

**Г.О. АНИЩЕНКО**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»;  
**Ю.В. РОМАШОВ**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»

## **ПОСТРОЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ**

В статті розглянуто побудову числових розв'язків для різноманітних математичних формулювань задач теорії повзучості. Представлені числові розв'язки плоскої задачі теорії повзучості, що одержані методом скінченних елементів та методом Бубнова-Галеркіна з використанням R-функцій. Досліджено достовірність одержаних числових розв'язків, показані перерозподіл напружень та параметру пошкоджуваності в умовах повзучості.

В статье рассмотрено построение численных решений для различных математических формулировок задач теории ползучести. Представлены численные решения плоской задачи теории ползучести, полученные методом конечных элементов и методом Бубнова-Галеркина с использованием R-функций. Исследована достоверность полученных численных решений, показаны перераспределение напряжений и параметра повреждаемости в условиях ползучести.

This article deals with numerical solutions constructing for different mathematical formulations of creep problem. Numerical solutions for creep plane problem obtained using finite element method and Galerkin-Bubnov method with R-functions are presented. Obtained numerical solutions reliability is investigated, stresses and damage parameter redistributions due to creep are shown.

**Введение.** Под ползучестью в простейшем случае понимают постепенное накопление необратимой (пластической) деформации, которое заметно проявляется при сочетании высоких механических нагрузок и температур, достигающих 35-70% абсолютной температуры плавления [1] и приводит к существенному перераспределению полей напряженно-деформированного состояния в твердых телах даже при стационарных нагрузках. Актуальность проблем ползучести обусловлена их инженерными приложениями, связанными с улучшением эксплуатационных характеристик машин за счет увеличения температуры и механических напряжений (рабочего давления, частоты вращения и т. п.) [1]. Нелинейность уравнений состояния тел при ползучести заставляет обращаться к численным решениям задач теории ползучести.

**Анализ последних исследований и формулировка целей статьи.** Численные решения задач теории ползучести в современных исследованиях [2-5] рассматриваются применительно к используемым там частным математическим формулировкам и на основе выбранных частных схем дискретизации (часто – метода конечных элементов). Используемые математические формулировки различаются выбором локальной [5] и вариационной формы [2-4]; пространства состояний: в перемещениях [2-4], в смешанной форме [5]; представлением напряженно-деформированного состояния либо самими искомыми величинами [4, 5], либо их скоростями [2, 3]. Алгоритмизация построения численных решений для задач теории ползучести в литературе практически не обсуждается, хотя обсуждается для других задач, например

для задач теплопроводности, что позволяет обеспечивать эффективность счета и использовать методически однотипные алгоритмы для достижения структурной простоты программ [6]. Целью данной статьи является изучение общих подходов к построению численных решений для задач теории ползучести.

**Постановки задачи теории ползучести.** Далее рассматриваем задачи ползучести для тела, которое занимает область объемом  $\Upsilon$  с граничной поверхностью  $\nu$  в случае малых деформаций, статических нагрузок, однородного стационарного температурного поля, полных деформаций в виде суммы обратимых упругих и необратимых деформаций ползучести; для упругих деформаций принимаем закон Гука; материал тела считаем однородным изотропным. Следуя методу Лагранжа, точки тела индивидуализируем в начальном состоянии, отвечающем моменту времени  $t = 0$ , и рассматриваем моменты времени  $t \geq 0$  с использованием декартовых прямоугольных координат  $x_k$ ; все нижние индексы, значения которых отдельно не оговорены, принимают последовательно значения 1, 2, 3; по повторяющимся нижним индексам подразумевается суммирование. Формулировка задачи теории ползучести включает описание напряженно-деформированного состояния при упругом деформировании с учетом деформаций ползучести и описание закона изменения во времени деформаций ползучести, что для полного пространства состояний в рамках принятых допущений записывается следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad \varepsilon_{ij} = e_{ij} + c_{ij}, \quad e_{ij} = a_{ijkl}\sigma_{kl} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \\ u_i = \tilde{u}_i \quad \forall x_k \in \nu_u, \quad \sigma_{ij}n_j = p_i \quad \forall x_k \in \nu_p, \quad (1)$$

$$\dot{c}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{c}}{\sigma^{(c)}} s_{ij}, \quad \dot{c} = \dot{c}(c_{ij}, \omega, q_1, q_2, \dots; \sigma^{(c)}), \quad \sigma^{(c)} = \sigma^{(c)}(\sigma_{ij}), \\ s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad c_{ij}(x_k, 0) = 0 \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad (2)$$

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}(\omega, q_1, q_2, \dots, c_{ij}; \sigma^{(\omega)}), \quad \sigma^{(\omega)} = \sigma^{(\omega)}(\sigma_{ij}), \quad \omega(x_k, 0) = 0 \quad \forall x_k \in \Upsilon,$$

$$\dot{q}_s = \dot{q}_s(\omega, q_1, q_2, \dots, c_{ij}; \sigma^{(s)}), \quad \sigma^{(s)} = \sigma^{(s)}(\sigma_{ij}), \quad \dot{q}_s(x_k, 0) = 0 \quad \forall x_k \in \Upsilon. \quad (3)$$

Здесь  $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$ ;  $u_i = u_i(x_k, t)$  и  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_k, t)$  – компоненты перемещений и напряжений;  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_k, t)$ ,  $e_{ij} = e_{ij}(x_k, t)$  и  $c_{ij} = c_{ij}(x_k, t)$  – компоненты деформаций: полных, упругих и ползучести;  $f_i = f_i(x_k)$  – заданные компоненты объемных сил,  $\tilde{u}_i = \tilde{u}_i(x_k)$  – заданные компоненты перемещения в точках поверхности  $\nu_u \subset \nu$ ;  $p_i = p_i(x_k)$  – заданные компоненты поверхностных сил в точках поверхности  $\nu_p \subset \nu$ ;  $n_j$  – компоненты внешней единич-

