

УДК 681.325

РАСКИН Л.Г., д.т.н., профессор,
 ПУСТОВОЙТОВ П.Е., к.т.н., старший преподаватель,
 СА'ДИ АХМАД АБДЕЛЬХАМИД САЕД АХМАД, аспирант (НТУ «ХПИ»)

Марковская аппроксимация немарковских систем

M/G/1 или G

Введение, анализ литературы

Несмотря на имеющиеся эффективные средства моделирования систем массового обслуживания, в том числе компьютерных сетей, выявление и исследование закономерностей в поведении таких систем часто оказывается трудно разрешимой задачей. Более того, даже в тех случаях, когда такую модель удастся построить, ее адекватность можно оценить только сравнивая результаты моделирования с некоторыми известными эталонными результатами.

Получение этих эталонных результатов обычно связывают с использованием аналитических моделей. По настоящему серьезной проблемой является построение таких моделей, которые, с одной стороны, были бы достаточно простыми, чтобы с их помощью можно было получить результаты в замкнутой форме, и, с другой стороны, были бы достаточно адекватными реальному процессу функционирования системы.

Практически все общие аналитические результаты получены в рамках марковских моделей систем обслуживания, принципиальным атрибутом которых является предположение о пуассоновском входящем потоке и экспоненциальном распределении продолжительности обслуживания. К сожалению, эти допущения далеко не всегда реализуются на практике.

Анализ эффективности функционирования систем массового обслуживания с непуассоновскими входящим потоком и обслуживанием представляет серьезные трудности и выполнен только для достаточно простых частных случаев (системы типа G/G/1/G/G/1).

Для анализа систем типа M/G/1 или G/M/1 используется метод вложенных цепей Маркова [3]. Их применение к анализу моделей основывается на возможности наблюдения за изменением состояния системы в момент прибытия требований в системы и выбытия их после окончания обслуживания. Возникающая в процессе решения задачи система уравнений решается с использованием производящей функции. В общем случае этот метод неприменим. Достаточно

трудоемкая технология решения задачи Хопфа приводит к интегральному уравнению типа Винера-Хопфа, решаемому только численно. Вместе с тем, для некоторых реальных систем этот анализ может быть доведен до простых аналитических соотношений.

Цель работы

Цель исследования – разработка методики, обеспечивающей возможность проведения анализа немарковских систем с использованием марковских моделей. Другими словами, цель статьи состоит в разработке методики определения параметров марковской модели, максимально адекватно отображающей функционирование реальной немарковской системы.

Методика марковской аппроксимации

Рассмотрим n -канальную систему с отказами, на вход которой поступает поток заявок с произвольным распределением случайной продолжительности интервала между ними. Статистическая обработка гистограмм этих случайных величин, построенных по реальным данным [4], дает основание сделать вывод о возможности аппроксимации этих гистограмм с использованием трехпараметрического распределения [5], имеющего вид

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{A} \frac{2}{\theta_2 \sqrt{2\pi} (\sqrt{1+\theta_3} + \sqrt{1-\theta_3})} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_1)^2}{2\theta_2^2} (1+\theta_3 \operatorname{sign}(\theta-\theta_1))\right\}, & \theta \geq 0, \\ 0, & \theta < 0 \end{cases} \quad (1)$$

где

$$A = \int_0^{\infty} \frac{2}{\theta_2 \sqrt{2\pi} (\sqrt{1+\theta_3} + \sqrt{1-\theta_3})} \times$$

© Л.Г. Раскин, П.Е. Пустовойтов, Са'ди Ахмад Абдельхамид Саед Ахмад, 2006

$$\times \exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}(1+\theta_3\text{sign}(\theta-\theta_1))\right\}d\theta,$$

θ - случайная продолжительность интервала между заявками,

θ_1 - параметр распределения, задающий математическое ожидание θ ,

θ_2^2 - параметр, задающий дисперсию θ ,

θ_3 - параметр, определяющий асимметрию распределения.

Возможности этого распределения изучены и рассмотрены в [5]. Там же показано, что распределение (1) хорошо аппроксимирует многие классические распределения случайных величин: экспоненциальное, релеевское, Вейбулла-Гнеденко, лог-нормальное. Усеченное нормальное распределение является частным случаем (1) при $\theta_3 = 0$. В связи с этим понятно, что с использованием распределения (1) можно задавать статистические описания входящих потоков в широком и разнообразном их спектре. С другой стороны, отрицательная асимметрия распределений реальных случайных интервалов между заявками входящего потока мотивирует исследование возможности приближения $\varphi(\theta)$ обобщенным распределением Эрланга, конструктивно обладающим этим же свойством.

