

Министерство образования и науки Украины
Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»

Р.Г. Акмен

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ ПО КУРСУ
ТЕПЛО- И МАССООБМЕН

для студентов специальностей 7.090510 «Теплоэнергетика»,
7.000008 «Энергетический менеджмент»

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета
протокол № ___ от _____

Харьков НТУ "ХПИ" 2007

ББК 31.31
УДК 536.24

Рецензенты: В.В. Соловей, д.т.н., проф.,
ИПМаш им. А.Н. Подгорного НАН Украины,
А.А.Шевелев, к.т.н., проф., НТУ «ХПИ».

Акмен Р.Г. Лекции и задачи по курсу тепло- и массообмен. Для студентов специальностей 7.090510 «Теплоэнергетика» и 7.000008 «Энергетический менеджмент»: – Харьков: НТУ "ХПИ", 2007.– 146с. – На русск. яз.

Учебно-методическое пособие содержит полный курс лекций с задачами, необходимыми таблицами и номограммами. Включает разделы: теплопроводность, конвективный теплообмен в однофазных средах, тепло- и массообмен в двухфазных средах, лучистый теплообмен и расчеты теплообменных аппаратов.

Предназначено для студентов специальностей «Теплоэнергетика» и «Энергетический менеджмент». Может быть использовано студентами энергетического профиля.

Учбово-методичний посібник вміщує повний курс лекцій з задачами, необхідними таблицями та номограмами. Включає розділи: теплопровідність, конвективний теплообмін в однофазних середовищах, тепло-та масообмін в двофазних середовищах, променистий теплообмін та розрахунки теплообмінних апаратів.

Призначений для студентів фахів “Теплоенергетика” та “Енергетичний менеджмент”. Може бути використан студентами енергетичного профілю.

Рис. 50. Табл. 17. Библиогр. 6 назв.

© Р.Г. Акмен

ВВЕДЕНИЕ

Основные понятия и определения. Процессы переноса теплоты играют существенную роль в любом современном технологическом процессе. Настоящий курс посвящен изучению закономерностей процессов переноса теплоты, методов расчета и анализа этих процессов. В отличие от технической термодинамики, где рассматриваются закономерности превращения тепловой энергии, в настоящем курсе рассматриваются механизмы переноса теплоты и их закономерности.

Существуют три основных механизма переноса теплоты:

- на молекулярном уровне без переноса массы вещества;
- на молярном уровне совместно с переносом массы вещества;
- квантами электромагнитного поля.

Вне зависимости от механизма переноса теплоты существует одно необходимое и достаточное условие существования процесса переноса теплоты – наличие разности температуры.

Процесс переноса теплоты на молекулярном уровне без переноса массы вещества называют **теплопроводностью**. Этот процесс переноса теплоты в чистом виде имеет место в твердых телах, а также в тонких слоях газов и жидкостей.

Процесс переноса теплоты на молярном уровне возникает в подвижных средах (газы и жидкости) и называется **конвективным теплообменом**. В чистом виде этот процесс возникает при смешивании жидкостей с разными температурами. Перенос теплоты на границе твердого тела и жидкости определяется двумя механизмами переноса: теплопроводностью в ламинарном пограничном подслое и конвекцией вне него. Подобный процесс переноса теплоты называют **конвективной теплоотдачей** или просто **теплоотдачей**. Перенос теплоты от одной жидкой среды к другой через разделяющую их твердую стенку называют **теплопередачей**. Этот процесс переноса теплоты включает как процессы теплоотдачи (между жидкостями и стенкой), так и процесс теплопроводности в самой стенке.

Процесс переноса теплоты квантами электромагнитного поля называют **лучистым теплообменом** или **излучением**. Этот процесс переноса теплоты связан с превращением внутренней энергии тела в кванты электромагнитного поля на поверхности излучающего тела и обратным превращением на поверхности тела, поглощающего излучение.

Количество переносимого тем или иным механизмом теплоты прямо пропорционально времени переноса, поэтому под **тепловым потоком** понимается количество теплоты, переносимое в единицу времени. Принято эту величину обозначать Q [Вт]. **Плотностью теплового потока** называют тепловой поток с единицы изотермической поверхности $q = Q/F$ или $q = dQ/dF$ [Вт/м²].

1. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

1.1. Основные понятия

Перенос теплоты в твердом теле связан с наличием разности температуры по объему тела, т.е. с понятием температурного поля тела. Температурным полем тела называют совокупность данных по температуре в любой точке тела в любой момент времени. В самом общем случае температурное поле зависит от трех координат и времени, т.е. $t = f(x, y, z, \tau)$. Такое температурное поле называют **трехмерным нестационарным**. Если температурное поле тела не зависит от времени, то такое поле называют **стационарным**. Простейшее температурное поле – стационарное одномерное поле, когда температура тела изменяется по одной координате и постоянно во времени, т.е. $t=f(x)$ или $t(x)$.

Интенсивность изменения температурного поля в теле характеризуется его градиентом. Под **градиентом температуры** понимают интенсивность изменения температуры по нормали к изотермической поверхности. Это векторная величина, направленная по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры и численно равная производной от температуры по направлению нормали, т.е.

$$\text{grad } \vec{t} = \vec{n} (\partial t / \partial n). \quad (1.1)$$

Тепловой поток, передаваемый теплопроводностью в твердом теле, определяется гипотезой Фурье, согласно которой **«тепловой поток в процессе теплопроводности пропорционален градиенту температуры и величине изотермической поверхности переноса»**. Это также векторная величина, но направленная в сторону убывания температуры. Тогда

$$\vec{Q} = -\lambda \text{grad } \vec{t} F, \text{ или } d\vec{Q} = -\lambda \text{grad } \vec{t} dF. \quad (1.2)$$

Коэффициент пропорциональности в (1.2) называют коэффициентом теплопроводности. Последний является теплофизической характеристикой вещества и численно равен плотности теплового потока при единичном градиенте температуры. Знак минус в (1.2) учитывает то, что направление теплового потока обратно направлению градиента температуры.

Разделив (1.2) на поверхность переноса, получим

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad } \vec{t}, \quad (1.3)$$

т.е. плотность теплового потока в процессе теплопроводности пропорциональна градиенту температуры.

В скалярном виде, спроектировав (1.3) на оси координат, получим

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z}. \quad (1.4)$$

1.2. Уравнение Фурье

Для определения плотности теплового потока или его составляющих по (1.4) необходимо иметь градиенты температуры по осям координат, т.е. температурное поле тела. Получим дифференциальное уравнение,

описывающее связь между потоками теплоты и изменением температуры во времени.

Выделим в твердом теле недеформируемый элементарный объем со сторонами dx , dy и dz . Будем считать тело изотропным, т.е. теплофизические характеристики материала не зависят от направления. Найдем количество теплоты, поступившее в левую грань этого объема по оси x за время $d\tau$ как $Q_x = q_x dy dz d\tau$, где q_x – плотность теплового потока по оси x . Из правой грани элемента (на координате $x+dx$) за то же время уходит количество теплоты $Q_{x+dx} = q_{x+dx} dy dz d\tau$, где q_{x+dx} – плотность теплового потока на координате $x+dx$. Разложим q_{x+dx} в ряд Тейлора в окрестности точки x и ограничимся двумя членами разложения.

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \dots \quad (1.5)$$

Количество теплоты, аккумулированное элементом, найдем как разность вошедшего и вышедшего количества теплоты. С учетом (1.5) получим

$$dQ_x = Q_x - Q_{x+dx} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dv d\tau, \quad (1.6)$$

где $dv = dx dy dz$ – величина элементарного объема.

Проведя аналогичные рассуждения для осей y и z , получим:

$$dQ_y = Q_y - Q_{y+dy} = -\frac{\partial q_y}{\partial y} dv d\tau, \quad (1.7)$$

$$dQ_z = Q_z - Q_{z+dz} = -\frac{\partial q_z}{\partial z} dv d\tau. \quad (1.8)$$

Кроме аккумулированной теплоты в выделенном объеме могут действовать внутренние источники теплоты, обусловленные, например, прохождением электрического тока через тело, наличием химических реакций и т.п. Обозначим объемную плотность внутренних источников теплоты q_v [Вт/м³]. Тогда за время $d\tau$ в объеме dv будет выделено количество теплоты

$$dQ_v = q_v dv d\tau. \quad (1.9)$$

Аккумулированная в объеме и выделенная внутренними источниками теплота согласно первому закону термодинамики расходуется только на изменение внутренней энергии, т.к. работа против внешних сил отсутствует из-за недеформируемости элемента. Получим

$$dQ = dQ_x + dQ_y + dQ_z + dQ_v = dU = c\rho dv dt. \quad (1.10)$$

Используя (1.4) и сократив (1.10) на dv получим уравнение Фурье

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right] + q_v. \quad (1.11)$$

Полагая $\lambda = \text{const}$, разделив уравнение (1.11) на $c\rho$ и обозначив $a = \lambda/(c\rho)$, получим

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}, \quad (1.12)$$

где a – коэффициент температуропроводности; ∇^2 – оператор Лапласа. В декартовой системе координат выражение оператора Лапласа очевидно из сопоставления (1.11) и (1.12) при $\lambda = \text{const}$. В цилиндрической системе координат этот оператор имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.13)$$

Для решения конкретной задачи необходимо к уравнению теплопроводности добавить условия однозначности или краевые условия.

1.3. Краевые условия уравнения Фурье

Уравнение (1.12) для решения определенной задачи дополняется условиями, которые выделяют конкретную задачу из всего класса задач теплопроводности.

Эти условия включают:

- геометрические условия, определяющие форму и размеры тела;
- физические условия, определяющие теплофизические характеристики материала;
- начальные условия, определяющие температурное поле тела при $\tau = 0$;
- граничные условия, т.е. условия на границах тела.

Граничные условия, в свою очередь, подразделяются на 4 рода.

Граничные условия 1-го рода. На поверхности тела известна температура в любой момент времени, т.е. $t_n(x, y, z, \tau) = f(x, y, z, \tau)$. В простейшем случае $t_n = \text{const}$. В процессе нагревания или охлаждения тела изменяется градиент температуры на поверхности, т.е. плотность теплового потока, поступающего в тело или покидающего тело.

Граничные условия 2-го рода. На поверхности тела задана плотность теплового потока, т.е. $q_n(x, y, z, \tau) = f(x, y, z, \tau)$. Учитывая гипотезу Фурье, получим, что $(\partial t / \partial n)_n = -f(x, y, z, \tau) / \lambda$ является также известной функцией. Таким образом, этот тип граничных условий эквивалентен заданию на поверхности градиента температуры, а искомой является температура поверхности тела. В простейшем случае $(\partial t / \partial n)_n = \text{const}$.

Граничные условия 3-го рода. В этом случае на поверхности тела неизвестны ни температура, ни ее градиент, но известна связь между ними.

Для установления этой связи рассмотрим процесс теплоотдачи и сформулируем закон, устанавливающий зависимость теплового потока от определенных факторов (закон Ньютона). Как указывалось выше, теплоотдачей называют перенос теплоты между жидкостью и твердой поверхностью. **Тепловой поток в процессе теплоотдачи, согласно гипотезе Ньютона, пропорционален разности температуры между жидкостью и поверхностью тела и величине изотермической поверхности, т.е.**

$$Q = \alpha (t_{\text{ж}} - t_n) F, \quad (1.14)$$

где F – поверхность переноса теплоты, α – коэффициент пропорциональности, называемый **коэффициентом теплоотдачи**. Разделив (1.14) на F , имеем

$$q = \alpha (t_{\text{ж}} - t_{\text{п}}), \quad (1.15)$$

т.е. плотность теплового потока в процессе теплоотдачи пропорциональна разности температуры среды и поверхности.

Рассмотрим перенос теплоты на границе твердое тело – жидкость, и пусть температура тела выше температуры жидкости. Внутри тела, бесконечно близко к его поверхности, плотность теплового потока может быть записана по гипотезе Фурье

$$q = -\lambda (\partial t / \partial n)_{\text{п}}. \quad (1.16)$$

В последнем выражении неизвестен ни тепловой поток, ни градиент температуры. Однако по (1.15) можно записать тепловой поток с поверхности тела в среду. Тепловой поток по (1.16) и по (1.15) должен быть равным, т.к. первый записан для бесконечно приближенного к поверхности слоя. Тогда получим

$$-\lambda (\partial t / \partial n)_{\text{п}} = \alpha (t_{\text{п}} - t_{\text{ж}}), \quad (1.17)$$

т.е. связь между неизвестной температурой поверхности и неизвестным градиентом температуры на поверхности.

Граничные условия 4-го рода. Это условия совершенного теплового контакта двух твердых тел. При совершенном контакте двух тел температура в месте контакта не имеет скачка, и плотность теплового потока также не имеет скачка, т.е.

$$t_{1\text{п}} = t_{2\text{п}}, \quad (1.18a)$$

$$\lambda_1 (\partial t_1 / \partial n)_{\text{п}} = \lambda_2 (\partial t_2 / \partial n)_{\text{п}}. \quad (1.18б)$$

Из последнего следует, что в месте совершенного теплового контакта

$$\lambda_1 / \lambda_2 = (\partial t_2 / \partial n)_{\text{п}} / (\partial t_1 / \partial n)_{\text{п}}, \quad (1.19)$$

т.е. отношение коэффициентов теплопроводности слоев обратно пропорционально отношению градиентов температуры.

Вопросы для самопроверки

1. Назовите основные механизмы переноса теплоты.
2. Дайте определение процесса теплопроводности.
3. Дайте определение процесса теплоотдачи.
4. Дайте определение процесса теплопередачи.
5. Сформулируйте и запишите гипотезу Фурье.
6. Дайте определение коэффициента теплопроводности.
7. Сформулируйте краевые условия уравнения Фурье.
8. Сформулируйте и запишите граничные условия 1-го рода.
9. Сформулируйте и запишите граничные условия 2-го рода.
10. Сформулируйте и запишите граничные условия 3-го рода.
11. Сформулируйте и запишите граничные условия 4-го рода.

2. СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ТЕЛ ПРОСТЫХ ФОРМ

2.1. Неограниченная пластина

Неограниченной пластиной называется тело, у которого один размер конечен, а два других бесконечно велики (намного больше первого). При этом

изменение температуры в теле происходит только по координате, совпадающей с конечным размером. Для определения теплового потока, проходящего через пластину, необходимо найти градиент температуры, т.е. температурное поле. В случае стационарной одномерной задачи без источников теплоты уравнение (1.12) для декартовой системы координат представится в виде:

$$d^2t/dx^2 = 0 \quad (2.1)$$

Для решения конкретной задачи к (2.1) необходимо добавить условия однозначности. Пусть (рис.2.1) ось x расположена нормально к поверхности пластины. Геометрические условия задачи должны включать известную толщину пластины по координате x . Пусть эта толщина равна δ . Начало координат расположим на левой поверхности пластины, тогда координата правой поверхности будет равна δ . Физические условия должны включать задание, по крайней мере, коэффициента теплопроводности материала пластины λ . В силу стационарности задачи начальные условия теряют смысл. На границах пластины примем условия первого рода, т.е.

$$\text{при } x = 0 \quad t = t_1, \quad (2.2)$$

$$x = \delta \quad t = t_2. \quad (2.3)$$

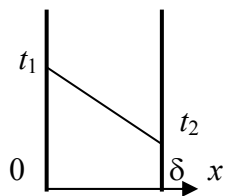


Рисунок 2.1 –
Неограниченная
пластина при ГУ 1-го
рода

Пусть для определенности $t_1 > t_2$.

Двукратное интегрирование (2.1) дает

$$t = C_1x + C_2, \quad (2.4)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, для определения которых используем (2.2) и (2.3). Из первого условия следует $C_2 = t_1$, а из второго $C_1 = (t_2 - t_1)/\delta$.

Подставив полученные постоянные в решение (2.4) получим

$$t = t_1 - (t_1 - t_2) \cdot x / \delta, \quad (2.5)$$

очевидно, что стационарное распределение температуры в пластине представляется прямой линией. Плотность теплового потока, проходящего через пластину, определим по гипотезе Фурье, учтя, что производная $dt/dx = C_1$.

$$q = \frac{t_1 - t_2}{\delta/\lambda}, \quad (2.6)$$

где δ/λ – термическое сопротивление теплопроводности плоской стенки (по аналогии с законом Ома).

Для многослойной стенки плотность теплового потока легко найти, записав (2.6) для каждого слоя и суммируя частные температурные напоры. Получим

$$q = (t_1 - t_{n+1}) / \sum_{i=1}^n (\delta_i / \lambda_i). \quad (2.7)$$

Таким образом, плотность теплового потока через составную стенку равна полному температурному напору, деленному на сумму термических сопротивлений слоев стенки.

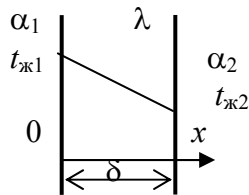


Рисунок 2.2 –
Теплопередача через
плоскую стенку

Рассмотрим (рис.2.2) теплопередачу через плоскую стенку. В этом случае на поверхностях стенки имеет место теплоотдача к средам с разными температурами (пусть $t_{ж1} > t_{ж2}$) и разной интенсивностью теплообмена. Температура поверхностей стенки неизвестна, т.е. рассматриваются граничные условия третьего рода.

Тогда условия (2.2) и (2.3) заменятся на условия

$$\text{при } x = 0 \quad \alpha_1(t_{ж1} - t_1) = -\lambda(dt/dx), \quad (2.8)$$

$$\text{при } x = \delta \quad \alpha_2(t_2 - t_{ж2}) = -\lambda(dt/dx). \quad (2.9)$$

Используя полученное общее решение в виде (2.4), определим постоянные интегрирования из (2.8) и (2.9). Имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\alpha_1(t_{ж1} - C_2) = -\lambda C_1,$$

$$\alpha_2(C_1 \delta + C_2 - t_{ж2}) = -\lambda C_1,$$

решение которой

$$C_1 = -(t_{ж1} - t_{ж2}) / [\lambda(1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2)],$$

$$C_2 = t_{ж1} - (t_{ж1} - t_{ж2}) / [\alpha_1(1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2)].$$

Учтя, что $dt/dx = C_1$, и используя гипотезу Фурье, получим плотность теплового потока через плоскую стенку в случае теплопередачи

$$q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2}. \quad (2.10)$$

В последнем выражении $1/\alpha$ – термическое сопротивление теплоотдачи плоской стенки.

Представив плотность теплового потока в процессе теплопередачи через плоскую стенку в виде

$$q = k(t_{ж1} - t_{ж2}), \quad (2.11)$$

где k – коэффициент теплопередачи, получим

$$k = \frac{1}{1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2}. \quad (2.12)$$

Из последнего выражения следует, что коэффициент теплопередачи меньше меньшего коэффициента теплоотдачи и для интенсификации теплопередачи целесообразно увеличение меньшего коэффициента теплоотдачи.

Из (2.11) следует физический смысл коэффициента теплопередачи: **коэффициент теплопередачи численно равен плотности теплового потока при единичной разности температуры между жидкостями.**

2.2. Неограниченный полый цилиндр

Пусть в неограниченном полом цилиндре с внутренним радиусом R_1 , внешним радиусом R_2 температура изменяется только по нормали к боковой поверхности и постоянна по окружности и высоте. Найдем температурное поле цилиндра и тепловой поток, проходящий через него.