ной нормали к поверхности тела;  $a_{ijkl}$  – упругие постоянные материала тела;  $\dot{c}_{ij} \equiv \partial c_{ij} / \partial t$ ;  $\sigma^{(c)}$  – контролирующие скорость ползучести эквивалентные напряжения;  $\omega = \omega(x_k, t)$  – параметр повреждаемости и  $q_s = q_s(x_k, t)$ ,  $s = 1, 2, \dots$  – другие параметры состояния, характеризующие накопление повреждений на микро-уровне и другие изменения на уровне структуры материала [7];  $\sigma^{(\omega)}$  и  $\sigma^{(s)}$ ,  $s = 1, 2, \dots$  – эквивалентные напряжения, контролирующие скорость параметра повреждаемости и других параметров состояния. Кинетические уравнения (2), (3) для деформаций ползучести, параметра повреждаемости и других параметров состояния устанавливаются по результатам испытаний образцов в условиях ползучести вплоть до разрушения. Интегрирование по времени уравнений (1) – (3) выполняется вплоть до завершения этапа нелокализованного разрушения и образования локализованного дефекта (трещины), что устанавливается условием

$$\omega(x_k^*, t^*) = 1, \quad (4)$$

где  $t^*$  – время образования и  $x_k^*$  – координаты локализованного дефекта, причем для моментов времени  $t > t^*$  поведение рассматриваемого тела нельзя адекватно описать уравнениями (1) – (3), поскольку в них не учитывается наличие локализованных дефектов, например трещин.

Для алгоритмизации численного решения некоторого класса задач целесообразно располагать его единообразной математической формулировкой [6]. Различие между записями формулировок задач теории ползучести в разных пространствах состояний при алгоритмизации их численного решения устраняется использованием понятия *оператора краевой задачи* [8]. Для этого введем вектор  $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(1)}(x_k, t) \in R^N$ ,  $N = N^{(1)}$ , содержащий параметры напряженно-деформируемого состояния (перемещения, деформации полные и упругие, напряжения),  $\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}^{(2)}(x_k, t) \in R^N$ ,  $N = N^{(2)}$ , содержащий деформации ползучести,  $\mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{u}^{(3)}(x_k, t) \in R^N$ ,  $N = N^{(3)}$ , содержащий параметр повреждаемости и другие параметры состояния. Тогда задача теории ползучести (1)–(3) примет следующий вид:

$$\mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{f}^{(1)} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} \quad \forall x_k \in \nu, \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{(2)} = \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{u}^{(3)}; \mathbf{u}^{(1)}), \quad \mathbf{u}^{(2)}(x_k, 0) = \mathbf{0} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{(3)} = \mathbf{f}^{(3)}(\mathbf{u}^{(3)}, \mathbf{u}^{(2)}; \mathbf{u}^{(1)}), \quad \mathbf{u}^{(3)}(x_k, 0) = \mathbf{0} \quad \forall x_k \in \Upsilon. \quad (7)$$

Здесь  $\mathbf{A}^{(1)}$ ,  $\mathbf{A}^{(2)}$  – линейные операторы и  $\mathbf{f}^{(1)}$  – вектор, отвечающие дифференциальным уравнениям, а  $\mathbf{L}$  – линейный оператор и  $\tilde{\mathbf{u}}^{(1)}$  – вектор, отве-

чающие граничным условиям (1). Вектор  $\mathbf{f}^{(2)}$  отвечает уравнениям состояния при ползучести (2), а вектор  $\mathbf{f}^{(3)}$  – кинетическим уравнениям для параметра повреждаемости и других параметров состояния (3). Выбор частного пространства состояний уменьшает число компонент вектора  $\mathbf{u}^{(1)}$  и соответствующим образом видоизменяет операторы краевой задачи (5).

Вместо локальной формулировки краевой задачи (5) можно использовать ее эквивалентную вариационную формулировку, которую удобно представить в виде вариационного равенства с учетом главных условий, представляющих, как правило, часть граничных условий (5):

$$\int_{\Upsilon} \delta \mathbf{u}^{(1)T} \left( \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{f}^{(1)} \right) d\Upsilon + \int_{\nu_n} \delta \mathbf{u}^{(1)T} \left( \mathbf{L}_n \cdot \mathbf{u}^{(1)} - \tilde{\mathbf{u}}_n^{(1)} \right) d\nu = 0, \quad (8)$$

$$\mathbf{L}_m \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \tilde{\mathbf{u}}_m^{(1)} \quad \forall x_k \in \nu_m, \quad (9)$$

где учтено, что  $\nu = \nu_m \cup \nu_n$ ,  $\nu_m \cap \nu_n = \emptyset$ ;  $\mathbf{L}_n$ ,  $\mathbf{L}_m$  – операторы и  $\tilde{\mathbf{u}}_n^{(1)}$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_m^{(1)}$  – векторы, отвечающие естественным и главным граничным условиям.

