

***А. В. ГРАБОВСЬКИЙ, М. А. ТКАЧУК, Н. А. ДЬОМІНА, Г. В. ТКАЧУК, О. А. ІЩЕНКО,
М. М. ТКАЧУК, П. М. КАЛІНІН, І. О. ВОЛОШИНА, В. В. ТРЕТЯК, М. С. САВЕРСЬКА,
С. В. КУЦЕНКО, О. С. ЛЬОЗНИЙ***

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТІЛ ІЗ ПОВЕРХНЯМИ БЛИЗЬКОЇ ФОРМИ

У роботі на прикладі елементів конструкції із номінально близькими (майже співпадаючими) поверхнями описані дослідження контактної взаємодії їхніх деталей. Між елементами контактуючих деталей існує нерівномірно розподілений зазор. Від закону розподілу цього зазору залежить розподіл контактних зон та контактного тиску. Відповідно, від цього залежить напружено-деформований стан контактуючих тіл. Оскільки задача при цьому є суттєво нелінійною, то зі зростанням навантаження закони розподілу контактних зон та контактного тиску змінюються. Це різко змінює характер розв'язку порівняно із варіантом співпадіння контактуючих поверхонь. У останньому випадку розподіл контактного тиску, як встановлено раніше, прямо пропорційний рівню навантажень, а зона контакту є незалежною від рівня навантажень. Отже, для реальних конструкцій, для яких неможливо позбутися відхилень від номінально співпадаючих форм, важливо враховувати вплив варіювання таких збурень на розподіл контактного тиску та на компоненти напружено-деформованого стану. Ці питання досліджені та описані у роботі на прикладі елементів штампів.

Ключові слова: елемент штампового оснащення; напружено-деформований стан; контактний тиск; контактна взаємодія; метод варіаційних нерівностей; варіаційний принцип Калькера; метод скінченних елементів; метод граничних елементів

***А. В. ГРАБОВСКИЙ, Н. А. ТКАЧУК, Н. А. ДЕМИНА, А. В. ТКАЧУК, О. А. ИЩЕНКО,
Н. Н. ТКАЧУК, П. Н. КАЛИНИН, И. О. ВОЛОШИНА, В. В. ТРЕТЬЯК, М. С. САВЕРСКАЯ,
С. В. КУЦЕНКО, О. С. ЛЕЗНЫЙ***

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛ С ПОВЕРХНОСТЯМИ БЛИЗКОЙ ФОРМЫ

В работе на примере элементов конструкции с номинально близкими (почти совпадающими) поверхностями описаны исследования контактного взаимодействия их деталей. Между элементами контактирующих деталей существует неравномерно распределенный зазор. От закона распределения этого зазора зависит распределение контактных зон и контактного давления. Соответственно, от этого зависит напряженно-деформированное состояние контактирующих тел. Поскольку задача при этом существенно нелинейная, то с ростом нагрузки законы распределения контактных зон и контактного давления меняются. Это резко меняет характер решения по сравнению с вариантом совпадения контактирующих поверхностей. В последнем случае распределение контактного давления, как установлено ранее, прямо пропорционально уровню нагрузок, а зона контакта не зависит от уровня нагрузок. Итак, для реальных конструкций, для которых невозможно избавиться отклонений от номинально совпадающих форм, важно учитывать влияние варьирования таких возмущений на распределение контактного давления и на компоненты напряженно-деформированного состояния. Эти вопросы исследованы и описаны в работе на примере элементов штампов.

Ключевые слова: элемент штамповой оснастки; напряженно-деформированное состояние; контактное давление; контактное взаимодействие; метод вариационных неравенств; вариационный принцип Калькера; метод конечных элементов; метод граничных элементов

***A. GRABOVSKIY, M. A. TKACHUK, N. DOMINA, G. TKACHUK, O. ISHCENKO, M. M. TKACHUK,
P. KALININ, I. VOLOSHINA, V. TRETYAK, M. SAVERSKA, S. KUTSENKO, O. LOZNYI***

NUMERICAL ANALYSIS OF CONTACT INTERACTION OF BODIES WITH NEARLY FORM SURFACES

Contact interaction of structural elements has been studied in the case of nominally close (nearly matching) surfaces. A non uniform gap is present between the contacting parts. Contact pressure and contact spot depend on the shape of this gap. Correspondingly so does the stress-strain state of the contacting bodies too. Since the problem is essentially nonlinear, the contact pressure distribution and the contact zones change with the growing loads. The solution is qualitatively different to the case of perfectly matching bodies. For the latter case, the contact pressure is linearly proportional to the load and the contact zone is predefined. Hence for the real structures for which the deviation from the nominal shape is unavoidable the impact of these inaccuracies on the contact pressure distribution and the stress-strain state need to be taken into account. This problem is addressed in the paper by example of elements of stamping dies.

Keywords: element of stamping dies, stress-strain state, contact pressure, contact interaction, variational inequalities, Kalker's variational principle, finite element method, boundary element method

Вступ. Машинобудівні конструкції часто містять у своєму складі вузли та з'єднання, у яких деталі контактують за номінально співпадаючими поверхнями чи лініями. Це, наприклад, штампи, прес-форми, верстатні пристосування, двигуни (поршень–гільза, вал–опора), приводи, зубчасті зачеплення, підшипники, шліцеві та шпонкові з'єднання, системи підресорювання (торсіонні вали), рушії (колеса, котки), трансмісії (гідропередачі, коробки зміни передач, бортові передачі тощо). Традиційні проектні дослідження контактної взаємодії та напружено-деформованого стану (НДС) таких елементів конструкцій базуються на розрахункових моделях, які передбачають варіант

номінально співпадаючих контактуючих поверхонь. Разом із тим у дійсності відбувається відхилення від цього варіанту. Зокрема, це закладається уже на етапах виготовлення (похибки у процесі механообробки, залишкові деформації у ході поверхневого зміцнення, нерівномірні деформації при термообробці, похибки при збиранні тощо). Далі у процесі експлуатації відбуваються додаткові зміщення деталей відносно номінального положення, нерівномірне зношування поверхневих

© А. В. Грабовський, М. А. Ткачук, Н. А. Дьоміна, Г. В. Ткачук, О. А. Іщенко, М. М. Ткачук, П. М. Калінін, І. О. Волошина, В. В. Третяк, М. С. Саверська, С. В. Куценко, О. С. Льозний, 2021

шарів, нерівномірне температурне деформування тощо. Усе це призводить до відхилення геометричної форми поверхонь контактуючих деталей від номінально співпадаючого варіанта.

