УДК 519:681:51

СЕРАЯ О.В., д.т.н., доцент (НТУ «ХПИ»)

Транспортная задача высокой размерности со стохастическим спросом

Предложен метод решения транспортной задачи высокой размерности со случайным спросом. Решение основано на преобразовании исходной задачи к двойственной. Этот подход позволил радикально сократить продолжительность решения, существенно снижая вычислительные трудности, связанные с размерностью задачи.

Ключевые слова: *линейное программирование, транспортная задача, высокая размерность, стохастический спрос, двойственная задача*

Введение

Как известно [1-4], транспортная задача линейного программирования формулируется следующим образом. Имеется m поставщиков однородного продукта и n потребителей этого продукта. Заданы вектор $A=\left(a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_i \quad \ldots \quad a_m\right)$, компоненты которого определяют возможности поставщиков, и вектор $B=\left(b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_j \quad \ldots \quad b_n\right)$, компоненты которого задают потребности потребителей. Кроме того, предполагается известной матрица $C=\left(c_{ij}\right)$ стоимостей доставки единицы продукта от поставщиков к потребителям. Необходимо найти матрицу $X=\left(x_{ij}\right)$, определяющую план транспортировок продукта от поставщиков к потребителям, который минимизирует суммарную стоимость перевозок

$$L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

и удовлетворяет ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le a_i,\ i=1,2,\ldots,m, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\ge b_j,\ \ j=1,2,\ldots,n, \tag{3}$$

$$x_{ij}\ge 0,\ i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n. \tag{4}$$

Добавление фиктивных переменных сводит задачу к канонической, в которой неравенства (2), (3) преобразуются в равенства [2-4]. Методы решения этой задачи реализованы в известных математических пакетах (Excel, Mathcad и др.)

Заметим, что приведенная детерминированная постановка транспортной задачи не может быть признана реалистичной, так как возможности поставщиков, потребности потребителей (спрос на продукт), а также стоимости перевозок являются случайными. Понятно, что в этих условиях оптимальный план транспортировок тоже является случайным и его отыскание традиционными методами невозможно [5].

Решение таких задач достигается специальными методами стохастического программирования [6-9]. Существо таких методов состоит в конструировании для каждой из стохастических задач соответствующего детерминированного аналога. В качестве целевой функции в таких задачах обычно применяют математическое ожидание или дисперсию значений каких-либо функций от получаемого плана, а также вероятность попадания значений этих функций в некоторую область. Применительно к транспортным задачам эта проблема рассматривалась в [9, 10]. Для решения задачи в этих работах используются упомянутые выше подходы.

Существенный недостаток этих методик состоит в неучете компонентов суммарных затрат, связанных с реализацией планов $X=\left(x_{ij}\right)$ задачи, определяемых набором значений b_j, $j=1,2,\ldots,n$. Этот набор влияет не только на величину и суммарную стоимость перевозок, но и на уровень затрат на хранение нереализованного продукта, и, кроме того, на величину «штрафа» при возникновении дефицита. Это обстоятельство определяет необходимость постановки транспортной задачи с учетом возникающих особенностей.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу организации перевозки какого-либо товара от производителей в магазины для его реализации.

Введем:

θ - случайная величина спроса товара;

$\varphi_j(\theta)$ - плотность распределения случайной величины спроса в j - м магазине;

z_j - объем заказа для j - го магазина;

α_j - плата за хранение единицы товара в j - м магазине;

β_j - стоимость единицы товара в j - м магазине при его реализации;

c_j - закупочная стоимость единицы товара;

$\underline{Z} = (z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_n)$ - распределение объемов заказа товара, $j = 1,2,\dots,n$.

Если случайная величина спроса θ оказывается меньше заказанного объема товара z_j, то возникает необходимость хранения непроданного товара. Если же спрос θ превышает заказ, то появляются потери, связанные с дефицитом на этот товар. При этом

$R_1(z_j) = \alpha_j \int\limits_0^{z_j} (z_j - \theta)\varphi_j(\theta) d\theta$ - средние затраты на хранение непроданной части товара в j - ом магазине,

$R_2(z_j) = (\beta_j - c_j) \int\limits_{z_j}^{\infty} (\theta - z_j)\varphi_j(\theta) d\theta$ - средние потери в связи с дефицитом товара в j - ом магазине.

