сленные методы: учеб. пособие для вузов. – М: Лаборатория Базовых Знаний, 2000. – 622 с. **4.** *Лавров К.Н., Цыплакова Т.П.* Финансовая аналитика. MATLAB 6. – М.: Диалог-МИФИ, 2001. – 368 с.

Надійшла до редколегії 20.05.2013

УДК 330.322

Числові та аналітичні методи розрахунку внутрішньої норми прибутковості інвестиційних проектів / О. В. Прохоренко, А. О. Прохоренко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 170 – 174. Бібліогр.: 4 назви.

Описаны математические методы решения задачи определения внутренней нормы доходности инвестиционного проекта. Предложено использовать для определения IRR в практике расчетов финансового менеджмента численный метод Ньютона.

Ключевые слова: инвестиционный проект, норма доходности, формула приведенной стоимости, ставка дисконтирования.

The paper describes the mathematical methods for solving the problem of determining Internal Rate of Return on the investment project. Proposed to use to determine the IRR calculation in the practice of financial management numerical method of Newton.

Key words: investment project, the rate of return, present value formula, the discount rate.

УДК 519.63:621.165

А.В. РУСАНОВ, д-р техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков

ОБОБЩЕНИЕ НЕЯВНОЙ СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрена неявная безытерационная конечно-объёмная схема расщепления высокого порядка точности по пространственным координатам для численного интегрирования уравнений газодинамики на неструктурированных сетках. Представлены результаты численного моделирования дозвуковых и сверхзвуковых невязких течений сжимаемого газа в канале с препятствием в виде кругового сегмента. Проведено сравнение полученных результатов с данными численного моделирования в программном комплексе вычислительной газогидродинамики FlowER-U.

Ключевые слова: неявная схема, высокая точность, расщепление, неструктурированная сетка, невязкое течение.

Введение. Интенсивное развитие энергомашиностроения, авиационной и многих других отраслей техники неразрывно связано с решением задач газодинамики для широкого диапазона режимных параметров и конфигураций обтекаемых тел. При использовании сеточных численных методов дискретизацию расчётных областей сложной формы удобно выполнять с помощью

© А. В. Русанов, 2013

гибридных неструктурированных сеток [1].

При моделировании газодинамических процессов, особенно стационарных, широко применяются неявные разностные схемы. Они обладают большей устойчивостью, чем явные, и позволяют увеличить скорость сходимости численного решения при использовании *метода установления по маршевой координате* [2]. В работах [3, 4] представлена новая неявная конечно-объёмная схема с расщеплением по пространственным и характеристическим направлениям, ориентированная на использование неструктурированных сеток с произвольной формой ячеек. Решение сформированной системы уравнений выполняется безытерационно. В настоящей работе приведено обобщение данного метода для численного решения системы уравнений Эйлера при моделировании до- и сверхзвуковых течений газа в канале с препятствием в виде кругового сегмента. Выполнено сравнение полученных результатов с результатами численного моделирования в программном комплексе вычислительной газогидродинамики FlowER-U.

Математическая модель. Рассматривается численное решение *системы уравнений Эйлера*, записанной в интегральной форме. В двумерном случае в декартовой системе координат она имеет вид

$$\frac{d}{dt}\iint_{\Omega} Q(x,y,t)\,dxdy + \oint_{\partial\Omega}\left(E(Q)n_x + F(Q)n_y\right)dL = 0\,,\ t>0\,, \qquad (1)$$

$$Q=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \dfrac{p}{\gamma-1}+\rho\dfrac{u^2+v^2}{2}\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \dfrac{\gamma pu}{\gamma-1}+\rho u\dfrac{u^2+v^2}{2}\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho vu\\ \rho v^2+p\\ \dfrac{\gamma pv}{\gamma-1}+\rho v\dfrac{u^2+v^2}{2}\end{pmatrix},$$

где $(x,y)\in\Omega$ – декартовы координаты точки в расчётной области Ω с границей $\partial\Omega$; t – координата времени; Q, E, F – вектор консервативных переменных и векторы потоков; ρ, u, v, p – плотность, компоненты вектора скорости и статическое давление газа (компоненты вектора *примитивных переменных* q); γ – показатель адиабаты газа.