Уравнение (1.12) с учетом (1.13) для одномерной задачи имеет вид

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} = 0. \quad (2.13)$$

Примем граничные условия первого рода на поверхностях цилиндра:

$$\text{при } r = R_1 \quad t = t_1, \quad (2.14)$$

$$\text{при } r = R_2 \quad t = t_2. \quad (2.15)$$

Для интегрирования (2.13) заменим $dt/dr = u$ и разделим переменные.

$$du/dr + u/r = 0, \text{ или } du/u = -dr/r.$$

Интегрируя последнее уравнение и потенцируя полученный результат, получим $u = C_1/r$.

Учитывая проведенную выше замену переменных, интегрируем полученное выражение еще раз. Получим

$$t = C_1 \ln(r) + C_2. \quad (2.16)$$

Постоянные интегрирования найдем из граничных условий (2.14) и (2.15).

$$C_1 = (t_1 - t_2)/\ln(R_1/R_2), \quad C_2 = t_1 - (t_1 - t_2) \cdot \ln(R_1)/\ln(R_1/R_2).$$

Подставив найденные значения постоянных интегрирования в (2.16), получим распределение температуры

$$t = t_1 - (t_1 - t_2) \ln(r/R_1)/\ln(R_2/R_1). \quad (2.17)$$

Тепловой поток через цилиндр длиной L найдем из гипотезы Фурье с учетом выражения производной. Получим

$$Q = \lambda \cdot 2\pi L (t_1 - t_2)/\ln(R_2/R_1).$$

Найдем плотность теплового потока на внутреннем и наружном радиусах цилиндра. Получим:

$$q_1 = \lambda(t_1 - t_2)/[R_1 \ln(R_2/R_1)], \quad q_2 = \lambda(t_1 - t_2)/[R_2 \ln(R_2/R_1)].$$

В силу того, что $R_2 > R_1$, получаем $q_2 < q_1$, т.е. с увеличением радиуса плотность теплового потока уменьшается из-за увеличения поверхности переноса теплоты. Поэтому, в расчетах теплового потока через цилиндрическую поверхность используется понятие погонной (линейной) плотности теплового потока, т.е. потока теплоты через единицу длины цилиндрической поверхности: $q_l = Q/L$. Тогда:

$$q_l = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi\lambda} \cdot \ln(d_2/d_1)}, \quad (2.18)$$

где выражение, стоящее в знаменателе, называют термическим сопротивлением теплопроводности цилиндрической поверхности.

Если цилиндрическая поверхность состоит из n слоев с различными коэффициентами теплопроводности, то по аналогии с плоской стенкой получим:

$$q_l = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n [1/(2\pi\lambda_i) \cdot \ln(d_{i+1}/d_i)]}. \quad (2.19)$$

Рассмотрим (рис.2.3) теплопередачу через цилиндрическую поверхность.

Пусть в трубе с внутренним диаметром d_1 течет жидкость с температурой $t_{ж1}$ и интенсивностью теплообмена α_1 . По наружному диаметру d_2 труба омывается жидкостью с температурой $t_{ж2}$ и интенсивностью теплоотдачи α_2 . Запишем поток теплоты на погонный метр трубы, передаваемый от одной жидкости к другой через твердую поверхность. Получим

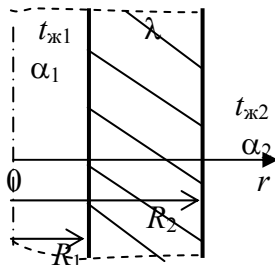


Рисунок 2.3 —
Теплопередача через
цилиндрическую стенку

$$q_l = \alpha_1 \pi d_1 (t_{ж1} - t_1),$$

$$q_l = \frac{t_1 - t_2}{\ln(d_2/d_1)/(2\pi\lambda)},$$

$$q_l = \alpha_2 (t_2 - t_{ж2}) \pi d_2.$$

Выделив частные температурные напоры и суммируя их, получим погонную плотность теплового потока при теплопередаче через цилиндрическую стенку.

$$q_l = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{1/(\alpha_1 \pi d_1) + \ln(d_2/d_1)/(2\pi\lambda) + 1/(\alpha_2 \pi d_2)}, \quad (2.20)$$

где $1/(\alpha_i \pi d_i)$ — термическое сопротивление теплоотдачи цилиндрической поверхности.

Проанализируем влияние изменения наружного диаметра трубы на погонную плотность теплового потока при постоянных прочих параметрах. Подобная задача часто встречается при выборе материала для изоляции трубопроводов. Из (2.20) следует, что при увеличении d_2 термическое сопротивление теплопроводности увеличивается, а термическое сопротивление теплоотдачи с внешней поверхности уменьшается, что связано с увеличением поверхности переноса теплоты. Очевидно, что может иметь место экстремум функции $q_l = f(d_2)$. Приравняв нулю производную знаменателя по d_2 , получим значение внешнего диаметра, при котором потери теплоты максимальны. Назовем эту величину критическим диаметром.

$$d_{2кр} = 2\lambda/\alpha_2. \quad (2.21)$$

Как видно из полученного результата, величина критического диаметра уменьшается с уменьшением коэффициента теплопроводности и увеличением коэффициента теплоотдачи в окружающую среду. Практически использовать соотношение (2.21) можно следующим образом. Если требуется выбрать материал для изоляции трубопровода с внешним диаметром d_1 , то должно выполняться соотношение $d_1 \geq d_{2кр}$. Тогда материал изоляции должен иметь коэффициент теплопроводности $\lambda_{из} \leq \alpha_2 d_1/2$.

2.3. Теплопроводность при переменном коэффициенте теплопроводности

Коэффициент теплопроводности большинства строительных, огнеупорных и теплоизоляционных материалов, металлов и сплавов существенно зависит от температуры. Для многих практических расчетов процесса теплопроводности с достаточной для практики точностью можно

ограничиться линейной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры в виде

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \beta \cdot t) \quad (2.22)$$

2.3.1. Неограниченная пластина

Запишем гипотезу Фурье с учетом (2.22) как $q = -\lambda_0 (1 + \beta t) \frac{dt}{dx}$.

Разделим переменные

$$q dx = -\lambda_0 (1 + \beta t) dt \quad (2.23)$$

и проинтегрируем по x от 0 до δ , а по t от t_1 до t_2 . Учитывая, что в стационарном состоянии плотность теплового потока через пластину остается постоянной, получим:

$$q \delta = \lambda_0 [1 + \beta (t_1 + t_2) / 2] \cdot (t_1 - t_2).$$

Обозначив $\bar{\lambda} = \lambda_0 [1 + \beta (t_1 + t_2) / 2]$, т.е. коэффициент теплопроводности материала при средней температуре стенки, получим плотность теплового потока через стенку

$$q = \frac{t_1 - t_2}{\delta / \bar{\lambda}}, \quad (2.24)$$

как и в случае линейной задачи, но при среднем коэффициенте теплопроводности.

Распределение температуры в стенке получим, проинтегрировав (2.23) по x от 0 до текущего x , а по t от t_1 до текущего значения. Получим квадратное уравнение

$$t^2 + 2t / \beta + 2q x / \beta \lambda_0 - 2t_1 / \beta - t_1^2 = 0,$$

решение которого с учетом (2.24) имеет вид

$$t = \frac{1}{\beta} \left\{ \sqrt{(1 + \beta t_1)^2 - \left[(1 + \beta t_1)^2 - (1 + \beta t_2)^2 \right] \cdot \frac{x}{\delta}} - 1 \right\}. \quad (2.25)$$

Анализ полученного выражения показывает, что распределение температуры по толщине стенки нелинейное. Следовательно, градиент температуры в стенке переменный. При положительной β распределение температуры по толщине пластины имеет характер выпуклой кривой, т.е. с увеличением температуры градиент температуры уменьшается.

2.3.2. Неограниченный полый цилиндр

Для определения теплового потока через цилиндр запишем гипотезу Фурье для погонной плотности теплового потока с учетом (2.22).

$$q_l = -\lambda_0 (1 + \beta t) \cdot 2\pi r \cdot \frac{dt}{dr}. \quad (2.26)$$

Разделим переменные и проинтегрируем по r от R_1 до R_2 , по t от t_1 до t_2 . Получим при $\bar{\lambda}$

$$q_l = \frac{t_1 - t_2}{\ln(d_2 / d_1) / (2\pi \bar{\lambda})}, \quad (2.27)$$

что аналогично выражению, полученному ранее, но при среднем коэффициенте теплопроводности.

Для определения температурного поля цилиндра при переменном коэффициенте теплопроводности необходимо решить уравнение

$$\frac{d}{dr} \left(\lambda \frac{dt}{dr} \right) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\lambda t) = 0. \quad (2.28)$$

Воспользуемся подстановкой Кирхгофа

$$\lambda (dt/dr) = \lambda_c (du/dr), \quad (2.29)$$

где λ_c – постоянная величина, а u – некоторая переменная, удовлетворяющая условиям: при $r = R_1$ $u = t_1$, при $r = R_2$ $u = t_2$. Нетрудно получить, что переменная u удовлетворяет уравнение

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = 0,$$

решение которого было получено ранее в виде

$$u = t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (2.30)$$

Для нахождения искомого распределения температуры проведем полуопределенное интегрирование (2.29) с учетом (2.22). Получим

$$\beta t^2/2 + t = \beta t_1^2/2 + t_1 - (\lambda_c/\lambda_0) \cdot (t_1 - u). \quad (2.31)$$

Для определения постоянной в подстановке Кирхгофа проведем интегрирование (2.29) в полном диапазоне изменения параметров. Получим

$$\lambda_c = \lambda_0 [1 + \beta(t_1 + t_2)/2]. \quad (2.32)$$

Подставим (2.30) и (2.32) в (2.31) и решим полученное квадратное уравнение. Имеем после несложных преобразований

$$t = \frac{1}{\beta} \left\{ \sqrt{(1 + \beta t_1)^2 - [(1 + \beta t_1)^2 - (1 + \beta t_2)^2]} \cdot \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)} - 1 \right\}. \quad (2.33)$$

Таким образом, как и в случае плоской стенки, температурное поле цилиндра при переменном коэффициенте теплопроводности отличается от линейной задачи и имеет те же особенности, что и в предыдущем случае.

Задачи к разделам 2.2 и 2.3

1. Сопоставить плотности теплового потока через плоскую стенку толщиной 400мм, выполненную из красного кирпича ($\lambda_k=0,7$ Вт/(м·К)), шлакоблока ($\lambda_{ш} = 1,2$ Вт/(м·К)) или бетона ($\lambda_б = 2,2$ Вт/(м·К)) при температурах на границах $t_1 = 400$ °С и $t_2 = 20$ °С. Как изменится поток, если $\lambda_k = 0,7(1+3 \cdot 10^{-4}t)$, $\lambda_{ш}=1,2(1-3,8 \cdot 10^{-4}t)$, $\lambda_б = 2,2(1+3,5 \cdot 10^{-4}t)$.

Комментарий к задаче. Используйте (2.6) и (2.24).

2. Найти потери тепла с 1 м^2 плоской стенки дома, выполненной из слоя бетона ($\lambda_б = 2,2$ Вт/(м·К)) толщиной 250мм и слоя штукатурки ($\lambda_{шт}=0,4$ Вт/(м·К)) толщиной 20мм, если внутри температура $t_{в1} = 20$ °С и коэффициент

теплоотдачи $\alpha_1 = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$, а снаружи температура $t_{в2} = -20^\circ\text{С}$ и коэффициент теплоотдачи $\alpha_2 = 15 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$.

Комментарий к задаче. Используйте (2.10), где вместо δ/λ должна быть сумма $\sum_{i=1}^n \delta_i / \lambda_i$ термических сопротивлений слоев стенки ($n = 2$).

3. Сопоставить потери тепла с 1 м^2 стенки дома, полученные в предыдущей задаче, с потерями тепла стенкой состоящей из слоя красного кирпича ($\lambda_{\text{к}} = 0,7 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$), толщиной 400мм, слоя дерева ($\lambda_{\text{д}} = 0,4 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$) толщиной 150мм и штукатурки ($\lambda_{\text{шт}} = 0,4 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$) толщиной 40мм при тех же температурах и интенсивностях теплообмена.

Комментарий к задаче. См. предыдущую задачу при $n = 3$.

4. Трубопровод с внешним диаметром 150мм изолирован двумя слоями изоляции толщиной каждый по 50мм. Первый слой выполнен из шлаковаты ($\lambda_{\text{ш}} = 0,08 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$), второй из асбоцемента ($\lambda_{\text{ас}} = 0,25 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$). Определить потери тепла с погонного метра трубопровода, если температура трубопровода $t_1 = 200^\circ\text{С}$, температура окружающего воздуха $t_{\text{в}} = 20^\circ\text{С}$, коэффициент теплоотдачи с поверхности изоляции $\alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$. Как изменятся потери тепла, если слои изоляции поменять местами, а остальные величины оставить без изменения? Какова при этом температура наружной поверхности изоляции?

Комментарий к задаче. Тепловой поток с погонного метра трубопровода $q_l = (t_1 - t_{\text{в}}) / [\ln(d_2 / d_1) / (2\pi\lambda_{\text{ш}}) + \ln(d_3 / d_2) / (2\pi\lambda_{\text{ас}}) + 1 / (\alpha\pi d_3)]$. Во втором случае следует в выражении теплового потока поменять местами коэффициенты теплопроводности слоев. Температура поверхности из – $q_l = \alpha\pi d_3 (t_{\text{п.из}} - t_{\text{в}})$.

5. По медному проводу диаметром 5мм течет ток 60 А. Определить температуру провода, если он находится в воздухе $t_{\text{в}} = 20^\circ\text{С}$, а коэффициент теплоотдачи с поверхности провода $\alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$. Удельное электрическое сопротивление меди $\rho = 0,05 \text{ Ом}\cdot\text{мм}^2/\text{м}$. Как изменится температура провода, если его изолировать слоем асбеста ($\lambda = 0,12 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$) толщиной 10мм, а прочие величины оставить без изменения?

Комментарий к задаче. Из баланса тепловых потоков с погонного метра провода $q_l = I^2\rho / s = \alpha\pi d (t_{\text{п}} - t_{\text{в}})$, где s – сечение провода (мм^2), находится температура провода. При изолировании поверхности $I^2\rho / s = (t_{\text{п}} - t_{\text{в}}) / [\ln(d_2 / d) / (2\pi\lambda) + 1 / (\alpha\pi d_2)]$, откуда определяется температура поверхности. Поясните результат решения.

6. Определить толщину изоляции ($\lambda_{\text{из}} = 0,2 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$) трубопровода диаметром 100мм, с температурой поверхности $t_1 = 200^\circ\text{С}$, если при температуре окружающего воздуха $t_{\text{в}} = 20^\circ\text{С}$ и коэффициенте теплоотдачи с поверхности изоляции $\alpha = 8 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$, тепловые потери не должны превышать 150 Вт/м.

Комментарий к задаче. Из $q_l = (t_1 - t_{\text{в}}) / [\ln(d_2 / d_1) / (2\pi\lambda_{\text{из}}) + 1 / (\alpha\pi d_2)]$ методом последовательных приближений находится искомый d_2 .

7. Обмуровка топочной камеры выполнена из слоя шамота $\lambda_{\text{ш}} = 1,04 (1 + 1,452 \cdot 10^{-4} \cdot t) \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ толщиной 240мм, пеношамота $\lambda_{\text{пш}} = 0,105 (1 + 1,38 \cdot 10^{-3} \cdot t)$

Вт/(м·К) толщиной 250мм и слоя минеральной ваты $\lambda_B = 0,093 (1 + 2,573 \cdot 10^{-3} \cdot t)$ Вт/(м·К) толщиной 80мм. Со стороны шамота стенка омывается топочными газами $t_r = 1300^\circ\text{C}$, коэффициент теплоотдачи от газов к стенке $\alpha_r = 20$ Вт/(м²·К). Определить потери тепла с 1м² обмуровки, если с другой стороны она омывается воздухом $t_b = 40^\circ\text{C}$, а коэффициент теплоотдачи от стенки к воздуху $\alpha_b = 8$ Вт/(м²·К). Найти температуру поверхности шамота и минеральной ваты.

Комментарий к задаче. Задача решается последовательными приближениями. Вначале, полагая λ_i постоянными, определяется плотность теплового потока через обмуровку $q = (t_r - t_b) / (1/\alpha_r + \sum_{i=1}^3 \delta_i / \lambda_i + 1/\alpha_b)$. Определяется температура на границах слоев обмуровки $t_1 = t_r - q/\alpha_r$, $t_2 = t_1 - q \cdot \lambda_1 / \delta_1$, $t_3 = t_2 - q \cdot \lambda_2 / \delta_2$, $t_4 = t_b + q/\alpha_b$, средняя температура каждого слоя $\bar{t}_i = (t_1 + t_2)/2$ и т.д. По этим температурам находят средние коэффициенты теплопроводности каждого слоя $\bar{\lambda}_i$ и плотность теплового потока по приведенному выше выражению, но при средних коэффициентах теплопроводности. При расхождении потоков более 10% следует сделать еще одно приближение.

2.4. Теплопроводность при наличии внутренних источников теплоты

Внутренние источники теплоты в теле имеют место при прохождении электрического тока, в случае химических реакций или при ядерных процессах. В общем случае эти источники теплоты характеризуются объемной плотностью тепловыделения q_v [Вт/м³]. Определим температурное поле тел простых форм при действии внутренних источников теплоты.

2.4.1. Неограниченная пластина при граничных условиях 3-го рода



Пусть дана неограниченная пластина (рис.2.4) толщиной 2δ из материала с заданным коэффициентом теплопроводности. Расположим ось x нормально к поверхности пластины. Начало координат расположим в центре пластины. На поверхностях пластины имеет место теплообмен со средой с известной температурой и заданной интенсивностью теплообмена. Для определения температурного поля пластины необходимо решить уравнение

$$\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (2.34)$$

В силу симметричности граничных условий, последние можно записать

$$\text{при } x = 0 \quad dt/dx = 0 \quad (2.35)$$

$$\text{при } x = \delta \quad -\lambda(dt/dx) = \alpha(t - t_c) \quad (2.36)$$

Разделив в (2.34) переменные и дважды интегрируя, получим:

$$t = -q_v x^2 / (2\lambda) + C_1 x + C_2. \quad (2.37)$$

Из (2.35) следует, что $C_1 \equiv 0$. Из (2.36) получим

$$C_2 = t_c + q_v \delta / \alpha + q_v \delta^2 / (2\lambda).$$

Окончательно распределение температуры по толщине пластины имеет вид

$$t = t_c + q_v \delta / \alpha + q_v \delta^2 [1 - (x/\delta)^2] / (2\lambda). \quad (2.38)$$

Из последнего легко получить температуру центра и поверхности пластины, а также разность температуры по толщине пластины.