С учетом этого, исходная задача преобразуется к виду: найти план перевозок $X^* = (X_{ij})$, минимизирующий суммарные потери

$$L(\underline{X}(\underline{Z})) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}(Z_j) + \\ + \sum_{j=1}^{n} \left(R_1(z_j) \int\limits_0^{z_j} \varphi_j(\theta) d\theta + R_2(z_j) \int\limits_{z_j}^{\infty} \varphi_j(\theta) d\theta \right). \tag{5}$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(Z) \le a_i, \quad i = 1,2,\dots,m, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}(Z) = z_j, \quad j = 1,2,\dots,n, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j = \sum_{i=1}^{m} a_i = A, \tag{8}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1,2,\dots,m, \quad j = 1,2,\dots,n. \tag{9}$$

Для решения полученной задачи в [11] предложено использовать двухэтапную итерационную процедуру. На первом этапе каждой итерации решается координирующая задача определения набора векторов Z_1, Z_2, …, Z_{n+1}, каждый из которых задает свое распределение товара между пунктами потребления. На втором этапе итерации решается набор обычных транспортных задач, в которых векторы значений параметров потребления Z_K, $k = 1,2,\dots,n+1$, задаются решением координирующей задачи. Для построения общей процедуры решения задачи предложено использовать метод Нелдера-Мида отыскания наилучшего вектора Z с алгоритмически заданной целевой функцией $L(X(Z))$ [12-14]. Вычислительная процедура организуется следующим образом.

Предварительно для каждого из потребителей в предположении о, например, релеевской плотности распределения спроса рассчитываются оценки минимального $b_{j\,min}$ и максимального значения спроса путем решения уравнений

$$\int\limits_0^{b_{j\,min}} \frac{\theta}{\sigma_j^2} exp\left\{ -\frac{\theta^2}{2\sigma_j^2} \right\} d\theta = \alpha, \tag{10}$$

$$\int\limits_{b_{j\,max}}^{\infty} \frac{\theta}{\sigma_j^2} exp\left\{ -\frac{\theta^2}{2\sigma_j^2} \right\} d\theta = \alpha, \quad j = 1,2,\dots,n, \tag{11}$$

α - некоторая достаточно малая вероятность (например, $\alpha = 0.05$)

В результате решения этих уравнений получим:

$$b_{j\,min} = \sigma_j \left(-2\,ln(1-\alpha) \right)^{0.5}, \quad j = 1,2,\dots,n,$$

$$b_{j\,max} = \sigma_j \left(-2\,ln\,\alpha \right)^{0.5}, \quad j = 1,2,\dots,n.$$

Таким образом, компоненты вектора $Z = (z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_n)$ должны удовлетворять ограничениям

$$b_{j\,min} \le z \le b_{j\,max}, \quad j = 1,2,\dots,n.$$

Теперь, на первой итерации в [11] задается исходная совокупность векторов $\underline{Z}_1^{(1)}, \underline{Z}_2^{(1)}, \dots, \underline{Z}_{n+1}^{(1)}$, формирующая симплекс с $(n+1)$-й вершинами в n-мерном пространстве $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ с координатами вершин, определяемыми матрицей

$$D = \begin{pmatrix} b_1^{(0)} & b_1^{(0)} + d_1 & b_1^{(0)} + d_2 & \dots & b_1^{(0)} + d_2 \\ b_2^{(0)} & b_2^{(0)} + d_2 & b_2^{(0)} + d_1 & \dots & b_2^{(0)} + d_2 \\ b_3^{(0)} & b_3^{(0)} + d_2 & b_3^{(0)} + d_2 & \dots & b_3^{(0)} + d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n^{(0)} & b_n^{(0)} + d_2 & b_n^{(0)} + d_2 & \dots & b_n^{(0)} + d_1 \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