Анализ эффективности такого приближения проведем следующим образом. Зададим совокупность распределений $\varphi(\theta)$ для разных наборов значений $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Затем для каждого такого набора параметров $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ найдем наилучшее значение параметра λ эрланговского распределения второго порядка, минимизирующего критерий

$$\eta_2(\lambda, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{1}{\theta_{max}} \int_0^{\theta_{max}} [\varphi(\theta) - f_2(\theta)]^2 d\theta, \quad (2)$$

где $f_2(\theta) = \lambda(\lambda\theta)e^{-\lambda\theta}$ - распределение Эрланга второго порядка.

Значение θ_{max} отыскивается из условия

$$\varphi(\theta_{max}) = \varepsilon,$$

ε - достаточно малое число, например, $\varepsilon = 10^{-3}$.

Далее для того же набора $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ отыскивается наилучшее приближение $\varphi(\theta)$ эрланговским распределением третьего порядка, минимизируя критерий

$$\eta_3(\lambda, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{1}{\theta_{max}} \int_0^{\theta_{max}} [\varphi(\theta) - f_3(\theta)]^2 d\theta, \quad (3)$$

где $f_3(\theta) = \lambda \frac{(\lambda\theta)^2}{2!} e^{-\lambda\theta}$ - распределение Эрланга третьего порядка.

Результаты вычислений приведены в таблице и на рисунках.

Таблица 1 – Расчетные данные для оценки эффективности марковской аппроксимации

θ_1	θ_2	θ_3	λ_2	η_2	λ_3	η_3
0.2000	0.2000	-0.6000	5.0893	0.1869	7.8564	0.4070
0.2000	0.2000	-0.4000	5.8086	0.2409	8.9401	0.4301
0.2000	0.2000	-0.2000	6.3606	0.2861	9.7567	0.4662
0.2000	0.2500	-0.6000	4.4466	0.1917	6.7850	0.4401
0.2000	0.2500	-0.4000	5.1308	0.2164	7.8210	0.4595
0.2000	0.2500	-0.2000	5.6564	0.2432	8.6072	0.4825
0.2000	0.3000	-0.6000	3.9189	0.1997	5.9352	0.4292
0.2000	0.3000	-0.4000	4.5602	0.2128	6.9078	0.4483
0.2000	0.3000	-0.2000	5.0556	0.2281	7.6536	0.4663
0.2000	0.4000	-0.6000	3.1407	0.1900	4.7172	0.3767
0.2000	0.4000	-0.4000	3.6966	0.1971	5.5594	0.3961
0.2000	0.4000	-0.2000	4.1326	0.2038	6.2192	0.4105
0.3000	0.2000	-0.6000	4.0496	0.3392	6.4180	0.1375
0.3000	0.2000	-0.4000	4.5313	0.3994	7.1333	0.2011
0.3000	0.2000	-0.2000	4.9066	0.4276	7.6772	0.2582
0.3000	0.2500	-0.6000	3.7152	0.1704	5.8002	0.2171
0.3000	0.2500	-0.4000	4.2018	0.2212	6.5288	0.2416
0.3000	0.2500	-0.2000	4.5766	0.2550	7.0778	0.2794
0.3000	0.3000	-0.6000	3.3906	0.1241	5.2346	0.2715
0.3000	0.3000	-0.4000	3.8693	0.1599	5.9559	0.2869
0.3000	0.3000	-0.2000	4.2364	0.1898	6.4991	0.3109
0.3000	0.4000	-0.6000	2.8384	0.1304	4.3188	0.2928
0.3000	0.4000	-0.4000	3.2829	0.1432	4.9927	0.3057
0.3000	0.4000	-0.2000	3.6257	0.1578	5.5071	0.3196

В i -й строке этой таблицы содержатся:

$(\theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3})$ - набор параметров, задающий конкретное распределение $\varphi(\theta)$;

$\lambda_2 = \arg \min_{\lambda} \eta_2(\lambda, \theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3})$ - значение параметра λ эрланговского распределения второго порядка, минимизирующего критерий (2);

η_2 - соответствующее найденному значению λ_2 значение критерия (2);

$\lambda_3 = \arg \min_{\lambda} \eta_3(\lambda, \theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3})$ - значение параметра λ эрланговского распределения третьего порядка, минимизирующего критерий (3);

η_3 - соответствующее найденному значению λ_3 значение критерия (3).