2.4.2. Неограниченный цилиндр при граничных условиях 3-го рода

Определим температурное поле неограниченного сплошного цилиндра радиусом R при действии распределенных источников тепла. Считаем, что температура среды и интенсивность теплообмена постоянны по высоте и окружности цилиндра. Тогда для определения температурного поля последнего необходимо решить уравнение

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (2.39)$$

с граничными условиями

$$\text{при } r = 0 \quad dt/dr = 0, \quad (2.40)$$

$$\text{при } r = R \quad -\lambda(dt/dr) = \alpha(t - t_c). \quad (2.41)$$

Заменив переменную $dt/dr = u$, представим (2.39) в виде:

$$r du + u dr = -q_v r dr / \lambda, \text{ или интегрируя: } u = -q_v r / (2\lambda) + C_1 / r.$$

Сделав обратную замену переменной, разделим переменные и интегрируем.

Получим
$$t = -q_v r^2 / (4\lambda) + C_1 \ln(r) + C_2.$$

Из (2.40) находим $C_1 \equiv 0$. Из (2.41) $C_2 = t_c + q_v R / (2\alpha) + q_v R^2 / (4\lambda)$.

Окончательно

$$t = t_c + q_v R / (2\alpha) + q_v R^2 [1 - (r/R)^2] / (4\lambda). \quad (2.42)$$

Сопоставляя распределение температуры в пластине и цилиндре, получим, что при одинаковых условиях разность температуры по толщине в пластине в 2 раза выше, чем в цилиндре.

Вопросы для самопроверки

1. Напишите плотность теплового потока теплопроводностью через плоскую стенку.
2. Напишите плотность теплового потока при теплопередаче через плоскую стенку.
3. Напишите тепловой поток теплопроводностью через цилиндрическую трубу длиной L .
4. Как изменяется плотность теплового потока в зависимости от радиуса трубы?
5. Напишите погонную плотность теплового потока при теплопередаче через трубу.
6. Что такое критический диаметр цилиндрической поверхности? Как его использовать?
7. Как определить тепловой поток теплопроводностью через плоскую (цилиндрическую) поверхность при линейной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры.

2.5. Методы интенсификации теплопередачи

При анализе теплопередачи через цилиндрическую поверхность, было получено выражение для погонной плотности теплового потока (2.20). Пренебрегая в последнем термическим сопротивлением теплопроводности, в общем случае можно записать:

$$Q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{1/(\alpha_1 F_1) + 1/(\alpha_2 F_2)}. \quad (2.43)$$

Если $\alpha_1 \gg \alpha_2$, то для существенного увеличения теплового потока необходимо либо увеличивать интенсивность теплообмена со стороны теплоносителя с низким коэффициентом теплоотдачи (что не всегда возможно), либо увеличивать поверхность переноса теплоты со стороны этого теплоносителя. Практически подобное увеличение поверхности производится с помощью различного типа ребер, стержней или шипов. Объединяет эти элементы одна общая черта: в подобных телах можно пренебречь изменением температуры по толщине тела и рассматривать изменение температуры только по его оси. На поверхности тела происходит теплообмен со средой постоянной температуры, интенсивность этого процесса можно также полагать постоянной. Таким образом, в теле типа ребра или стержня перенос теплоты по оси тела осуществляется теплопроводностью, а с поверхности тела – теплоотдачей в среду.

Существует большое количество типов ребер. Наиболее распространены: прямые ребра постоянного сечения на плоской поверхности или по образующей цилиндрической поверхности; ребра переменного сечения на плоской поверхности или кольцевые ребра на цилиндрической поверхности; спиральные ребра; плавниковые ребра котельных труб и т.д.

2.5.1. Прямой стержень постоянного сечения

Для нахождения теплового потока, передаваемого от стержня в среду необходимо иметь температурное поле стержня. Найдем дифференциальное уравнение, описывающее распределение температуры по прямому стержню.

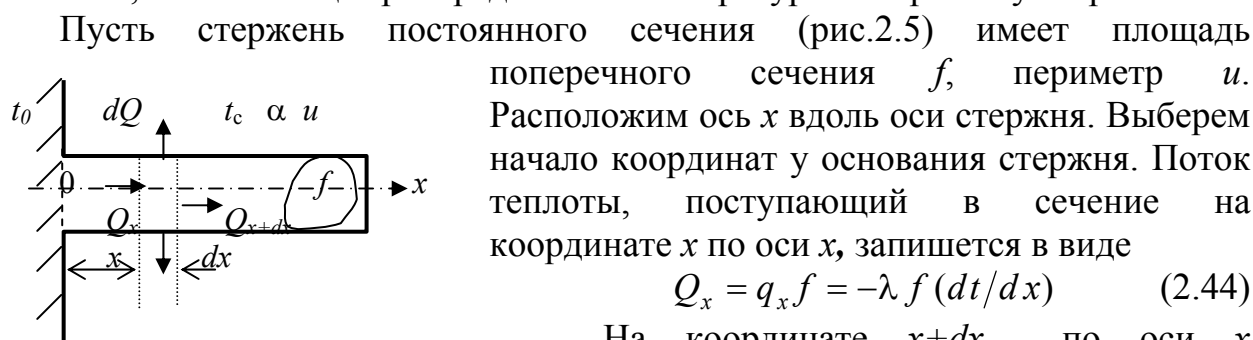


Рисунок 2.5 – Перенос теплоты через стержень

Пусть стержень постоянного сечения (рис.2.5) имеет площадь поперечного сечения f , периметр u . Расположим ось x вдоль оси стержня. Выберем начало координат у основания стержня. Поток теплоты, поступающий в сечение на координате x по оси x , запишется в виде

$$Q_x = q_x f = -\lambda f (dt/dx) \quad (2.44)$$

На координате $x+dx$ по оси x выделенный элемент покидает поток теплоты

$$Q_{x+dx} = q_{x+dx} f. \text{ Разложим } q_{x+dx} \text{ в ряд}$$

Тейлора и ограничимся двумя членами разложения: $q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx.$

Уменьшение теплового потока по оси x связано с отводом теплоты с

поверхности стержня в среду.

$$dQ_x = Q_x - Q_{x+dx} = \lambda f \frac{d^2 t}{dx^2} dx = \alpha u (t - t_c) dx.$$

Перейдя к превышению температуры стержня над температурой среды $\vartheta = t - t_c$, получим

$$d^2 \vartheta / dx^2 - m^2 \vartheta = 0, \quad (2.45)$$

где $m = \sqrt{\alpha u / (\lambda f)}$ – характеристика стержня, представляющая собою меру отношения потоков теплоты теплоотдачей с поверхности стержня и теплопроводностью по оси стержня.

Общее решение уравнения (2.45) может быть записано в виде

$$\vartheta(x) = A e^{-mx} + B e^{mx}, \quad (2.46)$$

$$\vartheta(x) = A \operatorname{ch}(mx) + B \operatorname{sh}(mx). \quad (2.47)$$

Для определения постоянных интегрирования A и B необходимо к уравнению (2.45) добавить условия на границах стержня. В месте контакта стержня с поверхностью (на координате $x = 0$) чаще всего известна температура. Рассмотрим несколько отдельных задач в зависимости от условий на втором конце стержня.

а/. Бесконечно длинный стержень

Граничные условия имеют вид

$$\text{при } x = 0 \quad \vartheta = t_0 - t_c = \vartheta_0, \quad (2.48)$$

$$\text{при } x \rightarrow \infty \quad \vartheta = 0. \quad (2.49)$$

Используя решение (2.46), из условия (2.49) получим $B \equiv 0$. Тогда из (2.48) получим $A = \vartheta_0$.

Окончательно решение имеет вид:

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 e^{-mx}. \quad (2.50)$$

Тепловой поток, передаваемый стержнем в среду можно определить, как

$$Q = \int_0^{\infty} \alpha u \vartheta(x) dx = \vartheta_0 \sqrt{\alpha u \lambda f}, \quad (2.51)$$

либо как тепловой поток, поступивший в стержень на координате $x = 0$.

$$Q = -\lambda f (d\vartheta/dx)_{x=0} = \vartheta_0 \sqrt{\alpha u \lambda f}. \quad (2.52)$$

Как и следовало ожидать, результаты получились тождественные.

б/. Стержень конечной длины без теплообмена на торце

Задан стержень длиной h , у основания которого задана температура t_0 , а на свободном торце отсутствует теплообмен, т.е. имеет место адиабатная оболочка. Граничные условия запишутся

$$\text{при } x = 0 \quad \vartheta = \vartheta_0 = t_c - t_0, \quad (2.53)$$

$$\text{при } x = h \quad d\vartheta/dx = 0. \quad (2.54)$$

Используем общее решение в виде (2.47). Тогда из условия (2.53) получим $A = \vartheta_0$. Для определения второй постоянной продифференцируем (2.47).

$\vartheta_0 m \operatorname{sh}(mh) + B m \operatorname{ch}(mh) = 0$, откуда $B = -\vartheta_0 \operatorname{sh}(mh)/\operatorname{ch}(mh)$, и распределение температуры

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 \operatorname{ch}[m(h-x)]/\operatorname{ch}(mh). \quad (2.55)$$

Тепловой поток, переданный стержнем в окружающую среду, равен потоку, поступившему в основание стержня

$$Q = -\lambda f (d\vartheta/dx)_{x=0} = \vartheta_0 \sqrt{\alpha u \lambda f} \operatorname{th}(mh). \quad (2.56)$$

в/. Стержень конечной длины с теплообменом на торце

Задан стержень длиной h , у основания которого задана температура t_0 , а на свободном торце – теплообмен со средой с постоянной температурой, т.е. граничные условия 3-го рода. Тогда

$$\text{при } x = 0 \quad \vartheta = \vartheta_0 = t_c - t_0, \quad (2.57)$$

$$\text{при } x = h \quad -\lambda(d\vartheta/dx) = \alpha_1 \vartheta. \quad (2.58)$$

Используем общее решение в виде (2.47). Тогда из (2.57) $A = \vartheta_0$. Для определения второй постоянной продифференцируем (2.47) и обозначим $N = \alpha_1/(\lambda m)$.

Получим: $-\left[\vartheta_0 \operatorname{sh}(mh) + B \operatorname{ch}(mh)\right] = N\left[\vartheta_0 \operatorname{ch}(mh) + B \operatorname{sh}(mh)\right]$, откуда после простых преобразований находим B и распределение температуры по стержню.

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 \frac{\operatorname{ch}[m(h-x)] + N \operatorname{sh}[m(h-x)]}{\operatorname{ch}(mh) + N \operatorname{sh}(mh)}. \quad (2.59)$$

Легко увидеть, что при $\alpha_1 = 0$ (отсутствие теплообмена на торце) полученное решение совпадает с (2.55).

Тепловой поток, рассеиваемый стержнем, найдем как в предыдущем случае.

$$Q = \vartheta_0 \sqrt{\alpha u \lambda f} \frac{\operatorname{th}(mh) + N}{1 + N \operatorname{th}(mh)}. \quad (2.60)$$

г/. Стержень с разными температурами на концах

Задан стержень длиной h , на одном конце которого задана температура t_1 , а на втором – температура t_2 . Граничные условия запишем в виде:

$$\text{при } x = 0 \quad \vartheta = \vartheta_1, \quad (2.61)$$

$$\text{при } x = h \quad \vartheta = \vartheta_2. \quad (2.62)$$

Используем общее решение в виде (2.47). Тогда из условия (2.61) получим $A = \vartheta_1$. Из условия (2.62) получим $B = [\vartheta_2 - \vartheta_1 \operatorname{ch}(mh)]/\operatorname{sh}(mh)$. Подставив полученные постоянные в общее решение, найдем после простых преобразований искомое распределение температуры

$$\vartheta(x) = \frac{\vartheta_1 \operatorname{sh}[m(h-x)] + \vartheta_2 \operatorname{sh}(mx)}{\operatorname{sh}(mh)}. \quad (2.63)$$

Тепловой поток, рассеиваемый стержнем, найдем как

$$Q = \int_0^h \alpha u \vartheta(x) dx = (\vartheta_1 + \vartheta_2) \sqrt{\alpha u \lambda f} \frac{\operatorname{ch}(mh) - 1}{\operatorname{sh}(mh)}. \quad (2.64)$$

2.5.2. Теплопередача через ребристую поверхность

Рассмотрим несколько подробнее (2.44) и предположим, что $\alpha_1 \gg \alpha_2$ и со стороны меньшей интенсивности теплообмена поверхность теплообмена состоит из ребер (F_{2p}) и межреберной поверхности (F_{2r}), т.е. $F_2 = F_{2p} + F_{2r}$. Будем считать, что интенсивность теплообмена с поверхности ребер и между ними одинакова. В этом случае тепловой поток, передаваемый с оребренной поверхности в среду, может быть записан в виде:

$$Q = \alpha_2 [F_{2r}(t_2 - t_{ж2}) + F_{2p}(\bar{t} - t_{ж2})], \quad (a)$$

где \bar{t} - средняя температура ребра. В связи с тем, что $F_{2p} \gg F_{2r}$, с достаточной точностью можно заменить (a) выражением

$$Q = \alpha_2 F_2 (t_2 - t_{ж2}) \frac{\bar{t} - t_{ж2}}{t_2 - t_{ж2}}. \quad (б)$$

Поток теплоты через поверхность F_1 можно записать по закону Ньютона

$$Q = \alpha_1 F_1 (t_{ж1} - t_2), \quad (в)$$

где t_2 - температура стенки, одинаковая как со стороны первого, так и второго теплоносителей, т.к. в (2.44) термическим сопротивлением теплопроводности пренебрегалось.

Выделив из (б) и (в) частные температурные напоры и суммируя их, можно после некоторых преобразований получить

$$Q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2 \frac{F_2}{F_1} \frac{\bar{t} - t_{ж2}}{t_2 - t_{ж2}}}} F_1, \quad (2.65)$$

где $\varphi = F_2/F_1$ - коэффициент оребрения; $\eta = (\bar{t} - t_{ж2})/(t_2 - t_{ж2})$ - эффективность ребра, т.е. отношение теплового потока, рассеиваемого ребром, к потоку, которое ребро могло бы рассеять, если бы температура ребра была бы постоянна по высоте и равна температуре у основания.

Таким образом, окончательно тепловой поток при теплопередаче через ребристую поверхность можно записать в виде:

$$Q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{1/\alpha_1 + 1/(\alpha_2 \varphi \eta)} F_1 \quad (2.65a)$$

Рассмотрим различные типы ребер, встречающиеся в практике.

а/. Прямое ребро постоянного сечения

Задано прямое ребро (рис.2.7) высотой h , длиной L , толщиной 2δ . Расположим ось x вдоль высоты ребра. Площадь поперечного сечения ребра $f = 2L\delta$, а периметр ребра $u = 2L + 2\delta$. Учитывая, что $L \gg 2\delta$, запишем характеристику ребра в виде

$$m = \sqrt{\alpha/(\lambda\delta)}. \quad (2.66)$$

Тепловой поток, рассеиваемый ребром, получим из (2.56), учитывая значения f и u , в виде:

$$Q = 2\vartheta_0 L \sqrt{\alpha \lambda \delta} \operatorname{th}(mh), \quad (2.67)$$

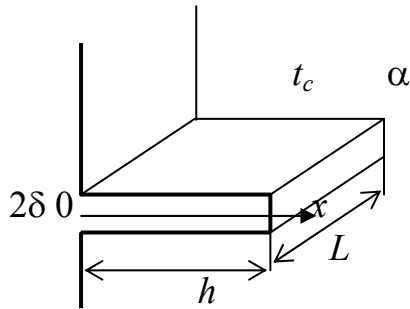


Рисунок 2.7 – Прямое ребро постоянного профиля.

если пренебречь теплообменом торца стержня. Максимальный тепловой поток с поверхности ребра при постоянной температуре, равной температуре у основания будет $Q_{\max} = 2\alpha\vartheta_0 Lh$, и эффективность ребра

$$\eta = \operatorname{th}(mh)/(mh). \quad (2.68)$$

Используя выражение (2.60),

можно определить тепловой поток с учетом теплообмена торца ребра. Приближенно учесть тепловой поток с торца ребра, используя (2.67), можно с помощью **приведенной высоты** ребра в виде:

$$h_0 = h + \delta \quad (2.69)$$

Тепловой поток с погонного метра ребра из (2.67) запишется в виде

$$q_l = 2\vartheta_0 \sqrt{\alpha \lambda \delta} \operatorname{th}(mh) \quad (2.70)$$

Анализ последнего выражения показывает, что тепловой поток является функцией двух переменных h и δ , которые в свою очередь определяют площадь продольного сечения ребра. Поэтому возникает вопрос об оптимальных размерах ребра заданной массы (площади продольного сечения), т.е. ребра, которое рассеивает максимальное количество теплоты.

Пусть $F = 2h\delta = \text{const}$. Заменив в (2.70) $h = F/(2\delta)$, получим $q_l = f(\delta)$.

Обозначив

$$k = \frac{F}{2\delta} \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda \delta}}, \quad (2.71)$$

продифференцируем (2.70) по δ с учетом (2.71). Получим

$$\frac{\partial q_l}{\partial \delta} = \vartheta_0 \sqrt{\frac{\alpha \lambda}{\delta}} \operatorname{th}(k) - 3\vartheta_0 \frac{F}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}} \delta^{-5/2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2(k)} = 0.$$

После несложных преобразований получаем трансцендентное уравнение относительно k

$$6k = \operatorname{sh}(2k), \quad (2.72)$$

решив которое найдем оптимальное значение $k_{\text{опт}} = 1,4192$. Тогда из (2.71) найдется оптимальная полутолщина ребра

$$\delta_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{F^2}{4k_{\text{опт}}^2} \frac{\alpha}{\lambda}}, \quad (2.73)$$

а также оптимальная высота ребра $h_{\text{опт}} = F/(2\delta_{\text{опт}})$.

Тепловой поток с погонного метра ребра оптимальных размеров:

$$q_{\text{опт}} = 2\vartheta_0 \sqrt{\alpha \lambda \delta_{\text{опт}}} \operatorname{th}(k_{\text{опт}}). \quad (2.74)$$

б/. Ребро переменного профиля

Пусть площадь поперечного сечения ребра переменна и зависит от

координаты x , т.е. $f=f(x)$. Тогда, изменение теплового потока по оси x

$$-(d^2 Q_x / dx^2) dx = \alpha u (t - t_c) dx.$$

Если заменить температуру ребра ее превышением, и учесть гипотезу Фурье, получим

$$f(x) \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + \frac{df(x)}{dx} \frac{d\vartheta}{dx} - m^2 \vartheta = 0. \quad (2.75)$$

При условии $m^2 = \alpha u / \lambda$ дифференциальное уравнение (2.75) описывает температурное поле ребра переменного сечения.

Наиболее часто в практике встречаются ребра, сечение которых линейно зависит от координаты (треугольные или трапецеидальные ребра). Рассмотрим (рис.2.7) треугольное ребро высотой h , длиной L , толщиной у основания 2δ . Ось x совместим с осью ребра, а начало координат выберем у вершины ребра. Тогда площадь поперечного сечения ребра $f(x) = 2\delta L(x/h)$, а периметр ребра $u = 2L + 2\delta(x/h)$. При $L \gg \delta$ последний запишется как $u = 2L$. Подставив эти выражения в (2.75), после упрощений получим:

$$x \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + \frac{d\vartheta}{dx} - m^2 h \vartheta = 0, \quad (2.76)$$

где $m^2 = \alpha / (\lambda \delta)$.