$$b_j^{(0)} = \frac{1}{2}(b_{j\,min} + b_{j\,max}), \quad j = 1,2,\dots,n, \qquad (13)$$

$$d_1 = \frac{n-1}{n} \min_j \{ b_{j\,max} - b_{j\,min} \}, \qquad (14)$$

$$d_2 = -\frac{1}{n} \min_j \{ b_{j\,max} - b_{j\,min} \}. \qquad (15)$$

В матрице (12) k-й столбец задает координаты вектора $\underline{Z}_k^{(1)}$. При этом, соотношения (12), (14), (15) обеспечивают выполнение ограничений для компонентов всех векторов $\underline{Z}_1^{(1)}, \underline{Z}_2^{(1)}, \underline{Z}_3^{(1)}, \dots, \underline{Z}_{n+1}^{(1)}$. Теперь, последовательно задавая компоненты векторов $\underline{Z}_1^{(1)}, \underline{Z}_2^{(1)}, \dots, \underline{Z}_{n+1}^{(1)}$ в качестве правых частей ограничений (7), получим $(n+1)$ транспортных задач с целевой функцией

$$L(X(Z)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}(z) \qquad (16)$$

и ограничениями (6)-(9).

Совокупность решений этих задач определяют набор значений целевой функции на этих векторах: $L\left(x\left(\underline{Z}_1^{(1)}\right)\right)$, $L\left(x\left(\underline{Z}_2^{(1)}\right)\right)$, …, $L\left(x\left(\underline{Z}_{n+1}^{(1)}\right)\right)$, после чего дальнейшая вычислительная процедура организуется в соответствии со стандартной технологией метода Нелдера - Мида.

Получаемый в результате план перевозок минимизирует суммарную стоимость доставки товара с учетом затрат на хранение непроданной части товара и потерь от его дефицита. Описанный подход обеспечивает решение поставленной задачи, однако конструктивные особенности используемой вычислительной процедуры не позволяет реализовать ее в задачах высокой размерности. Дело в следующем. Во-первых, как известно [13], метод Нелдера – Мида обеспечивает решение оптимизационных многомерных задач в приемлемое время, если число переменных невелико (порядка 15 - 20). В реальных задачах это число может иметь порядок $\left(10^2 - 10^3\right)$. Во-вторых, на каждом шаге метода необходимо решать $(n+1)$ - у транспортную задачу достаточно высокой размерности с числом переменных $m \times n$. Кроме того, следует иметь ввиду, что на каждой итерации метода происходит изменение только одного из $(n+1)$ векторов $\underline{Z}_1^{(1)}, \underline{Z}_2^{(1)}, \dots, \underline{Z}_{n+1}^{(1)}$. С учетом этих обстоятельств понятно, что предложенная в [11] процедура будет сходиться к искомому оптимальному набору переменных $(z_1, z_2, \dots, z_k)$ крайне медленно.

Основные результаты

В связи с этим рассмотрим другой подход к решению задачи управления транспортировками в условиях, когда спрос на товар в пунктах потребления – набор случайных величин с известными плотностями распределения. Вернемся к исходной задаче. Она сведена к отысканию набора $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ и индуцированного этим набором плана транспортировок $X(Z)$, минимизирующего линейную формулу (16) и удовлетворяющего ограничениям (6) – (9).

Как и во всякой задаче линейного программирования, задаче (16), (6) – (9) соответствует сопряженная ей двойственная задача [15, 16], формулируемая следующим образом: найти наборы $\{u_i\}$, $\{v_i\}$, $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$, максимизирующие функцию

$$L(U,V) = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} z_j v_j, \qquad (17)$$

и удовлетворяющие ограничениям

$$u_i + v_j \le c_{ij}, \; i = 1,2,\dots,m, \; j = 1,2,\dots,n. \qquad (18)$$

Двойственная задача (17) – (18) всегда имеет решение. Причем, если $X = \{x_{ij}\}$ и $W = \{u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ - оптимальные планы соответственно задач (16), (6) – (9) и (17) – (18), то

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} z_j v_j. \qquad (19)$$

Кроме того, известно, что для оптимального плана сформулированной двойственной задачи имеют место соотношения

$$u_i + v_j \le c_{ij}, \; i = 1,2,\dots,m, \; j = 1,2,\dots,n, \qquad (20)$$

$$u_i + v_j = c_{ij}, \text{ если } x_{ij} > 0. \qquad (21)$$

Отсюда следует, что из решения двойственной задачи (17) – (18) может быть получено решение прямой задачи (16), (6) – (9). Действительно, пусть $\{u_i^*\}$, $\{v_j^*\}$ - решение двойственной задачи.

