

**В.И. ГРИЦЮК**, канд. техн. наук, доц., ХНУРЭ, Харьков

## УСТОЙЧИВЫЙ МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛИ

Исследуется рекуррентный метод идентификации модели. Предлагается производить определение оптимального числа членов модели с использованием численно устойчивого метода ортогонализации.

**Ключевые слова:** численная устойчивость, метод ортогонализации.

**Введение.** Сведение исходной задачи к задаче меньшей размерности приводит к сокращению объема вычислений и повышению численной устойчивости метода. Применение идентификации модели системы в реальном времени необходимо для адаптации системы к изменяющимся условиям функционирования.

Исследованием и развитием численных методов решения задач теории наименьших квадратов занимались *Ч. Лоусон, Р. Хенсон*. В настоящее время необходима разработка таких методов обработки информации, которые были бы численно устойчивые и позволяли получать более точные оценки.

**Целью** настоящей работы является создание численно устойчивого метода, основанного на ортогональном разложении, позволяющего осуществить идентификацию модели в реальном времени.

**Оценки коэффициентов в описании явлений** находятся по данным пассивного эксперимента, когда переменные сильно коррелированы.

Исследуем многомерный случай, рассмотренный в [1].

Пусть рассматриваемая модельная структура задается соотношением

$$\Theta(x, \beta) = X(x)\beta,$$

где  $\Theta(x, \beta)$  – достаточно гладкая  $p$  – мерная вектор-функция;  $X(x)$  – матрица размера  $p \times m$ , элементами которой служат функции  $h_{kr}(x)$ , определенные на интересующей нас области  $\chi$ ;  $\beta$  – неизвестный вектор параметров размера  $m$ . Оптимальная оценочная функция может быть представлена в виде

$$\hat{Y}^{(l^*)}(x_i) = X(x_i)P^{(l^*)}\hat{G}^{(l^*)}. \quad (1)$$

В (1)  $l^*$  – это оптимальное число членов модели; матрица  $P^{(l^*)}$  состоит из ортонормированных собственных векторов  $p_1, p_2, \dots, p_{l^*}$ , соответствующих левым сингулярным векторам, расставленным в порядке невозрастания чисел в

$$(q_1 \bar{Y})^2 \geq (q_2 \bar{Y})^2 \geq \dots \geq (q_r \bar{Y})^2, \quad (2)$$

вектор  $\bar{Y}^T = ((Y(x_1))^T, \dots, (Y(x_n))^T)$  размера  $nr \times 1$ ;  $r$  – ранг матрицы  $\bar{X}$  размера  $nr \times n$ ,

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_n) \end{bmatrix};$$

число столбцов матрицы  $P^{(r)}$  равно количеству чисел в (2), для которых выполняется условие (3)

$$\sigma^{-2}(q_i \bar{Y})^2 \geq 1. \quad (3)$$

Определение оптимального числа членов может осуществляться по мере обработки поступающих данных наблюдения. Для повышения точности и устойчивости метода к матрицам с плохой обусловленностью, а также увеличения количества оцененных параметров или неопределённости входных данных, предлагается применить сингулярное разложение, позволяющее осуществить идентификацию модели в реальном времени. Цель состоит в том, чтобы путем ортогональных преобразований *матрицу ковариаций*  $\underline{P}$  преобразовать в диагональную матрицу, при этом определяются сингулярные числа матрицы  $\underline{P}$ , то есть ищутся *преобразования Гивенса* таким образом, что

$$\underline{G}_1^T \underline{D}^{1/2} \underline{U}^T \underline{G}_2 = \underline{D}_g,$$

где для сокращения времени счета используется *модифицированный метод Гивенса без квадратных корней* [2].

Для этой цели используем новые соотношения численно устойчивого модифицированного метода Гивенса.

В случае преобразования произвольной матрицы

$$\tilde{C} = GC_1 = D_1^{1/2} C_2$$

для элементов с  $b_{ji} \neq 0$   $C_2$  – нижнетреугольной матрицы используем уравнение

$$l_k^2 = l_{k-1}^2 + d_{N-k} b_{N-k,M}^2, \quad k = 2, \dots, N-1;$$

элементы  $\alpha_i$  и  $\beta_{j,i}$  матрицы  $C_2$  для  $j$  строки вычисляются по формулам (4),

(5):

$$\alpha_i = (\tilde{b}_{N,i}^{(N-2)} l_{N-2}^2 + d_j b_{j,M} b_{j,i}) / l_{N-1}^2, \quad (4)$$

для  $j$  – й строки вычисляем коэффициенты

$$\beta_{j,i} = b_{j,i} - b_{j,M} \tilde{b}_{N,i}^{(N-1-j)}, \quad \beta_{N-1,i} = b_{N,M} b_{N-1,i} - b_{N,i} b_{N-1,M}. \quad (5)$$

Разработанная модификация метода Гивенса отличается тем, что в ней отсутствует извлечение квадратных корней и по сравнению с существующи-

ми методами требуется меньше вычислительных затрат. Данный метод обладает высокой численной устойчивостью [1, 2, 4].

Следовательно,

$$\underline{P} = \underline{UDU}^T = \underline{G}_2 \underline{D}_g \underline{G}_1^T \underline{G}_1 \underline{D}_g \underline{G}_2^T = \underline{G}_2 \underline{D}_g^2 \underline{G}_2^T.$$

Сингулярное разложение вычисляется в два этапа.

Рассмотрим сингулярное оценочное разложение (*svd* – сингулярное оценочное разложение) для новых прогнозных и изменяемых формулировок *фильтра Калмана (Kalman)*.

