УДК 515.2

МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМНИХ ПОЛОЖЕНЬ ЛАНОК МАЯТНИКА ЗА УМОВИ ВІДСУТНОСТІ ГРАВІТАЦІЇ

Куценко Л.М., д.т.н.
Національний університет цивільного захисту України (м. Харків, Україна),
Адашевська І.Ю., к.т.н.
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут» (Україна)

Розглянуто спосіб визначення у часі взаємного положення на площині ланок багатоланкового маятника за умови відсутності гравітації. Обговорюється можливість застосування способу для розгортання елементів конструкцій (антен) в умовах невагомості.

Ключові слова – геометричне моделювання, негравітаційний маятник, рівняння Лагранжа другого роду, розгортання антени.

Постановка проблеми. У 1788 році Лагранж застосував варіаційний принцип до розрахунку механічних конструкцій з урахуванням їх кінематичних зв'язків, використовуючи поняття кінетичної й потенціальної енергії механічної системи. У результаті Лагранж одержав універсальний підхід для опису руху будь-якої механічної системи у вигляді рівнянь руху, відомих як рівняння Лагранжа II роду. У роботі [1] розглянуто можливість застосування рівнянь Лагранжа II роду за умови відсутності сили гравітації (тобто у разі невагомості), і, як наслідок, «нульової» потенціальної енергії механічної системи. Тому актуальним буде питання реалізації цієї ідеї на практиці.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Як приклад механічної системи розглянемо n-ланковий маятник [2], складений з невагомих нерозтяжних стержнів довжин L_i (i=1..n), і шарнірно сполучених між собою прикінцевими вузловими точками, на яких закріплено кулі з масами m_i (i = 1..n). Узагальненими координатами вважатимемо кути $u_i(t)$ (i=1..n), утворені відповідними ланками з вертикалями (рис. 1). Для спрощення вважатимемо, що тертя руху відсутнє, а точка кріплення нерухома в системі координат площини.

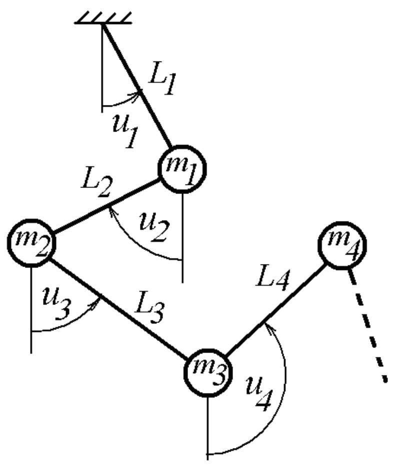


Рис. 1. Схема n - ланкового маятника

Опис коливання маятника в площині за умови відсутності дисипативних сил виконується на основі рівнянь Лагранжа ІІ роду [3]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial u_i'}L\right)-\frac{\partial}{\partial u_i'}\left(L\right)=0,\ (i = 1..n), \qquad (1)$$

де $L = K(n) - P(n)$ - лагранжиан; $K(n)$- кінетична енергія системи; $P(n)$ - потенціальна енергія системи; u_i (t)- i-та узагальнена координата (кут між вертикаллю і ланкою); $u_i{}' = \frac{d}{dt}u_i(t)$.

Для обчислення кінетичної та потенціальної енергії маємо вирази [2,3]:

$$K(n)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}m_k\left[\left(-\sum_{i=1}^{k-1}L_i\cos(u_i(t))\frac{du_i(t)}{dt}-L_k\cos(u_k(t))\frac{du_k(t)}{dt}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{i=1}^{k-1}-L_i\sin(u_i(t))\frac{du_i(t)}{dt}-L_k\sin(u_k(t))\frac{du_k(t)}{dt}\right)^2\right]; \qquad (2)$$

$$P(n)=g\sum_{k=1}^{n}m_k\left(\sum_{i=1}^{k-1}L_i\cos(u_i(t))+L_k\cos(u_k(t))\right). \qquad (3)$$

У результаті опис руху n-ланкового маятника одержимо у вигляді системи з n диференціальних рівнянь відносно кутів $u_i(t)$ (i=1..n), складених за допомогою рівнянь Лагранжа ІІ роду (1). У випадку негравітаційного маятника необхідно прийняти $P(n)$=0 [1].

