$y^2 y' = 1 + x^2$	$y(-1) = 1$	$y = \sqrt[3]{x^3 + 3x + 5}$
5.	$y' + 2y/x = 4x$	$y(-1) = 5$	$y = (x^4 + 4)/x^2$
6.	$y' + 3y/x = 4x$	$y(1) = 3$	$y = (x^5 + 2)/x^3$
7.	$y' - 2y/x = 4x^5$	$y(-1) = 4$	$y = x^6 + 3x^2$
8.	$y' - y \operatorname{tg}(x) = \sec(x)$	$y(0) = 5$	$y = (x + 5)/\cos(x)$
9.	$x^2 y' + y^2 = 0$	$y(4) = 8$	$y = 8x/(3x - 8)$
10.	$y^2 y' = 1 - 2x$	$y(0) = 2$	$y = \sqrt[3]{8 + 3x - 3x^2}$
11.	$y^3 y' = 3 - 2x$	$y(1) = 2$	$y = \sqrt[4]{8 + 12x - 4x^2}$
12.	$yy' = 1 - 3x^2$	$y(0) = 4$	$y = \sqrt{16 + 2x - 2x^3}$
13.	$y' + 2y/x = 4x$	$y(2) = 5$	$y = (x^4 + 4)/x^2$
14.	$y' + 3y/x = 5x$	$y(-1) = -1$	$y = (x^5 + 2)/x^3$
15.	$y' - 2y/x = 4x^5$	$y(1) = 4$	$y = x^6 + 3x^2$
16.	$x^2 y' + y^2 = 0$	$y(1) = -1.6$	$y = 8x/(3x - 8)$
17.	$y^2 y' = 1 - 3x^2$	$y(0) = 2$	$y = \sqrt[3]{8 + 3x - 3x^2}$
18.	$y^3 y' = 5 - 3x^2$	$y(2) = 2$	$y = \sqrt[4]{8 + 20x - 4x^3}$
19.	$y^3 y' = 5 - 3x^2$	$y(1) = 2$	$y = \sqrt[4]{20x - 4x^3}$

Варіант	Диференціальне рівняння	Початкова умова	Точний розв'язок
20.	$y^3 y' = 1 + 3x^2$	$y(1) = 3$	$y = \sqrt[4]{73 + 4x + 4x^3}$
21.	$y^2 y' = 1 - 2x$	$y(1) = 2$	$y = \sqrt[3]{8 + 3x - 3x^2}$
22.	$y' + 2xy = 2x$	$y(0) = 2$	$y = \exp(-x^2) + 1$
23.	$y' + xy = x^3 y^3$	$y(0) = 0.5$	$y = (x^2 + 1 + 3 \exp(x^2))^{-1/2}$
24.	$y' + 4xy = 6x$	$y(0) = 3$	$y = 1.5(\exp(-2x^2) + 1)$
25.	$y' + xy = x^3 y^3$	$y(0) = 0.25$	$y = (x^2 + 1 + 15 \exp(x^2))^{-1/2}$
26.	$y' - 5y = 10x^2 + x - 6$	$y(0) = 2$	$y = \exp(5x) - 2x^2 - x + 1$
27.	$y' - 2xy = 2x$	$y(0) = 5$	$y = 6 \exp(x^2) - 1$
28.	$3y^2 y' = y^3 - 2x - 1$	$y(-1) = 1$	$y = (2x + 3)^{1/3}$
29.	$4y^3 y' = y^4 - 4x + 4$	$y(1) = 1$	$y = (4x - 3)^{1/4}$
30.	$y' - 4xy = 6x$	$y(0) = -3$	$y = -1.5 \exp(2x^2) - 1.5$

### ЗРАЗОК ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

#### 1. Розрахунково-практична частина

Завдання 1. Скласти на відрізку  $[0; 0.4]$  таблицю значень розв'язку рівняння  $y' = (y^2 - 4x + 1) \cdot y^{-1}$ , що задовольняє умову  $y(0) = -1$ , вибравши крок  $h = 0.2$ , застосовуючи:

а) метод Ейлера; б) метод Рунге-Кутта.