Полученное уравнение заменой аргумента x на $r = 2m \sqrt{hx}$ приводится к модифицированному уравнению Бесселя, которое имеет вид

$$r \frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{d\vartheta}{dr} - r \vartheta = 0. \quad (2.77)$$

Это уравнение должно иметь два независимых решения. Одно решение найдем методом неопределенных коэффициентов. Будем считать, что это решение представляется рядом

$$\vartheta_1 = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + a_4 r^4 + \dots \quad (2.78)$$

Продифференцируем (2.78) и, подставив полученное выражение в (2.77), получим

$$2a_2 r + 6a_3 r^2 + 12a_4 r^3 + \dots$$

$$+ a_1 + 2a_2 r + 3a_3 r^2 + 4a_4 r^3 + \dots$$

$$- (a_0 r + a_1 r^2 + a_2 r^3 + a_3 r^4 + \dots) = 0.$$

Для удовлетворения этого уравнения при любом r необходимо, чтобы сумма коэффициентов при каждой степени r была равна 0.

Получаем систему уравнений

$$a_1 \equiv 0.$$

$$(2a_2 + 2a_2 - a_0) r = 0 \Rightarrow a_2 = a_0/4 = a_0/2^2.$$

$$(6a_3 + 3a_3 - a_1) r^2 = 0 \Rightarrow a_3 \equiv 0.$$

$$(12a_4 + 4a_4 - a_2) r^3 = 0 \Rightarrow a_4 = a_2/16 = a_0/2^2 4^2.$$

и т.д.

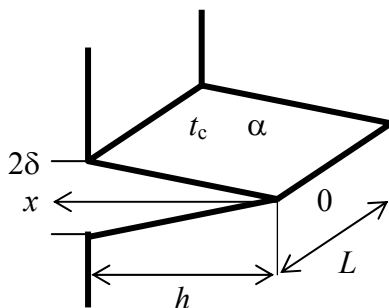


Рисунок 2.7 – Прямое ребро треугольного профиля.

Тогда из (2.78) получим

$$\vartheta_1 = a_0 \left(1 + \frac{r^2}{2^2} + \frac{r^4}{2^2 4^2} + \dots \right),$$

а положив $a_0 = 1$, имеем первое решение в виде

$$\vartheta_1 = 1 + \frac{r^2}{2^2} + \frac{r^4}{2^2 4^2} + \dots = I_0(r), \quad (2.79)$$

где $I_0(r)$ – называют модифицированной функцией Бесселя первого рода нулевого порядка. Производная от (2.79)

$$I_0'(r) = \frac{r}{2} + \frac{r^3}{2^2 4} + \frac{r^5}{2^2 4^2 6} + \dots = I_1(r) \quad (2.80)$$

дает модифицированную функцию Бесселя первого рода первого порядка.

Второе решение уравнения (2.77) представляет собою модифицированную функцию Бесселя второго рода нулевого порядка

$$K_0(r) = -[\ln(r/2) + \gamma]I_0(r) + \frac{r^2}{2^2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{r^4}{2^2 4^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{r^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots,$$

где $\gamma=0,5872$ – постоянная Эйлера, а производная $K_0'(r) = -K_1(r)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода первого порядка. Следует отметить, что при $r \rightarrow 0$ $K_0(r) \rightarrow \infty$ и $K_1(r) \rightarrow \infty$.

Таким образом, общее решение уравнения (2.76) представляется в виде

$$\vartheta(x) = C_1 I_0(2m\sqrt{hx}) + C_2 K_0(2m\sqrt{hx}), \quad (2.81)$$

Для определения постоянных интегрирования используем граничные условия:

$$\text{при } x = 0 \quad d\vartheta/dx = 0 \quad (\text{отсутствие теплового потока}); \quad (2.82)$$

$$\text{при } x = h \quad \vartheta = \vartheta_0. \quad (2.83)$$

Учитывая свойства функций Бесселя, получим из (2.82) $C_2 \equiv 0$. Из (2.83) получим $C_1 = \vartheta_0/I_0(2mh)$ и окончательно распределение температуры

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 \frac{I_0(2m\sqrt{hx})}{I_0(2mh)}. \quad (2.84)$$

Тепловой поток с погонного метра ребра можно определить по гипотезе Фурье, записав ее для $x = h$. Получим, учитывая, что $f(h) = 2\delta$.

$$q_l = 2\delta\lambda(d\vartheta/dx)_{x=h} = 2\vartheta_0\sqrt{\alpha\lambda\delta} \frac{I_1(2mh)}{I_0(2mh)}. \quad (2.85)$$

Эффективность прямого ребра треугольного профиля найдем, определив тепловой поток с погонного метра этого же ребра, но при постоянной температуре по длине, равной температуре у основания ϑ_0 . По закону Ньютона получим $q_{l\max} = 2\alpha\vartheta_0h$, и эффективность ребра

$$\eta = \frac{q_l}{q_{l\max}} = \frac{2\vartheta_0\sqrt{\alpha\lambda\delta} I_1(2mh)}{2\alpha\vartheta_0h I_0(2mh)} = \frac{I_1(2mh)}{mh \cdot I_0(2mh)}. \quad (2.86)$$

Тепловой поток с погонного метра треугольного ребра по (2.85) зависит от толщины ребра δ и его высоты h . Как и для прямого ребра, эти параметры

связаны площадью поперечного сечения ребра $F = h \delta$. Оптимальные размеры ребра заданной массы (при $F = \text{const}$) могут быть найдены из условия, аналогичного условию для прямого ребра.

Обозначив $k = \frac{2F}{\delta} \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda \delta}} = 2mh$, дифференцируя (2.85) по δ , приравняв

полученное выражение нулю и решив численно полученное трансцендентное уравнение, получим оптимальное значение $k_{\text{опт}} = 2,6188$, а оптимальная полутолщина ребра

$$\delta_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{4F^2 \alpha}{k_{\text{опт}}^2 \lambda}}. \quad (2.87)$$

Подставив (2.87) в (2.85) можно найти тепловой поток с ребра оптимального размера.

Используя общее решение (2.81), можно определить распределение температуры и тепловой поток для трапецидального ребра, представленного на рис. 2.8. Запишем граничные условия для данного ребра в виде:

$$\text{при } x = h_1 \quad d\vartheta/dx = 0 \quad (2.88)$$

$$\text{при } x = h \quad \vartheta = \vartheta_0 \quad (2.89)$$

Из решения (2.81) используя условия (2.88), (2.89), получаем систему уравнений

$$C_1 I_1(2m\sqrt{hh_1}) - C_2 K_1(2m\sqrt{hh_1}) = 0,$$

$$C_1 I_0(2mh) + C_2 K_0(2mh) = \vartheta_0,$$

решение которой

$$C_1 = \vartheta_0 \frac{K_1(2m\sqrt{hh_1})}{I_0(2mh)K_1(2m\sqrt{hh_1}) + K_0(2mh)I_1(2m\sqrt{hh_1})},$$

$$C_2 = \vartheta_0 \frac{I_1(2m\sqrt{hh_1})}{I_0(2mh)K_1(2m\sqrt{hh_1}) + K_0(2mh)I_1(2m\sqrt{hh_1})}.$$

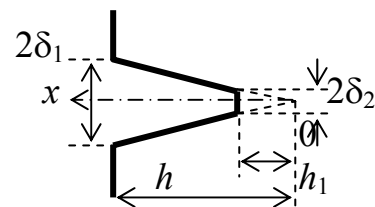


Рисунок 2.8 –
Трапецидальное ребро

Тогда распределение температуры по

трапецидальному ребру получится в виде

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 \frac{I_0(2m\sqrt{hx})K_1(2m\sqrt{hh_1}) + K_0(2m\sqrt{hx})I_1(2m\sqrt{hh_1})}{I_0(2mh)K_1(2m\sqrt{hh_1}) + K_0(2mh)I_1(2m\sqrt{hh_1})}. \quad (2.90)$$

Для определения теплового потока с погонного метра ребра воспользуемся гипотезой Фурье

$$q_l = 2\vartheta_0 \sqrt{\alpha \lambda \delta} \frac{I_1(2mh)K_1(2m\sqrt{hh_1}) - K_1(2mh)I_1(2m\sqrt{hh_1})}{I_0(2mh)K_1(2m\sqrt{hh_1}) + K_0(2mh)I_1(2m\sqrt{hh_1})}. \quad (2.91)$$

в/. Ребра произвольного профиля

Расчет теплопередачи через ребристую поверхность по (2.65а) требует выражения для определения эффективности ребра. Прямое ребро постоянного и треугольного профилей рассмотрены выше. Однако в практике встречаются

ребра трапецеидального профиля, ребра на цилиндрической поверхности (как прямые, так и трапецеидальные). Для расчета эффективности таких ребер используют либо номограммы, имеющиеся в справочной литературе, либо поправочные коэффициенты к эффективности прямого ребра постоянного профиля (рис.2.9). В последнем случае эффективность ребра произвольного профиля определяется как

$$\eta = \eta_{пр} \varepsilon' \varepsilon'' \quad (2.92)$$

где ε' – коэффициент, учитывающий переменность профиля; ε'' – коэффициент, учитывающий кривизну несущей поверхности.

В качестве примера определим при помощи номограмм эффективность трапецеидального ребра с толщиной у основания 6мм, у вершины 3мм, расположенного на трубе диаметром 100мм, наружный диаметр ребра 200мм. Превышение температуры основания ребра $\vartheta_0 = 100^\circ\text{C}$. Коэффициент теплоотдачи $\alpha = 20 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$, коэффициент теплопроводности $\lambda = 40 \text{ Вт}/(\text{мК})$.

Определим вначале характеристику прямого ребра

$$m = \sqrt{\alpha/(\lambda\delta_1)} = \sqrt{20/(40 \cdot 3 \cdot 10^{-3})} = 12,9 \text{ м}^{-1}$$

Температура у вершины прямого ребра высотой 50мм

$$\vartheta_1 = \vartheta_0 / \text{ch}(mh) = 100 / \text{ch}(12,9 \cdot 0,05) = 82^\circ\text{C}.$$

Эффективность прямого ребра

$$\eta_{пр} = \text{th}(mh)/(mh) = \text{th}(0,645)/0,645 = 0,88$$

Коэффициент, учитывающий цилиндричность поверхности при $\vartheta_1/\vartheta_0 = 0,82$ и $r_2/r_1 = 2$ по номограмме *a* $\varepsilon'' = 0,95$, коэффициент, учитывающий переменность профиля, при $\vartheta_1/\vartheta_0 = 0,82$ и $\delta_2/\delta_1 = 0,5$ по номограмме *b* $\varepsilon' = 1,05$.

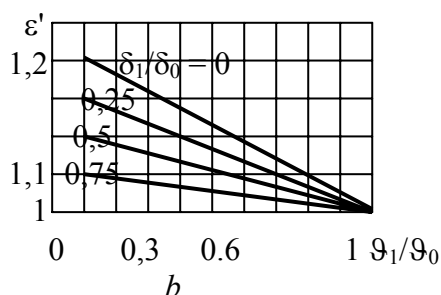
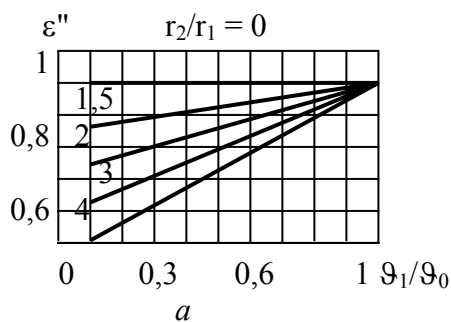


Рисунок 2.9 – Поправочные коэффициенты для расчета эффективности ребер

Искомая эффективность ребра

$$\eta = \eta_{пр} \varepsilon' \varepsilon'' = 0,88 \cdot 0,95 \cdot 1,05 = 0,8779.$$

Подобным образом с помощью приведенных номограмм может быть определена эффективность ребра любого вида.

Вопросы для самопроверки

1. Назовите пути интенсификации теплопередачи.
2. Какое тело называют «стержень» или «ребро»? Напишите дифференциальное уравнение, описывающее распределение температуры в ребре постоянного сечения.
3. Как определить тепловой поток, передаваемый стержнем в окружающую среду?
4. Что такое «эффективность ребра», «коэффициент обребнения»?
5. Как определить эффективность прямого ребра постоянного сечения?

Треугольного ребра? Ребра любого профиля?

Задачи к разделу 2.5

1. Для измерения температуры потока газа используется термопара в стальной ($\lambda = 45 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$) гильзе $d = 20\text{мм}$ длиной $h = 150\text{мм}$ с толщиной стенки $\delta = 2,5\text{мм}$. Термопара показывает температуру свободного торца гильзы $t_{\text{т}} = 200^\circ\text{С}$. Коэффициент теплоотдачи от газа к стенке гильзы $\alpha = 35 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Температура трубопровода (у основания гильзы) $t_0 = 120^\circ\text{С}$. Определить температуру газа. Что нужно сделать для уменьшения ошибки измерения?

Комментарий к задаче. Гильзу термопары рассматривать как стержень конечной длины с известной температурой на свободном торце и у основания. Учтите, что $u = \pi d$, а $f = \pi d \delta$.

2. Отрезок стальной трубы ($\lambda = 40 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$) диаметром 40мм с толщиной стенки $2,5\text{мм}$ обтекается воздухом $t_{\text{в}} = 20^\circ\text{С}$. Коэффициент теплоотдачи от трубы к воздуху $\alpha = 25 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Определить тепловой поток, передаваемый от трубы в воздух, если ее длина 250мм , а температура торцов трубы одинакова и составляет $t_0 = 150^\circ\text{С}$.

Комментарий к задаче. Отрезок трубы рассматривать как стержень конечной длины. Использовать условие симметрии на торцах и комментарий к задаче 1.

3. Определить тепловой поток, передаваемый от воздуха $t_{\text{в}} = 200^\circ\text{С}$ к стальному стержню ($\lambda = 45 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$) диаметром 20мм , длиной 150мм , если коэффициент теплоотдачи от воздуха к стержню $\alpha = 35 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, а температура свободного торца стержня $t_{\text{т}} = 160^\circ\text{С}$.

Комментарий к задаче. Из (2.55) найдите ϑ_0 при заданной $\vartheta(h) = 200 - 160$, а затем тепловой поток по (2.56).

4. Найти тепловой поток, передаваемый с погонного метра прямого ребра постоянного сечения, если размеры ребра: $h = 50\text{мм}$, $2\delta = 5\text{мм}$; $\alpha = 45 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, $\lambda = 40 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$; температура у основания ребра $t_0 = 120^\circ\text{С}$, температура окружающего воздуха $t_{\text{в}} = 20^\circ\text{С}$. Оценить влияние теплоотдачи с торца ребра.

Комментарий к задаче. Используйте (2.70) и учтите (2.69).

5. Прямое ребро треугольного профиля высотой 80мм , толщиной у основания 6мм , длиной 600мм выполнено из стали $\lambda = 35 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$. Найти тепловой поток, передаваемый ребром, если температура вершины ребра $t_{\text{в}} = 40^\circ\text{С}$, температура окружающего воздуха 20°С , коэффициент теплоотдачи от ребра к воздуху $\alpha = 50 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Какой тепловой поток передает в воздух прямое ребро постоянного сечения, имеющее ту же массу, при тех же условиях?

Комментарий к задаче. Из (2.84) определите ϑ_0 используя при $x = 0$ $\vartheta(x) = 20$. Тепловой поток найдите по (2.85) с учетом $L = 0,6\text{м}$. Прямое ребро постоянного сечения одинаковой массы должно иметь толщину в 2 раза меньше толщины основания треугольного ребра. Используйте это условие и (2.67).

6. Трубопровод с диаметрами $110/100\text{мм}$ оребрен по наружному диаметру кольцевыми ребрами диаметром 210мм трапецеидального сечения $\delta_2/\delta_1 = 2/4\text{мм}$. Шаг ребер 25мм . Найти поток тепла с погонного метра трубы, если в трубе

течет вода $t_{\text{в}} = 150^{\circ}\text{C}$ ($\alpha_1 = 1500 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$), а снаружи труба находится в воздухе $t_{\text{воз}} = 20^{\circ}\text{C}$ ($\alpha_2 = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$). Термическим сопротивлением стенки трубы пренебречь. Теплопроводность материала ребра $\lambda = 35 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$.

Комментарий к решению. Используйте (2.62а), при $F_1 = \pi d_1$, и коэффициенте оребрения $\varphi = [(D^2 - d_2^2)/2 + d_2(s - 2\delta_1) + 2D\delta_2]/(d_1 s)$, где D , d_2 , d_1 – соответственно внешний диаметр ребер, внешний и внутренний диаметры трубы; s – шаг ребер. Эффективность ребра η определяется по (2.92) с помощью рис. 2.9.

7. Определить поток тепла с погонного метра прямого ребра постоянного сечения высотой 10мм, толщиной 1мм, выполненного из латуни ($\lambda = 65 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$), если температура у основания ребра $t_0 = 80^{\circ}\text{C}$, температура окружающей среды $t_c = 20^{\circ}\text{C}$, а коэффициент теплоотдачи $\alpha = 50 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Найти оптимальные размеры ребра и поток тепла, передаваемый ребром оптимальных размеров. Теплообменом с торца ребра пренебречь.

8. Решить эту же задачу для треугольного ребра тех же размеров и условий. Сопоставить результаты.

Комментарий к задаче. Для задач 7,8 использовать комментарий к задаче 5.

3. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ОДНОФАЗНОЙ СРЕДЕ

Общее понятие конвективного теплообмена охватывает процессы переноса теплоты при движении жидкости (газа).

Наибольший практический интерес представляет процесс переноса теплоты на границе раздела жидкости и твердого тела, называемый **теплоотдачей** и представляющий собою суммарное действие переноса теплоты теплопроводностью в ламинарном пограничном подслое и конвекцией вне этого слоя. Поток теплоты в процессе теплоотдачи определяется по гипотезе Ньютона

$$Q = \alpha(t_{\text{п}} - t_{\text{ж}})F. \quad (3.1)$$

Коэффициент пропорциональности в (3.1) называется **коэффициентом теплоотдачи** и учитывает конкретные условия теплообмена. Фактическое определение коэффициента теплоотдачи может быть представлено из (3.1) как

$$\alpha = \frac{q}{|t_{\text{п}} - t_{\text{ж}}|}, \quad (3.2)$$

т.е. коэффициент теплоотдачи численно равен плотности теплового потока при разности температуры между поверхностью тела и жидкостью в один градус.

Теплоотдача является достаточно сложным процессом, а коэффициент теплоотдачи зависит от большого числа факторов: физических свойств жидкости; характера (режима) течения жидкости; природы возникновения движения (вынужденное или свободное); температуры жидкости и поверхности тела; формы тела, его размеров; ориентации тела в потоке жидкости и т.д.