Традиційні підходи вирішують цю ситуацію шляхом введення поправочних коефіцієнтів. Проте це не усуває існуючу проблему, оскільки малі зміни розподілу зазору між контактуючими деталями можуть призводити до суттєвої зміни розподілу контактного тиску. Це призводить, у свою чергу, не тільки до кількісних, але й до якісних змін як у розподілі контактних сил, так і у розподілі компонент напружено-деформованого стану. Ці зміни неможливо врахувати тільки певними коефіцієнтами. Тому важливо звертатися до повної строгої постановки задачі про контактну взаємодію без початкового декларування гіпотези про співпадіння форми контактних поверхонь. Це складає напрямок досліджень, описаних у цій роботі.

Аналіз методів дослідження контактної взаємодії елементів конструкцій. Як відзначається у роботі [1], визначальна роль контактної взаємодії у формуванні напружено-деформованого стану деталей конструкцій зумовила інтерес до розвитку моделей та методів її дослідження [2]. На розвиток аналітичних моделей Герца та інших [2] значний розвиток отримали також варіаційні формулювання [3, 4]. Крім, так би мовити, підходів на макрорівні, значна увага приділяється і мікрорівневим моделям. Це, зокрема, питання впливу на контактну взаємодію форми контактуючих поверхонь [5], адгезії [6–8], текстури та властивостей поверхневого шару [9–11] та інших чинників. Разом із тим повного вирішення проблема обґрунтування адекватних моделей напружено-деформованого стану із урахуванням контактної взаємодії за близькими або майже співпадаючими (конгруентними) поверхнями не отримала.

Варто також зазначити, що проблема аналізу контактної взаємодії за наявності малих нерівномірно розподілених зазорів між тілами має багато проблемних аспектів. З одного боку, традиційні підходи із використанням моделей типу Герца [1, 2] виходять за межі своєї застосовності. З іншого боку, чисельне моделювання, наприклад, із залученням методу скінченних елементів (МСЕ) [2, 12], привносить свою похибку, яка зумовлена похибками чисельного моделювання.

Зокрема, це викликане похибками геометричної апроксимації форми контактуючих поверхонь, особливо за складного закону розподілу форми початкового зазору між тілами.

Таким чином, потрібен пошук альтернативних шляхів. Певні спроби у цьому напрямку здійснені у роботі [1]. Там поєднані, з одного боку, аналітичний опис детермінованого заданого закону розподілу зазору між тілами, а, з іншого, – чисельне моделювання задачі про контактну взаємодію цих тіл, яке здійснене на прикладі елементів штампового оснащення. Цей підхід пропонується розвинути у роботі.

Мета роботи – аналіз контактної взаємодії тіл із поверхнями близької форми за заданого малого збурення зазору між ними, здійснюване на прикладі

елементів штампового оснащення.

Розрахункові моделі досліджуваних об'єктів. Загальний підхід, моделі та методи досліджень описані у роботі [1]. Там же описані геометрична та скінченно-елементні моделі, що застосовуються для досліджень. Ці моделі доповнені способом задавання закону розподілу початкового зазору між матрицею та матеріалом, що штампується (рис. 1).

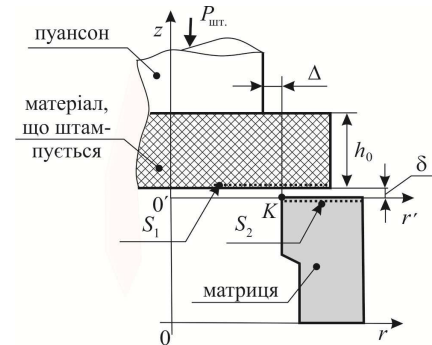


Рисунок 1 – Схема взаємодії елементів системи «пуансон – матеріал, що штампується – матриця» із варійованим зазором $\delta(r)$

Номінальний варіант (частини поверхонь S_1 та S_2 співпадають) відповідає випадку

$$\delta(r) \equiv 0. \quad (1)$$

У загальному випадку функція $\delta(r)$ є довільною, а у багатьох випадках – залежить від стохастичних чинників. Проте у деяких випадках можна виділити групу домінуючих тенденцій та компонент, що дає можливість виокремити характерні закони розподілу $\delta(r)$. Наприклад, для системи, що досліджується (див. рис. 1), із міркувань того, що матриця у ході штампування підлягає зношуванню переважно у зоні робочої кромки K , а у ході виготовлення відбувається деяка деформація верхньої поверхні S_2 (див. рис. 1), то зазор δ можна подати у вигляді відрізка над сектором кола радіусом R (окреслює осьовий переріз поверхні S_2) із центром, розташованим на радіальній координаті r^* від кромки K (рис. 2).