Порівняти отримані результати між собою та з точним розв'язком  $y = -\sqrt{4x + 1}$ .

Розв'язування. В даному прикладі;  $f(x, y) = (y^2 - 4x + 1) \cdot y^{-1}$   
 $x_0 = 0$ ;  $y_0 = -1$ . За умовою вузли  $x_0 = 0$ ;  $x_1 = 0.2$ ;  $x_2 = 0.4$ . Відповідні наближені значення розв'язку позначаємо  $y_0 = y(0)$ ;  $y_1 \approx y(0, 2)$ ;  $y_2 \approx y(0, 4)$ .

а) Застосовуючи метод Ейлера, згідно з формулою

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \quad (k = \overline{0, n-1}),$$

отримуємо:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0); y_1 = -1 + 0,2 \frac{(-1)^2 - 4 \cdot 0 + 1}{-1} = -1,4; y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1);$$

$$y_2 = -1,4 + 0,2 \frac{(-1,4)^2 - 4 \cdot 0,2 + 1}{-1,4} = -1,7086.$$

b) За методом Рунге-Кутта, згідно з формулами

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i});$$

$$k_{1,i} = hf(x_i, y_i);$$

$$k_{2,i} = h \left( x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_{1,i}}{2} \right);$$

$$k_{3,i} = hf \left( x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_{2,i}}{2} \right);$$

$$k_{4,i} = hf(x_i + h, y_i + k_{3,i}).$$

маємо

$$k_{1,i} = hf(x_i, y_i); k_{2,i} = hf \left( x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_{1,i}}{2} \right); k_{3,i} = hf \left( x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_{2,i}}{2} \right);$$

$$k_{4,i} = hf(x_i + h, y_i + k_{3,i}); y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}); i = \overline{0,1}.$$

Користуючись цими формулами, маємо:

$$x_0 = 0; y_0 = -1; k_{1,0} = hf(x_0, y_0); k_{1,0} = 0,2f(0; -1); k_{1,0} = 0,2 \frac{(-1)^2 - 4 \cdot 0 + 1}{-1} = -0,4$$

$$; k_{2,0} = hf \left( x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_{1,0}}{2} \right); k_{2,0} = 0,2f \left( 0 + \frac{0,2}{2}, -1 + \frac{-0,4}{2} \right) = 0,2f(0,1; -1,2);$$

$$k_{2,0} = 0,2 \frac{(-1,2)^2 - 4 \cdot 0,1 + 1}{-1,2} = -0,34; k_{3,0} = hf \left( x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_{2,0}}{2} \right);$$

$$k_{3,0} = 0,2f \left( 0 + \frac{0,2}{2}, -1 + \frac{-0,34}{2} \right) = 0,2f(0,1; -1,17);$$

$$k_{3,0} = 0,2 \frac{(-1,17)^2 - 4 \cdot 0,1 + 1}{-1,17} = -0,3366; k_{4,0} = hf(x_0 + h, y_0 + k_{3,0});$$



$$k_{4,0} = 0,2f(0,2;-1-1,3366) = 0,2f(0,2;-1,3366);$$

$$k_{4,0} = 0,2 \frac{(-1,3366)^2 - 4 \cdot 0,2 + 1}{-1,3366} = -0,2972; y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_{1,0} + 2k_{2,0} + 2k_{3,0} + k_{4,0});$$

$$y_1 = -1 + \frac{1}{6}(-0,4 - 2 \cdot 0,34 - 2 \cdot 0,3366 - 0,2972) \approx -1,3417.$$

Повторивши ці розрахунки, взявши замість  $x_0$  і  $y_0$  значення  $x_1 = 0,2$  і  $y_1 = -1,3417$ , знаходимо  $y_2$ .