Подставим это решение в (20) и найдем наборы индексов $I^* = \{i^*\}$, $J^* = \{j^*\}$, для которых неравенства (20) выполняются, как равенства, то есть

$$u_{i^*} + v_{j^*} = c_{i^* j^*}\ ,\ i^* \in I^*\ ,\ j^* \in J^*\ .$$

Тогда, в соответствии с (21), наборы $\{i^*\}$, $\{j^*\}$ однозначно задают набор $X = \{x_{i^* j^*}\}$, компоненты которого положительны и определяют решение прямой задачи, получаемое следующим образом.

Для каждого $i = 1,2,...,m$ введем набор $J_i^* = \{j, j = j^*\}$, и для каждого j введем набор $I^* = \{i : i = i^*\}$. Теперь искомый набор $X = \{x_{ij} : x_{ij} > 0\}$ отыскивается в результате решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in J_i^*} x_{ij} = a_{i^*}\ ,\ \ i = 1,2,...,m, \\ &\sum_{i \in I_j^*} x_{ij} = b_{j^*}\ ,\ \ j = 1,2,...,n. \end{aligned} \qquad (22)$$

Заметим, что полученная двойственная задача (17) – (18) радикально отличается от прямой задачи (16), (6) – (9) тем, что в двойственной задаче, в отличие от прямой, неопределенность, связанная со случайным характером спроса, из ограничений (7) перешла в целевую функцию (17). Предлагаемая процедура решения задачи содержит три этапа.

Первый этап. Пусть $\varphi_j(z_j)$ - плотность распределения случайного спроса в j - м пункте потребления и $\overline{z_j}$ - среднее значение этого спроса, $j = 1,2,...,n$. Решим задачу отыскания наборов $\{u_i\}$, $\{v_j\}$, максимизирующих

$$\overline{L}(U,V) = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_j v_j$$

и удовлетворяющих (18). Пусть $\{u_i^{(0)}\}$, $\{v_j^{(0)}\}$ - решение этой задачи. Используем эти наборы $\{u_i^{(0)}\}$, $\{v_j^{(0)}\}$ для отыскания в соответствии с (22) решения прямой задачи. Пусть $X^{(0)} = \{x_i^{(0)}\}$ - полученное модальное решение.

Второй этап. Понятно, что для любого конкретного набора $\{u_i\}$, $\{v_j\}$ - значение функции (17) есть случайная величина, плотность распределения которой может быть получена с учетом известных плотностей $\varphi(z_j)$ случайных компонентов функции (17). В частности, если

$$\varphi(z_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} exp\left\{-\frac{(z_j - \bar{z}_j)^2}{2\sigma_j^2}\right\},$$

то плотность распределения (17) будет иметь вид

$$\varphi(w) = \varphi(L(U,V)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Sigma} exp\left\{-\frac{(w - \overline{w})^2}{2\sigma_\Sigma^2}\right\}, \qquad (23)$$

где

$$\overline{w} = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_j v_j^{(0)}\ , \quad \sigma_\Sigma^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 z_j^2\ .$$

Сформулируем теперь критерий, в соответствии с которым будем решать задачу отыскания оптимальных наборов $Z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ и $X(Z)$. Этот критерий – составной и содержит два слагаемых. Первое из них характеризует меру «компактности» плотности распределения (23) случайной величины (17). Второе слагаемое определяет величину отклонения выбранного набора $X = \{x_{ij}\}$ от модального набора $X^{(0)}$.