3.1. Факторы, влияющие на интенсивность теплоотдачи

Большое влияние на процесс теплоотдачи оказывают такие

теплофизические характеристики жидкости, как коэффициент теплопроводности, теплоемкость, плотность, коэффициент температуропроводности, которые встречались и в задачах теплопроводности. В конвективном теплообмене большое влияние оказывает вязкость жидкости. Между слоями жидкости, движущимися с различными скоростями, согласно закону Ньютона возникает сила трения, противодействующая этому движению и направленная по касательной в плоскости, ориентированной по потоку жидкости. Касательные напряжения трения по закону Ньютона определяются, как

$$s_{\text{тр}} = \mu \frac{dw}{dn} \text{ [н/м}^2\text{]}. \quad (3.3)$$

Коэффициент пропорциональности в (3.3) называется коэффициентом **динамической вязкости**. Отношение этого коэффициента к плотности жидкости называют коэффициентом **кинематической вязкости** и обозначают $\nu = \mu / \rho$. Эти коэффициенты существенно зависят от температуры. У капельных жидкостей μ почти не зависит от давления, но существенно уменьшается с увеличением температуры. У газов μ увеличивается при увеличении температуры. Кинематическая вязкость ν у капельных жидкостей уменьшается при повышении температуры почти также как и μ , т.к. плотность жидкости слабо зависит от температуры. Напротив, у газов, плотность которых резко уменьшается с ростом температуры, ν при увеличении температуры быстро увеличивается.

Для конвективного теплообмена большое влияние имеет тепловое расширение жидкости, которое характеризуется коэффициентом **объемного расширения**

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{dv}{dt} \right)_p. \quad (3.4)$$

У большинства капельных жидкостей этот коэффициент положителен и сравнительно мал за исключением области вблизи критической точки. Для воды при $t < 4^\circ\text{C}$ $\beta < 0$.

Для газов, подчиняющихся уравнению Клапейрона $pv = RT$, $\beta = 1/T$.

На интенсивность теплоотдачи оказывает существенное влияние природа возникновения движения. Различают вынужденное движение жидкости, инициированное посторонним источником энергии (насос, компрессор, вентилятор и т.п.), и естественное (свободное) движение в поле массовых сил (земное тяготение) при наличии разности плотностей холодной и горячей жидкости. Если в первом случае скорость течения жидкости является независимой переменной (может изменяться по воле экспериментатора), то во втором случае скорость оказывается функцией разности температуры нагретой и холодной жидкости, т.е. не является независимой переменной.

Кроме того, как известно из курса «Гидрогазодинамика», различают два режима течения жидкости: ламинарный и турбулентный. В первом режиме течения жидкость движется несмешивающимися струями, и перенос теплоты

осуществляется на молекулярном уровне (теплопроводностью). При турбулентном течении происходит интенсивное перемешивание среды, и перенос теплоты осуществляется на молярном уровне. Однако, при развитом турбулентном течении в объеме жидкости, у поверхности тела силы трения достаточно велики и образуется тонкий слой жидкости, в котором сохраняется ламинарное течение (вязкий подслой пограничного слоя). При этом на самой поверхности тела скорость движения жидкости нулевая (условие «прилипания»). Это условие выполняется до тех пор, пока жидкость (газ) можно считать сплошной средой. По мере разряжения газа ослабляется его взаимодействие со стенкой и начинается «проскальзывание» пристеночного слоя. Наличие трения приводит к торможению пристеночных слоев жидкости и возникает слой жидкости, в котором наблюдается существенный градиент скорости. Этот слой называют **пограничным слоем**. Вызывает затруднение точное определение верхней границы этого слоя. Обычно под толщиной пограничного слоя понимают такое расстояние от стенки, при котором отличие скорости от скорости невозмущенного потока составляет 1%.

Процесс теплообмена связан с наличием разности температуры поверхности тела и жидкости. При этом у поверхности тела наряду с гидродинамическим пограничным слоем формируется и тепловой пограничный слой, в котором температура изменяется от температуры стенки до температуры среды. Толщина теплового пограничного слоя может существенно отличаться от толщины гидродинамического пограничного слоя как в одну, так и в другую сторону.

Влияние формы, размера и ориентации тела на процесс теплоотдачи можно проанализировать на примере теплообмена трубы при течении жидкости вдоль трубы, поперек ее и внутри самой трубы.

Исследование и анализ процесса теплоотдачи начнем с рассмотрения системы дифференциальных уравнений, описывающих этот процесс.

3.2. Система дифференциальных уравнений процесса теплоотдачи

3.2.1. Уравнение теплоотдачи

У поверхности тела в ламинарном подслое пограничного слоя перенос теплоты происходит на молекулярном уровне, поэтому, используя гипотезу Фурье, можно записать

$$q = -\lambda_{ж} (dt/dn)_{n=0}. \quad (a)$$

С другой стороны, согласно закону Ньютона плотность теплового потока в процессе теплоотдачи

$$q = \alpha (t_{п} - t_{ж}). \quad (b)$$

Приравнивая эти потоки и обозначив $\vartheta_0 = t_{п} - t_{ж}$ получим уравнение теплоотдачи

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\vartheta_0} \left(\frac{d\vartheta}{dn} \right)_{n=0}. \quad (3.5)$$

Для определения коэффициента теплоотдачи по (3.5) необходимо иметь

распределение температуры в пограничном слое. Таким образом, имеем одно уравнение с двумя неизвестными.

3.2.2. Уравнение энергии

Выделим в пределах теплового и гидродинамического пограничного слоя неподвижный и недеформируемый элемент объема с ребрами dx , dy , dz и рассмотрим его тепловой баланс, считая жидкость несжимаемой. Поступая так же, как и при получении уравнения Фурье, запишем тепловой поток, поступающий в элемент по оси x в виде $Q_x = q_x dy dz d\tau$, а выходящий из элемента на координате $x + dx$ – $Q_{x+dx} = q_{x+dx} dy dz d\tau$. Разложив q_{x+dx} в ряд Тейлора в окрестности точки x и ограничившись двумя членами разложения, получим аккумулярованную теплоту в элементе в виде

$$dQ_x = Q_x - Q_{x+dx} = -(\partial q_x / \partial x) dv d\tau. \quad (a)$$

Аналогично для остальных осей координат получим

$$dQ_y = Q_y - Q_{y+dy} = -(\partial q_y / \partial y) dv d\tau, \quad (b)$$

$$dQ_z = Q_z - Q_{z+dz} = -(\partial q_z / \partial z) dv d\tau. \quad (c)$$

Согласно первому закону термодинамики, поступившая в элемент теплота при отсутствии работы (элемент не деформируется), расходуется на изменение энтальпии потока, т.е.

$$dQ = dQ_x + dQ_y + dQ_z = \rho di dv = -\text{div}(q) dv d\tau. \quad (d)$$

Определим плотность теплового потока по оси x . Перенос теплоты в движущейся среде осуществляется за счет теплопроводности $q_{xt} = -\lambda(\partial t / \partial x)$ и за счет конвекции $q_{xx} = \rho w_x i$. Тогда

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \rho i \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_x \frac{\partial i}{\partial x}. \quad (e)$$

Аналогично для других осей

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} = -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \rho i \frac{\partial w_y}{\partial y} + \rho w_y \frac{\partial i}{\partial y}, \quad (f)$$

$$\frac{\partial q_z}{\partial z} = -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \rho i \frac{\partial w_z}{\partial z} + \rho w_z \frac{\partial i}{\partial z}. \quad (g)$$

Подставив (e), (f) и (g) в (d), сократим на dv и перенесем члены, содержащие энтальпию, в левую часть уравнения. Получим

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} + \rho i \text{div}(w) + \rho \left(w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z} \right) = \lambda \nabla^2 t. \quad (h)$$

Для несжимаемой жидкости $\text{div}(w) = 0$ (это будет показано ниже). Если считать, что энтальпия может быть представлена, как $i = c_p t$, то уравнение (h) окончательно может быть записано в виде:

$$\frac{Dt}{d\tau} = a \nabla^2 t, \quad (3.6)$$

где $a = \lambda / (c_p \rho)$ – коэффициент температуропроводности жидкости;

субстанциональная производная температуры по времени представляется как

$$\frac{Dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}. \quad (3.7)$$

По физическому смыслу в стационарном состоянии уравнение (3.6) представляет собою соотношение между тепловым потоком, передаваемым конвекцией, и потоком, передаваемым теплопроводностью. В уравнении (3.6) содержится еще одна неизвестная – скорость потока w (или ее проекции на оси координат). Таким образом, система уравнений остается незамкнутой.

3.2.3. Уравнение движения (Навье – Стокса)

Получение полного уравнения Навье – Стокса достаточно сложно, тем более что для анализа процесса теплоотдачи необходимо учесть неизотермичность пограничного слоя. Рассмотрим приближенный вывод этого уравнения для одномерного течения несжимаемой жидкости, когда скорость потока изменяется только по одной координате. В основу вывода положим второй закон Ньютона, согласно которому сумма сил, действующих на тело, равна произведению массы тела на его ускорение. Выделим в пограничном слое плоского потока вязкой жидкости (рис.3.1) элемент с ребрами dx , dy . Силы, действующие на выделенный элемент можно разделить на объемные, действующие на все частицы жидкости в элементе, и поверхностные, действующие по граням элемента. К первым силам относятся сила тяжести, центробежная сила и т.п. Ограничимся учетом только силы тяжести, тогда

$$df_1 = \rho g dv. \quad (a)$$

К поверхностным силам относятся сила давления в потоке, уменьшающаяся по направлению течения, и сила трения. Выберем направление оси координат x по потоку жидкости (вдоль тела), а ось y нормально к поверхности тела. Тогда на координате x сила давления, действующая на выделенный элемент, будет $df_2' = P(x) dy$, а на координате $x+dx$ – $df_2'' = P(x+dx) dy$. Разложим $P(x+dx)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x и ограничимся двумя членами разложения. Получим

$$P(x+dx) = P(x) + (\partial P / \partial x) dx. \quad (b)$$

Равнодействующая силы давления с учетом (b) имеет вид

$$df_2 = df_2' - df_2'' = -(\partial P / \partial x) dv. \quad (c)$$

В плоскости y на элемент жидкости действует сила трения, направленная вверх, т.к. скорость жидкости в элементе больше скорости жидкости вне его, и равная $df_3' = s_y dx$, где s_y – напряжение силы трения. В плоскости $y + dy$ действует сила трения, направленная вниз и равная $df_3'' = s_{y+dy} dx$. Разложив s_{y+dy} в ряд Тейлора, как это было сделано для давления, и, ограничившись двумя членами разложения, получим равнодействующую сил трения, учтя (3.5)

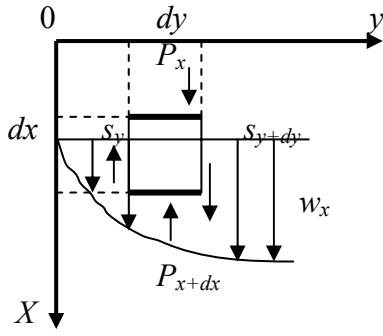


Рисунок 3.1 – К получению уравнения Навье - Стокса

$$df_3 = df_3'' - df_3' = \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} dy. \quad (d)$$

Суммируя (a), (c) и (d), приравняем результат силе инерции элемента. Получим

$$\rho \frac{Dw_x}{d\tau} = \rho g - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}. \quad (e)$$

Неизотермичность пограничного слоя учтем следующим образом. Пусть в правой части уравнения (e) плотность жидкости линейно зависит от температуры $\rho = \rho_0(1 + \beta \vartheta)$. Тогда

первый член уравнения (e) можно представить в виде $\rho_0 g + \rho_0 g \beta \vartheta$ и трактовать как сумму силы тяжести и подъемной силы, вызванной неизотермичностью пограничного слоя. Большинство задач теплообмена автомодельны относительно силы тяжести, поэтому, как правило, сила тяжести из уравнения (e) исключается. Опуская индекс при ρ , представим (e) в окончательном виде, учитывая, что в общем случае w_x изменяется по трем координатам

$$\frac{Dw_x}{d\tau} = g_x \beta \vartheta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right), \quad (3.8)$$

где субстациональная производная

$$\frac{Dw_x}{d\tau} = \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}, \quad (3.9)$$

а g_x – проекция ускорения силы тяжести на ось x .

Таким образом, получена проекция уравнения движения на ось x . Аналогично для остальных осей можно получить

$$\frac{Dw_y}{d\tau} = g_y \beta \vartheta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \nabla^2 w_y, \quad (3.10)$$

$$\frac{Dw_z}{d\tau} = g_z \beta \vartheta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \nabla^2 w_z. \quad (3.11)$$

В векторной форме система уравнений (3.9) – (3.11) имеет вид

$$\frac{D\vec{w}}{d\tau} = \vec{g} \beta \vartheta - \frac{1}{\rho} \nabla \vec{P} + \nu \nabla^2 \vec{w}. \quad (3.12)$$

Добавление уравнения движения к системе дифференциальных уравнений конвективного теплообмена добавляет еще одну переменную – давление. Система уравнений остается незамкнутой.

3.2.4. Уравнение неразрывности

Выделим в пограничном слое жидкости недеформируемый элементарный объем с гранями dx , dy , dz и рассмотрим поток массы через этот элемент. По оси x за время $d\tau$ в элемент поступает масса $dM_x = (\rho w)_x dy dz d\tau$, а покидает

$dM_{x+dx} = (\rho w)_{x+dx} dy dz d\tau$. Поступая, как и ранее, разложим $(\rho w)_{x+dx}$ в ряд Тейлора в окрестности точки x и, ограничившись двумя членами разложения, найдем аккумулярованную массу в элементе

$$dM_1 = dM_x - dM_{x+dx} = -\frac{\partial(\rho w)_x}{\partial x} dv d\tau. \quad (a)$$

Аналогично рассуждая, можно записать аккумулярованную массу в элементе для потоков массы по осям y и z :

$$dM_2 = dM_y - dM_{y+dy} = -\frac{\partial(\rho w)_y}{\partial y} dv d\tau, \quad (b)$$

$$dM_3 = dM_z - dM_{z+dz} = -\frac{\partial(\rho w)_z}{\partial z} dv d\tau. \quad (c)$$

Аккумулярованная масса в элементе идет на изменение плотности среды в объеме

$$d\rho dv = -\left(\frac{\partial(\rho w)_x}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)_y}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)_z}{\partial z}\right) dv d\tau.$$

Или

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \frac{\partial(\rho w)_x}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)_y}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)_z}{\partial z} = 0. \quad (3.13)$$

Таким образом, получено уравнение неразрывности, замыкающее систему дифференциальных уравнений конвективного теплообмена. Для несжимаемой жидкости при $\rho = \text{const}$ уравнение (3.13) преобразуется в

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \text{div}(w) = 0. \quad (3.14)$$

Таким образом, получена замкнутая система уравнений конвективного теплообмена, решение которой позволяет определить искомый коэффициент теплоотдачи.

Для выделения конкретной задачи, данную систему необходимо дополнить условиями однозначности или краевыми условиями конвективной теплоотдачи (как и для задач теплопроводности). Эти условия должны включать: физические условия (теплофизические характеристики среды и их зависимость от температуры); геометрические условия (форма тела, его размеры, ориентация относительно потока жидкости, размеры и форма канала, в котором течет жидкость и т.д.); начальные условия (температура и скорость жидкости на входе в канал, условия при натекании потока на тело и т.п.); условия на границе тело – жидкость (температура тела, скорость потока на поверхности тела и т.д.). Аналитическое решение подобной задачи почти всегда наталкивается на неразрешимые трудности, и к настоящему времени решения имеются только для отдельных простейших частных случаев. Поэтому в исследовании процесса теплоотдачи большое значение приобретают экспериментальные методы.

Вопросы для самопроверки

1. Как определяется тепловой поток при теплоотдаче?
2. Дайте определение коэффициента теплоотдачи.
3. Какие факторы влияют на интенсивность теплоотдачи?
4. Напишите и поясните дифференциальное уравнение теплоотдачи.
5. Напишите и поясните уравнение энергии.
6. Напишите и поясните уравнение движения (в простейшем случае).

3.3. Основы теории подобия и моделирование процесса теплоотдачи

Аналитический метод исследования любого явления состоит в решении дифференциального уравнения (системы уравнений) с соответствующими краевыми условиями. В итоге получаются универсальные связи между переменными, характеризующими данное явление. Однако чаще всего аналитическое решение не может быть получено в явном виде из-за сложности, как уравнений, так и условий однозначности.

Экспериментальный метод исследования явления дает достоверные данные про единичный исследуемый случай. Для получения зависимости искомой переменной от какого-либо параметра необходимо провести серию экспериментов, сохраняя при этом остальные параметры процесса постоянными, что не всегда возможно. Кроме того, необходимо иметь возможность перенести результаты эксперимента, полученные с помощью конкретной установки (модели), на другие процессы (натурные объекты).

Объединение достоинств аналитического и экспериментального методов исследования позволяет осуществить теория подобия, которую часто называют методом обобщения экспериментальных данных.

Теория подобия исходит из следующего основного положения: **«физическое явление определяется не отдельно взятыми параметрами, а некоторым суммарным их эффектом, который выражается комплексом первичных параметров»**. Этот комплекс первичных параметров называют обобщенной переменной (критерием или числом подобия). Например, физическое явление – течение жидкости в прямой трубе – зависит от скорости потока, диаметра трубы, вязкости жидкости. Отдельно взятые эти параметры не могут полностью характеризовать процесс течения жидкости. Однако, комплекс, составленный из этих параметров, ($Re = wd/\nu$ – число Рейнольдса) однозначно определяет характер течения жидкости.

Исследование физических явлений с помощью теории подобия имеет достоинства:

1. Сокращается число независимых переменных, характеризующих данное явление, что существенно упрощает экспериментальные исследования.
2. Раскрываются внутренние связи между переменными, характеризующими данное явление, т.к. обобщенные переменные получаются на основании анализа дифференциальных уравнений, описывающих данное явление. Последние устанавливаются на основе общих законов естествознания и несут в себе все характерные

особенности исследуемого явления.

3. При исследовании явления с помощью обобщенных переменных рассматривается не одно конкретное явление, а группа подобных явлений (обобщенный индивидуальный случай).

Если условия однозначности решения заданы перечнем первичных величин, то тем самым задается конкретное явление. При задании условий однозначности обобщенными переменными выделяется группа подобных явлений.

Рассматривая приведенное выше явление – течение жидкости в трубе – и задавая значения $w = 1$ м/с, $d = 0,1$ м, $\nu = 1 \cdot 10^{-4}$ м²/с, получаем одно конкретное явление. Но, задавая обобщенную переменную $Re = 1000$, выделяем группу подобных явлений, внутри которой явления отличаются несущественными признаками. Сохраняя $Re = 1000$, и изменяя конкретные значения переменных можно получить множество подобных явлений, отличающихся только масштабом первичных величин.