Уравнения (5) – (7) наглядно показывают, что задача теории ползучести представляет собой две связанные математически различные задачи: краевую и начальную. Краевая задача описывает напряженно-деформированное состояние тела с учетом деформаций ползучести, а начальная – изменение во времени деформаций ползучести, параметра повреждаемости и внутренних структурных параметров с учетом текущего напряженного состояния. Единообразную математическую формулировку задачи теории ползучести можно получить дифференцированием по времени обеих частей уравнения (5) и представлением его в скоростях напряженно-деформированного состояния:

$$\mathbf{A}^{(1)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(2)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}^{(1)}(x_k, 0) = \mathbf{u}_0^{(1)} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad \mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(1)} = \mathbf{0} \quad \forall x_k \in \nu, \\ \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} \quad \forall x_k \in \nu, \quad (10)$$

где  $\mathbf{u}_0^{(1)}$  – поле вектора  $\mathbf{u}^{(1)}$  (напряженно-деформированного состояния) в начальный момент времени  $t = 0$ , которое отвечает упругому деформированию тела при отсутствии деформаций ползучести.

Замена краевой задачи (5) начально-краевой задачей (10) позволяет представить задачу теории ползучести (5) – (7) в эквивалентной форме (10), (6), (7). Вместо начально-краевой задачи (10) можно использовать ее эквивалентную вариационную формулировку, которая в вариациях с учетом главных и естественных граничных условий примет следующий вид:

$$\int_{\Upsilon} \delta \dot{\mathbf{u}}^{(1)T} \left( \mathbf{A}^{(1)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(2)} \right) d\Upsilon + \int_{\nu_n} \delta \dot{\mathbf{u}}^{(1)T} \left( \mathbf{L}_n \cdot \dot{\mathbf{u}}_n^{(1)} \right) d\nu = 0, \\ \int_{\Upsilon} \delta \mathbf{u}_0^{(1)T} \left( \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} - \mathbf{f}^{(1)} \right) d\Upsilon + \int_{\nu_n} \delta \mathbf{u}_0^{(1)T} \cdot \left( \mathbf{L}_n \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} - \tilde{\mathbf{u}}_n^{(1)} \right) d\nu = 0. \quad (11)$$

$$\mathbf{L}_m \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}_m \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} = \tilde{\mathbf{u}}_m^{(1)} \quad \forall x_k \in \nu_m. \quad (12)$$

Одна из простейших теорий ползучести, в которой повреждаемость и другие параметры состояния не рассматриваются, а скорость деформаций ползучести зависит только от напряжений, приводит к равенству  $\dot{\mathbf{u}}^{(2)} = \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{u}^{(1)})$ .

Это позволяет, если задача о напряженно-деформированном состоянии представлена в форме (10), исключить из рассмотрения при формулировке задач теории ползучести деформации ползучести, представленные вектором  $\mathbf{u}^{(2)}$ :

$$\mathbf{A}^{(1)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(1)} = -\mathbf{A}^{(2)} \cdot \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{u}^{(1)}), \quad \mathbf{u}^{(1)}(x_k, 0) = \mathbf{u}_0^{(1)} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad \mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(1)} = \mathbf{0} \quad \forall x_k \in \nu, \\ \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} \quad \forall x_k \in \nu. \quad (13)$$

В случае, когда напряженно-деформированное состояние описывается краевой задачей (5), то деформации ползучести не могут быть исключены из рассмотрения даже при использовании рассмотренной простейшей теории ползучести.

**Построение численных решений.** Алгоритмизация построения численных решений для задачи теории ползучести существенно зависит от выбора вида (5) – (7) или (8), (9), (6), (7) или (10), (6), (7) или (11), (12), (6), (7) ее математической формулировки. Вначале построим численное решение задачи теории ползучести, сформулированной в виде (11), (12), (6), (7). Для решения задачи (11), (12) поля напряженно-деформированного состояния представим аппроксимациями, тождественно удовлетворяющими главным условиям (12):

$$\mathbf{u}^{(1)}(x_k, t) = \mathbf{u}_\nu^{(1)}(x_k) + \mathbf{U}_n^{(1)}(x_k) \cdot \mathbf{a}_n^{(1)}(t), \quad \delta \mathbf{u}^{(1)}(x_k, t) = \mathbf{U}_n^{(1)}(x_k) \cdot \delta \mathbf{a}_n^{(1)}(t), \quad (14)$$

где  $\mathbf{u}_\nu^{(1)}$  – вектор, продлевающий заданные граничные значения внутрь области тела;  $n$  – число аппроксимирующих функций;  $\mathbf{U}_n^{(1)}$  – матрица, составленная из принятых аппроксимирующих функций;  $\mathbf{a}_n^{(1)}$  – вектор, составленный из подлежащих определению коэффициентов аппроксимаций.

В зависимости от выбора аппроксимирующих функций можно реализовать различные схемы дискретизации [9]. Примерами могут служить классический *метод Рунца*, отвечающий случаю, когда аппроксимирующие функции определены во всей области  $\Upsilon$  тела, а также метод конечных элементов – когда аппроксимирующие функции не равны нулю только в локальных подобластях, на которые разбита область  $\Upsilon$  тела, а коэффициенты аппроксимаций имеют смысл узловых значений. Подстановка аппроксимаций (14) в равенства (11) с учетом независимости вариаций  $\delta \mathbf{a}_n^{(1)}$  приведет к системам уравнений

$$\mathbf{A}_n^{(1)} \cdot \dot{\mathbf{a}}_n^{(1)} = -\int_{\Upsilon} \left( \mathbf{U}_n^{(1)} \right)^T \cdot \left( \mathbf{A}^{(2)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(2)} \right) d\Upsilon, \quad (15)$$