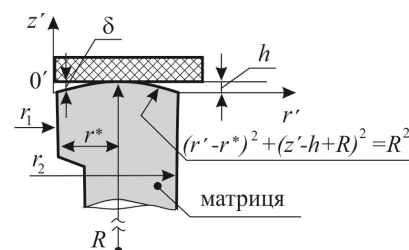


Рисунок 2 – Моделювання зазору δ

Тоді розподіл зазору можна характеризувати двома безрозмірними параметрами:

$$\alpha = h / h_0, \quad \gamma = r^* / (r_2 - r_1). \quad (2)$$

Якщо ввести до розгляду безрозмірну радіальну координату

$$\rho = (r' - r_1) / (r_2 - r_1), \quad (3)$$

то розподіл безрозмірного зазору

$$\delta \sim = \delta(r) / h \quad (4)$$

можна подати як

$$\delta \sim = \delta \sim (\rho, \alpha, \gamma). \quad (5)$$

Тобто, маємо розподіл безрозмірного зазору $\delta \sim$ від безрозмірної координати ρ , який (розподіл) параметрично залежить від α та γ . Варіюючи α та γ , можна отримувати сімейства кривих (ρ, α, γ) (рис. 3).

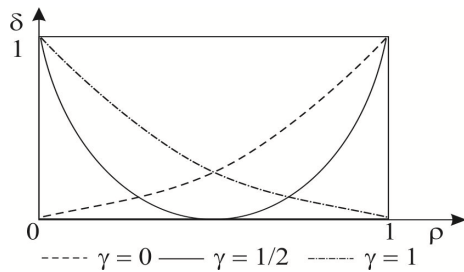


Рисунок 3 – Сімейство кривих $\delta \sim (\rho, \alpha, \gamma)$

В принципі, не обмежуючись обраною формою перерізу збуреної поверхні S_2 (у цьому випадку – коло радіуса R , див. рис. 2), можна будь-який розподіл $\delta \sim (\rho)$ за довільної функції, що описує збурення цієї поверхні S_2 , подати у вигляді невід’ємної функції, яка на інтервалі $\rho \in [0;1]$ досягає значень у діапазоні $[0;1]$. Відповідно, задаючи таку функцію, можна як розв’язок контактної задачі отримувати область контакту, розподіл контактного тиску на ній та НДС пуансона, матриці та матеріалу, що штампується.

У конкретному випадку, що розглядається, варіювання зазору здійснюється зміною параметрів α та γ . Відповідно, область дійсного контакту матиме вигляд кільця, що у перерізі площиною $z'r'$ (див. рис. 2) матиме вигляд відрізка $[a;b]$, а відповідні безрозмірні параметри

$$a \sim = a / r_1, \quad b \sim = b / r_1. \quad (6)$$

Вводячи до розгляду силове й кінематичне навантаження (сила штампування $P_{шт.}$ та хід повзуна преса d (трансформується у зміщення верхньої площини пуансона) відповідно), можна також ввести їх безрозмірні відповідники:

$$P \sim = P_{шт.} / P_{шт.}^{max}; \quad d \sim = d / d_{max}, \quad (7)$$

де величини з індексами «max» відповідають

максимальним значенням цих величин.

Також можна розглянути як контрольовані величини та їх безрозмірні аналоги (рис. 4, 5):

– площу області дійсного контакту

$$S_c = \pi(b^2 - a^2); \quad S_c \sim = (b^2 - a^2) / (2r_1 h_0); \quad (8)$$

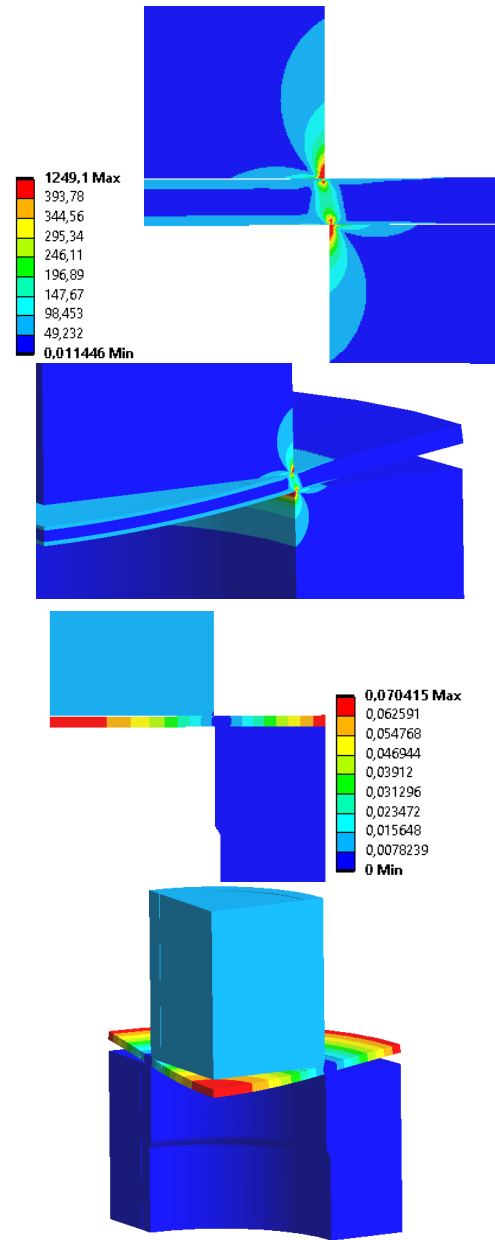


Рисунок 4 – Характеристики НДС досліджуваної системи контактуючих елементів (при навантаженні 8 кН, поверхня плоска, відображення – у більшому масштабі)

– максимальний контактний тиск

$$q = \max(q(r_1 \in S_c)); \quad (9)$$

$$q \sim = q / [P_{шт.} / (2\pi r_1 h_0)];$$

– максимальну інтенсивність напружень за Мізесом у матриці

$$\sigma = \max(\sigma(r_1, z_1)); \quad \sigma \sim = \frac{\sigma}{P_{шт.} / (2\pi r_1 h_0)}. \quad (10)$$

Із розумінням того, що отримувана задача про контактну взаємодію у досліджуваній системі не є масштабованою, а, відповідно, введені параметри не характеризують її НДС вичерпно та однозначно, тим не менш їх залежність від інших параметрів дає певне уявлення про якісний характер поведінки системи (хоч і визначене за конкретних параметрів досліджуваної системи тіл).

