

УДК 621.66

И. А. ТАРАН, д-р техн. наук, доц., ГВУЗ «НГУ», Днепропетровск;
М. Н. ТРУБИЦИН, канд. техн. наук, доц., ГВУЗ «НГУ», Днепропетровск

ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА ОДНОПЛОСКОСТНОЙ БАЛАНСИРОВКИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЖЕСТКИХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ

В матричном виде получена обобщенная формула для одноплоскостной балансировки жестких вращающихся тел (роторов) методом амплитуд, направленная на уменьшение погрешностей получаемых результатов. Определены условия существования решения задачи методом трех пробных пусков. Проведен сравнительный анализ накопления погрешностей расчета при неточном задании исходных данных. Даны рекомендации по предварительной оценке результатов последнего, третьего пуска.

Ключевые слова: балансировка, ротор, пробный пуск, погрешность.

Введение. Задача балансировки произвольных жестких вращающихся тел (роторов) подразумевает совмещение главной центральной оси инерции ротора с осью его вращения. Если поперечный размер балансируемого ротора значительно больше продольного (вдоль оси вращения) размера, то такой ротор можно считать плоским диском. В этом случае для балансировки диска необходимо, чтобы его центр масс лежал на оси вращения – это известная задача одноплоскостной балансировки [1]. Ее можно решать методами статической и более общей и точной динамической (моментной) балансировки [2].

Анализ последних достижений и публикаций. Наиболее распространенными способами решения задач динамической балансировки являются: метод фаз и амплитуд [3] и метод амплитуд [4]. В обоих методах отслеживаются реакции линейной механической системы «вращающийся ротор» на вносимые возмущения – пробные дисбалансы $d_{np} = m_{np} \cdot r_{np}$ (m_{np} – масса пробного груза, положительная, если груз прикрепляется к ротору, отрицательная, если масса удаляется с ротора; r_{np} – радиус расположения пробного груза). Пробный дисбаланс имеет свою угловую координату φ_{np} . Измерение колебаний опор вращающегося ротора с присоединенными d_{np} традиционно называются пробными пусками. А запуск ротора с начальным, собственным и неизвестным пока дисбалансом $d_0 = m_0 \cdot r_0$ (с угловой координатой φ_0) называется нулевым пуском. Считается, что все замеры колебаний опор на всех пусках производятся при одной и той частоте вращения ротора ω . Возникающая при этом центробежная сила инерции $F = m \cdot r \cdot \omega^2 = d \cdot \omega^2$ от каждого дисбаланса воспринимается опорами и вносит своё слагаемое (с амплитудой A , фазой α) в колебания опор. Отметим, что в силу линейных свойств рассматриваемой механической системы амплитуда A пропорциональна возмущающей силе F , а фаза колебаний опоры α сдвинута относительно фазы дисбаланса d на некоторую величину δ [3, с.194].

Цель исследования, постановка задач. Сформулируем задачу одноплоскостной балансировки: отбрасывая из рассмотрения собственный вес ротора, при производстве минимального количества пусков (включая нулевой) определить величину d_0 и расположение φ_0 исходного дисбаланса плоского диска, для последующего совмещения его центра масс с осью вращения путем удаления лишней или добавления недостающей массы, т.е. нанесения на ротор корректирующего дисбаланса $d_{корр} = m_{корр} \cdot r_{корр} = -d_0$, с угловой координатой $\varphi_{корр} = \varphi_0$ при $m_{корр} < 0$ (удаление массы) и $\varphi_{корр} = \varphi_0 + \pi$ при $m_{корр} > 0$ (добавление массы). В связи с тем, что

© И. А. Таран, М. Н. Трубицин, 2014

дисбалансы, силы инерции и колебания наглядно представляются векторами, наиболее простой вид решения задач балансировки при использовании метода фаз и амплитуд удобно получить, применив комплексные числа в Эйлеровой форме [3]: дисбалансы $D=d \cdot e^{i\varphi}$; амплитуды $Am=A \cdot e^{i\alpha}$; динамические коэффициенты влияния (ДКВ) $K=k \cdot e^{i\delta}$, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