Формулювання цілей статті. Метою статті є розробка способу визначення в часі взаємного положення на площині ланок багатоланкового маятника за умови відсутності гравітації. Обговорити можливість застосування способу для розгортання елементів стержневих конструкцій (наприклад, антен) в умовах невагомості.

Основна частина. Для прикладу розглянемо чотириланковий маятник (n=4). При розв’язанні рівнянь Лагранжа ІІ роду слід враховувати такі параметри [3] (далі всі значення в величинах умовних одиниць):

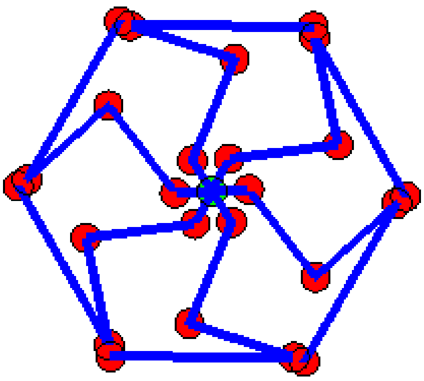
- вектор довжин ланок маятника: $\mathbf{L} = \{L_1, L_2, L_3, L_4\}$;
- вектор значень мас куль: $\mathbf{m} = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$.

При розв’язанні системи рівнянь слід враховувати початкові умови:

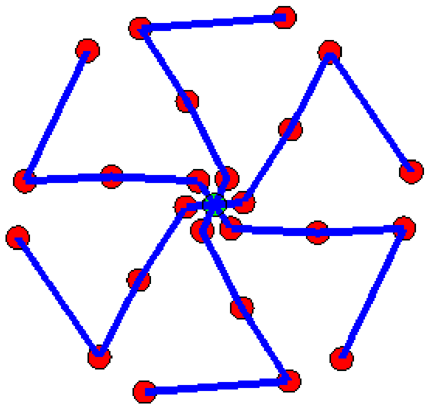
- вектор початкових кутів відхилень: $\boldsymbol{\theta}=\{u_1(0), u_2(0), u_3(0), u_4(0)\}$.
- вектор початкових швидкостей, наданих кутам відхилень: $\boldsymbol{\theta}' = \{u_1'(0), u_2'(0), u_3'(0), u_4'(0)\}$.

В якості прикладу впроваджень негравітаційних маятників наведемо технологію розгортання конструкцій в умовах невагомості. Для цього початкове положення ланок маятника доцільно обрати у компактному вигляді касети (наочно це нагадує вигляд побутового метра у складеному стані): $\boldsymbol{\theta} = \{\pi/2, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2\}$, а також необхідно задати значення координат векторів **L** і **m**. Крім того вважається, що нерухома точка маятника прикріплена до тіла, маса якого незмірно більша порівняно з масами куль у вузлових точках. Ініціювати коливання негравітаційного маятника будемо шляхом вибору координат вектора початкових швидкостей, наданих кутам відхилень. Наприклад, $\boldsymbol{\theta}' = \{0, A, 0, 0\}$ означає, що тільки кулі № 2 масою m_2 надано початкову швидкість величиною A умовних одиниць. Для розгортання конструкцій в площині при невагомості такий підхід має певні переваги. Адже використовуючи (теоретично) лише один реактивний двигун можна забезпечити певну прогнозовану геометричну форму ланкам маятника. Далі для прикладу розглянуто «зіркові» конструкції з шести чотириланкових маятників зі спільним вузлом кріплення, кути між якими мають значення $\pi/3$.