К неизвестным применяется обезразмеривание следующего вида:

$$\tilde{p}=\frac{p}{\rho_* a_*^2}\,,\ \tilde{u}=\frac{u}{a_*}\,,\ \tilde{v}=\frac{v}{a_*}\,,\ \tilde{\rho}=\frac{\rho}{\rho_*}\,,\ \tilde{t}=a_* t\,,$$

где ρ_*, a_* – характерная плотность и скорость потока.

После обезразмеривания вид уравнений не меняется, поэтому для дальнейшего описания знак « ~ » над безразмерными переменными опускается. В момент времени $t=0$ задано начальное распределение вектора перемен-

ных. При моделировании стационарных физических полей часто прослеживается независимость решения задачи от начальных данных, поэтому они могут задаваться постоянными во всей расчётной области. Для постановки граничных условий выделяются участки втекания и вытекания газа (границы «входа» и «выхода»), поверхности обтекаемых тел («стенка») и другие. Подробное описание разновидностей граничных условий и способов их реализации для каждого из таких участков представлено в работах [2, 5, 6].

Пространственно-временная дискретизация. Особенности реализации неявной схемы. Дискретизация расчётной области Ω выполняется с помощью неструктурированной сетки

$$G = \{P_i\}_{i=1}^{N_G},\ \mathrm{int}(P_i) \neq \varnothing,\ \mathrm{int}(P_i) \cap \mathrm{int}(P_j) = \varnothing,$$

где P_i – ячейка сетки; N_G – общее количество ячеек. В работе применяются ячейки с кусочно-линейной границей

$$L_i = \bigcup_{j=1}^{N_i} \Gamma_j^i,\ \left|\Gamma_j^i\right| \neq 0\ \forall\, j,$$

где $\Gamma_j^i, \left|\Gamma_j^i\right|$ – j ребро ячейки P_i и его длина, а N_i – общее количество рёбер ячейки.

Система уравнений (1), записанная для ячейки $P_i \in G$ неструктурированной сетки, имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\overline{Q}_i(t) = R_i(Q),\ t > 0, \tag{2}$$

$$\overline{Q}_i(t) = \frac{1}{S_i}\iint_{P_i} Q(x,y,t)\,dxdy,\ R_i(Q) = -\frac{1}{S_i}\oint_{L_i}\left(E(Q)n_x + F(Q)n_y\right)dL,\ i = \overline{1, N_G},$$

где S_i – площадь ячейки P_i; $\vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j}$ – вектор внешней единичной нормали к рёбру контрольного объёма.

На временной оси задаётся разбиение вида

$$t_n = \Delta t \cdot n,\ \Delta t > 0,\ n \in N \cup \{0\},$$

где $\Delta t = \dfrac{\nu \cdot d}{a_*}$ – шаг временной сетки; n – номер временного слоя; d – характерный линейный размер разностной сетки; ν – *число Куранта*, варьируемое с целью удовлетворения требованиям устойчивости разностной схемы.

В системе уравнений (2), записанной в момент времени $t = t_{n+1}$, выполняется аппроксимация производной по времени с помощью трёхслойного разностного выражения вида

$$\left.\frac{d\overline{Q}}{dt}\right|_i^{n+1} \approx \frac{(1+\chi)\delta\overline{Q}_i^{n+1} - \chi\delta\overline{Q}_i^{n}}{\Delta t},\ \delta\overline{Q}_i^{n+1} = \overline{Q}_i^{n+1} - \overline{Q}_i^{n},$$

а также линеаризация векторов потоков:

$$E^{n+1} \approx E^n + \vartheta \cdot A\big|_{t=t_n} \delta Q^{n+1},\ E^{n+1} = E\big(Q(x,y,t_{n+1})\big),$$

$$F^{n+1} \approx F^n + \vartheta \cdot B\big|_{t=t_n} \delta Q^{n+1},\ F^{n+1} = F\big(Q(x,y,t_{n+1})\big),$$

$$\delta Q^{n+1} = Q(x,y,t_{n+1}) - Q(x,y,t_n) = Q^{n+1} - Q^n.$$

В работе используются значения $\chi = 0.5$ и $\vartheta = 1$. *Матрицы Якоби* $A = \partial E / \partial Q$ и $B = \partial F / \partial Q$ приводятся к диагональному виду:

$$\Lambda_x = L_x^{-1} A L_x = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(x)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m^{(x)} \end{pmatrix},\ \Lambda_y = L_y^{-1} B L_y = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(y)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m^{(y)} \end{pmatrix},$$

где Λ_x, Λ_y – диагональные матрицы, составленные из вещественных собственных значений A и B; L_x^{-1}, L_y^{-1} – матрицы, составленные из собственных векторов A и B.