$$\mathbf{A}_n^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{n0}^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)}. \quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{n0}^{(1)} &\equiv \mathbf{a}_n^{(1)}(0); \quad \mathbf{A}_n^{(1)} = \int_{\Upsilon} \left( \mathbf{U}_n^{(1)} \right)^T \cdot \left( \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{U}_n^{(1)} \right) d\Upsilon + \int_{\nu_n} \left( \mathbf{U}_n^{(1)} \right)^T \cdot \left( \mathbf{L}_n \cdot \mathbf{U}_n^{(1)} \right) d\nu; \\ \mathbf{f}_n^{(1)} &= \int_{\Upsilon} \left( \mathbf{U}_n^{(1)} \right)^T \cdot \left( \mathbf{f}^{(1)} - \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}_\nu \right) d\Upsilon + \int_{\nu_n} \left( \mathbf{U}_n^{(1)} \right)^T \cdot \left( \tilde{\mathbf{u}}_n^{(1)} - \mathbf{L}_n \cdot \mathbf{u}_\nu^{(1)} \right) d\nu. \end{aligned}$$

Интеграл из системы уравнений (15) представляем в виде квадратуры

$$\int_{\Upsilon} \left( \mathbf{U}_n^{(1)} \right)^T \cdot \left( \mathbf{A}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} \right) d\Upsilon \approx \sum_{i=1}^Q w^{(i)} \left( \mathbf{U}_n^{(1)} \left( \xi_k^{(i)} \right) \right)^T \cdot \left( \mathbf{A}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} \left( \xi_k^{(i)} \right) \right), \quad (17)$$

где  $Q$  – число,  $w^{(i)}$  – весовые коэффициенты и  $\xi_k^{(i)}$  – координаты узлов используемой квадратуры формулы [10].

Уравнения (6), (7) интегрируем в узлах квадратурной формулы (17):

$$\dot{\mathbf{u}}^{(2)} \left( \xi_k^{(i)} \right) = \mathbf{f}^{(2)} \left( \mathbf{u}^{(2)} \left( \xi_k^{(i)} \right), \mathbf{u}^{(3)} \left( \xi_k^{(i)} \right); \mathbf{u}^{(1)} \left( \xi_k^{(i)} \right) \right), \quad \mathbf{u}^{(2)} \left( \xi_k^{(i)}, 0 \right) = \mathbf{0}, \quad (18)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{(3)} \left( \xi_k^{(i)} \right) = \mathbf{f}^{(3)} \left( \mathbf{u}^{(3)} \left( \xi_k^{(i)} \right), \mathbf{u}^{(2)} \left( \xi_k^{(i)} \right); \mathbf{u}^{(1)} \left( \xi_k^{(i)} \right) \right), \quad \mathbf{u}^{(3)} \left( \xi_k^{(i)}, 0 \right) = \mathbf{0}. \quad (19)$$

Здесь  $i = 1, 2, \dots, Q$ . Таким образом, решение задачи теории ползучести сведено к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями (15) – (19). В результате на шагах интегрирования по времени получают поля напряженно-деформированного состояния, а также значения деформаций ползучести и параметра повреждаемости в узлах квадратурных формул и, кроме этого, возможно, в других, наперед заданных, точках тела. Рассмотренная схема (15) – (19) алгоритмизации построения численного решения для задач теории ползучести с некоторыми видоизменениями применяется в большинстве исследований. Определение момента времени  $t^*$  и координат  $x_k^*$  образования локализованного дефекта из условия (4) с высокой точностью требует вычисления деформаций ползучести и параметра повреждаемости в достаточно большом числе наперед заданных точек тела.

Рассмотрим решение задачи теории ползучести, представленной в локальной форме (5) – (7) с использованием взвешенных невязок [9] и структурного метода теории R-функций [11], как это сделано в работе [5]. Для этого представим неизвестные задачи в виде тождественно удовлетворяющих всем граничным условиям (5) структур решений [11]

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{B}^{(1)} \left( \Phi^{(1)}, \Upsilon, \nu, \mathbf{L}, \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} \right), \quad \mathbf{u}^{(2)} = \Phi^{(2)}, \quad \mathbf{u}^{(3)} = \Phi^{(3)}, \quad (20)$$

с неопределенными компонентами  $\Phi^{(1)} = \Phi^{(1)}(x_k, t)$ ,  $\Phi^{(2)} = \Phi^{(2)}(x_k, t)$  и  $\Phi^{(3)} = \Phi^{(3)}(x_k, t)$  в виде аппроксимаций по системам базисных функций про-

странственных координат с зависящими от времени коэффициентами

$$\Phi^{(s)}(x_k, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i^{(s)}(x_k) \cdot a_i^{(s)}(t), \quad s = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Здесь –  $a_i^{(s)}(t)$  и  $\phi_i^{(s)}(x_k)$ ,  $s = 1, 2, 3$  – коэффициенты аппроксимаций и базисные функции, являющиеся элементами содержащих  $\Phi^{(s)}$  функциональных пространств [11]. В случае линейных операторов граничных условий подстановка аппроксимаций (21) в структуры решений (20) приведет к выражениям в виде линейных комбинаций коэффициентов аппроксимаций [11], которые представим в матрично-векторной форме

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)}(x_k, t) &= \mathbf{u}_v^{(1)}(x_k) + \mathbf{U}_n^{(1)}(x_k) \cdot \mathbf{a}_n^{(1)}(t), \\ \mathbf{u}^{(2)}(x_k, t) &= \mathbf{U}_n^{(2)}(x_k) \cdot \mathbf{a}_n^{(2)}(t), \quad \mathbf{u}^{(3)}(x_k, t) = \mathbf{U}_n^{(3)}(x_k) \cdot \mathbf{a}_n^{(3)}(t), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\mathbf{U}_n^{(s)}$ ,  $s = 1, 2, 3$  – матрицы пробных функций, составленные из множителей при коэффициентах  $a_i^{(s)}$ ,  $s = 1, 2, 3$  в структурах решений (20) после подстановки в них аппроксимаций (21);  $\mathbf{a}_n^{(s)} = \left( a_1^{(s)} \quad a_2^{(s)} \quad \dots \quad a_n^{(s)} \right)^T$ ,  $s = 1, 2, 3$ .