Приклад 1. Нехай $\mathbf{L} = \{1, 3, 3, 5\}$ і $\mathbf{m} = \{1,1,1,1\}$ та початкові умови $\boldsymbol{\theta} = \{\pi/2, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2\}$; $\boldsymbol{\theta}' = \{0, 5, 0, 0\}$. На рис. 2 наведено одержані зображення конструкцій та значення кутів, які характеризують положення ланок маятника.



а



б

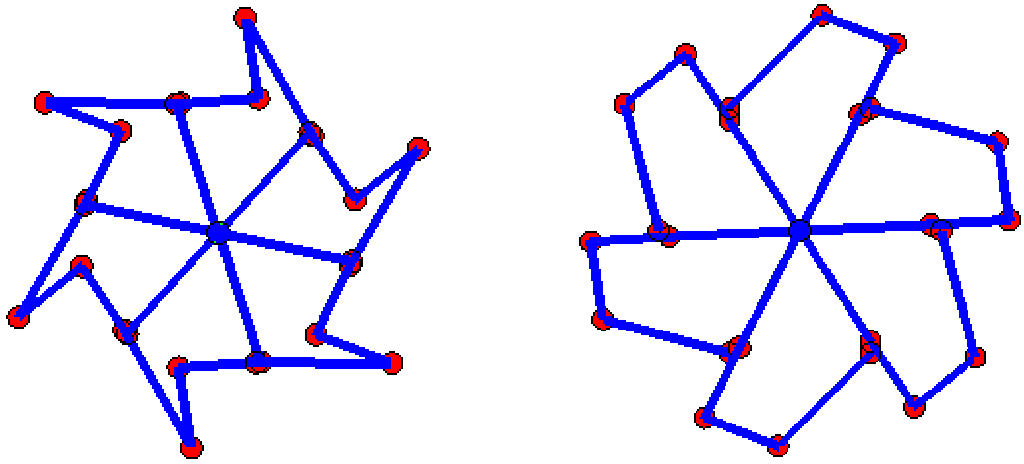
а) u_1=0,56822; u_2=0,39626; u_3=1,2615; u_4= -1,5755

б) u_1=-0,44305; u_2=0,47496; u_3=0,572; u_4= -1,4954

Рис. 2. Зображення конструкцій для прикладу 1

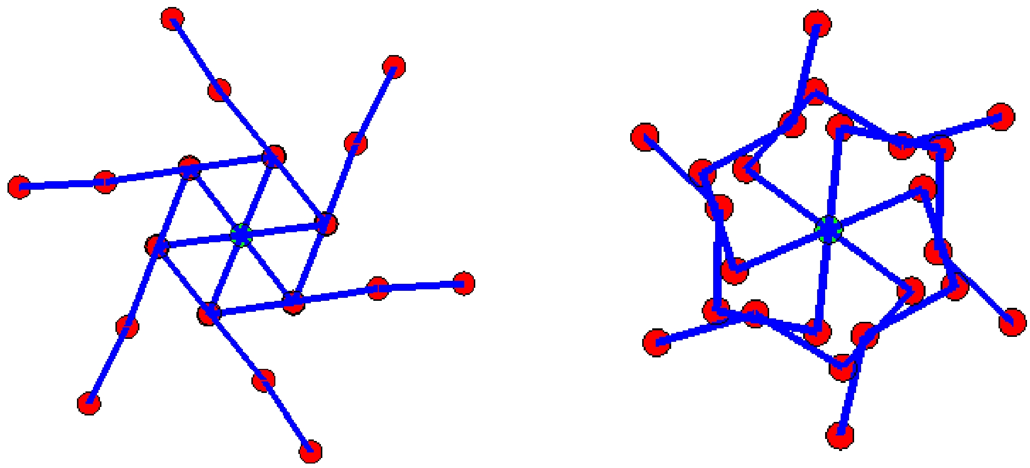
Приклад 2. Нехай $\mathbf{L} = \{5, 3, 3, 5\}$ і $\mathbf{m} = \{1,1,1,1\}$ та початкові умови $\boldsymbol{\theta} = \{\pi/2, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2\}$; $\boldsymbol{\theta}' = \{0, 5, 0, 0\}$. На рис. 3 наведено одержані зображення конструкцій та значення кутів, які характеризують положення ланок маятника.