В качестве меры компактности плотности распределения случайной величины W можно использовать, например, дисперсию случайной величины W, которая равна

$$\sigma_\Sigma^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 z_j^2\ .$$

В соответствии с этим критерий будет иметь вид

$$R(X) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - x_{ij}^{(0)}\right)^2\ . \qquad (24)$$

Третий этап. На этом этапе решается полученная задача квадратического программирования отыскания набора $X = \{x_{ij}\}$, минимизирующего (24) и удовлетворяющего (2) – (4).

Выводы

Таким образом, предложена процедура решения транспортной задачи со стохастическом спросом.

Предложен составной критерий эффективности возникающей здесь нетрадиционной задачи, который учитывает средние значения транспортных расходов, затрат на хранение непроданной части товара и потерь в связи с возможным дефицитом. Для решения задачи предложена процедура, которая основана на преобразовании исходной прямой задачи к двойственной.

Использование этой технологии позволило неопределенность, которая в исходной задаче содержалась в ограничениях, перевести в целевую функцию задачи. Этот прием заметно упростил вычислительную процедуру решения задачи, так как при этом многоитерационная схема решения редуцирована к одношаговой.

Литература

1. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Задачи линейного программирования транспортного типа. – М.: «Сов. радио», 1969. – 382с.
2. Гасс С. Линейное программирование: Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1961. – 332с.
3. Раскин Л.Г., Кириченко И.О. Многоиндексные задачи линейного программирования. – М., 1982. – 240с.
4. Раскин Л.Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления / Л.Г. Раскин. – М.: Сов. Радио, 1976. – 344с.
5. Серая О.В. Комплексная методика расчета стохастических характеристик стоимости транспортировок / О.В. Серая, Л.В. Бачкир // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. – 2009. – 4.1. - №5 / 2009 (58). – с. 40-43.
6. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. – М.: Наука, 1976. – 239с.
7. Каплинский А.И., Позняк А.С., Пропой А.И. О некоторых методах решения задач математического программирования// Автоматика и телемеханика. – 1971. - №10. – с. 87-94.
8. Пороцкий С.М. Стохастические задачи транспортного типа// Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика. – 1977. - №6. с. 34-39.
9. Юдин Д.Б. Задачи и методы стохастического программирования. – М.: «Сов. радио», 1979. – 385с.
10. Сіра О.В. Транспортна задача зі стохастичним спросом / О.В. Сіра, Л.В. Бачкір // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. – 2006. Вип. 6(41).
11. Серая О.В. Стохастическая задача транспортной логистики / О.В. Серая, Л.В. Бачкир, А.Л. Томашевич // Вестник НТУ «ХПИ». – 2006. - №31. – с. 112 – 117.
12. Nelder J. A./ J. A. Nelder, Mead R. – Computer Jornal, 1965, vol.7. p. 308-313.
13. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. Перевод с англ.: М. 1988.
14. Хэмди А. Таха, Введение в исследование операций. 6-е издание.: Пер. с англ. – М., 2001.
15. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Задачи и методы линейного программирования. – М.: «Сов. радио», 1964. – 736с.
16. Данциг Дж.Б. Линейное программирование, его применения и обобщения. – М., 1966. – 600с.
17. Карманов В.Г. Математическое программирование / В.Г. Карманов. – М.: Наука, 1980. – 256с.

Резюме

Запропоновано метод вирішення транспортної задачі високої розмірності з випадковим попитом. Рішення базується на перетворенні вихідної задачі до двоїстої. Цей підхід дозволив радикально скоротити тривалість рішення, істотно знижуючи обчислювальні труднощі, пов'язані з розмірністю задачі.

A method of solution of a transport problem of high dimension with random demand has been offered. The solution is based on the transformation of the initial problem into dual. This approach allowed to shorten the duration of the solution radically, significantly reducing computational difficulties connected with the dimension of the problem.

Key words: linear programming, transport problem, high dimension, stochastic demand, dual task.

Рецензент д.т.н., профессор Загарий Г.И. (УкрГАЖТ)

Поступила 7.03.2013 г.