Для учёта характеристических направлений матрицы Якоби представляются в виде суммы матриц с неотрицательными и неположительными собственными значениями:

$$A = A^+ + A^-,\ A^\pm = L_x \Lambda_x^\pm L_x^{-1},\ \Lambda_x^\pm = \frac{\Lambda_x \pm |\Lambda_x|}{2},$$

$$B = B^+ + B^-,\ B^\pm = L_y \Lambda_y^\pm L_y^{-1},\ \Lambda_y^\pm = \frac{\Lambda_y \pm |\Lambda_y|}{2},$$

где $|\Lambda|$ – это диагональная матрица, составленная из модулей элементов Λ.

Для учёта пространственных направлений аналогичным образом выполняется разложение компонент вектора нормали к j ребру:

$$n_\psi = n_\psi^+ + n_\psi^-,\ n_\psi^\pm = \frac{n_\psi \pm |n_\psi|}{2},\ \psi = [x, y],$$

где ψ принимает значение x или y.

Интеграл по границе ячейки P_i, полученный после подстановки линеаризованных векторов потоков и содержащий δQ^{n+1}, вычисляется приближенно с помощью *формулы прямоугольников*. В результате описанных действий система уравнений (2) преобразуется к виду

$$\delta\overline{Q}_i^{n+1} + \frac{2}{3}\frac{\Delta t}{S_i}\sum_{\psi=x,y}\sum_{j=1}^{N_i}\left|\Gamma_j^i\right|\left\langle\left(n_\psi^+ C_\psi^+ \delta Q^{n+1}\right)_{\Gamma_j^i} + \left(n_\psi^- C_\psi^+ \delta Q^{n+1}\right)_{\Gamma_j^i}\right\rangle + \tag{3}$$

$$+\frac{2}{3}\frac{\Delta t}{S_i}\sum_{\psi=x,y}\sum_{j=1}^{N_i}\left|\Gamma_j^i\right|\left\langle\left(n_\psi^- C_\psi^- \delta Q^{n+1}\right)_{\Gamma_j^i} + \left(n_\psi^+ C_\psi^- \delta Q^{n+1}\right)_{\Gamma_j^i}\right\rangle = \frac{1}{3}\delta\overline{Q}_i^n + \frac{2}{3}\Delta t\, R_i\left(Q^n\right).$$

Приближенные значения потоков $(n_\psi^\sigma C_\psi^\zeta \delta Q^{n+1})_{\Gamma_j^i}$, где $\sigma = \pm$ и $\zeta = \pm$, с учётом взаимного расположения смежных ячеек и проекций характеристических направлений на координатное направление ψ определяются с ошибкой $O(d)$ следующим образом:

$$n_{\psi,\Gamma_j^i}^+\left(C_\psi^+ \delta Q^{n+1}\right)_{\Gamma_j^i} \approx n_{\psi,\Gamma_j^i}^+ C_{\psi,i}^+ \delta\overline{Q}_i^{n+1},\ n_{\psi,\Gamma_j^i}^+\left(C_\psi^+ \delta Q^{n+1}\right)_{\Gamma_j^i} = n_{\psi,\Gamma_j^i}^+ C_{\psi,i}^+ \delta\overline{Q}_i^{n+1},$$

$$n_{\psi,\Gamma_j^i}^-\left(C_\psi^- \delta Q^{n+1}\right)_{\Gamma_j^i} \approx n_{\psi,\Gamma_j^i}^- C_{\psi,i}^- \cdot \delta\overline{Q}_i^{n+1},\ n_{\psi,\Gamma_j^i}^+\left(C_\psi^- \delta Q^{n+1}\right)_{\Gamma_j^i} \approx n_{\psi,\Gamma_j^i}^+ C_{\psi,i_j}^- \delta\overline{Q}_{i_j}^{n+1},$$

где i_j – номер смежной по j ребру ячейки P_{i_j}; $C_{\psi=x} = A$; $C_{\psi=y} = B$.