$$k_{1,1} = hf(x_1, y_1) = 0,2f(0,2;-1,3417);$$

$$k_{1,1} = 0,2 \frac{(-1,3417)^2 - 4 \cdot 0,2 + 1}{-1,3417} \approx -0,2982;$$

$$k_{2,1} = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_{1,1}}{2}\right) = 0,2f(0,3;-1,4908);$$

$$k_{2,1} = 0,2 \frac{(-1,4908)^2 - 4 \cdot 0,3 + 1}{-1,4908} \approx -0,2713;$$

$$k_{3,1} = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_{2,1}}{2}\right) = 0,2f(0,3;-1,4773);$$

$$k_{3,1} = 0,2 \frac{(-1,4773)^2 - 4 \cdot 0,3 + 1}{-1,4773} \approx -0,2684;$$

$$k_{4,1} = hf(x_1 + h, y_1 + k_{3,1}) = 0,2f(0,4;-1,6101);$$

$$k_{4,1} = 0,2 \frac{(-1,6101)^2 - 4 \cdot 0,4 + 1}{-1,6101} = -0,2475; y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1});$$

$$y_2 = -1,3417 + \frac{1}{6}(-0,2982 - 2 \cdot 0,2713 - 2 \cdot 0,2684 - 0,2475) \approx -1,6126.$$

Тепер у точний розв'язок  $y = -\sqrt{4x+1}$  підставимо замість  $x$  значення  $x = 0$ ,  $x = 0.2$ ,  $x = 0.4$ :

$$y_0^* = y(0) = -\sqrt{4 \cdot 0 + 1} = -1; y_1^* = y(0.2) = -\sqrt{4 \cdot 0.2 + 1} \approx -1.3416;$$

$$y_2^* = y(0.4) = -\sqrt{4 \cdot 0.4 + 1} \approx -1.6124.$$

Абсолютні похибки наближених розв'язків, знайдених за методами Ейлера та Рунге-Кутта, знайдемо за формулою  $\Delta = |y_n^* - y_n|$ ; тут  $y_n^*$  - точне значення розв'язку диференціального рівняння в кінцевій точці відрізка

$[x_0; x_0 + 0.4]$ ;  $y_n$  - наближене значення розв'язку диференціального рівняння в цій же точці, отримане в результаті застосування методів, вказаних вище.

$$\Delta_{\text{Ейлера}} = |y_2^* - y_2| = |-1.6124 - (-1.7086)| = 0.0962;$$

$$\Delta_{\text{Рунге-Кутта}} = |-1.6124 - (-1.6126)| = 0.0002.$$

Результати розрахунків наведені в табл. 4.2. Там же для порівняння вміщені і точні значення розв'язку.

Таблиця 4.2

$x$	Метод Ейлера	Метод Рунге- Кутта	Точний розв'язок
0	-1	-1	-1
0,2	-1,4000 (0,0584)	-1,3417 (0,0001)	-1,3416
0,4	-1,7086 (0,0962)	-1,6126 (0,0002)	-1,6124
$\Delta$	0,0962	0,0002	

У дужках подано абсолютні величини різниць між точним та наближеним розв'язком.

## Розрахункова частина за допомогою ПЕОМ

$$f(x,y) := \frac{y^2 - 4 \cdot x + 1}{y} \quad x_0 := 0 \quad y_0 := -1 \quad n := 2$$

$$a := x_0 \quad b := x_0 + 0.4 \quad h := \frac{b - a}{n} \quad h = 0.2$$

$$k := 0..n \quad x_k := x_0 + k \cdot h$$

$$k = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

### Метод Эйлера

$$k := 0..n - 1 \quad y_{k+1} := y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$$

$$y_e := y \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} \quad y_e = \begin{pmatrix} -1 \\ -1.4 \\ -1.7086 \end{pmatrix}$$