Аппроксимации (22) удовлетворяют граничным условиям (5) и будут удовлетворять начальным условиям (6), (7), для коэффициентов аппроксимаций, удовлетворяющих начальным условиям

$$\mathbf{a}_n^{(2)}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_n^{(3)}(0) = \mathbf{0}. \quad (23)$$

Для определения коэффициентов аппроксимаций *методом взвешенных невязок* представим аппроксимации (22) в матрично-векторной форме и дифференциальные уравнения (5) – (7) одним уравнением [5]

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_v + \mathbf{U}_n \cdot \mathbf{a}_n, \quad (24)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{u}^{(2)} \\ \mathbf{u}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_v = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_v^{(1)} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_n^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_n^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}_n^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_n^{(1)} \\ \mathbf{a}_n^{(2)} \\ \mathbf{a}_n^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad (26)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{A}^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{(1)} \\ \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{u}^{(3)}; \mathbf{u}^{(1)}) \\ \mathbf{f}^{(3)}(\mathbf{u}^{(3)}, \mathbf{u}^{(2)}; \mathbf{u}^{(1)}) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где  $\mathbf{I}^{(2)}$ ,  $\mathbf{I}^{(3)}$  – тождественные и  $\mathbf{0}$  – нулевые матричные операторы, размерности которых определяются размерностями векторов  $\mathbf{u}^{(1)}$ ,  $\mathbf{u}^{(2)}$  и  $\mathbf{u}^{(3)}$ .

Подставим аппроксимации (24) в дифференциальное уравнение (26) и, следуя методу взвешенных невязок, воспользуемся условием ортогональности невязки выполнения этого уравнения к проверочным функциям [11]:

$$\int_{\Upsilon} \mathbf{V}_n \cdot [\mathbf{K} \cdot (\mathbf{U}_n \cdot \dot{\mathbf{a}}_n) + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{u}_v + \mathbf{U}_n \cdot \mathbf{a}_n)] d\Upsilon = 0. \quad (28)$$

Здесь  $\mathbf{V}_n = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n)$  – матрица, составленная из проверочных функций, являющихся линейно независимыми элементами пространства, сопряженного к содержащему элемент  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  пространству. Условие (28) может рассматриваться как обобщенное представление различных численных методов, различающихся выбором пробных и проверочных функций [9]. При использовании локальных пробных и проверочных функций метод взвешенных невязок (27) эквивалентен методу конечных элементов [9]. Если использовать глобальные пробные функции, а проверочные функции выбрать в виде  $\mathbf{V}_n = \mathbf{U}_n^T$ , то условие ортогональности (28) будет отвечать классическому методу Бубнова-Галеркина [9], который, как в работе [5], после подстановки матриц (25), (27) в условие (28), с учетом линейности операторов приведет к алгебраическим и дифференциальным уравнениям

$$\mathbf{A}_n^{(1)} \cdot \mathbf{a}_n^{(1)} + \mathbf{A}_n^{(2)} \cdot \mathbf{a}_n^{(2)} = \mathbf{f}_n^{(1)}, \quad (29)$$

$$\mathbf{K}_n^{(2)} \cdot \dot{\mathbf{a}}_n^{(2)} = \mathbf{f}_n^{(2)}(\mathbf{a}_n^{(2)}, \mathbf{a}_n^{(3)}, \mathbf{a}_n^{(1)}), \quad \mathbf{a}_n^{(2)}(0) = \mathbf{0}, \quad (30)$$

$$\mathbf{K}_n^{(3)} \cdot \dot{\mathbf{a}}_n^{(3)} = \mathbf{f}_n^{(3)}(\mathbf{a}_n^{(3)}, \mathbf{a}_n^{(2)}, \mathbf{a}_n^{(1)}), \quad \mathbf{a}_n^{(3)}(0) = \mathbf{0}, \quad (31)$$

где матрицы и векторы вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{A}_n^{(s)} = \int_{\Upsilon} (\mathbf{U}_n^{(1)})^T \cdot (\mathbf{A}^{(s)} \cdot \mathbf{U}_n^{(s)}) d\Upsilon, \quad s = 1, 2; \quad \mathbf{f}_n^{(1)} = \int_{\Upsilon} (\mathbf{U}_n^{(1)})^T \cdot (\mathbf{f}^{(1)} - \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}_v) d\Upsilon,$$

$$\mathbf{K}_n^{(s)} = \int_{\Upsilon} (\mathbf{U}_n^{(s)})^T \cdot \mathbf{U}_n^{(s)} d\Upsilon, \quad s = 2, 3,$$

$$\mathbf{f}_n^{(2)}(\mathbf{a}_n^{(2)}, \mathbf{a}_n^{(2)}; \mathbf{a}_n^{(1)}) = \int_{\Upsilon} (\mathbf{U}_n^{(2)})^T \cdot \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{U}_n^{(2)} \cdot \mathbf{a}_n^{(2)}, \mathbf{U}_n^{(3)} \cdot \mathbf{a}_n^{(3)}; \mathbf{u}_v^{(1)} + \mathbf{U}_n^{(1)} \cdot \mathbf{a}_n^{(1)}) d\Upsilon,$$

$$\mathbf{f}_n^{(3)}(\mathbf{a}_n^{(3)}, \mathbf{a}_n^{(2)}; \mathbf{a}_n^{(1)}) = \int_{\Upsilon} (\mathbf{U}_n^{(3)})^T \cdot \mathbf{f}^{(3)}(\mathbf{U}_n^{(3)} \cdot \mathbf{a}_n^{(3)}, \mathbf{U}_n^{(2)} \cdot \mathbf{a}_n^{(2)}; \mathbf{u}_v^{(1)} + \mathbf{U}_n^{(1)} \cdot \mathbf{a}_n^{(1)}) d\Upsilon.$$