Результати досліджень НДС системи «пуансон – матеріал, що штампується - матриця». Як і в роботі [1], як базовий варіант досліджуваної системи було обрано пуансон діаметром

$2r_1 - 0,2h_0 = 29,8 \cdot 10^{-3}$ м; товщина листа матеріалу, що штампується – $h_0 = 10^{-3}$ м; діаметр матриці $2r_1 = 30 \cdot 10^{-3}$ м; максимальна сила штампування $P_{шт.}^{max} = 50$ кН; висота пагорба на верхній площині матриці $h = 0,1 \cdot 10^{-3}$ м.

У табл. 1 та на рис. 5–13 наведено характерні картини розподілу контактної тиску та інтенсивності напружень за Мізесом за різних значень навантаження $P_{шт.}$, радіуса R та γ .

Таблиця 1 – Розподіли контактної тиску за різної величини $P_{шт.}$, R та γ

Параметр	Розподіл q , МПа	Розподіли q^{\sim}
$R = 0,5$ м		
$P_{шт.} = 1$ кН ($P^{\sim} = 0,02$)		
$P_{шт.} = 2$ кН ($P^{\sim} = 0,04$)		
$P_{шт.} = 5$ кН ($P^{\sim} = 0,1$)		
$P_{шт.} = 10$ кН ($P^{\sim} = 0,2$)		

Параметр	Розподіл q , МПа	Розподіли q^{\sim}
$R = 0,5 \text{ м}$		
$P_{\text{шт.}} = 20 \text{ кН}$ ($P^{\sim} = 0,4$)		
$P_{\text{шт.}} = 50 \text{ кН}$ ($P^{\sim} = 1,0$)		
$R = 2,0 \text{ м}$		
$P_{\text{шт.}} = 1 \text{ кН}$ ($P^{\sim} = 0,02$)		
$P_{\text{шт.}} = 2 \text{ кН}$ ($P^{\sim} = 0,04$)		
$P_{\text{шт.}} = 5 \text{ кН}$ ($P^{\sim} = 0,1$)		

Параметр	Розподіл q , МПа	Розподіли q^{\sim}
$R = 2,0$ м		
$P_{шт.} = 10$ кН ($P^{\sim} = 0,2$)		
$P_{шт.} = 20$ кН ($P^{\sim} = 0,4$)		
$P_{шт.} = 50$ кН ($P^{\sim} = 1,0$)		

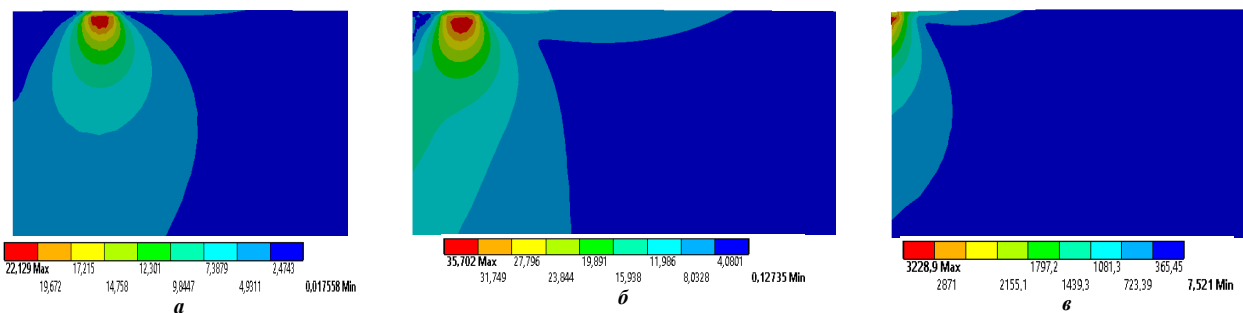


Рисунок 5 – Розподіли інтенсивності напружень за Мізе-сом у матриці за різної величини $P_{шт.}$ ($\gamma = 0,25$, $R = 0,5$ м):
 a – 1 кН; b – 2 кН; v – 50 кН

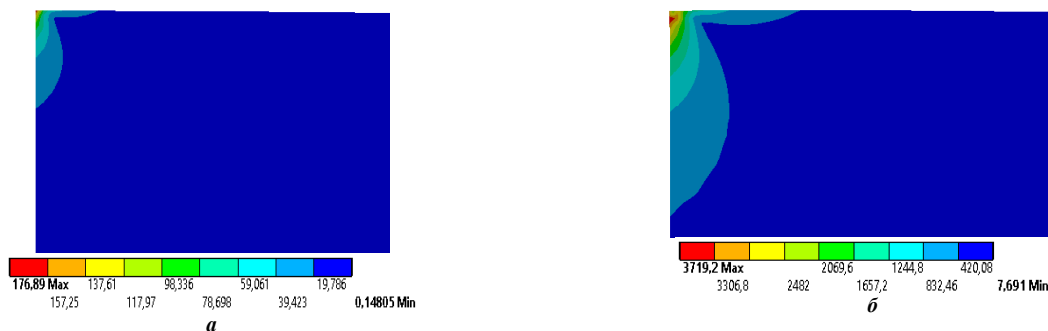


Рисунок 6 – Розподіли інтенсивності напружень за Мізесом у матриці за різної величини $P_{шт.}$ ($\gamma = 0$, $R = 0,5$ м):
 a – 1 кН; b – 50 кН