После подстановки данных приближений вид (3) полностью определён для любой внутренней ячейки неструктурированной сетки. Для граничных рёбер требуется постановка дополнительных условий на неявном слое. При моделировании стационарных физических полей для всех типов физических границ часто применяют соотношение $\delta\overline{Q}_{i_j}^{n+1} = 0, i_j > N_G$ [2].

Введём матричные операторы, связанные с координатными и характеристическими направлениями, и систему (3) представим в виде

$$\left(I + \tilde{C}_x^+ + \tilde{C}_x^- + \tilde{C}_y^+ + \tilde{C}_y^-\right)\delta\overline{Q}^{n+1} = R^n, \tag{4}$$

где

$$\left(\tilde{C}_\psi^\pm \delta\overline{Q}^{n+1}\right)_i = \frac{2}{3}\frac{\Delta t}{S_i}\left(\left(\sum_{j=1}^{N_i}\left|\Gamma_j^i\right| n_{\psi,\Gamma_j^i}^\pm\right) C_{\psi,i}^\pm \delta\overline{Q}_i^{n+1} + \left(\sum_{j=1}^{N_i}\left|\Gamma_j^i\right| n_{\psi,\Gamma_j^i}^\mp C_{i_j}^\pm \delta\overline{Q}_{i_j}^{n+1}\right)\right),$$

$$\psi = x, y,$$

$$\left(I \cdot \delta\overline{Q}^{n+1}\right)_i = \delta\overline{Q}_i^{n+1},\ R_i^n = \frac{1}{3}\delta\overline{Q}_i^n + \frac{2}{3}\Delta t\, R_i\left(Q^n\right),\ i = \overline{1, N_G}.$$

Решение системы (4) выполняется с использованием приближенной факторизации, что приводит к разностной схеме в дробных шагах следующего вида:

- определение правой части системы (4) –

$$\text{шаг 0: } R_i^n = \frac{1}{3}\delta\overline{Q}_i^n + \frac{2}{3}\Delta t\, R_i\left(Q^n\right);$$

- приближенное обращение матричного оператора в (4) –

шаг 1а: $\left(I+\tilde{C}_x^{+}\right)\delta\overline{Q}^{n+1/4}=R^n$;

шаг 1б: $\left(I+\tilde{C}_x^{-}\right)\delta\overline{Q}^{n+2/4}=\delta\overline{Q}^{n+1/4}$;

шаг 2а: $\left(I+\tilde{C}_y^{+}\right)\delta\overline{Q}^{n+3/4}=\delta\overline{Q}^{n+2/4}$;

шаг 2б: $\left(I+\tilde{C}_y^{-}\right)\delta\overline{Q}^{n+1}=\delta\overline{Q}^{n+3/4}$;

- определение переменных на неявном временном слое –

$$\overline{Q}^{n+1}=\overline{Q}^{n}+\delta\overline{Q}^{n+1}.$$

Выражение $R_i(Q^n)$ на шаге 0 аппроксимируется с заданным высоким порядком точности (вторым, третьим и т.д.) по пространственным координатам, для чего выполняется построение кусочно-полиномиальной реконструкции вектора переменных с многочленом соответствующей степени (второй, третьей и т.д.) [7].

Уравнения для шагов 1а, 1б, 2а, 2б могут быть записаны в общей форме:

$$\left(I+\frac{2}{3}\frac{\Delta t}{S_i}\left(\sum_{j=1}^{N_i}\left|\Gamma_j^i\right|n^{\pm}_{\psi,\Gamma_j^i}\right)C^{\pm}_{\psi,i}\right)\delta\phi_i^{*}+\frac{2}{3}\frac{\Delta t}{S_i}\sum_{j=1}^{N_i}\left|\Gamma_j^i\right|n^{\mp}_{\psi,\Gamma_j^i}C^{\pm}_{i_j}\delta\phi^{*}_{i_j}=\mathrm{f}_i\,, \qquad (5)$$

где $\delta\phi^{*}$ – искомый вектор; f – правая часть уравнения.