При помощи уравнения (29) можно представить вектор  $\mathbf{a}_n^{(1)}$  в виде соотношения

$$\mathbf{a}_n^{(1)}(\mathbf{a}_n^{(2)}) = (\mathbf{A}_n^{(1)})^{-1} \cdot (\mathbf{f}_n^{(1)} - \mathbf{A}_n^{(2)} \cdot \mathbf{a}_n^{(2)}). \quad (32)$$

Соотношение (32) позволяет исключить вектор  $\mathbf{a}_n^{(1)}$  из уравнений (30), (31) и в результате получить задачу Коши в канонической форме:

$$\dot{\mathbf{y}}_n = \mathbf{f}_n(\mathbf{y}_n), \quad \mathbf{y}_n(0) = \mathbf{0}. \quad (33)$$

Здесь



$$\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_n^{(2)} \\ \mathbf{a}_n^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_n(\mathbf{y}_n) = \begin{pmatrix} \left( \mathbf{K}_n^{(2)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{f}_n^{(2)} \left( \mathbf{a}_n^{(2)}, \mathbf{a}_n^{(3)}; \mathbf{a}_n^{(1)} \left( \mathbf{a}_n^{(2)} \right) \right) \\ \left( \mathbf{K}_n^{(3)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{f}_n^{(3)} \left( \mathbf{a}_n^{(3)}, \mathbf{a}_n^{(2)}; \mathbf{a}_n^{(1)} \left( \mathbf{a}_n^{(2)} \right) \right) \end{pmatrix}.$$

Решение задач теории ползучести по схеме (20) – (33) за счет использования аналитических аппроксимаций позволяет определять деформации ползучести и параметр повреждаемости в любой точке тела, причем число уравнений в разрешающей задаче Коши (33) определяется количеством аппроксимирующих функций. При решении задач теории ползучести по схеме (15) – (19) относительно узловых значений число уравнений в разрешающей задаче Коши (18), (19) определяется числом точек, в которых вычисляются деформации ползучести, параметр повреждаемости и другие параметры состояния. Точное определение момента времени  $t^*$  и координат  $x_k^*$  образовавшегося локализованного дефекта из условия (4) требует вычисления параметра повреждаемости в большом числе точек тела, так что число уравнений задачи Коши (18), (19) может оказаться большим числа уравнений задачи Коши (33). При построении численного решения задач теории ползучести по схеме (15) – (19) напряженно-деформированное состояние определяется путем интегрирования по времени с накоплением погрешностей на шагах интегрирования. В случае численного решения по схеме (20) – (33) погрешности пошагового интегрирования накапливаются только для деформаций ползучести, параметра повреждаемости и других параметров состояния, а напряженно-деформированное состояние определяется при этом путем решения системы линейных алгебраических уравнений (32). Отмеченные обстоятельства позволяют говорить о некоторых преимуществах построения численных решений по схеме (20) – (33) перед построением численных решений по схеме (15) – (19).

**Пример численного решения задачи теории ползучести.** Рассмотрим в декартовых координатах  $Ox_1x_2$  плоскую начально-краевую задачу теории ползучести для квадратной пластины с длиной стороны  $2a = 16$  мм, которая растягивается поверхностными силами  $p = p(x_2)$ , приложенными на краях  $x_1 = \pm a$  и распределенными по параболическому закону (рис. 1)

$$p(x_2) = S \left( 1 - (x_2/b)^2 \right), \quad (34)$$

где  $S = 300$  МПа – заданное максимальное напряжение в сечениях  $x_1 = \pm a$ .

В качестве материала пластины примем сталь ЭИ-481, для которой: модуль упругости  $E = 1,25 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , а скорость ползучести при температуре  $700^\circ\text{C}$  описывается с учетом повреждаемости материала в виде [3]:

$$\dot{c} = \dot{c}(\omega; \sigma^{(c)}), \quad \dot{c}(\omega; \sigma^{(c)}) = B \left( \frac{\sigma^{(c)}}{1-\omega} \right)^n, \quad B = 8.98 \cdot 10^{-15} \text{ МПа}^{-n} / \text{ час}, \quad n = 4, 12,$$

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}(\omega; \sigma^{(\omega)}), \quad \dot{\omega}(\omega; \sigma^{(\omega)}) = A \left( \frac{\sigma^{(\omega)}}{1-\omega} \right)^k, \quad A = 1, 11 \cdot 10^{-25} \text{ МПа}^{-k} / \text{ час}, \quad k = 8, 97,$$

где  $\sigma^{(c)} = \sigma^{(\omega)} = \sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right)}$  – интенсивность напряжений.