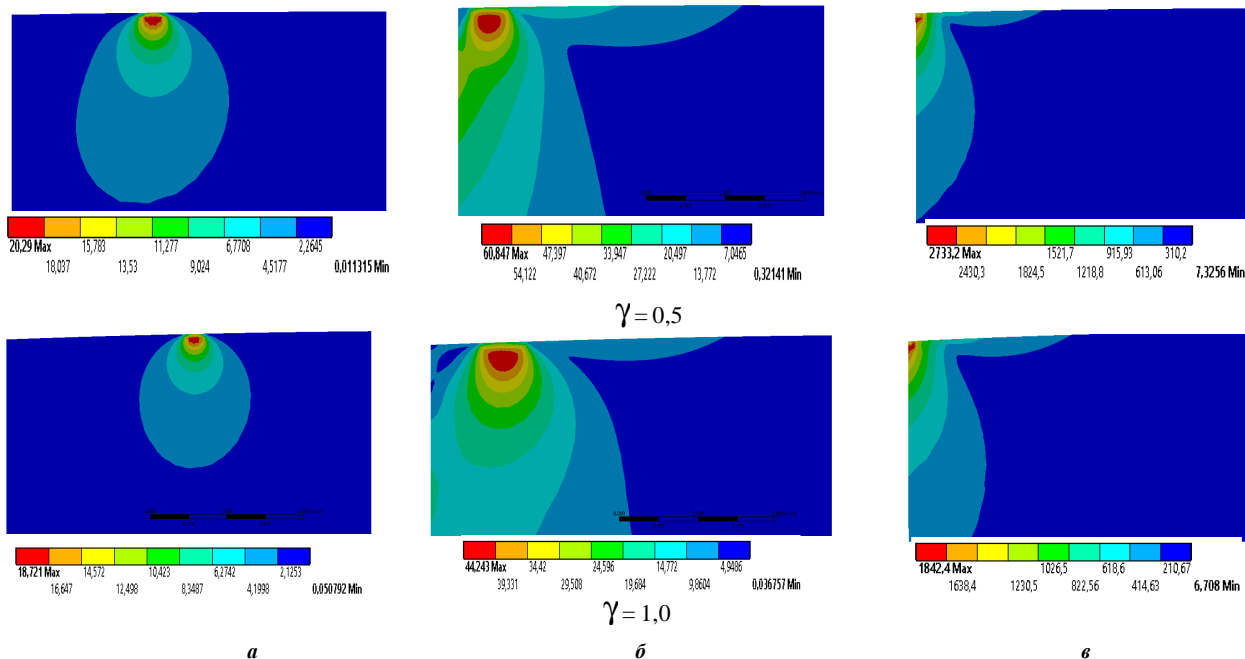


Рисунок 7– Розподіли інтенсивності напружень за Мізесом у матриці за різних значень величин $P_{шт.}$ та γ ($R = 0,5$ м):
 a – 1 кН; b – 5 кН; v – 50 кН

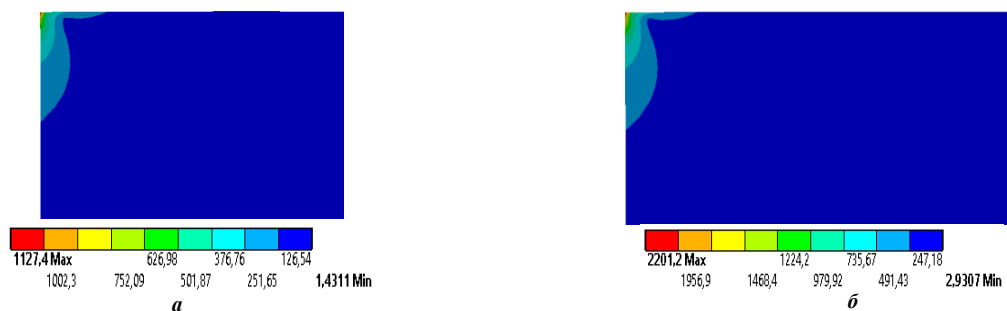


Рисунок 8 – Розподіли інтенсивності напружень за Мізесом у матриці за різними значеннями величин $P_{шт.}$
 ($\gamma = 0,25$; $R = 1$ м): a – 10 кН; b – 20 кН

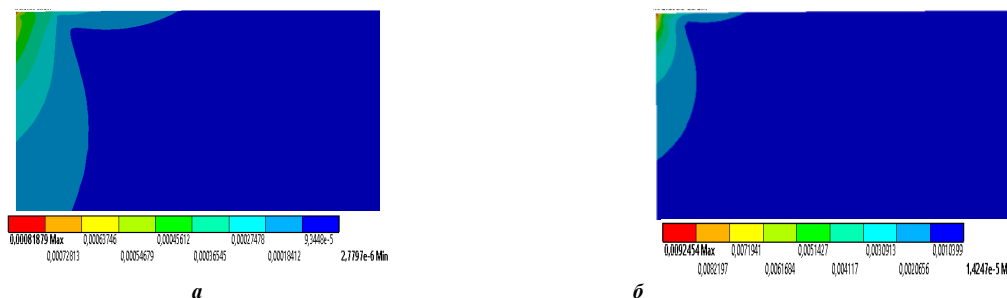


Рисунок 9 – Розподіли інтенсивності напружень за Мізесом у матриці за різними значеннями величин $P_{шт.}$
 ($\gamma = 0,5$ $R = 1$ м): a – 5 кН; b – 20 кН

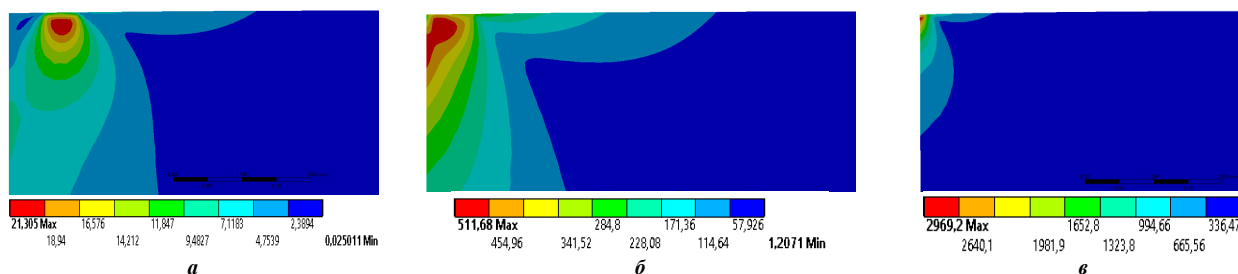


Рисунок 10 – Розподіли інтенсивності напружень за Мізесом у матриці за різними значеннями величин $P_{шт.}$
 ($\gamma = 0,75$ $R = 1$ м): a – 2 кН; b – 10 кН; v – 50 кН