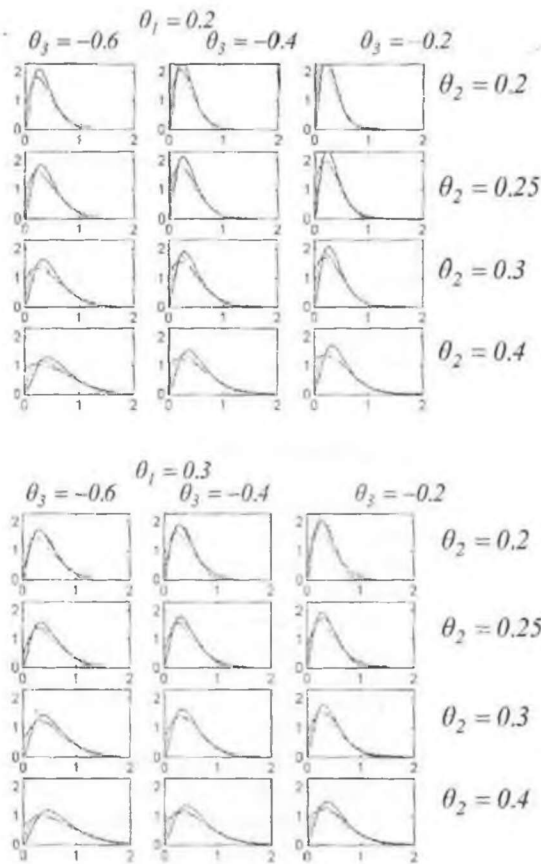


Рисунок 1 - Графики плотностей распределения $\varphi(\theta)$, $f_2(\theta)$, $f_3(\theta)$ для различных значений параметров $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ при оптимальном выборе λ

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

- во-первых, качество приближения распределения $\varphi(\theta)$ эрланговским распределением является достаточно высоким;
- во-вторых, эрланговское распределение третьего порядка не имеет преимуществ в качестве приближения по сравнению с распределением второго порядка;
- в-третьих, успешная аппроксимация распределения $\varphi(\theta)$ эрланговским распределением второго порядка для конкретных наборов $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ дает основание для постановки и решения задачи параметризации процедуры установления соответствия между значениями параметров $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ распределения $\varphi(\theta)$ и значением λ распределения Эрланга, минимизирующего критерий $\eta_2(\lambda)$.

В соответствии с этим введем уравнение регрессии

$$\lambda = a_0 + a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_3 + a_{12}\theta_1\theta_2 + a_{13}\theta_1\theta_3 + a_{23}\theta_2\theta_3 + a_{123}\theta_1\theta_2\theta_3. \quad (4)$$

Параметры $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{123}$ этого уравнения найдем, используя приведенные в таблице 1 результаты. Введем матрицы A и Λ следующим образом

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} & \theta_{11}\theta_{12} & \theta_{11}\theta_{13} & \theta_{12}\theta_{13} & \theta_{11}\theta_{12}\theta_{13} \\ 1 & \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} & \theta_{21}\theta_{22} & \theta_{21}\theta_{23} & \theta_{22}\theta_{23} & \theta_{21}\theta_{22}\theta_{23} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \theta_{n1} & \theta_{n2} & \theta_{n3} & \theta_{n1}\theta_{n2} & \theta_{n1}\theta_{n3} & \theta_{n2}\theta_{n3} & \theta_{n1}\theta_{n2}\theta_{n3} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_{123} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Теперь, наилучший в смысле наименьших квадратов вектор A определяется соотношением

$$\bar{A} = (H^T H)^{-1} H^T \Lambda. \quad (5)$$

Дисперсия адекватности введенного уравнения регрессии рассчитывается по формуле

$$D_{\text{адекв}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} (H\bar{A} - \Lambda)^T (H\bar{A} - \Lambda)$$

и равна 0.0155 для распределения второго порядка и 0.0183 для распределения третьего порядка.

Таким образом, целесообразная последовательность действий в процедуре получения аналитического описания входящего потока для реальной системы обслуживания такова:

- построение гистограммы для случайного интервала между заявками;
- аппроксимация гистограммы трехпараметрическим распределением $\varphi(\theta)$, задаваемым формулой (1);
- расчет параметра λ для потока Эрланга второго порядка, наилучшим образом приближающего к полученному распределению $\varphi(\theta)$, по формуле (4) с учетом найденного с использованием (5) вектора \bar{A} .