При этом модуль k комплексного числа K будет иметь смысл масштабного, переводного коэффициента, показывающего, во сколько раз изменилась величина амплитуды по сравнению с величиной дисбаланса, т.е. в комплексной форме

$$Am=A \cdot e^{i\alpha} = K \cdot D=(k \cdot d) \cdot e^{i(\varphi+\delta)}.$$

Удачный переход от скалярных (амплитуды и фазы) представлений рассматриваемых величин к векторным (комплексные числа) подсказал идею и цель настоящей работы. **Идея** – выявление взаимосвязи между выводами обобщенных формул метода фаз и амплитуд и метода амплитуд при однозначном определении параметров d_0, φ_0, k с помощью минимального количества пробных пусков и использование матричных обозначений. **Цель работы** – вывод и тестовая проверка обобщенной формулы одноплоскостной балансировки методом амплитуд, направленная на уменьшение погрешностей получаемых результатов d_0, φ_0 и k . Выполнение этих пунктов будет способствовать в дальнейшем разработке способов и алгоритмов балансировки, исключающих применение вибродатчиков.

Материалы исследования. В виду наличия в методе фаз и амплитуд только двух комплексных неизвестных D и K для их определения необходимо иметь два условия, которые формируют простую систему двух линейных уравнений (1) с комплексными коэффициентами по результатам всего двух пусков нулевого и первого. Остальные пуски можно считать проверочными.

$$\begin{cases} Am_0 = K \cdot D_0 \\ Am_1 = K \cdot (D_0 + D_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_0 = \frac{Am_0}{Am_1 - Am_0} \cdot D_1 \\ K = \frac{Am_1 - Am_0}{D_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_0 r_0 = |D_0|; & \varphi_0 = \arg(D_0); \\ k = |K|; & \delta = \arg(K); \end{cases} \quad (1)$$

Отметим, что при производстве пусков возникают естественные погрешности получения величин и фаз, и амплитуд, связанные с погрешностями вибродатчиков и отметчика положения ротора. При проведении расчетов может произойти накопление погрешностей, зависящее от величин погрешностей четырех исходных (полученных в результате опытов) параметров α_0, α_1, Am_0 и Am_1 . Несомненной положительной чертой метода фаз и амплитуд является рассмотрение ДКВ. При балансировке партий однотипных роторов, на одинаковых опорах знание комплексного числа K позволяет уже на втором и последующих балансируемых роторах обходиться всего одним (начальным) пуском и определять исходный дисбаланс ротора из первого уравнения вышеприведенной системы $D_0=Am_0/K$.

Рассмотрим метод амплитуд для одноплоскостной балансировки, еще он называется методом трех пусков [2, 4]. Правильней его было бы называть методом трех пробных пусков, т.к. с учетом начального пуска это уже будет метод четырех пусков. Действительно, неизвестных по-прежнему четыре d_0, φ_0, k и δ , но сдвиг фаз δ здесь получить не представляется возможным. В специальной литературе [2, 4] и др. для этой задачи вводятся различные шаблонные упрощения (которые, к сожалению, не всегда можно применить) для трех пробных пусков:

- пробные дисбалансы имеют одинаковую величину

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 = m_3 r_3 = m r = d_{np}; \quad (2)$$

- пробные дисбалансы равномерно расположены по угловой координате, т.е.

$$(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3) = (0^\circ 120^\circ 240^\circ); \quad (3)$$

- пробные дисбалансы расположены специальным образом по угловой координате

$$(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3) = (0^\circ 90^\circ 180^\circ). \quad (4)$$

Конкретные рекомендации, в каких случаях применять те или иные упрощения в перечисленной литературе отсутствуют. Рассмотрим традиционную графическую векторную интерпретацию задачи балансировки методом амплитуд. Экспериментально доказано [3], что вектора амплитуд колебаний опор ротора «запаздывают» относительно порождающих их векторов дисбалансов, т.е. имеют сдвиг фаз δ , рис. 1,а. Причем этот сдвиг является постоянной величиной для каждой рассматриваемой опоры и не зависит от величины дисбаланса. При таком свойстве векторов амплитуд колебаний опор ротора надобность в нахождении угла δ отпадает, а векторные треугольники дисбалансов и соответствующих им амплитуд будут подобны с коэффициентом подобия k .