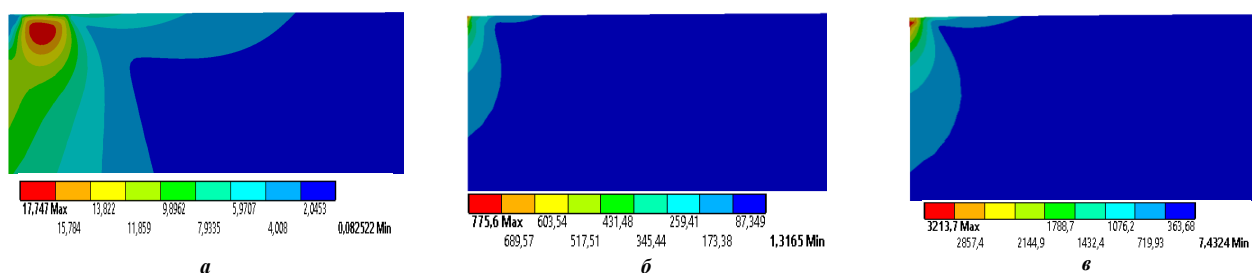


Рисунок 11 – Розподіли інтенсивності напружень за Мізесом у матриці за різними значеннями величин $P_{шт.}$ ($\gamma = 1,0$ $R = 2$ м): а – 2 кН; б – 10 кН; в – 50 кН

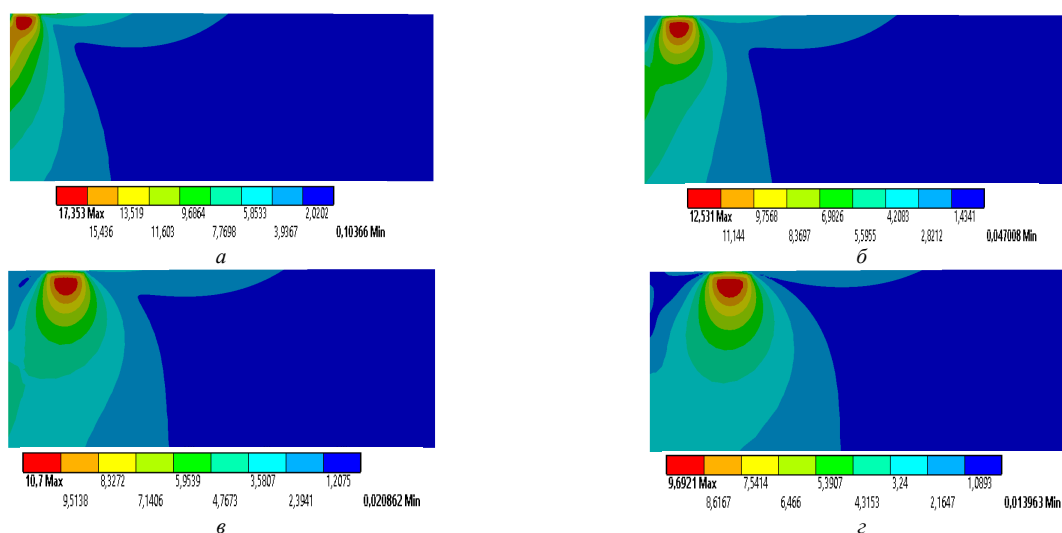


Рисунок 12 – Розподіли інтенсивності напружень за Мізесом у матриці за різними значеннями величин γ ($P_{шт.} = 1,0$ кН, $R = 2$ м): а – 0,25; б – 0,5; в – 0,75; з – 1,0

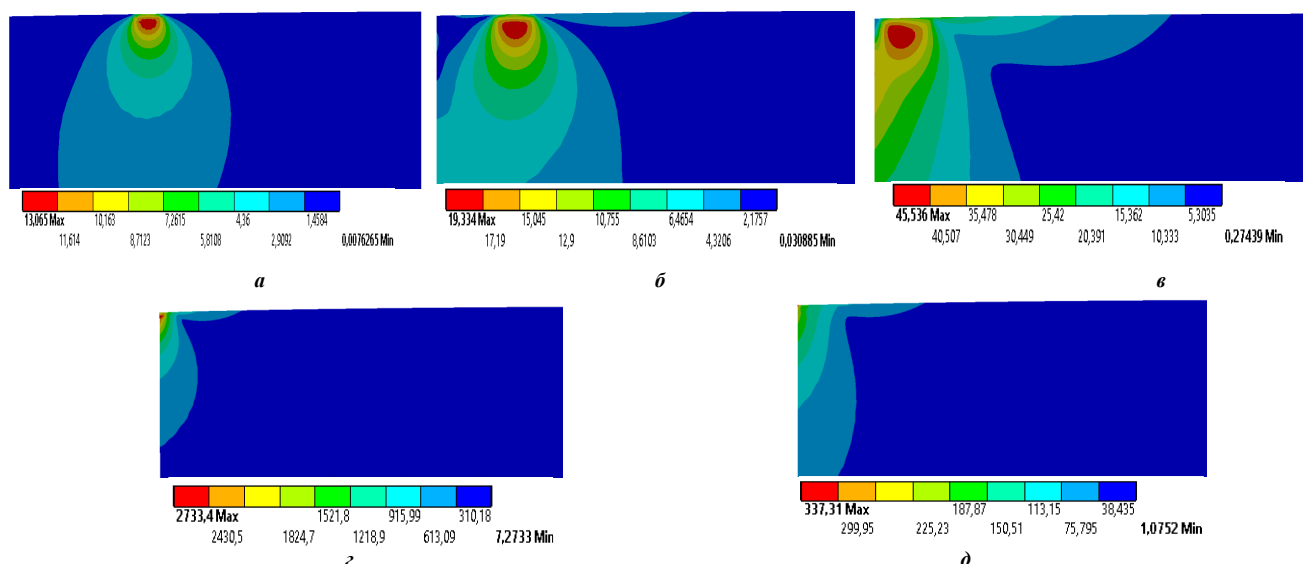


Рисунок 13 – Розподіли інтенсивності напружень за Мізесом у матриці за різними значеннями величин $P_{шт.}$ ($\gamma = 1,0$ $R = 1$ м): а – 1 кН; б – 2 кН; в – 5 кН; г – 10 кН; д – 50 кН