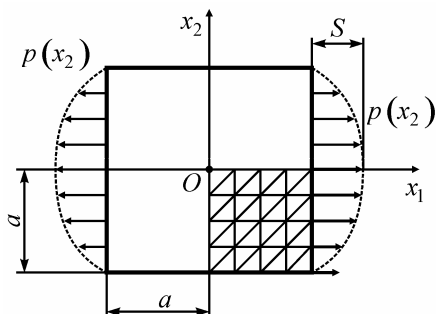


Рисунок 1 – Пластина и фрагмент конечно-элементной сетки с приведением нагрузки к ее узлам.

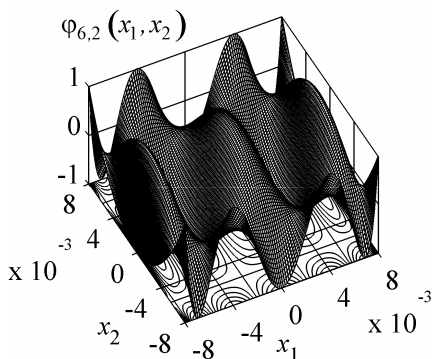


Рисунок 2 – Поверхность значений построенной на основе полиномов Чебышева одной из двумерных функций, использующейся в аппроксимации параметра повреждаемости.

Приближенные решения задач теории ползучести для такой пластины получены двумя способами. Во-первых, как в работе [3], при помощи специально созданного программного обеспечения методом конечных элементов (фрагмент сетки и приведение нагрузки к узлам показаны на рис. 1) на основе вариационной постановки в перемещениях по схеме (15) – (19) с интегрированием задачи Коши *методом прогноза-коррекции*. Во-вторых, как в работе [5], при помощи специально созданного программного обеспечения на основе методов теории R-функций и Бубнова-Галеркина по схеме (20) – (33) с описанием напряженно-деформированного состояния в перемещениях и напряжениях и решением задачи Коши методом Рунге-Кутта в модификации с переменным шагом интегрирования, предложенной *Мерсоном*. В последнем случае интегрирование в области пластины осуществлялось по *квадратурным формулам Гаусса*, а в качестве аппроксимирующих функций неопределенных компонент структур решения использовались произведения специально выбираемых с учетом симметрии задачи *полиномов Чебышева* [12]

$$\varphi_{i,j}(x_1, x_2) = T_i(x_1) \cdot T_j(x_2). \quad (35)$$

Здесь  $T_i$  – полином Чебышева степени  $i$ . С учетом симметрии задачи в аппроксимациях, например, параметра повреждаемости  $i, j = 0, 2, 4, \dots, 2(n-1)$ ; одна из аппроксимирующих функций (35), используемая в аппроксимациях параметра повреждаемости, показана на рис. 2.

Для получаемых описанными двумя методами приближенных решений задачи ползучести, отвечающих упругому деформированию в момент времени  $t = 0$ , установлено соответствие с решениями задачи о число упругом деформировании пластины, полученными в работах [13], [14]. Это позволяет говорить о достоверности решения задачи теории ползучести, отвечающего моменту времени  $t = 0$ . Достоверность решения задачи теории ползучести в моменты времени  $t > 0$  устанавливалась сходимостью получаемых методом Бубнова-Галеркина приближенных решений и их сопоставлением с приближенным решением, полученным методом конечных элементов, что иллюстрируется рис. 3.

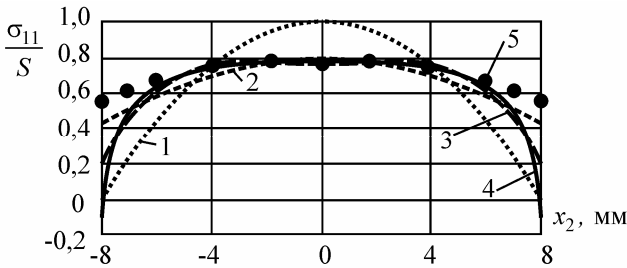


Рисунок 3 – Решения для напряжения  $\sigma_{11}$  в сечении  $x_1 = a/2$  в момент времени  $t = 150$  час, полученные методом Бубнова-Галеркина для разного числа аппроксимирующих функций: 1 –  $n = 1$ , 2 –  $n = 2$ , 3 –  $n = 3$ , 4 –  $n = 14$ , и решение, полученное при помощи метода конечных элементов – маркеры 5.

Расчеты показали сходимость с увеличением числа аппроксимирующих функций получаемых методом Бубнова-Галеркина приближенных решений; начиная с числа  $n = 6$  аппроксимирующих функций, приближенные решения не различаются в масштабе рис. 3. Установлено различие приближенного решения, получаемого методом Бубнова-Галеркина (рис. 3, кривая 4), и получаемого методом конечных элементов (рис. 3, маркеры 5) около точек  $x_2 = \pm a$ , что можно объяснить двумя причинами. Во-первых, полученное методом конечных элементов решение на сетке рис. 1, по-видимому, имеет более высокую погрешность аппроксимации, чем решение, полученное методом Бубнова-Галеркина для  $n = 14$  аппроксимирующих функций. В пользу этого говорит то обстоятельство, что полученное методом конечных элементов решение (рис. 3, маркеры 5) более близко к решению метода Бубнова-Галеркина с более высокой погрешностью аппроксимации для числа  $n = 2$  (рис. 3, кривая 2). Во-вторых, решение методом конечных элементов при-

ближенно удовлетворяет граничным условиям: в точках с  $x_2 = \pm a$  растягивающие напряжения не равны нулю (рис. 1) и именно около этих точек имеет место заметное различие получаемых решений. Полученные результаты позволяют говорить о достоверности получаемых численных решений задачи теории ползучести.