### Метод Рунге-Кутты

$$y_{rk} := \left| \begin{array}{l} z_0 \leftarrow y_0 \\ \text{for } k \in 0..n - 1 \\ \left| \begin{array}{l} k1 \leftarrow h \cdot f(x_k, z_k) \\ k2 \leftarrow h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, z_k + \frac{k1}{2}\right) \\ k3 \leftarrow h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, z_k + \frac{k2}{2}\right) \\ k4 \leftarrow h \cdot f(x_k + h, z_k + k3) \\ z_{k+1} \leftarrow z_k + \frac{1}{6} \cdot (k1 + 2 \cdot k2 + 2 \cdot k3 + k4) \end{array} \right. \\ z \end{array} \right.$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} \quad y_{rk} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1.3417 \\ -1.6126 \end{pmatrix}$$

Порівняємо отримані наближені значення шуканого розв'язку  $y_t(x)$  із значеннями відомого точного розв'язку заданого рівняння, задовольняючого дані початкової умови,

$$y_t(x) := -\sqrt{4 \cdot x + 1}$$

обчисленими в тих же вузлах  $x_k$ .

$$y_t(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1.3416 \\ -1.6125 \end{pmatrix}$$

Обчислимо похибку наближеного розв'язку, отриманого за певним методом (Ейлера, Рунге-Кутта), для кожного вузла і отримані результати оформимо у вигляді матриці  $R$ . В її першому стовпці записані вузли, в яких обчислювався наближений розв'язок. Її другий та третій стовпці складають значення наближеного розв'язку, отримані відповідно за методом Ейлера та Рунге-Кутта. В четвертому стовпці записані значення точного розв'язку. П'ятий і шостий стовпці складають абсолютні значення різниць між значеннями точного та наближеного розв'язку, отриманого відповідно за методом Ейлера (п'ятий стовпець -  $z1_k$ ), методом Рунге-Кутта (шостий стовпець -  $z2_k$ ).

стовпець -  $z2_k$ ).

$$R^{(0)} := x \quad R^{(1)} := y_e \quad R^{(2)} := y_{rk} \quad R^{(3)} := y_t(x)$$

$$k := 0..2$$

$$z1_k := |y_t(x_k) - y_{e_k}|$$

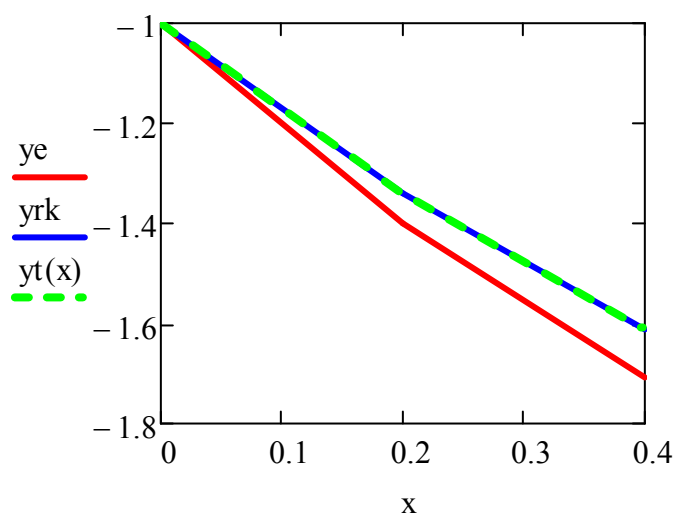
$$z2_k := |y_t(x_k) - y_{rk_k}|$$

$$R^{(4)} := z1 \quad R^{(5)} := z2$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0.2 & -1.4 & -1.3417 & -1.3416 & 0.0584 & 0.0001 \\ 0.4 & -1.7086 & -1.6126 & -1.6125 & 0.0961 & 0.0001 \end{pmatrix}$$

Аналіз цієї матриці та нижче наведені графіки дозволяють зробити висновок, що найменш точними є результати, отримані за методом Ейлера, а найменші

відхилення від точного розв'язку мають значення наближеного розв'язку, отримані за методом Рунге-Кутта.



## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бахвалов Н. С. Численные методы : учебное пособие / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков ; МГУ им. М. В. Ломоносова. – 3-е изд., доп. и перераб. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 636 с. – М. : Наука, 1986. – 744 с.
2. Гаврилюк І. П. Методи обчислень : підруч. у 2-х ч. Ч. І / І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров. – К. : Вища шк., 1995. – 367 с.
3. Гаврилюк І. П. Методи обчислень / . підруч. у 2-х ч. Ч. 2 / І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров. – К. : Вища шк., 1995. – 431 с.
4. Дульнев Г. Н. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена / Г. Н. Дульнев, В. Г. Парфенов, А. В. Сигалов. – М. : Высш. шк., 1990. – 208с.
5. Завьялов Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. – М. : Наука, 1980. – 352 с.
6. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
7. Корнишин М. С. Вычислительная геометрия в задачах механики оболочек / М. С. Корнишин, В. Н. Наймушин, В. Ф. Снигирев. – М. : Наука, 1989. – 207 с.
8. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування : моногр. / О. М. Литвин. – Харків : Основа, 2002. – 544 с.
9. Литвин О. М. Інтерлінація функцій : моногр. / О. М. Литвин. – Харків : Основа, 1992. – 236 с.
10. Математичні методи та моделі в розрахунках на ПЕОМ : метод. розробки, вказ. та завдання до практичних та лабораторних робіт : в 4-х ч. / Є. І. Дробот, І. В. Крикова, О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Л. М. Ушаковська. – Х., УПА, 1999. – Ч. 1. – 108 с., Ч. 2. – 81 с., Ч. 3. – 64 с., Ч. 4. – 47 с.
11. Методичні вказівки для роботи з системою Mathcad / упоряд.: О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, О. П. Нечуйвітер. – Харків : УПА, 2002. – 21с.
12. Методичні вказівки до курсової роботи з курсу "Математичні методи та моделі в розрахунках на ПЕОМ" / Є. І. Дробот, І. В. Крикова, О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Л. М. Ушаковська. – Х. : УПА, 1999. – 26 с.
13. Самарский А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. – М. : – Наука, 1982. – 272 с.
14. Стародетко Е. А. Элементы вычислительной геометрии / Е. А. Стародетко. – Минск : Наука и техника, 1986. – 210 с.
15. Стечкин С. Б. Сплаины в вычислительной математике / С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин. – М. : Наука, 1976. – 248 с.

16. Тепловые и атомные электростанции и установки. (Математические модели для проектирования и эксплуатации) / И. Г. Шелепов, С. Ф. Артюх, М. А. Дуэль, В. К. Заруба. – К. : УМК ВО, 1992. – 304 с.
17. Фокс А. Вычислительная геометрия / А. Фокс, М. Пратт ; пер. с англ. – М. : Мир, 1982. – 212 с.
18. Цой П. В. Методы расчета отдельных задач тепломассопереноса / П. В. Цой. – М. : Энергия, 1971. – 383 с.
19. Литвин О. М. Математичне моделювання та обчислювальні методи на ПЕОМ : навч.-метод. посіб. для аспірантів, магістрів, студ. інж., інж.-пед. та мат. спец./ О. М. Литвин, Л. С. Лобанова ; Укр. інж.-пед. акад. – Х. : [б. в.], 2012. – 154 с.

*Навчальне видання*

# МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ОПISУ ПРОЦЕСІВ

*Методичні вказівки  
до лабораторних робіт*

Упорядники:

**НЕЧУЙВІТЕР** Олеся Петрівна  
**ПЕРШИНА** Юлія Ігорівна

Формат 60x84/16. Гарнітура Times New Roman  
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.

Ум. друк. арк. \_\_\_\_.

Тираж 100 пр.

Українська інженерно-педагогічна академія  
61003, м. Харків, вул. Університетська, 16.