На основі обробки результатів досліджень можна побудувати різноманітні залежності $a^{\sim}(\alpha, \gamma, P^{\sim})$, $b^{\sim}(\alpha, \gamma, P^{\sim})$, $S_c^{\sim}(\alpha, \gamma, P^{\sim})$, $q^{\sim}(\alpha, \gamma, P^{\sim})$, $\sigma^{\sim}(\alpha, \gamma, P^{\sim})$ тощо.

Аналіз результатів розрахунків НДС

контактуючих елементів системи «пуансон – матеріал, що штампується – матриця». Як видно із аналізу результатів здійснених розрахунків напружено-деформованого стану досліджуваної системи контактуючих елементів системи «пуансон – матеріал, що штампується – матриця», для

номінального варіанту системи (за $\alpha = 0$, тобто зі співпадаючими поверхнями матриці та матеріалу, що штампується) реалізуються відомі [1] закономірності:

$$\begin{aligned} S_c(P^\sim) &= \text{const}; \quad a^\sim(P^\sim) = 1; \\ b^\sim(P^\sim) &\approx 0, 1h_0 / r_1 \approx \text{const}; \\ q^\sim(P^\sim) &\approx k_1 P^\sim; \quad \sigma^\sim(P^\sim) \approx k_2 P^\sim, \end{aligned} \quad (11)$$

де k_1 і k_2 – деякі коефіцієнти, не залежні від P^\sim .

Залежності (11) втрачають справедливність за $\alpha > 0$. При цьому за малих γ відмінність від залежностей (11) незначна, а за $\gamma \rightarrow 1$ ці залежності різко відхиляються від (11). Разом із тим такі відмінності різко проявляються за малих P^\sim , а із зростанням P^\sim до 1 спостерігається збіжність до співвідношень (11).

Висновки. У роботі описано підхід до аналізу напружено-деформованого стану контактуючих тіл за заданого збурення їх форми від номінально співпадаючої (конгруентної). При цьому установлені такі особливості:

1. У ході чисельних досліджень визначено, що у разі контактування тіл за співпадаючими (конгруентними) поверхнями, тобто за нульового зазору між ними у ненавантаженому стані, а також за домінування нормальних компонент у векторі повних переміщень, спостерігаються дві закономірності:

1) – зі зростанням рівня навантажень область контакту залишається постійною;

2) – при цьому розподіл контактного тиску зберігається, а його рівень прямо пропорційний рівню навантажень.

2. Визначені чисельно закономірності (див. п. 1) підтверджуються результатами експериментальних досліджень.

3. Збурення форми співпадаючих (конгруентних) поверхонь контактуючих тіл, які призводять до формування між цими поверхнями нерівномірно розподілених зазорів, дають у результаті порушення визначених чисельно закономірностей (див. пп. 1, 2). При цьому вплив такого збурення тим вищий, чим більший рівень цих збурень та чим менший рівень навантажень.

4. Для певних розподілів збурень початкового зазору (у дослідженому випадку – між матрицею та матеріалом, що штампується), зокрема, коли уздовж радіальної координати (розглядається осесиметричний випадок) на поверхні матриці є опуклість, окреслена дугою кола, зміна області контакту та розподілу контактного тиску зі зростанням навантаження має тенденцію до зближення із аналогічними областями та розподілами, визначеними для номінального варіанту (тобто співпадіння геометричної форми та нульовий зазор між контактуючими поверхнями).

Надалі плануються подальші експериментальні дослідження та вплив збурень форми поверхонь

контактуючих тіл на розподілі контактних областей і контактного тиску.

Список літератури

1. Грабовський А. В., Ткачук М.А., Дьоміна Н. А. Ткачук, Г.В., Іщенко О.А., Волошина І. О., Третяк В. В. Розрахунково-експериментальне дослідження контактної взаємодії тіл із поверхнями близької форми. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: *Машинознавство та САПР*. 2021. № 1. С. 22–32.
2. Johnson K. L. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press. 1985. 462 p.
3. Hlavacek I., Haslinger J., Necas, Lovisek J. *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*. Berlin, New York: Springer. Verlag. 1988. 327 p.
4. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics. *J. Inst. Math. and Appl.* 1977. Vol. 20. P. 199–221.
5. Popov V.L., Pohrt R., Li Q. Strength of adhesive contacts: Influence of contact geometry and material gradients. *Friction*. 2017. № 5(3). P. 308–325.
6. Qiang L., Pohrt R., Popov V.L. Adhesive strength of contacts of rough spheres. *Frontiers in Mechanical Engineering*. 2019, vol. 5, no. 7, pp. 1–9.
7. Li Q., Popov V.L. Adhesive force of flat indenters with brush structure. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*. 2018. Vol. 16 (1). P. 1–8.
8. Ciavarella M. Adhesive rough contacts near complete contact. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015. Vol. 104. P. 104–111.
9. Ciavarella M., Papangelo A. A random process asperity model for adhesion between rough surfaces. *Journal of Adhesion Science and Technology*. 2017. P. 1–23.
10. Martynyak, R.M., Prokopyshyn, I.A. & Prokopyshyn, I.I. Contact of Elastic Bodies with Nonlinear Winkler Surface Layers. *Journal of Mathematical Sciences*. 205, 535–553 (2015).
11. Slobodyan B.S., Lyashenko B. A., Malanchuk N. I., Marchuk V. E., Martynyak R.M. Modeling of Contact Interaction of Periodically Textured Bodies with Regard for Frictional Slip. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 215 (1). P. 110–112.
12. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. 7th ed. Oxford: Butterworth–Heinemann, 2013. 756 p.