Приклад 3. Нехай $\mathbf{L} = \{3, 3, 3, 3\}$ і $\mathbf{m} = \{1,1,1,1\}$ та початкові умови $\boldsymbol{\theta} = \{\pi/2, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2\}$; $\boldsymbol{\theta}' = \{0, 0, 5, 0\}$. На рис. 4 наведено одержані зображення конструкцій та значення кутів, які характеризують положення ланок маятника.



а б

а) u_1=1,3605; u_2=-0,45295; u_3=1,2070; u_4= -1,5763;
б) u_1=-0,47715; u_2=-0,46324; u_3=1,2053; u_4= 2,3583
Рис. 3. Зображення конструкцій для прикладу 2



а б

а) u_1=1,6991; u_2=-2,4712; u_3=3,8223; u_4= -2,5591
б) u_1=5,1226; u_2=-2,8241; u_3=2,0679; u_4= -3,3807
Рис. 4. Зображення конструкцій для прикладу 3

Пошук розв’язків здійснювався за допомогою складеної автором програми побудови анімаційних зображень залежно від часу розгортання конструкції. Прийнятний момент фіксувався візуально, і для нього виводилися значення кутів, які характеризують положення ланок маятника. В разі досягнення прийнятного положення ланок, його слід зафіксувати «контактом» між відповідними кулями.

Висновки. Наведений спосіб дозволяє визначити в часі взаємне положення на площині ланок багатоланкового маятника за умови відсутності гравітації. Одержані результати орієнтовані на розвиток технологій розгортання конструкцій в умовах невагомості.

Література

1. Szuminski W. Dynamics of multiple pendula without gravity [Електроний ресурс]. Режим доступу: http://www.cmsim.eu/papers_pdf/ january_2014_papers/7_ CMSIM_Journal_2014_Szuminski_1_57-67.pdf.
2. Gmiterko A. N-link Inverted Pendulum Modeling / A. Gmiterko, M. Grossman // Recent Advances in Mechatronics. – 2010. – Part 3. – P. 151–156.
3. Mart.ınez-Alfaro H. Obtaining the dynamic equations, their simulation, and animation for n pendulums using Maple [Інтернет ресурс]. Режим доступу: http://www2.esm.vt.edu/~anayfeh/conf10/Abstracts/martinez - alfaro.pdf.
4. Адашевська І.Ю. Геометричне моделювання коливань багатоланкових маятникових механічних систем: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: 05.01.01/ І.Ю. Адашевська. – Київський національний університет будівництва і архітектури. – Київ, 2006. –20 с.
5. Куценко Л.М. Геометричне моделювання коливань багатоланкових маятників. / Л.М.Куценко, І.Ю. Адашевська. – Харків: «НТМТ», 2008.– 176 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ ЗВЕНЬЕВ МАЯТНИКА ПРИ УСЛОВИИ ОТСУТСТВИЯ ГРАВИТАЦИИ

Куценко Л.Н., Адашевская И.Ю.

Рассмотрен способ определения во времени взаимного положения на плоскости звеньев многозвенного маятника при условии отсутствия гравитации. Обсуждается возможность применения способа для развертывания элементов конструкций антенн в условиях невесомости.

Ключевые слова - негравитационный маятник, уравнение Лагранжа второго рода, геометрическое моделирование, развертывание антенны.

SIMULATION OF MUTUAL PROVISIONS OF RINGS PENDULUM UNDER THE CONDITION OF ABSENCE OF GRAVITATION

Kutsenko L., Adashevskaya I.

The method for determining the relative position in the plane of the links of a multi-tiered pendulum in the absence of gravity is considered. The possibility of applying a method for deploying antenna designs under zero-gravity conditions is discussed.

Keywords - non-gravitational pendulum, Lagrange's equation of the second kind, geometric modeling, antenna deployment.