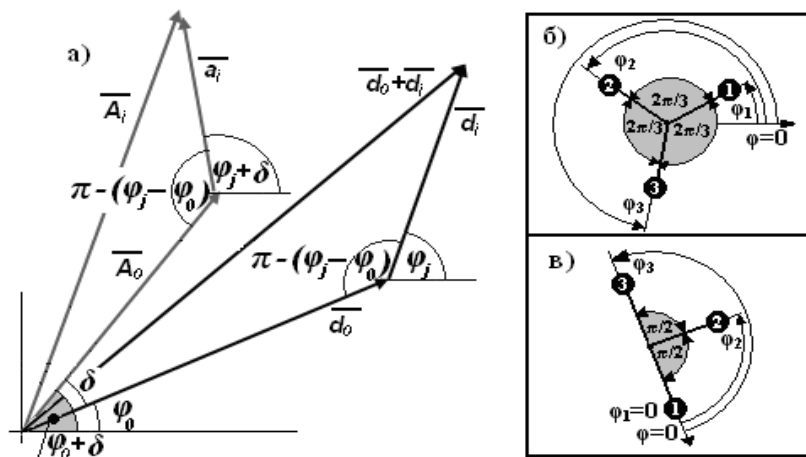


Рисунок 1 – Расположение дисбалансов и возникающих амплитуд: а – векторные треугольники амплитуд; б и в – специальное расположение трех пробных дисбалансов

При производстве нулевого и j -того пробного пусков получим, соответствующие амплитуды и дисбалансы, связанные системой уравнений.

$$\begin{cases} A_0 = k \cdot d_0 = k \cdot m_0 r_0 \\ A_j = k \cdot \sqrt{d_0^2 + d_j^2 + 2d_0 d_j \cos(\varphi_j - \varphi_0)} \end{cases} \quad j = 1, 2, 3$$

Исключая из этой системы коэффициент подобия k и вводя безразмерную амплитуду

$$\lambda_j = A_j / A_0$$

получим окончательную систему трех линейных уравнений, позволяющую получить однозначное решение поставленной задачи.

$$\left\{ (1 - \lambda_j) (m_0 r_0)^2 \right\} + 2 m_j r_j \cos \varphi_j \{ m_0 r_0 \cdot \cos \varphi_0 \} + 2 m_j r_j \sin \varphi_j \{ m_0 r_0 \cdot \sin \varphi_0 \} = - (m_j r_j)^2$$

Искомые неизвестные в этой системе взяты в фигурные скобки. Тогда обобщенную формулу метода амплитуд одноплоскостной балансировки можно представить в удобной матричной форме (5) легко поддающейся программированию.

$$\begin{bmatrix} (m_0 r_0)^2 \\ m_0 r_0 \cdot \cos \varphi_0 \\ m_0 r_0 \cdot \sin \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 - 1 & -2 m_1 r_1 \cdot \cos \varphi_1 & -2 m_1 r_1 \cdot \sin \varphi_1 \\ \lambda_2^2 - 1 & -2 m_2 r_2 \cdot \cos \varphi_2 & -2 m_2 r_2 \cdot \sin \varphi_2 \\ \lambda_3^2 - 1 & -2 m_3 r_3 \cdot \cos \varphi_3 & -2 m_3 r_3 \cdot \sin \varphi_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} (m_1 r_1)^2 \\ (m_2 r_2)^2 \\ (m_3 r_3)^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Введение в рассмотрение для общего случая угла $\varphi_1 \neq 0$ позволяет на практике не привязываться к одной системе угловых координат, а использовать удобные системы отсчета углов. Это имеет несомненное практическое преимущество, особенно когда по техническим причинам нельзя устанавливать пробные грузы по одному принципу (равномерно по окружности, через 90° , или комбинацией из двух слагаемых-грузов).