References (transliterated)

1. Grabovskiy A. V., Tkachuk M.A., Domina N. A. Tkachuk, H.V., Ishchenko O.A., Voloshyna I. O., Tretiak V. V. Rozrakhunkovo-eksperymentalne doslidzhennia kontaktnoi vziaemodii til iz poverkhniamy blyzkoj formy. *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI»*. Seriya: *Mashynoznavstvo ta SAPR*. 2021, no. 21, pp. 22–32.
2. Johnson K. L. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press. 1985. 462 p.
3. Hlavacek I., Haslinger J., Necas, Lovisek J. *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*. Berlin, New York: Springer. Verlag. 1988. 327 p.
4. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics. *J. Inst. Math. and Appl.* 1977, vol. 20, pp. 199–221.
5. Popov V.L., Pohrt R., Li Q. Strength of adhesive contacts: Influence of contact geometry and material gradients. *Friction*. 2017, no. 5(3), pp. 308–325.
6. Qiang L., Pohrt R., Popov V.L. Adhesive strength of contacts of rough spheres. *Frontiers in Mechanical Engineering*. 2019, vol. 5, no. 7, pp. 1–9.
7. Li Q., Popov V.L. Adhesive force of flat indenters with brush structure. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*. 2018, vol. 16 (1), pp. 1–8.
8. Ciavarella M. Adhesive rough contacts near complete contact. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015, no. 104, pp. 104–111.
9. Ciavarella M., Papangelo A. A random process asperity model for adhesion between rough surfaces. *Journal of Adhesion Science and Technology*. 2017. P. 1–23.
10. Martynyak, R.M., Prokopyshyn, I.A. & Prokopyshyn, I.I. Contact of Elastic Bodies with Nonlinear Winkler Surface Layers. *Journal of Mathematical Sciences*. 2015, no. 205, pp.535–553.
11. Slobodyan B.S., Lyashenko B. A., Malanchuk N. I., Marchuk V. E.,

Martyniak R.M. Modeling of Contact Interaction of Periodically Textured Bodies with Regard for Frictional Slip. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016, no. 215 (1), pp. 110–112.

12. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. *The Finite Element*

Method: Its Basis and Fundamentals. 7th ed. Oxford: Butterworth–Heinemann, 2013. 756 p.

Надійшла (received) до редакції 12.10.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Грабовський Андрій Володимирович (Грабовский Андрей Владимирович, Grabovskiy Andrey) – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший науковий співробітник кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6116-0572>; e-mail: andrej8383@gmail.com.

Ткачук Микола Анатолійович (Ткачук Николай Анатольевич, Tkachuk Mykola A.) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4174-8213>; тел.: (057) 707-69-02; e-mail: tma@tmm-sapr.org.

Дьоміна Наталія Анатоліївна (Демина Наталья Анатольевна, Domina Natalia) – кандидат технічних наук, доцент, Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного, доцент кафедри «Вища математика і фізика», м. Мелітополь, Запорізька обл., Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1118-1834>; e-mail: natalia.domina@tsatu.edu.ua

Ткачук Ганна Володимирівна (Ткачук Анна Владимировна, Tkachuk Ganna) – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», кафедра «Інформаційні технології та системи колісних і гусеничних машин ім. О. О. Морозова», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0435-1847>; e-mail: TkachuckAV@tmm-sapr.org

Ищенко Ольга Анатоліївна (Ищенко Ольга Анатольевна, Ishchenko Olha) – кандидат технічних наук, Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного, старший викладач кафедри вищої математики та фізики; м. Мелітополь, Запорізька обл., Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5274-2618>; e-mail: olha.ishchenko@tsatu.edu.ua.

Ткачук Микола Миколайович (Ткачук Николай Николаевич, Tkachuk Mykola M.) – доктор технічних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший науковий співробітник кафедри інформаційних технологій та систем колісних і гусеничних машин імені О.О. Морозова; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4753-4267>; e-mail: m.tkachuk@tmm-sapr.org

Калінін Павло Миколайович (Калинин Павел Николаевич, Kalinin Pavel) – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), доцент, Національна академія Національної гвардії України, доцент кафедри інженерної механіки; м. Харків, Україна; тел.: (099) 725-12-82; ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9724-0630>; e-mail: pkalining@gmail.com

Волошина Ірина Олександрівна (Волошина Ирина Александровна, Voloshina Iryna) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», студентка гр. МІТ-218м, м. Харків, Україна; e-mail: s1802@tmm-sapr.org

Третяк Владислав Володимирович (Третьяк Владислав Владимирович, Tretyak Vladislav) – студент гр. МІТ-219м, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; м. Харків, Україна; e-mail: vladeslav2205@gmail.com

Саверська Марія Сергіївна (Саверская Мария Сергеевна, Saverska Mariia) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9271-9586>; e-mail: m.saverska@tmm-sapr.org

Куценко Сергій Володимирович (Куценко Сергей Владимирович, Kutsenko Serhii) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», молодший науковий співробітник кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин»; м. Харків, Україна, викладач-стажист кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин»; Харків, e-mail: skutsenko@tmm-sapr.org.

Льозний Олег Сергійович (Лезный Олег Сергійович, Loznyi Oleg) – студент гр. МІТ87Б(ТМ), Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; м. Харків, Україна; e-mail: s1708@tmm-sapr.org