Продолжая исследование, следует отметить, что оценка эффективности системы массового обслуживания с отказами с эрланговским входящим потоком и экспоненциальном обслуживанием по-прежнему не может быть непосредственно проведена традиционными методами анализа марковских систем. Вместе с тем, такая система может быть трансформирована в марковскую с применением следующего элементарного приема.

Рассмотрим технологию трансформирующего преобразования, для простоты, для случая, когда входя-

ший потік являється потоком Ерланга другого порядку. Этот потік формується, якщо звичайний пуассонівський потік просеять, виділив кожне друге подія. С урахуванням цього обставини для описання функціонування системи з ерланговим входним потоком другого порядку використовуємо граф станів і переходів, приведений на рис.2.

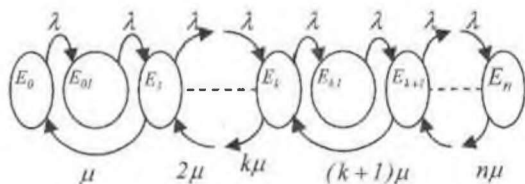


Рисунок 2 – Граф станів і переходів системи з ерланговим входним потоком і експоненціальним обслуговуванням

Здесь

E_k - состояние, когда в системе занято ровно k канал $E_k, k = 0, 1, 2, \dots, n$;

$E_{k,1}$ - буферное состояние, соответствующее ситуации, когда в системе занято ровно k каналов и поступила новая заявка, которая будет отсеяна и поэтому не влияет на изменение числа занятых каналов, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$;

λ - интенсивность входящего просеиваемого пуассонского потока;

μ - интенсивность обслуживания.

Для полученного графа состояний и переходов сформируем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных вероятностей состояний системы. Система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}
 -\lambda P_0 + \mu P_1 &= 0, \\
 \lambda P_0 - \lambda P_{0,1} &= 0, \\
 \lambda P_{0,1} + 2\mu P_2 - (\lambda + \mu) P_1 &= 0, \\
 \lambda P_1 - \lambda P_{1,1} &= 0, \\
 \lambda P_{1,1} + 3\mu P_3 - (\lambda + 2\mu) P_2 &= 0, \\
 \dots & \\
 \lambda P_{k-1} - \lambda P_{k-1,1} &= 0, \\
 \lambda P_{k-1,1} + (k+1)\mu P_{k+1} - (\lambda + k\mu) P_k &= 0, \\
 \dots & \\
 \lambda P_{n-1} - \lambda P_{n-1,1} &= 0, \\
 \lambda P_{n-1,1} + n\mu P_n &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Полученная система уравнений решается традиционными методами и результат решения может быть представлен, например, формулами Крамера.

Выводы

Предложена двухэтапная процедура построения марковских моделей систем обслуживания, аппроксимирующих поведение немарковских систем. На первом этапе произвольное распределение случайного интервала между заявками входного потока аппроксимируется трехпараметрическим распределением с отрицательной асимметрией. На втором этапе с использованием полученных соотношений осуществляется расчет параметра λ эрланговского распределения второго порядка, наилучшим образом приближающего это распределение к трехпараметрическому. Приведены результаты расчетов, подтверждающие эффективность методики.

Литература

1. Риордан Дж. Вероятностные системы обслуживания: Пер. с англ.-М.: Связь, 1966. – 184 с.
2. Кокс Д., Смит Ч. Теория очередей: Пер. с англ. – М.: Мир, 1966. – 218 с.
3. Кендалл Д. Стохастические процессы теории очередей и их анализ методом вложенных цепей Маркова // Математика. – 1959. – №6. – С.97-112.
4. Столинс В. Современные компьютерные сети: Пер. с англ.- СПб.: Питер, 2003. – 783 с.
5. Серая О.В. Аппроксимация гистограмм трехпараметрическим распределением случайных величин // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2001. – №3. – С.81-83.

Резюме

Случайный интервал между заявками входного потока описывается трехпараметрическим распределением, по которому рассчитываются параметры аппроксимирующего распределения Эрланга второго порядка. Предложена процедура построения соответствующей этому потоку заявок марковской модели

Випадковий інтервал між заявками вхідного потоку описується трьохпараметричним розподілом, по якому розраховуються параметри апроксимуючого розподілу Ерланга другого порядку. Запропонована процедура побудови марковської моделі, що відповідає цьому потоку заявок

A random interval between entrance stream requests is described by three-parameters distribution, for it the parameters of approximating Erlang second-order distribution are calculated. It is offered the procedure for creating Markov model that fits this stream of requests

Поступила 21.11.2005 г.