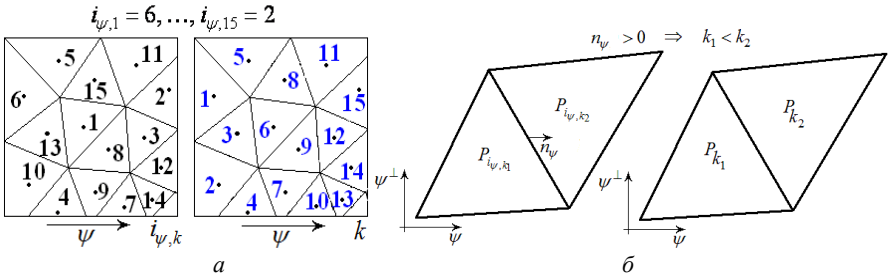


Рис 1 – Критерий перенумерации и пример его использования.

Матрица системы (5) для исходной нумерации ячеек сетки является разреженной и содержит не нулевые элементы, расположенные над и под главной диагональю. Увеличение эффективности процедуры решения системы выполняется благодаря перенумерации ячеек исходной сетки для координатных направлений x и y. Каждой ячейке соответствует локальный номер $1\le k\le N_G$, а её номер для исходной сетки обозначается $i_{\psi,k}$ (рис. 1, *а*). При сортировке используется критерий: из двух смежных ячеек i_{ψ,k_1} и i_{ψ,k_2} (рис. 1, *б*) меньший локальный номер имеет та, у которой проекция вектора

внешней нормали к общему ребру на координатное направление ψ является положительной.

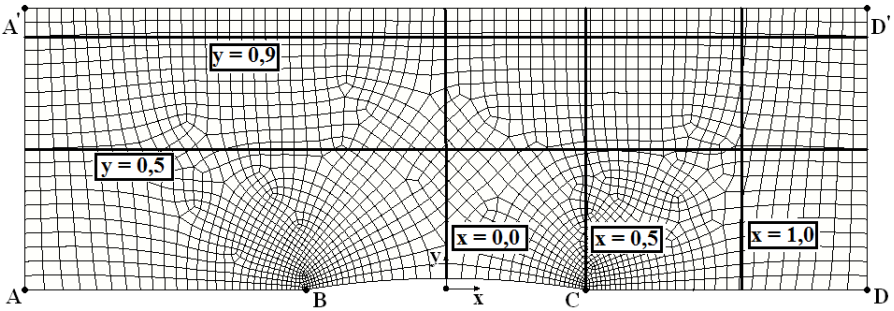


Рис. 2 – Вид и дискретизация расчётной области.

После сортировки матрица системы (5) принимает блочно-треугольный вид, в результате чего компоненты искомого вектора определяются с использованием явных формул. На дробных шагах 1а и 2а порядок определения соответствует увеличению номера k от 1 до N_G (проход вперёд вдоль координатного направления ψ), а на дробных шагах 1б и 2б – уменьшению номера k от N_G до 1 (проход назад вдоль координатного направления ψ) по указанной формуле.