3.4. Получение обобщенных переменных

Метод получения обобщенных переменных рассмотрим на примере класса явлений теплопроводности. Группа подобных явлений этого класса, как было сказано выше, отличается только масштабом первичных величин, а само явление описывается гипотезой Фурье

$$q = -\lambda(dt/dn).$$

Приведем это уравнение к безразмерному виду и запишем для первого (') и второго (") явления. Получим:

$$(\lambda'/q')(dt'/dn') + 1 = 0, \quad (a) \qquad (\lambda''/q'')(dt''/dn'') + 1 = 0. \quad (b)$$

Если явления подобны, то первичные величины отличаются только масштабом, т.е. $\lambda' = k_\lambda \lambda''$, $q' = k_q q''$, $t' = k_t t''$, $n' = k_n n''$. Выразим переменные явления (a) через переменные явления (b).

$$\frac{k_\lambda k_t \lambda''}{k_q k_n q''} \frac{dt''}{dn''} + 1 = 0. \quad (c)$$

Уравнения (b) и (c) должны быть тождественны, что возможно только при условии

$$\frac{k_\lambda k_t}{k_q k_n} = 1. \quad (d)$$

Очевидно, для того, чтобы физические величины явлений были подобны, достаточно умножить каждую из них на множитель преобразования. Однако, для того, чтобы явления были подобны, выбор множителей преобразования должен подчиняться некоторому условию. Для явления теплопроводности это условие (d). Перепишем это условие в виде

$$\frac{\lambda' t' q'' n''}{\lambda'' t'' q' n'} = 1, \quad \frac{\lambda' t'}{q' n'} = \frac{\lambda'' t''}{q'' n''} = \dots = \frac{\lambda t}{q n} = idem. \quad (e)$$

Уравнение (e) выражает условие подобия явления теплопроводности, а

именно

$$\frac{\lambda t}{q n} = idem. \quad (f)$$

Условия (e,f) представляет смысл первой теоремы подобия: «если физические явления подобны, то обобщенные переменные этих явлений равны».

Сопоставляя (e) и (f), можно увидеть, что эти выражения записаны по одному принципу, из которого следует правило получения обобщенных переменных (критериев подобия): для получения критериев подобия необходимо дифференциальное уравнение привести к безразмерному виду, отбросить индексы и значки. Полученный комплекс является критерием подобия.

3.5. Обобщенные переменные конвективного теплообмена

Рассмотрим обобщенные переменные конвективного теплообмена, получаемые из системы дифференциальных уравнений этого процесса.

а/. Уравнение теплоотдачи

Представим уравнение теплоотдачи

$$-\lambda(dt/dn)_{n=0} = \alpha(t_{\text{п}} - t_{\text{ж}}) \quad (3.15)$$

в безразмерном виде, для чего разделим правую часть уравнения на левую.

Получим: $\frac{\alpha \Delta t}{\lambda(dt/dn)_{n=0}} + 1 = 0$ а, отбросив индексы и значки, и заменив n

размером L , $Nu = \frac{\alpha L}{\lambda}$ – безразмерный комплекс, называемый критерием

Нуссельта. В этот критерий входит искомая в задачах конвективного теплообмена величина – коэффициент теплоотдачи. Поэтому критерий Нуссельта называют «обобщенный (безразмерный) коэффициент теплоотдачи». Физический смысл критерия Нуссельта – мера отношения полного теплового потока к потоку, передаваемому теплопроводностью в пределах пограничного слоя. ($Nu = \alpha/(\lambda/L)$)

б/. Уравнение энергии

Запишем уравнение энергии для случая одномерного стационарного течения:

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (3.16)$$

По смыслу данное уравнение представляет соотношение конвективной составляющей переноса теплоты (левая часть) и кондуктивной (правая часть). Разделим левую часть уравнения на его правую часть. Получим:

$\frac{w_x(\partial t/\partial x)}{a(\partial^2 t/\partial x^2)} - 1 = 0$, а отбросив индексы и значки, и заменив x на размер L ,

$Re = \frac{wL}{a}$. Полученный безразмерный комплекс называют критерием Пекле.

По физическому смыслу критерий Пекле есть мера отношения теплового потока передаваемого конвекцией, к тепловому потоку, передаваемому теплопроводностью в пределах пограничного слоя.

в/. Уравнение движения

Если оба предыдущих уравнения представляли собою двучлены, то уравнение движения включает четыре силы – подъемную, давления, трения и инерции. В символах это уравнение можно представить в виде: $И = П + Д + Т$, где для одномерного стационарного течения:

$$И = w_x \frac{\partial w_x}{\partial x}, \quad П = \beta g \vartheta, \quad Д = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad Т = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}.$$

Разделив уравнение движения на силу трения, отбросим индексы и значки и заменим x и y на линейный размер L . Из отношения сил инерции и трения имеем

$$\frac{И}{Т} = \frac{w_x (\partial w_x / \partial x)}{\nu (\partial^2 w_x / \partial y^2)} \Rightarrow \frac{w^2 y^2}{\nu w x} \Rightarrow Re = \frac{wL}{\nu} = idem.$$

Полученный безразмерный комплекс называют критерием Рейнольдса. По физическому смыслу критерий Рейнольдса есть мера отношения сил инерции и трения в пограничном слое.

Рассмотрим отношение подъемных сил к силам трения. Получим:

$$\frac{П}{Т} = \frac{\beta g \vartheta}{\nu (\partial^2 w_x / \partial y^2)} \Rightarrow \frac{\beta g \vartheta L^2}{\nu w} \frac{wL}{\nu} \Rightarrow Gr = \frac{\beta g \vartheta L^3}{\nu^2} = idem.$$

Найденный безразмерный комплекс называют критерием Грасгофа. По физическому смыслу этот критерий представляет собою меру отношения подъемных сил к силам трения.

Рассмотрим отношение сил давления к силам трения. Получим, учитывая приведенные выше замечания,

$$\frac{Д}{Т} = \frac{(dP/dx)/\rho}{\nu (\partial^2 w_x / \partial y^2)} \Rightarrow \frac{\Delta P y^2}{\nu \rho w x} \frac{\nu}{wL} \Rightarrow Eu = \frac{\Delta P}{\rho w^2} = idem.$$

Полученная обобщенная переменная называется критерием Эйлера. Учитывая, что в задачах гидродинамики интерес представляет не абсолютное давление, а перепад давления, в критерии Эйлера в качестве переменной стоит именно перепад давления. По физическому смыслу критерий Эйлера есть мера отношения сил давления к силам трения.

Однако, в свою очередь, перепад давления в потоке несжимаемой жидкости определяется скоростью потока, т.е. является функцией критерия Рейнольдса, а не независимой переменной. Таким образом, $Eu = f(Re)$ и не может являться независимой переменной в задачах теплообмена. Критерий Эйлера является искомой переменной в задачах гидродинамики.

г/. Уравнение неразрывности

Для стационарного течения несжимаемой жидкости это уравнение представляется одночленом и не может дать обобщенных переменных. Для нестационарного течения это уравнение дает критерий временного подобия процессов или критерий гомохронности.

Отношение обобщенных переменных представляет собою также безразмерный комплекс, в некоторых случаях играющий роль обобщенной переменной. Рассмотрим отношение двух критериев Пекле и Рейнольдса. Получим:

$$\frac{Pe}{Re} = Pr = \frac{\nu}{a}.$$

Эта обобщенная переменная называется критерием Прандтля. Сюда входят только теплофизические характеристики теплоносителя. Таким образом, этот критерий может учитывать влияние температуры на теплофизические характеристики теплоносителя, а, следовательно, и на процесс теплоотдачи. С другой стороны, вязкость жидкости определяет изменение скорости потока в пограничном слое и, следовательно, толщину гидродинамического пограничного слоя. Коэффициент температуропроводности определяет интенсивность изменения градиента температуры в пограничном слое жидкости, т.е. толщину теплового пограничного слоя. Таким образом, критерий Прандтля есть мера отношения гидродинамического и теплового пограничного слоя. При $Pr = 1$ гидродинамический и тепловой пограничные слои равны, при $Pr > 1$ гидродинамический пограничный слой больше теплового, при $Pr < 1$ наоборот.

3.6. Вторая теорема подобия и температурные условия теплоотдачи

При анализе системы дифференциальных уравнений теплоотдачи найдены обобщенные переменные Nu , Pe , Re , Gr , Pr . Вторая теорема подобия устанавливает функциональную связь между этими переменными:

«Интеграл системы дифференциальных уравнений, описывающих некоторое физическое явление, может быть представлен в виде функциональной связи между обобщенными переменными этого явления».

Учитывая, что искомая переменная задачи конвективного теплообмена (коэффициент теплоотдачи) входит в критерий Нуссельта, из второй теоремы подобия следует:

$$Nu = f(Pe, Re, Gr, Pr) \quad (3.17)$$

Соотношения типа (3.17) справедливы для средних по некоторой поверхности коэффициентов теплоотдачи. Для локальных (в данной точке) коэффициентов теплоотдачи в (3.17) следует ввести безразмерные координаты точки в виде симплексов типа: x/L , y/L .

$$Nu = f(Pe, Re, Gr, Pr, x/L, y/L, \dots) \quad (3.18)$$

В (3.18) как и в критерии подобия входит линейная величина L или «определяющий размер».

Определяющим размером называют линейный размер тела,

участвующего в теплообмене, который оказывает наибольшее влияние на интенсивность теплоотдачи. В некоторых случаях место этого размера может занимать комплекс величин, имеющий размерность линейной величины.

Рассмотрим, например, поперечное обтекание некоторого цилиндра потоком жидкости. Естественно, характер течения жидкости у поверхности цилиндра не зависит от его длины, но явно различен при обтекании цилиндров различного диаметра. Следовательно, при исследовании теплоотдачи цилиндрических поверхностей в поперечном потоке жидкости в качестве определяющего размера необходимо использовать диаметр, а не длину поверхности. Определяющий размер принято оговаривать подстрочным индексом при критерии. Например: Re_d , Gr_x .

Во все обобщенные переменные входят те или иные теплофизические характеристики теплоносителя, которые существенно зависят от температуры. В то же время наличие разности температуры стенка – жидкость приводит к образованию теплового пограничного слоя, в котором теплофизические параметры теплоносителя существенно изменяются, что вносит искажения в распределение скорости в пограничном слое по сравнению с изотермическим течением. Этот фактор может существенно сказаться на интенсивности теплообмена. Подобное влияние должно быть учтено в связи между обобщенными переменными. К тому же, при переносе результатов эксперимента на натурные объекты должно быть учтено то обстоятельство, что при обработке экспериментальных данных теплофизические характеристики жидкости принимались по определенной температуре.

Определяющей температурой называют температуру, по которой определяются теплофизические параметры жидкости, входящие в обобщенные переменные, или сама обобщенная переменная (например, критерий Прандтля). Принято указывать определяющую температуру подстрочным индексом при критерии (j – температура жидкости, st – температура стенки, m – средняя температура между жидкостью и стенкой или средняя температура пограничного слоя). Например: $Re_{j,d}$, Pr_j , Pr_{st} .

Учет влияния неизотермичности пограничного слоя на интенсивность теплообмена может быть проведен несколькими способами.

Для газов при достаточно высоком температурном напоре ($>100^\circ\text{C}$) учет неизотермичности производится путем введения в уравнение (3.17) или (3.18) симплекса типа $(T_g / T_{st})^n$. При этом показатель степени, как правило, различен при нагревании газа и при его охлаждении.

Для капельных жидкостей неизотермичность учитывается либо поправкой Михеева $(Pr_j / Pr_{st})^{0,25}$, либо поправкой Петухова и др. $(\mu_j / \mu_{st})^n$. В последнем случае показатель степени при симплексе может быть различным для нагревания и охлаждения жидкости. В силу характера зависимости Pr и μ от температуры для капельных жидкостей (уменьшение с ростом температуры по зависимости, близкой с гиперболической) данные поправки учитывают как величину температурного напора, так и влияние направления теплового потока на интенсивность теплообмена. При направлении теплового потока от стенки в

жидкость (нагревание жидкости) интенсивность теплообмена выше, чем при обратном направлении теплового потока при прочих равных условиях. Следует отметить, что использование данных симплексов для газов неправомерно, т.к. характер изменения Pr и, особенно, μ от температуры совершенно не такой, как у капельных жидкостей.

Выбор в качестве определяющей температуры средней между теплоносителем и стенкой может в некоторых случаях учесть влияние неизотермичности на процесс теплоотдачи. При этом может использоваться как среднеарифметическая температура, так и другие средние.

Экспериментальные и теоретические исследования теплоотдачи показали, что нет универсальной определяющей температуры и общего метода учета неизотермичности процесса теплоотдачи. Это требует внимания при использовании эмпирических соотношений, т.к. следует при расчетах принимать ту же определяющую температуру, что и автор соотношения.

Вопросы для самопроверки

1. *Что дает «теория подобия», на чем она основана?*
2. *Что такое «обобщенная переменная», как она получается, что она дает при исследовании какого-либо явления?*
3. *Напишите выражения и поясните физический смысл обобщенных переменных конвективного теплообмена Nu , Pe , Re , Gr , Pr .*
4. *Сформулируйте первую теорему подобия.*
5. *Сформулируйте вторую теорему подобия.*
6. *Что такое «определяющий размер» и «определяющая температура»? Как они указываются в критериальных уравнениях?*
7. *Как учитывается влияние неизотермичности потока жидкости в критериальных уравнениях?*

4. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ОБТЕКАНИИ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим плоскую поверхность, на которую натекает поток жидкости со скоростью w_0 , направленной вдоль поверхности, с температурой t_0 (рис.4.1). Выберем направление оси x вдоль поверхности, ось y нормально к поверхности. У поверхности под действием сил трения образуется гидродинамический пограничный слой, в котором скорость изменяется от 0 на стенке до w_0 на внешней границе слоя. В начале поверхности образуется ламинарный пограничный слой, т.к. толщина слоя мала и превалируют силы трения. По мере роста толщины пограничного слоя происходит разрушение ламинарного течения и образование турбулентного пограничного слоя. Однако, вблизи стенки в некотором малом слое, где силы трения достаточно велики, сохраняется ламинарное течение. Этот слой называют вязким подслоем.

Разрушение ламинарного пограничного слоя начинается на некоторой координате $x_{кр1}$ и заканчивается на координате $x_{кр2}$. Длина зоны ламинарного пограничного слоя зависит от степени турбулентности набегающего потока. В практических расчетах с достаточной точностью можно принять, что условная граница между ламинарным и турбулентным пограничным слоем соответствует

значению $Re_{кр} = (1 \div 5) \cdot 10^5$.

В процессе теплоотдачи всегда имеется разность температуры между стенкой и средой, что приводит к образованию, наряду с гидродинамическим, теплового пограничного слоя, в котором температура изменяется от $t_{ст}$ до $t_{ж}$.

Последний фактор приводит к искажению распределения скорости в гидродинамическом пограничном слое, т.к. вязкость жидкости существенно зависит от ее температуры. В зависимости от теплофизических характеристик жидкости тепловой пограничный слой по толщине может быть как меньше, так и больше гидродинамического.

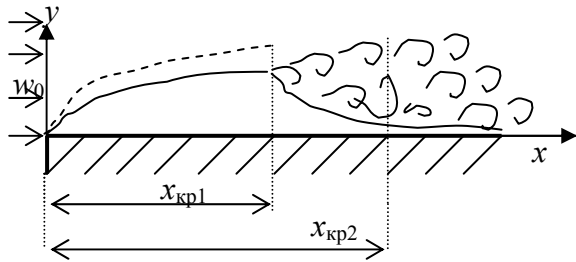


Рисунок 4.1 – Схема течения жидкости у плоской поверхности.

Точное решение системы дифференциальных уравнений конвективного теплообмена сопряжено с большими трудностями даже при возможных упрощениях. Рассмотрим один из методов приближенного расчета.

4.1. Уравнение теплового потока для пограничного слоя

Выделим в пределах теплового и гидродинамического пограничных слоев два сечения (рис.4.2) $A - B$ и $C - D$ отстоящие друг от друга на dx . Пусть толщина теплового пограничного слоя k меньше толщины гидродинамического слоя δ . Тепловой поток, поступающий в элемент dx через сечение $A - B$ на координате x

$$Q_x = \int_0^k \rho c_p w_x t dy, \quad (a)$$

а покидающий элемент через сечение $C - D$ на координате $x + dx$ $Q_{x+dx} = Q_x + (dQ_x/dx) dx$. Тогда разность этих потоков

$$dQ_x = - \frac{d}{dx} \left(\int_0^k \rho c_p w_x t dy \right) dx. \quad (b)$$

В плоскости $B - C$ в элемент поступает тепловой поток вместе с массой, внесенной в элемент по координате y . Т.к. толщина теплового пограничного слоя меньше толщины гидродинамического, то вносимая масса имеет температуру жидкости. Тогда, учитывая, что присоединенная масса равна разности внесенной массы по оси x в сечение $A - B$ и вынесенной из сечения $C - D$, получим:

$$dQ'_y = c_p t_0 \frac{d}{dx} \left(\int_0^k \rho w_x dy \right) dx. \quad (d)$$

В связи с тем, что температура жидкости больше температуры стенки, от элемента отводится тепловой поток в стенку по плоскости $A - D$. Учитывая, что при любом характере течения в пограничном слое, у стенки сохраняется ламинарное течение, в плоскости $A - D$ теплота отводится теплопроводностью.

Тогда, учитывая направление оси y , можно записать тепловой поток в плоскости $A - D$ в виде

$$dQ_y'' = \lambda(dt/dy)_{y=0} dx. \quad (e)$$

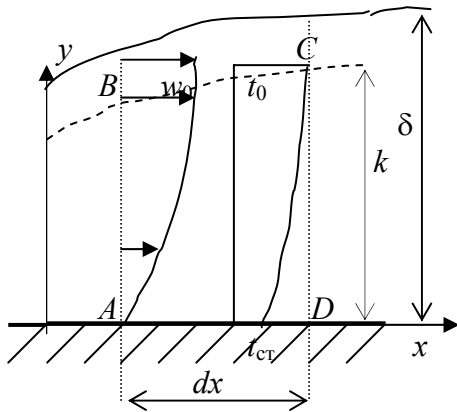


Рисунок 4.2 – К уравнению Кружилина.

В случае стационарного состояния сумма входящих и выходящих потоков теплоты в элемент должна быть равна 0. Считая теплофизические параметры жидкости постоянными, получим

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^k (t_0 - t) w_x dy \right) = a \left(\frac{dt}{dy} \right)_{y=0}, \quad (4.1)$$

где $a = \lambda/(c_p \rho)$ – коэффициент температуропроводности жидкости.

Полученное соотношение (4.1) называют уравнением Кружилина.