Рассмотрим далее некоторые закономерности ползучести, установленные на основе анализа результатов, представленных на рис. 4 и рис. 5, полученных методом Бубнова-Галеркина с числом  $n=14$  аппроксимирующих функций.

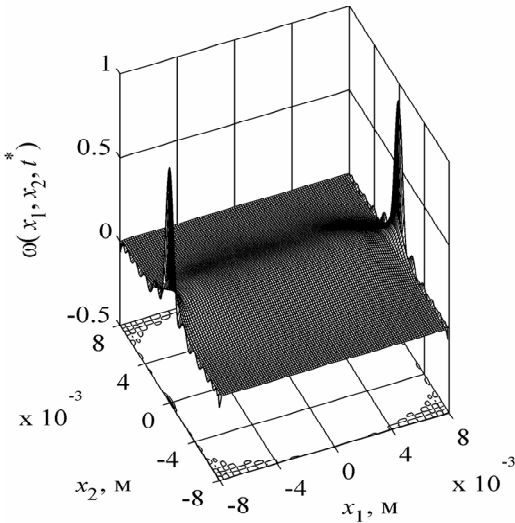


Рисунок 4 – Значения параметра повреждаемости в точках пластины в момент времени  $t = t^*$ .

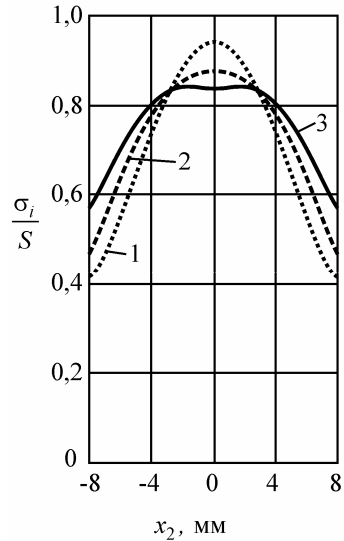


Рисунок 5 – Интенсивность напряжений в точках центрального сечения  $x_1 = 0$  пластины в моменты времени 1 –  $t = 0$ , 2 –  $t = 24$  час и 3 –  $t = t^*$ .

При решении задачи ползучести с использованием условия (4) установлено время  $t^* \cong 152,39$  час до завершения этапа нелокализованного разрушения пластины и образования локализованного дефекта. Анализ поля повреждаемости (рис. 4) показывает, что в пластине следует ожидать образование в момент времени  $t = t^*$  двух макроскопических дефектов вследствие ползучести, причем эти дефекты будут расположены в окрестности точек пластины с координатами  $x_1 = \pm a$ ,  $x_2 = 0$ . Заметное перераспределение напряжений с течением времени вследствие ползучести, которое имеет место даже при стационарной нагрузке, иллюстрируется рис. 5.

**Перспективы дальнейших исследований.** Разработанные общие подходы к построению численных решений задач теории ползучести позволяют рассматривать задачи более сложные, чем в рассмотренном примере. Можно рассматривать, например, задачи ползучести для тел сложной формы, однако для дальнейших исследований более перспективными с точки зрения реализации возможностей предложенных подходов являются практически отсутствующие в литературе задачи теории ползучести с несколькими, кроме параметра повреждаемости, параметрами состояния.

**Выводы.** В статье рассмотрено построение численных решений для различных математических формулировок задач теории ползучести. Для плоской задачи теории ползучести получены методом конечных элементов и методами Бубнова-Галеркина и R-функций численные решения. Исследована достоверность полученных решений и установлено, что погрешности при приближенном удовлетворении силовых граничных условий могут существенно влиять на решение задачи теории ползучести. Показаны перераспределения параметра повреждаемости и напряжений в условиях ползучести.

**Список литературы:** 1. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. анализ, предсказание, предотвращение: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 624 с. 2. Золочевський О. О., Рвачов В. Л., Склетус С. М. Повзучість пластин неканонічної форми з асиметрією властивостей // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2006. – 49, № 1. – С. 67–74. 3. Анищенко Г. О., Бреславский Д. В., Морачковский О. К. Влияние циклического нагружения на ползучесть и длительную прочность пластин с отверстиями // *Доповіді НАН України.* – 1998. – № 8. – С. 59–64. 4. Баженов В. А., Гуляев А. И., Пискунов С. О., Шкрель А. А. Определение ресурса лопатки газовой турбины в условиях ползучести на основе континуальной механики разрушения // *Проблемы прочности.* – 2006. – № 4. – С. 87–71. 5. Морачковский О. К., Ромашов Ю. В. К решению начально-краевых задач теории ползучести // *Прикладная механика.* – 2009. – Т. 45, № 10. – С. 33–44. 6. Расчет на ЭВМ температурных полей в твердых телах с подвижными границами // *Калютин А. И., Мосин Е. Ф., Соковишин Ю. А., Энтин Е. П.* – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 224 с. 7. Работнов Ю. Н. Введение в механику разрушения. – М.: Наука, 1987. – 80 с. 8. Михлин С. Г. Вариационные методы математической физике. – М.: Наука, 1970. – 542 с. 9. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 352 с. 10. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: Наука, 1967. – 500 с. 11. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с. 12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике: Пер. с англ. – М.: Наука, 1977. – 832 с. 13. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости: Пер. с англ. – М.: Наука, 1975. – 576 с. 14. Meleshko V. V. Equilibrium of Elastic Rectangle: Mathieu-Inglis-Pickett Solution Revisited // *Journal of Elasticity.* – 1995. – 40. – P. 207–238.

*Поступила в редколлегию 07.01.12*