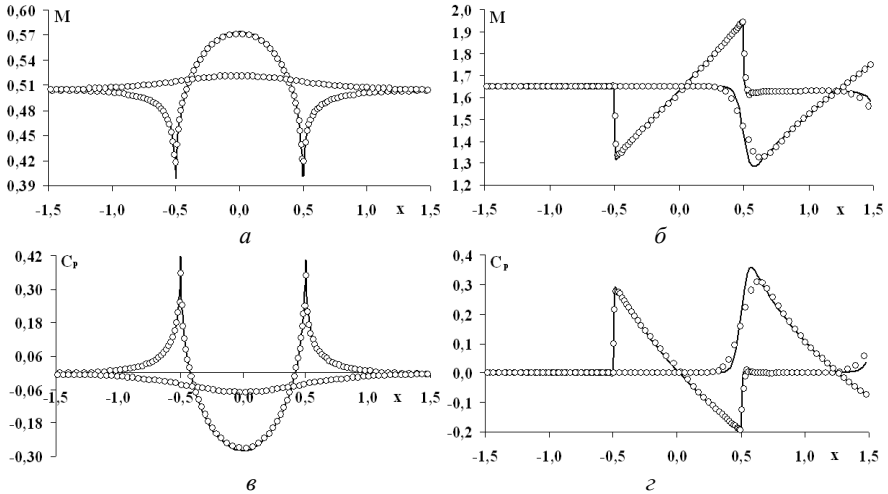
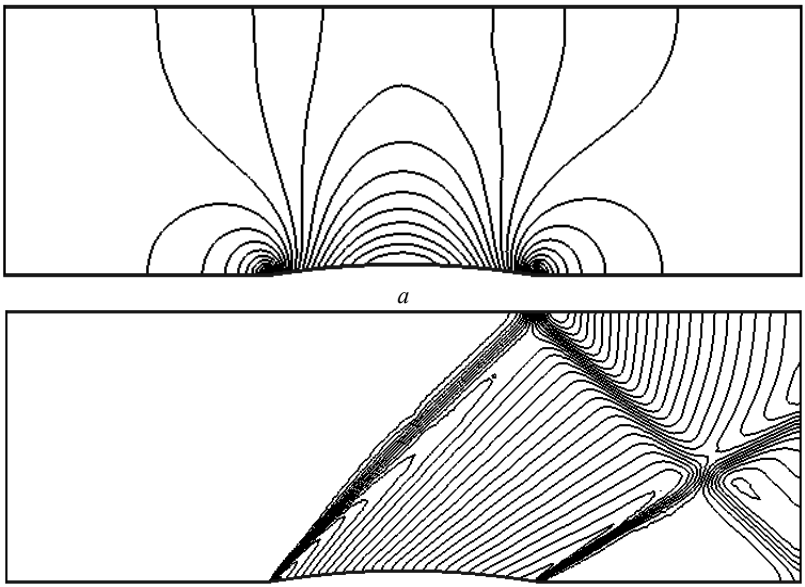


Рис. 3 – Распределение параметров течения вдоль стенок канала:
а, *б* – число Маха для задач №1 и №2;
в, *г* – коэффициент давления для задач №1 и №2.

Численные результаты. Рассмотрена задача моделирования дозвуковых и сверхзвуковых течений невязкого сжимаемого газа в канале с препятствием в виде кругового сегмента. Разновидности задачи с относительной толщиной препятствия $4\,\%$ и $10\,\%$ решались в работах *В.И. Гнесина*, *С.В. Ершова*, *И. Горжейши* [8], *S.P. Spekreijse* [9], *D. Sharov* [10], *J. Rokicki* и *R. Wieteska* [11] и других авторов. В настоящей работе рассмотрен случай препятствия с $4\,\%$ относительной толщиной. Дискретизация расчётной области Ω выполнена с помощью грубой (рис. 2) и подробной неструктурированных сеток, состоящих из 2062 и 8212 четырёхугольных ячеек соответственно.



а

б

Рис. 4 – Изолинии коэффициента давления в канале:
а – задача №1; *б* – задача №2.

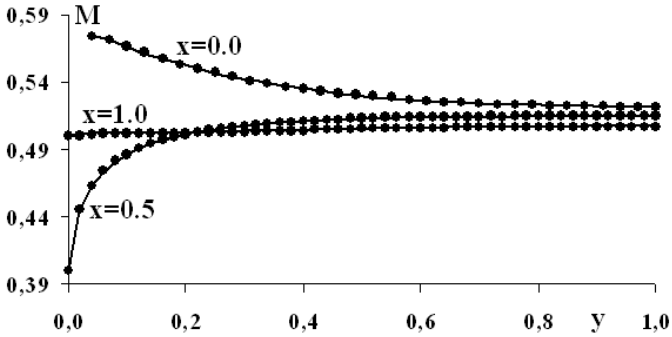
Линейные размеры подробной сетки вдвое меньше, чем для грубой сетки. Длина отрезков AA', DD', AB, BC и CD равна 1. Рассмотрены две задачи:

Задача №1 – дозвуковое течение в канале при $M_{AA'} = 0.5$;