4.2. Теплоотдача при ламинарном пограничном слое

Из курса «Гидродинамика» известно, что распределение скорости в пограничном слое при ламинарном течении у плоской поверхности подчиняется закону кубической параболы $w_x = a + b y + c y^2 + d y^3$. Тогда, учитывая условия на стенке при $y = 0$ $w_x = 0$ и $d^2 w_x / dy^2 = 0$ (линейность сил трения), и на внешней границе слоя при $y = \delta$ $w_x = w_0$, $dw_x / dy = 0$, получается зависимость

$$w_x / w_0 = 1,5(y/\delta) - 0,5(y/\delta)^3. \quad (4.2)$$

При этом толщина пограничного слоя составляет

$$\delta = \sqrt{\frac{280}{13}} \sqrt{\frac{\nu x}{w_0}}. \quad (4.3)$$

Примем температуру поверхности стенки постоянной по длине. Тогда для превышения температуры $\vartheta = t - t_{ct}$ при $\vartheta_0 = t_0 - t_{ct}$ в силу идентичности условий на границе для теплового и гидродинамического пограничных слоев получим

$$\vartheta / \vartheta_0 = 1,5(y/k) - 0,5(y/k)^3. \quad (4.4)$$

Из последнего следует

$$\left(\frac{d\vartheta}{dy} \right)_{y=0} = \frac{1,5 \vartheta_0}{k}. \quad (4.5)$$

Воспользуемся уравнением (4.1) и соотношениями (4.2) и (4.4), для чего вначале вычислим интеграл в левой части (4.1).

$$\int_0^k w_0 \left(1.5 \left(\frac{y}{\delta} \right) - 0.5 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right) \vartheta_0 \left(1 - 1.5 \left(\frac{y}{k} \right) + 0.5 \left(\frac{y}{k} \right)^3 \right) dy =$$

$$= \vartheta_0 w_0 \delta \left[\frac{3}{20} \left(\frac{k}{\delta} \right)^2 - \frac{3}{280} \left(\frac{k}{\delta} \right)^4 \right].$$

Обозначим $\beta = k/\delta$ и учтем, что при $k < \delta$ можно пренебречь более высокой степенью β . Получим, подставив значение интеграла в (4.1),

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{3}{20} w_0 \vartheta_0 \delta \beta^2 \right] = 1,5 a \frac{\vartheta_0}{k}. \quad (a)$$

Исходя из аналогии теплового и гидродинамического пограничных слоев, учитывая, что их образование начинается одновременно с передней кромки пластины, можно считать, что их толщины одинаково зависят от x , а их отношение не зависит от x . Тогда (a) можно представить в виде:

$$0,1 w_0 \beta^3 \delta \frac{d\delta}{dx} = a. \quad (б)$$

Из (4.3) следует

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{140}{13} \frac{\nu}{w_0}. \quad (в)$$

Подставим (в) в (б) и примем $\sqrt[3]{14/13} \cong 1$. Получим:

$$\beta = 1/\sqrt[3]{Pr}. \quad (4.6)$$

Из (4.3) с учетом (4.6) получаем

$$k = 4,64 x / (Re^{0,5} Pr^{1/3}). \quad (г)$$

Коэффициент теплоотдачи найдем из уравнения теплоотдачи с учетом (4.5). Получим:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\vartheta_0} \left(\frac{d\vartheta}{dy} \right)_{y=0} = \frac{1,5\lambda}{k} = 0,33 \frac{\lambda}{x} Re^{0,5} Pr^{1/3} \quad (д)$$

Переходя к безразмерному коэффициенту теплоотдачи, находим критериальное уравнение:

$$Nu_x = 0,33 Re_x^{0,5} Pr^{1/3} \quad (4.7)$$

Уравнение (4.7) получено в предположении постоянства теплофизических параметров теплоносителя. Учитывая поправку Михеева для капельных жидкостей, получаем уравнение для расчета локальных коэффициентов теплоотдачи при ламинарном течении жидкости у плоской поверхности:

$$Nu_{ж,x} = 0,33 Re_{ж,x}^{0,5} Pr_{ж}^{1/3} (Pr_{ж}/Pr_{ст})^{0,25}. \quad (4.8)$$

В уравнении (4.8) в качестве определяющей принята температура невозмущенного потока, а определяющим размером принято расстояние от передней кромки пластины.

Из (4.8) следует, что коэффициент теплоотдачи убывает с увеличением расстояния от передней кромки пластины по степенному закону

$$\alpha = C x^{-0,5}. \quad (4.9)$$

Уравнения (4.7) и (4.8) получены при условии $t_{ct} = \text{const}$. Изменение температуры поверхности по длине пластины может существенно исказить распределение скорости в пограничном слое и, соответственно, повлиять на интенсивность теплообмена. Исследования показали, что при изменении температурного напора по степенному закону $\vartheta = \vartheta_0 x^m$, где m не зависит от координаты, интенсивность теплообмена увеличивается с ростом m . Случай $m = 0$ соответствует рассмотренному выше условию $t_{ct} = \text{const}$. По рекомендациям Жукаускаса в случае переменной температуры по длине пластины локальные коэффициенты теплоотдачи следует определять по уравнению

$$\text{Nu}_{ж,x} = 0,33 \varepsilon \text{Re}_{ж,x}^{0,5} \text{Pr}_{ж}^{1/3} (\text{Pr}_{ж} / \text{Pr}_{ct})^{0,25}, \quad (4.10)$$

где поправка $\varepsilon = f(m)$ и находится из таблицы 4.1. В случае постоянства

Таблица 4.1 – Поправка $\varepsilon = f(m)$

m	0	0,2	0,5	1,0	2,0
ε	1	1,17	1,36	1,6	1,98

плотности теплового потока, учитывая (4.9), получим, что $m = 0,5$ и поправка $\varepsilon = 1,36$.

Чаще всего в расчетах теплового потока при теплоотдаче

необходимо иметь средние по некоторой поверхности коэффициенты теплоотдачи. Поэтому возникает задача осреднения локальных данных по теплоотдаче.

Используя (4.9) можно усреднить коэффициенты теплоотдачи как

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha(x) dx. \quad (4.11)$$

В то же время, по определению, средний коэффициент теплоотдачи есть отношение средней плотности теплового потока к среднему температурному напору, т.е.

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{q}}{\bar{\vartheta}} = \frac{\int_0^L \alpha(x) \vartheta(x) dx}{\int_0^L \vartheta(x) dx}. \quad (4.12)$$

Усреднение по (4.11) или по (4.12) только в случае $t_{ct} = \text{const}$ дает одинаковый результат. В остальных случаях различие может быть весьма существенным.

Используя (4.12), получим при степенной зависимости температурного напора от координаты

$$\bar{\alpha} = \alpha_L \frac{2m + 2}{2m + 1}, \quad (4.13)$$

где α_L – коэффициент теплоотдачи на конце пластины длиной L . При $m = 0$ ($t_{ct} = \text{const}$) $\bar{\alpha} = 2\alpha_L$, при $m = 0,5$ ($q = \text{const}$) $\bar{\alpha} = 1,5\alpha_L$

Если в начале пластины имеется не обогреваемый участок длиной x_0 , то формирование теплового пограничного слоя начинается позже

гидродинамического. Это влияет на локальные и, соответственно, средние коэффициенты теплоотдачи. Экспериментальные исследования влияния начального не обогреваемого участка на интенсивность локального теплообмена, проведенные Жукаускасом с соавторами в широком диапазоне изменения параметров теплообмена, позволили рекомендовать уравнение:

$$Nu_{ж,x_1} = 0,33 \varepsilon Re_{ж,x_1}^{0,5} Pr_{x_1}^{1/3} (x_1/x)^{0,2} (Pr_{ж}/Pr_{ст})^{0,25}. \quad (4.14)$$

В качестве определяющего размера в (4.14) входит координата, отсчитанная от начала обогреваемого участка $x_1 = x - x_0$. При $x_0 = 0$ (4.14) превращается в (4.8).

4.3. Теплоотдача при турбулентном пограничном слое

Теоретические исследования теплоотдачи при турбулентном пограничном слое основаны на идее Рейнольдса о единстве механизма конвективного переноса теплоты и механической энергии. Рассмотрим у поверхности пластины (рис. 4.3) турбулентный пограничный слой толщиной δ_T и ламинарный подслоу толщиной δ_L . Пусть ось x направлена вдоль пластины, а ось y нормально к ее поверхности. В ламинарном подслое изменение скорости по оси y весьма существенно, а перенос теплоты осуществляется теплопроводностью.

Тогда плотность теплового потока (учитывая направление оси y), и напряжение сил трения можно представить в виде

$$q = \lambda(dt/dy), \quad s = \mu(dw_x/dy). \quad (a)$$

Разделив одно уравнение на второе, получим

$$q = \frac{\lambda s}{\mu} \frac{dt/dy}{dw_x/dy}. \quad (b)$$

Считая линейным распределение скорости и температуры в пределах ламинарного подслоя, и обозначив скорость на границе ламинарного подслоя w_T и температуру t_T , соотношение (b) будет иметь вид:

$$q = s \lambda (t_T - t_{ст}) / (\mu w_T) \quad (c)$$

Выделим в турбулентном

пограничном слое плоскость $A - A$ и рассмотрим перенос некоторой массы жидкости g_T [кг/м²с] через эту плоскость. Эта масса, двигаясь сверху вниз переносит количество теплоты $g_T c_p t''$ и количество движения $g_T w''$. Аналогично, в силу неразрывности потока, такая же масса движется снизу вверх и переносит поток теплоты $g_T c_p t'$ и количество движения $g_T w'$. Результирующая плотность теплового потока и касательные напряжения сил трения в плоскости $A - A$ (турбулентное трение)

$$q_T = g_T c_p (t'' - t'); \quad s_T = g_T (w'' - w'). \quad (d)$$

Разделив эти уравнения одно на другое, получим аналогию Рейнольдса

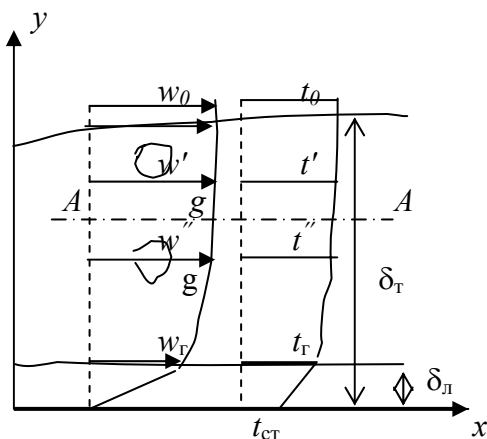


Рисунок 4.3 – К выводу аналогии Рейнольдса

$$q_{\tau} = \frac{s_{\tau} c_p (t'' - t')}{w'' - w'}. \quad (e)$$

Если соотношение (b) учитывает перенос теплоты в ламинарном подслое и, фактически, его термическое сопротивление, то (e) учитывает то же самое для турбулентного слоя. Общее термическое сопротивление переносу теплоты должно быть равно сумме сопротивлений ламинарного и турбулентного слоев. Распространив (e) на весь турбулентный слой, заменим соответственно t'' на t_0 , t' на t_{Γ} , а w'' на w_0 , w' на w_{Γ} . и суммируем частные температурные напоры. Получим

$$t_0 - t_{\Gamma} = \frac{q_{\tau} (w_0 - w_{\Gamma})}{s_{\tau} c_p},$$

$$t_{\Gamma} - t_{\text{ст}} = \frac{q_{\tau} w_{\Gamma}}{s \lambda}.$$

В силу непрерывности теплового потока и сил трения можно считать $q = q_{\tau}$, $s_{\tau} = s$. Тогда

$$\frac{q}{t_0 - t_{\text{ст}}} = \frac{s c_p}{w_0} \frac{1}{1 + (\text{Pr} - 1) w_{\Gamma} / w_0} = \frac{s c_p}{w_0} E, \quad (f)$$

где $E = 1$ при $\text{Pr} = 1$. По определению, величина, стоящая в левой части (f), есть коэффициент теплоотдачи. Определим силы трения через коэффициент трения как

$$s = c_f \frac{\rho w_0^2}{2}. \quad (g)$$

Тогда из (f) с учетом (g) получим критерий Стантона

$$\text{St} = \frac{\alpha}{\rho c_p w_0} = \frac{\text{Nu}}{\text{Re Pr}} = \frac{c_f}{2}.$$

Определив по уравнению Прандтля коэффициент трения в виде

$$c_f = 0,0592 / \text{Re}^{0,2},$$

получим критериальное уравнение для расчета теплообмена при турбулентном течении вдоль пластины (при $\text{Pr} = 1$) в виде

$$\text{Nu} = 0,0296 \text{Re}^{0,8}. \quad (4.15)$$

Полученное уравнение хорошо согласуется с опытными данными при $\text{Pr} = 1$. Распространение полученного уравнения на жидкости с $\text{Pr} \neq 1$, проведенные Михеевым, позволяют рекомендовать следующее уравнение для расчета местных коэффициентов теплоотдачи при турбулентном течении жидкости у плоской поверхности

$$\text{Nu}_{\text{ж},x} = 0,0296 \text{Re}_{\text{ж},x}^{0,8} \text{Pr}_{\text{ж}}^{0,43} (\text{Pr}_{\text{ж}} / \text{Pr}_{\text{ст}})^{0,25}. \quad (4.16)$$

Согласно (4.16) локальные коэффициенты теплоотдачи зависят от продольной координаты как $\alpha = C x^{-0,2}$, т.е. уменьшаются по длине пластины. Однако, при турбулентном пограничном слое интенсивность изменения коэффициента теплоотдачи существенно меньше, чем при ламинарном

пограничном слое. Если турбулентный пограничный слой имеется по всей длине пластины, то по (4.11) средний коэффициент теплоотдачи (при $t_c = \text{const}$) $\bar{\alpha} = 1,25\alpha_L$, где α_L – коэффициент теплоотдачи на конце пластины. При наличии на пластине ламинарного и турбулентного режима течения усреднение коэффициентов теплоотдачи по (4.11) или по (4.12) следует проводить отдельно для ламинарного и турбулентного течения, а затем усреднять полученные средние коэффициенты теплоотдачи.

В заключение раздела отметим известные соотношения, позволяющие определить толщину турбулентного пограничного слоя

$$\delta_T / x = 0,367 / \text{Re}_x^{0,2}, \quad (4.17)$$

и толщину ламинарного подслоя

$$\delta_L / \delta_T = 194 / \text{Re}_x^{0,7}. \quad (4.18)$$

Вопросы для самопроверки

1. Какой характер имеет течение жидкости в пограничном слое у плоской поверхности? Как оценивается граница ламинарного течения?
2. Как изменяется толщина пограничного слоя по длине поверхности?
3. Дайте определение локального и среднего по поверхности коэффициента теплоотдачи.
4. Как изменяется по длине поверхности локальный коэффициент теплоотдачи при ламинарном течении в пограничном слое?
5. Напишите структуру критериального уравнения для расчета локального коэффициента теплоотдачи при ламинарном течении в пограничном слое? При турбулентном?
6. Как усредняется по длине поверхности коэффициент теплоотдачи?

Задачи к разделу 4

1. По ленте из нихрома сечением 20x1 мм и длиной 0,8м течет ток 85А. Лента обдувается потоком воздуха $t_b = 20^\circ\text{C}$, скорость воздуха 10 м/с. Найти максимальную температуру ленты, если удельное электрическое сопротивление нихрома $\rho = 0,4 \text{ Ом}\cdot\text{мм}^2/\text{м}$. Теплопроводностью вдоль ленты пренебречь.

Комментарий к задаче. По условию задачи плотность теплового потока на поверхности ленты постоянна, т.к. сила тока и сопротивление ленты постоянны. Из (4.10) следует, что локальный коэффициент теплоотдачи при ламинарном течении жидкости вдоль плоской поверхности убывает с увеличением расстояния от передней кромки. Следовательно, температура поверхности ленты достигает максимума в точке, где коэффициент теплоотдачи минимальный, т.е. в конце зоны ламинарного течения. Условной границей зоны ламинарного течения считается $\text{Re}_{\text{кр}} = (1 - 5)\cdot 10^5$. Приняв $\text{Re}_{\text{кр}} = wX_{\text{кр}}/\nu = 3\cdot 10^5$, определяем координату $X_{\text{кр}}$, где температура ленты максимальна. Из (4.10) по $\text{Re}_{\text{кр}}$ и $\varepsilon = 1,36$ находится критерий Nu и искомый коэффициент теплоотдачи как $\alpha_{\text{min}} = \text{Nu} \lambda / X_{\text{кр}}$.

2. Решить предыдущую задачу при условии, что вдоль ленты течет вода с той же температурой и скоростью 0,5 м/с.

3. Найти тепловой поток, передаваемый с прямого ребра постоянного сечения, если размеры ребра: длина $L=0,6\text{м}$, $h=50\text{мм}$, $2\delta = 5\text{мм}$. $\lambda = 40 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$;

температура у основания $t_0 = 120^\circ\text{C}$, температура воздуха, текущего вдоль ребра со скоростью 4 м/с , $t_{\text{в}}=20^\circ\text{C}$.

Комментарий к задаче. Тепловой поток, рассеиваемый ребром, находится по (2.67). Для его определения необходимо найти средний по ребру коэффициент теплоотдачи. Установим характер течения воздуха вдоль ребра, для чего вычислим критерий $Re = wL/\nu$. Если $Re \leq Re_{\text{кр}}$, то течение в пограничном слое ламинарное и по (4.10) при $\varepsilon = 1$ находится критерий Nu и коэффициент теплоотдачи α_L на конце ребра. Средний коэффициент теплоотдачи находится из (4.13).

5. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ И КАНАЛАХ

Процесс теплоотдачи при течении жидкости в трубах является более сложным процессом, чем течение у плоской поверхности, т.к. поперечное сечение трубы имеет конечные размеры. Поэтому, начиная с некоторого расстояния от входа в трубу, жидкость по всему сечению канала испытывает тормозящее влияние сил трения. Участок трубы от входа до слияния пограничных слоев называют участком гидродинамической стабилизации потока. Течение в трубах может быть ламинарным при $Re \leq 2300$, либо турбулентным при $Re \geq 10^4$.

Течение при $2300 < Re < 10^4$ называют переходным.

При ламинарном течении длина участка гидродинамической стабилизации потока может приближенно определяться как

$$L_{\text{т}}/d = 0,03 Re. \quad (5.1)$$

Если поток в трубе не изотермический ($t_{\text{ст}} \neq t_{\text{ж}}$), то наряду с гидродинамическим пограничным слоем у стенки трубы возникает тепловой пограничный слой, в котором температура жидкости изменяется от $t_{\text{с}}$ до $t_{\text{ж}}$. По мере удаления от входа в трубу толщина этого слоя нарастает, и на некотором расстоянии от входа в трубу происходит смыкание пограничного слоя. Но, если форма профиля гидродинамического пограничного слоя в стабилизированном потоке остается постоянной (на основании уравнения сплошности), то наличие теплообмена между жидкостью и стенкой трубы приводит к изменению формы профиля теплового пограничного слоя. Для ламинарного режима течения теоретические решения определяют относительную длину участка тепловой стабилизации потока в виде:

$$t_{\text{ст}} = \text{const} \quad L_{\text{т}}/d = 0,055 Re; \quad q = \text{const} \quad L_{\text{т}}/d = 0,07 Re. \quad (5.2)$$

При турбулентном течении жидкости в трубе ($Re > 10^4$)

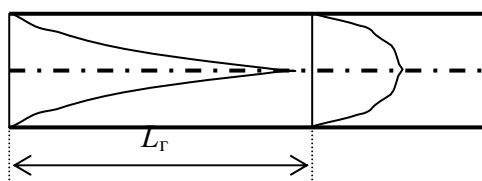


Рисунок 5.1 – Схема образования пограничного слоя при ламинарном течении жидкости в трубе

гидродинамическая стабилизация потока наступает достаточно быстро из-за значительной толщины турбулентного пограничного слоя. По некоторым данным при $Re > 5 \cdot 10^4$ практически с самого начала трубы устанавливается стабилизированное течение жидкости.

5.1. Теплообмен при ламинарном течении жидкости в трубах

В настоящее время достаточно хорошо исследован теплообмен при ламинарном течении жидкости только в круглых трубах. Теплообмен в каналах произвольной формы при ламинарном течении исследован недостаточно и общих рекомендаций по расчету коэффициента теплоотдачи не существует.