Получение менее громоздких аналитических выражений возможно лишь при использовании алгебры матриц и последовательном рассмотрении условий (2, 3, 4). Принятие условия (3) $(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3) = (0^\circ 120^\circ 240^\circ)$ для углов пробных дисбалансов дает

$$\begin{bmatrix} m_0 r_0 \\ m_0 r_0 \cos \varphi_0 \\ m_0 r_0 \sin \varphi_0 \end{bmatrix} = m r \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{\sum_{j=1}^3 \lambda_j^2 - 3}}; & \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \lambda_1^2 - \sum_{j=1}^3 \lambda_j^2}{\sum_{j=1}^3 \lambda_j^2 - 3}; & \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\lambda_2^2 - \lambda_3^2}{\sum_{j=1}^3 \lambda_j^2 - 3} \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

Подстановка (4) $(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3) = (0^\circ 90^\circ 180^\circ)$ в (5) позволяет получить

$$\begin{bmatrix} m_0 r_0 \\ m_0 r_0 \cos \varphi_0 \\ m_0 r_0 \sin \varphi_0 \end{bmatrix} = m r \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - 2}}; & \frac{\lambda_1^2 - \lambda_3^2}{2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - 2)}; & \frac{3 \lambda_2^2 - \sum_{j=1}^3 \lambda_j^2}{2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - 2)} \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

В случае установки пробных и корректирующих грузов на окружности одного радиуса R ($R = r = r_0$) из выражений (6 и 7) можно сокращением исключить r и r_0 . Правильность полученной формулы подтверждается выражением для нахождения фазы исходного дисбаланса, [2, с 94]

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{(A_1^2 - A_2^2)(1 - \cos \beta) - (A_1^2 - A_3^2)(1 - \cos \alpha)}{(A_1^2 - A_2^2) \sin \beta - (A_1^2 - A_3^2) \sin \alpha},$$

где обозначениям Левита [2] соответствует: $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$; $\beta = \varphi_3 - \varphi_1$; $\gamma = \varphi_0$. И для $\varphi_1 = 0$, с учетом $\lambda_j = A_j / A_0$, получаем следствие из обобщенной формулы и более лаконичный

вариант нахождения $tg \varphi_0$ при равномерной расстановке пробных грузов через 120° , рис. 2б.

Покажем преимущество использования полученной формулы (5) на рассмотренном в [2] примере одноплоскостной балансировки тонкого диска. Необходимо произвести балансировку диска методом трех пробных пусков при помощи одного пробного грузика массой 20г. Установку пробных и уравнивающей масс, а также, при необходимости, удаление корректирующей массы с диска производить на одной и той же окружности радиуса R . Результаты замеров колебаний опор приведены в следующей таблице.

Таблица 1 – Колебания опоры ротора в зависимости от расстановки пробного груза

Названия пусков	нулевой	пробные		
Номера пусков	0	1	2	3
Величина амплитуды на опоре, ед.	29	20	32	42
Фазы установки пробного груза ($m_{np}=20g$), градусы	-	0	120	240
Относительные амплитуды A_0/A_j	1	0,69	1,103	1,148

Имеем случай одинаковых пробных грузов $m_j = m_{np} \cdot R$ при их равномерной расстановке – вариант (3), т.е. можно применить формулу (6). Приняв, по условию задачи $r_0 = R = r$, получаем из (6)

$$\begin{bmatrix} m_0 \\ m_0 \cos \varphi_0 \\ m_0 \sin \varphi_0 \end{bmatrix} = 20 \cdot \begin{bmatrix} 1,949 \\ -1,495 \\ -0,966 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38,956 \\ -29,895 \\ -19,274 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_0 = -147,189^\circ$$

Как видно, теперь в проводимом балансировочном расчете можно опустить следующие логические действия:

- расстановки амплитуд по убыванию (выбор максимальной амплитуды);
- учета зависимости направления отсчета углов φ_j от направления вращения ротора;
- определения интервалов (дуг) расположения «легкой» или «тяжелой» точек;
- выбора, в виду известного тригонометрического равенства $tg \varphi = tg(\varphi \pm \pi)$, нужного значения $tg \varphi_0$, не всегда совпадающего с главным значением.

Предлагаемая формула (5) позволяет также опустить так называемые контрольные пуски (определяющие необходимость добалансировки, в случае ошибочного выбора φ_0 или знака корректирующей массы), т.к. выдает однозначное расположение и величину исходного дисбаланса ротора.