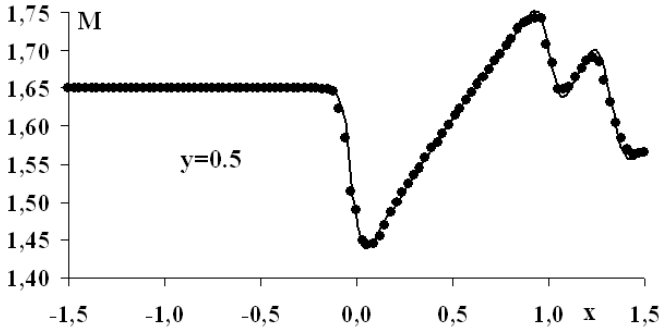
Задача №2 – сверхзвуковое течение в канале при $M_{AA'} = 1.65$.

На участках границы $A'D'$, AB, BC и CD задавалось граничное условие вида «стенка». В задаче №1 на границе выхода DD' задано постоянное распределение статического давления. Все результаты получены с использо-

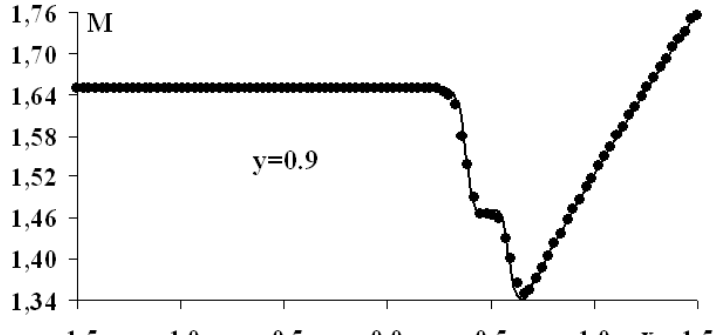
ванием кусочно-полиномиальной реконструкции с многочленом 2-й степени. Во всех расчётах шаг интегрирования по времени выбирался постоянным, а соответствующее число Куранта ν равно 5.



а



б



в

Рис. 5 – Сравнение распределений числа Маха:
а – задача №1; *б*, *в* – задача №2

На рис. 3 представлено распределение параметров течения вдоль нижней и верхней стенок канала. Прозрачными маркерами показаны результаты расчётов на грубой сетке, а сплошной линией − на подробной. На рис. 4 изображены изолинии коэффициента давления, построенные по результатам расчётов на подробной сетке.

Видно, что основное уточнение решения для задачи № 1 при переходе с грубой на подробную сетку наблюдается возле входной и выходной частей препятствия. Распределение параметров течения обладает высокой степенью симметрии относительно середины канала, где координата $x = 0$.

В задаче №2 отчётливо видно формирование *косых скачков уплотнения* в сверхзвуковом потоке у входной и выходной части препятствия. Наибольшее уточнение при использовании подробной сетки наблюдается как в области формирования отраженного от верхней стенки скачка, так и в области взаимодействия (пересечения) скачков уплотнения.

На рис. 5 закрашенными маркерами представлено распределение числа Маха для задач №1 и №2 вдоль различных поперечных ($x = const$) и продольных ($y = const$) сечений канала (схематическое расположение линий изображено на рис. 2). Сплошной линией отмечены результаты расчёта с по помощью программного комплекса FlowER-U [2], ориентированного на использование неструктурированных сеток с шестигранными ячейками. Численное интегрирование уравнений в FlowER-U проводится с помощью *неявной квазимонотонной схемы Годунова* второго порядка аппроксимации по пространству и времени, в основу которой положен *ENO принцип Хартена* и *неявный оператор Бима-Уорминга-Стегера*. На рис. 5 приведены результаты, полученные на подробной сетке.

Видно хорошее согласование численных результатов, полученных с помощью упомянутых методов. Существенных осцилляций в распределениях коэффициента давления и *числа Маха* как на поверхности профиля, так и внутри канала, не наблюдается.