Чтобы получить сингулярное оценочное разложение ковариационной матрицы, применяются описанные трансформации Гивенса  $\underline{G}_i$  для матрицы  $\underline{D}^{1/2} \underline{U}^T$ , так что в итоге для рассмотренной ковариационной матрицы  $\underline{P}$  верно:

$$\underline{GPG}^T = \underline{GUDU}^T \underline{G}^T = \underline{BB}^T,$$

при этом матрица  $\underline{BB}^T$  на основании структуры  $\underline{B}^T$  является симметричной трёхдиагональной матрицей.

Сингулярные значения рассчитываются из соответствующей последней подматрицы  $\underline{B}^T \underline{B}$  размера  $2 \times 2$ . Одна из таких подматриц  $\underline{S}_i$  имеет вид:

$$\underline{S}_i = \begin{bmatrix} d_i(1+l_i^2) & \sqrt{d_i d_{i+1} l_{i+1}} \\ \sqrt{d_i d_{i+1} l_{i+1}} & d_{i+1}(1+l_{i+1}^2) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

с  $d_j \in \underline{D}$  и  $l_j$  – околodiагональными элементами bidiагональной матрицы  $\underline{B}$ . Характеристическое уравнение для расчета собственных значений  $\lambda_{1,2}$  матрицы  $\underline{S}_i$ , определённое равенством (6), имеет вид (7):

$$0 = [d_i(1+l_i^2) - \lambda][d_{i+1}(1+l_{i+1}^2) - \lambda] - d_i d_{i+1} l_{i+1}^2 = \lambda^2 - \lambda(d_i l_i^2 + d_i + d_{i+1} + l_{i+1}^2 d_{i+1}) + d_i d_{i+1} (l_i^2 l_{i+1}^2 + l_i^2 + 1), \quad (7)$$

откуда следуют формулы:

$$\lambda_{1,2} = d_{i+1}(1+l_{i+1}^2) + 0,5(f \pm \sqrt{f^2 + 4d_i d_{i+1} l_{i+1}^2}), f = d_i(1+l_i^2) - d_{i+1}(1+l_{i+1}^2). \quad (8)$$

Так как сингулярное значение  $\sigma_i$  является наибольшим собственным значением по абсолютной величине, следует в (8) использовать знак «-» перед корнем, если  $f < 0$ . С помощью сингулярного оценочного разложения  $\sigma_i = \lambda$  получается первая колонка *QR* – разложения

$$(d_1 - \sigma_i, \sqrt{d_1 d_2} l_2, 0, \dots, 0)^T. \quad (9)$$

Теперь происходит трансформация  $\underline{Q}_0^T$ , которая преобразует второй элемент этого вектора (9) в нуль:

$$Q_0^T = \begin{bmatrix} (d_1 - \sigma_i) / \alpha & \sqrt{d_1 d_2} l_2 / \alpha \\ -\sqrt{d_1 d_2} l_2 / \alpha & (d_1 - \sigma_i) / \alpha \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где в (10)  $\alpha^2 = (d_1 - \sigma_i)^2 + d_1 d_2 l_2^2$ .

В литературе называется в основном число циклов от  $2m$  до  $5m$ , которые необходимо выполнить, чтобы все околodiagonальные элементы стали меньше заданной границы точности [3]. Это число, естественно, зависит с одной стороны от величины границы точности, с другой стороны от способа вычисления сингулярных величин. В различных пробных расчетах алгоритм сингулярного оценочного разложения ковариационной матрицы требовал  $2,5m$  циклов при границе точности  $10^{-30}$ . Этот метод предложен в качестве альтернативы преобразования Гивенса, если надо обрабатывать почти сингулярные матрицы. В соответствии с теоретическим изложением сингулярного оценочного разложения это ортогональное преобразование в представленной здесь форме может быть использовано во всех новых  $UDU^T$  – формулировках вместо преобразования Гивенса, без модификации уравнений фильтра Калмана.

**Заключение.** Таким образом, использование разработанного численно устойчивого метода позволяет получать более точные оценки и осуществлять идентификацию модели в реальном времени. Применение различных моделей должно расширить область исследований.

**Список литературы 1.** *Gritsyuk V. I., Petrov E. G.* Recursive stable algorithms for identification of time-varying systems // AMSE-ISIS'97 Proceedings, IOS Press, 1997. – P. 508 – 509. **2.** *Грицюк В. И.* Улучшенные алгоритмы для оценки методом наименьших квадратов // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – №2. – С. 64 – 65. **3.** *Hotop H. J.* Neue stabile und vektorisierbare Kalmanfilter- Algorithmen auf der Grundlage von Orthogonal Transformationen // DFVLR-FB. – Report №. DFVLR-FB – 87 – 52, – 1987, – 206 s. **4.** *Грицюк В. И.* Идентификация изменяющихся во времени систем с использованием устойчивых методов // Розвиток науки на сучасному етапі: Міжнародна заочна конференція: матеріали. – Київ, 2012. – Ч. 3. – С. 51 – 52.

*Поступила в редколлегию 21.10.2013*

УДК 519.6

**Устойчивый метод идентификации модели / В. И. Грицюк // Вісник НТУ «ХПІ».** Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №54 (1027). – С. 102 – 105. Бібліогр.: 4 назви.

Досліджується рекурентний метод ідентифікації моделі. Пропонується проводити визначення оптимального числа членів моделі з використанням чисельно стійкого методу ортогоналізації.

**Ключові слова:** чисельна стійкість, метод ортогоналізації.

We investigate the recursive method of model identification. It is proposed to determine the optimal number of members of models using a numerically stable method of orthogonalization.

**Key words:** numerical stability, the method of orthogonalization.