Рассмотрим область применимости полученной зависимости. Здесь нас интересуют вопросы областей существования решений приведенного уравнения, т.к. это непосредственно связано с практическими вариантами, когда ротор невозможно отбалансировать или «ротор не подлежит балансировке». Если принять гипотетический случай, что пробные и корректирующие дисбалансы могут иметь сколь угодно большие значения, то наиболее общим остается условие существования решения задачи одноплоскостной балансировки - невырожденность матрицы (5).

В дальнейшем, здесь представляют интерес вопросы, связанные с поиском явных зависимостей между d_0 , φ_0 и исходными данными – амплитудами $A_0 \dots A_3$ на основе специальной расстановки специальных пробных масс. Налицо новая

интереснейшая задача, решение которой может позволить отказаться от дорогостоящих точных приборов за счет менее точных, но позволяющих накопить одинаковую погрешность.

Подводя итоги проделанным действиям, заключаем, что задача определения накопления погрешностей при одноплоскостной балансировке требует более детального рассмотрения и учета взаимного расположения всех дисбалансов, соотношения их масс, последовательности установки пробных масс, влияние не постоянства скорости вращения ротора и т.д., поэтому она в рамках одной работы рассмотрена быть не может.

Выводы

1. Выведена обобщенная формула одноплоскостной балансировки (5) и на ее основе разработана методика, позволяющая для произвольной расстановки исходного и пробного дисбалансов найти положение центра масс балансируемого плоского диска.

2. Обоснована возможность предпочтения усложнения алгоритма решения задачи одноплоскостной балансировки (неявный, скрытый вид формул, включение задачи обращения матриц) по сравнению с приемами упрощающими расчет (ручной, графический, но не компьютерный) и увеличивающими количество логических и геометрических действий.

3. Разработанная формула позволяет получить однозначное решение задачи одноплоскостной балансировки за минимальное количество пробных пусков – три, и при этом отказаться от четвертого проверочного пуска.

4. В качестве условия применимости полученной формулы предлагается взять условие невырожденности обрабатываемой матрицы (5).

Список литературы: 1. *Левит М.Е.* Балансировка деталей и узлов / М.Е. Левит, В.М. Рыженков. – М.: Машиностроение, 1986. – 248 с. 2. *Гольдин А.С.* Вибрация роторных машин / А.С. Гольдин. – М.: Машиностроение, 2000. – 344 с. 3. *Левит М.Е.* Справочник по балансировке / М.Е. Левит. – М.: Машиностроение, 1992. – 464 с. 4. *Штейнвольф Л.И.* Динамические расчеты машин и механизмов / Л.И. Штейнвольф. – М.: Машгиз, 1961. – 240с.

Поступила в редколлегию 06.03.2014

УДК 621.66

Обобщенная формула одноплоскостной балансировки произвольных жестких вращающихся тел / И. А. Таран, М. Н. Трубицин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Автомобіле- та тракторобудування. – Х. : НТУ «ХПІ», 2014. – № 8 (1051). – С. 114-119. – Бібліогр.: 4 назв. – ISSN 2078-6840.

У матричному вигляді отримана узагальнена формула для одноплоскостного балансування жорстких обертових тіл (роторів). Визначено умови існування розв'язку задачі методом трьох пробних пусків. Проведено порівняльний аналіз накопичення похибок розрахунку при неточному завданні вихідних даних. Надано рекомендації з попередньою оцінкою результатів останнього, третього пуску.

Ключові слова: балансування, ротор, пробний пуск, похибка.

Generalized formula balancing arbitrary rigid rotating bodies / I. A. Taran, M. N. Trybican // Bulletin of NTU «KhPI». Series: Car- and tractorbuilding. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2014. – № 8 (1051). – P. 114-119. – Bibliogr.: 4. – ISSN 2078-6840.

In matrix form obtained generalized formula for odnoploskostnoy hard balancing rotating bodies (rotors). The conditions of existence of a solution by the three test runs. A comparative analysis of the accumulation of errors in the calculation of inaccuracy of the original data. Recommendations on the preliminary assessment of the results of the latter, the third starter.

Keywords: balancing, rotor, test run, error.