Выводы. В работе представлена неявная конечно-объёмная схема высокого порядка точности по пространственным переменным для численного интегрирования системы уравнений Эйлера на неструктурированных сетках при моделировании невязких течений сжимаемого газа. Показана высокая точность метода при решении задач численного моделирования дозвуковых и сверхзвуковых невязких течений сжимаемого газа в канале с препятствием в виде кругового сегмента относительной толщины 0.04. Дальнейшим направлением развития разностной схемы является её применение для решения задач моделирования трёхмерных вязких течений сжимаемого газа и несжимаемой жидкости в расчётных областях сложной формы.

Список літератури: **1.** *Venkatakrishnan V.* A perspective on unstructured grid flow solvers // AIAA, Aerospace Sci. Meeting № 33 − 1996. − v. 34. − P. 533 − 547. **2.** *Русанов А. В.* Математическое моделирование нестационарных газодинамических процессов в проточных частях турбомашин / *А.В. Русанов, С.В. Ершов*: [Монография]. − Х.: ИПМаш НАН Украины, 2008. − 275 с. **3.** *Русанов А.В., Косьянов Д.Ю.* Неявная схема для численного интегрирования уравнений гиперболического типа на неструктурированных сетках // Пробл. машиностроения. − 2010. − 13; 3. − С. 30-37. **4.** *Русанов А.В.*, *Косьянов Д.Ю., Косьянова А.И.,* Использование неявной схемы расщепления для численного моделирования трансзвуковых течений идеального газа // Вестник двигатестроения. − 2011. − 25; 2. − С. 20-24. **5.** *Соколовский Г. А.*, *Гнесин В. И.* Нестационарные трансзвуковые и вязкие течения в турбомашинах – К.: Наук. думка, 1986. – 264 с. **6.** Численное решение многомерных задач газовой динамики / *Годунов С. К. Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н.* и др.. – М.: Наука, 1976. – 400 с. **7.** *Русанов А. В.* Явная схема для численного интегрирования уравнений гиперболического типа на неструктурированных сетках / *А.В. Русанов, Д.Ю. Косьянов* // Вестник ХНУ им. В.Н. Каразина. Серия МИА, Харьков. − 2010. − № 926. − С. 123 − 138. **8.** *Гнесин В. И.* Расчёт двухмерных трансзвуковых течений в решетках с использованием разностных схем С. К. Годунова и А. Джеймсона / *В. И. Гнесин, С. В. Ершов, И. Горжейши* // Пробл. машиностроения. – 1990. – вып.33. – С. 82 – 89. **9.** *Spekreijse S. P.* Multigrid solution of the steady Euler equations / S.P. Spekreijse// Thesis.Centrum voor Wiskunde en Informatica. Amsterdam. − 1987. − 166 p. **10.** Implementation of unstructured grid GMRES+LU-SGS method on shared-memory, cache-based parallel computers / D. Sharov, H. Luo, J. D. Baum, R. Löhner // AIAA Pap. −2000. − № 0927. – P. 1−17. **11.** *Rokicki J.* High-Order WENO schemes on unstructured tetrahedral meshes / J. Rokicki, R. Wieteska // European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD. – 2006. – P. 1–12.

Поступила в редколлегию 27.05.2013

УДК 519.63: 621.165

Обобщение неявной схемы расщепления для моделирования стационарных и нестационарных газодинамических процессов / А. В. Русанов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 174 – 184. Бібліогр.: 11 назв.

Розглянуто неявну безітераційну скінченно-об’ємну схему розщеплення високого порядку точності за просторовими координатами для чисельного інтегрування рівнянь газодинаміки на неструктурованих сітках. Наведено результати чисельного моделювання дозвукових та понадзвукових нев’язких течій стисливого газу в каналі з перешкодою у вигляді кругового сегмента. Виконано порівняння результатів з даними чисельного моделювання в комплексі програм обчислювальної газогідродинаміки FlowER-U.

Ключові слова: неявна схема, висока точність, розщеплення, неструктурована сітка, нев’язка течія.

The article suggests generalization of implicit non-iterative high-order finite volume method with splitting for numerical integration of gas-dynamic equations on unstructured grids. The results of subsonic and supersonic inviscid compressible gas flows numerical simulation in the rectangular domain with circle sector are presented. The ones comparison with numerical data from FlowER-U CFD software is realized.

Key words: implicit scheme, high-order, splitting, unstructured grid, inviscid flow.