Теоретические исследования теплообмена при стабилизированном ламинарном течении и условии одновременной тепловой и гидродинамической стабилизации потока показали, что коэффициент теплоотдачи для стабилизированного теплообмена остается постоянным по длине трубы и зависит только от условий на стенке трубы. Обобщенный коэффициент теплоотдачи в этом случае равен:

$$t_{ст} = \text{const} \quad Nu_{\text{стаб},d} = 3,66; \quad q = \text{const} \quad Nu_{\text{стаб},d} = 4,36. \quad (5.3)$$

Из уравнения теплоотдачи в этом случае следует, что $(\partial\vartheta/\partial n)/\vartheta = \alpha/\lambda = \text{const}$, т.е. отношение градиента температуры на поверхности в пограничном слое к температурному напору остается постоянным. Таким образом, при стабилизированном теплообмене градиент температуры на стенке изменяется с такой же интенсивностью, как и температурный напор.

Наличие теплообмена при ламинарном течении в трубах приводит к тому, что температура по сечению потока переменна, следовательно, по сечению потока изменяются теплофизические характеристики жидкости, в частности ее плотность.

Поэтому в ламинарном потоке жидкости могут возникать вторичные течения, обусловленные естественной конвекцией, интенсивность которых зависит, в первую очередь, от разности температуры стенка жидкость, от теплофизических свойств жидкости, размера трубы, ее ориентации и т.д. На рис. 5.2 показаны вторичные течения в горизонтальной трубе при $t_c > t_{ж}$.

Очевидно, что при малых температурных напорах интенсивность вторичных течений мала, и их влиянием на теплообмен можно пренебречь. В связи с этим, теплообмен при ламинарном течении жидкости в трубах подразделяют на два режима: **вязкостный** режим теплообмена, когда интенсивность вторичных течений, вызванных неизотермичностью жидкости, мала, и их влиянием на теплообмен можно пренебречь, и **вязкостно – гравитационный** режим теплообмена, когда интенсивность вторичных течений жидкости оказывает существенное влияние на теплообмен. Оценка границы между вязкостным и вязкостно-гравитационным режимами теплообмена достаточно условна. По данным различных авторов, можно принять границей этих режимов значение

$$Ra_{m,d} = (Gr \cdot Pr)_{m,d} = 8 \cdot 10^5. \quad (5.4)$$

В (5.4) определяющей температурой принята средняя температура пограничного слоя; определяющим размером – диаметр трубки. Следует отметить, что эти данные применимы для горизонтально расположенных труб.

При значении критерия Рэлея меньше (5.4) режим теплообмена считается вязкостным, в ином случае – вязкостно-гравитационным.

Исследования вязкостного режима теплообмена в МЭИ позволяют для случая $q = \text{const}$ рекомендовать следующее уравнение для расчета локальных коэффициентов теплоотдачи

$$\text{Nu}_{ж,x} = 0,33 \text{Re}_{ж,x}^{0,5} \text{Pr}_{ж}^{0,43} (\text{Pr}_{ж} / \text{Pr}_{ст})^{0,25} (x/d)^{0,1}. \quad (5.5)$$

Здесь в качестве определяющей температуры принята средняя температура жидкости в данном сечении трубы. Если сравнить данное уравнение с (4.10) для теплообмена при ламинарном течении жидкости у плоской поверхности, то последний симплекс в (5.5), по мнению авторов, учитывает эффект влияния ограниченности поперечного сечения канала. Изменение коэффициента теплоотдачи по длине трубы ($\alpha \approx x^{-0,4}$) оказывается меньше, чем при течении у плоской поверхности.

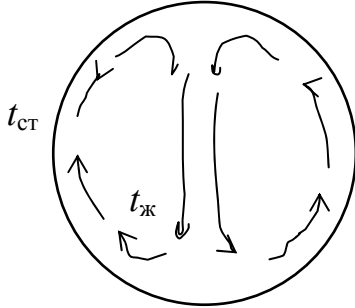


Рисунок 5.2 – Схема вторичных течений в горизонтальной трубе при $t_{ст} > t_{ж}$.

Исследования Петухова показали, что при вязкостном режиме теплообмена в длинных трубах ($L > L_T$) средний коэффициент теплоотдачи можно определить по уравнению

$$\text{Nu}_{m,d} = 1,55 \left(\text{Pe}_{m,d} \frac{d}{L} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_{ж}}{\mu_{ст}} \right)^{0,14} \varepsilon_l, \quad (5.6)$$

где поправка на влияние участка гидродинамической стабилизации потока определяется по уравнению

$$\varepsilon_l = 0,6 \left(\frac{1}{\text{Re}_m} \frac{L}{d} \right)^{-1/7} \left(1 + 2,5 \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{L}{d} \right). \quad (5.7)$$

Если $\frac{1}{\text{Re}_m} \frac{L}{d} > 0,1$, то поправка $\varepsilon_l = 1$.

Определяющей температурой в (5.6) и (5.4) принята средняя температура пограничного слоя. Вязкостный режим теплообмена при течении газов мало исследован, поэтому приведенные соотношения справедливы только для капельных жидкостей.

По рекомендациям Э. Эккерта для расчета средней интенсивности теплообмена при вязкостном режиме и $t_{ст} = \text{const}$ можно воспользоваться уравнением

$$\text{Nu}_{ж,d} = \left\{ 3,66 + \frac{0,067 \text{Pe}_{ж,d} d/L}{1 + 0,04 (\text{Pe}_{ж,d} d/L)^{2/3}} \right\} \left(\frac{\mu_{ж}}{\mu_{ст}} \right)^{0,14}. \quad (5.8)$$

В данном уравнении определяющей принята средняя температура жидкости в трубе. Следует отметить, что при достаточно большой длине трубы $\text{Nu} \rightarrow 3,66$, что соответствует стабилизированному теплообмену.

При вязкостно-гравитационном режиме теплообмена коэффициенты теплоотдачи могут быть в 3 ÷ 5 раз больше, чем при вязкостном режиме, за счет влияния естественной конвекции. Однако, учет этой составляющей достаточно

сложен, т.к. сравнительно небольшие отличия в краевых условиях могут привести к существенно отличающимся результатам. Это затрудняет обобщение экспериментальных данных и получение универсальных уравнений.

Приближенная оценка средней интенсивности теплообмена при вязкостно-гравитационном режиме может проводиться по уравнению Михеева

$$Nu_{ж,d} = 0,15 Pe_{ж,d}^{0,33} Ra_{ж,d}^{0,1} (Pr_{ж}/Pr_{ст})^{0,25} \varepsilon_l, \quad (5.9)$$

где ε_l – поправка на влияние участка гидродинамической стабилизации потока определяется по табл. 5.1 в зависимости от l/d . Из таблицы, в частности, следует, что при $l/d > 40$ поправка на участок гидродинамической стабилизации может быть принята 1. Обширные исследования теплообмена при вязкостно –

гравитационном режиме теплообмена проведены Петуховым, Краснощековым, Нольде и другими

Таблица 5.1 – Зависимость $\varepsilon_l = f(l/d)$

l/d	1	2	5	10	15	20	40	50
ε_l	1,9	1,7	1,44	1,28	1,18	1,13	1,02	1

исследователями. Они позволяют более обоснованно выбрать уравнения для расчета теплообмена в конкретных условиях. Однако рассмотрение этих уравнений выходит за рамки настоящего курса.

5.2. Теплоотдача при турбулентном течении жидкости в трубах и каналах

Как указывалось выше, турбулентное течение в трубах имеет место при $Re > 10^4$. Для получения зависимости интенсивности теплообмена от параметров потока воспользуемся соотношением (f) из раздела 4.3, где заменим скорость невозмущенного потока средней скоростью течения жидкости в сечении.

$$\alpha = \frac{s c_p}{w} \frac{1}{1 + (Pr - 1) w_r / w} = \frac{s c_p}{w} E. \quad (a)$$

При безотрывном течении в трубе гидравлическое сопротивление определяется силами трения по периметру канала. Выделим (рис.5.3) отрезок трубы длиной L между сечениями 1, где давление потока P_1 , и 2, где давление P_2 . Разность давлений по сечениям $\Delta P = P_1 - P_2$ при стабилизированном течении определяется силами трения на стенке трубы. Тогда очевидно соотношение:

$$\Delta P f = s F, \quad (б)$$

где f – площадь поперечного сечения трубы, F – поверхность трубы между сечениями. Учитывая значения f и F , и закон Дарси в виде

$$\Delta P = c_f (L/d) \rho w^2 / 2, \quad (в)$$

получим для напряжения сил трения

$$s = \frac{c_f}{8} \rho w^2. \quad (г)$$

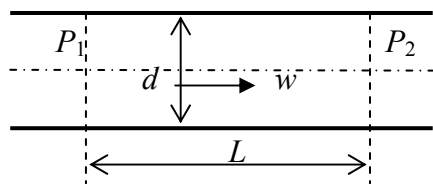


Рисунок 5.3 – К зависимости потери давления в прямой трубе.

Подставив (г) в (а), найдем критерий Стантона (при $Pr = 1$)

$$St = c_f / 8. \quad (д)$$

Используя формулу Никурадзе для сил трения в прямой трубе,

$$c_f = 0,184 / Re^{0,2},$$

получим (при $Pr = 1$)

$$Nu = 0,023 Re^{0,8}. \quad (5.10)$$

Полученное уравнение хорошо согласуется с данными экспериментальных исследований при $Pr = 1$. Однако распространение уравнения на случаи $Pr \neq 1$ требует экспериментального исследования. По данным Михеева средний коэффициент теплоотдачи при турбулентном течении в трубе можно определять по уравнению

$$Nu_{ж,d} = 0,021 Re_{ж,d}^{0,8} Pr_{ж}^{0,43} \varepsilon_T \varepsilon_l, \quad (5.11)$$

где ε_T – поправка на неизотермичность, которая для капельных жидкостей может быть найдена как $\varepsilon_T = (Pr_{ж}/Pr_{ст})^{0,25}$, для газов при нагревании $\varepsilon_T = (T_{г}/T_{ст})^{0,25}$, при охлаждении газа $\varepsilon_T = 1$; ε_l – поправка на влияние участка гидродинамической стабилизации потока, которая является функцией $\varepsilon_l = f(Re, L/d)$ и определяется по табл. 5.2.

Расчет теплообмена при турбулентном течении в канале произвольного профиля может быть проведен по уравнению (5.11), если в качестве определяющего размера принять «эквивалентный» (гидравлический) диаметр

$$d_{экр} = 4F/U, \quad (5.14)$$

где F – площадь сечения потока, U – смоченный периметр (периметр теплоотдачи).

Таблица 5.2 – Поправка ε_l при турбулентном течении

$Re \cdot 10^{-4}$	L/d						
	1	2	5	10	20	40	50
1	1,65	1,5	1,34	1,23	1,13	1,03	1
5	1,34	1,27	1,18	1,13	1,08	1,02	1
10	1,28	1,22	1,15	1,10	1,06	1,02	1
100	1,14	1,11	1,08	1,05	1,03	1,01	1

Исследования теплообмена и гидродинамики в изогнутых трубах и змеевиках показали, что наличие центробежных сил приводит к возникновению вторичной циркуляции, разрушающей ламинарное течение при значениях критерия Рейнольдса существенно меньших, чем 2300. При этом переход к турбулентному течению происходит значительно быстрее при практическом отсутствии переходного течения. Если принять критические значения критерия Рейнольдса

$$Re'_{кр} = 11,6 / \sqrt{d/D}, \quad Re''_{кр} = 18500 \cdot (d/D)^{0,28},$$

где d – диаметр трубы, $D = 2R$, R – радиус изгиба трубы по средней линии, то при $Re < Re'_{кр}$ расчет ведется по уравнениям для ламинарного течения в трубах.

При $Re'_{кр} < Re < Re''_{кр}$ расчет теплообмена ведется по уравнениям для турбулентного течения. Если $Re > Re''_{кр}$, то значения коэффициента теплоотдачи, полученные по уравнениям для турбулентного течения, должны быть умножены на поправочный коэффициент

$$\varepsilon_r = 1 + 1,8(d/R). \quad (5.15)$$

Создание в трубах искусственной шероховатости, разрушающей ламинарный подслоя турбулентного пограничного слоя, приводит к увеличению теплоотдачи. Исследования Гомелаури показали, что имеется некоторое оптимальное значение относительной шероховатости $(s/\delta)_{опт} = 13$, при котором наблюдается наибольшее увеличение теплоотдачи. Расчет теплоотдачи в трубах с искусственной шероховатостью рекомендуется проводить по уравнению (5.11) с учетом поправки на шероховатость

$$\varepsilon_{ш} = \exp(0,85K), \quad (5.16)$$

где $K = (s/\delta)_{опт} / (s/\delta)$ при $(s/\delta) > (s/\delta)_{опт}$; и $K = 1/K$ в противном случае.

5.3. Теплоотдача при переходном режиме течения

Интенсивность теплообмена при переходном режиме течения ($2300 < Re < 10^4$) зависит от большого количества факторов, трудно поддающихся учету. К настоящему времени отсутствует удовлетворительная методика расчета теплообмена в этом режиме. По рекомендации Михеева, приближенная оценка интенсивности теплообмена в переходной области может быть проведена:

1. По табл.5.3 определяется максимальное и минимальное значение комплекса

$$K = Nu_{ж,d} / [Pr_{ж}^{0,43} (Pr_{ж}/Pr_{ст})^{0,25}]. \quad (5.17)$$

Таблица 5.3 – Значение комплекса K

$Re_{ж,d} \cdot 10^{-3}$	2,4	3	5	8	10
K_{max}	10,6	12,7	19,1	28	33,3
K_{min}	3,8	7	15,5	27	33,3

2. Коэффициент теплоотдачи определяется из средне-геометрического значения K .

По рекомендации

С.С. Кутателадзе оценка среднего коэффициента теплоотдачи при переходном режиме течения может быть проведена следующим образом

1. В зависимости от комплекса $Ra_{m,d}$ рассчитывается значение $Nu_{л}$ по уравнениям для вязкостного или вязкостно-гравитационного режима теплообмена при ламинарном течении для значения $Re = 2300$.

2. По уравнению Михеева (5.11) находится $Nu_{т}$ для $Re = 10^4$.

3. Расчетное значение критерия Нуссельта определяется по уравнению

$$Nu_{ж,d} = Nu_{л} \left(\frac{Re}{2300} \right)^{1,47 \lg [Nu_{т}/Nu_{л}]} \quad (5.18)$$

В (5.18) Re – расчетное значение критерия Рейнольдса. Определяющая температура – средняя температура жидкости в трубе.

Вопросы для самопроверки

1. Чем отличается течение жидкости в трубе от течения у плоской поверхности?

2. Как классифицируются режимы течения жидкости в трубах?
3. Что такое «стабилизированное течение» и «стабилизированный теплообмен»?
4. Как определяется длина участка тепловой и гидродинамической стабилизации потока при ламинарном и турбулентном течении в прямой круглой трубе?
5. Как и почему классифицируются режимы теплообмена при ламинарном течении жидкости в прямых круглых трубах? Условная граница режимов.
6. Структура критериального уравнения для различных режимов теплообмена при ламинарном течении жидкости в трубах. Пояснить различие.
7. Структура критериального уравнения для расчета теплообмена при турбулентном течении.
8. Как рассчитать теплообмен при турбулентном течении в каналах произвольного сечения?
9. Чем отличается течение жидкости в изогнутых трубах (змеевиках) от течения в прямых трубах? Как это влияет на интенсивность теплообмена?

Задачи к разделу 5

1. Вода со скоростью 0,1 м/с течет по трубке диаметром 4мм и длиной 800мм. Температура стенки трубки 60°C. Определить температуру воды на выходе из трубки, если на входе температура воды 10°C.

Комментарий к задаче. Принимая в качестве определяющей температуру воды на входе в трубку, можно найти критерий Re и определить характер течения. Если течение ламинарное ($Re < 2300$), вычисляется критерий Рэлея (Ra) и определяется режим теплообмена (при $Ra < 8 \cdot 10^5$ – вязкостный, в противном случае – вязкостно-гравитационный). В зависимости от режима теплообмена рассчитываем коэффициент теплоотдачи по (5.6) или (5.9). Температура воды на выходе из трубки находится из уравнения теплового баланса: тепловой поток от стенки трубки к воде расходуется на изменении энтальпии потока.

$$Q = \alpha \pi d l (t_{ст} - \bar{t}_в) = G_в c_{рв} (t_{в2} - t_{в1}),$$

где $\bar{t}_в = (t_{в1} + t_{в2})/2$ – средняя температура воды; $G_в = \rho w f$ – расход воды; f – сечение трубки; $c_{рв}$ – изобарная теплоемкость воды. Если температура воды на выходе существенно отличается от температуры на входе ($> 15^\circ\text{C}$), следует пересчитать коэффициент теплоотдачи, приняв в качестве определяющей среднюю температуру воды в трубке.

2. По трубке диаметром 30мм, длиной 2м течет трансформаторное масло со скоростью 0,2 м/с. На входе в трубку температура масла 80°C. Определить температуру масла на выходе из трубки, если температура стенки трубки постоянна по длине и равна 20°C.

Комментарий к задаче. Воспользуйтесь комментарием к предыдущей задаче.

3. По стальной трубке диаметром 65/60 мм течет воздух со средней температурой 150°C, скорость воздуха 15м/с. Определить необходимую толщину изоляции наружной поверхности ($\lambda_{из} = 0,2 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$), чтобы тепловые

потери не превышали 100 Вт/м при температуре поверхности изоляции 40°C.

Комментарий к задаче. Пренебрегая термическим сопротивлением стенки трубы, внешний диаметр изоляции находится из

$$q_l = \frac{t_{\text{в}} - t_{\text{п.из}}}{1/(\alpha \pi d_1) + \ln(d_3/d_2)/(2\pi\lambda_{\text{из}})}$$

Коэффициент теплоотдачи определяется в зависимости от критерия Re по (5.11).

4. В отводящем борове сечением 2х1м текут продукты сгорания при температуре 250°C со скоростью 10м/с. Определить потери тепла с погонного метра бора, если температура его внутренней поверхности 120°C.

Комментарий к задаче. Для определения критерия Re используйте эквивалентный диаметр по (5.14).

6. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ОБТЕКАНИИ ЕДИНИЧНОЙ ТРУБЫ И ПУЧКОВ ТРУБ

Характер течения жидкости у поверхности трубы при поперечном обтекании имеет ряд особенностей, приводящих к существенным различиям при расчете средних коэффициентов теплоотдачи. При малых значениях критерия Рейнольдса ($Re < 5$), т.е. для труб малого диаметра при высокой вязкости жидкости, у поверхности трубы наблюдается безотрывное течение жидкости.

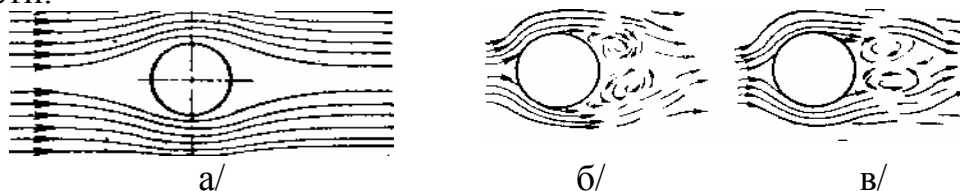


Рисунок 6.1 – Обтекание цилиндра потоком жидкости

а – безотрывное обтекание ($Re \leq 5$); б – отрыв ламинарного пограничного слоя; в – отрыв турбулентного пограничного слоя.

Для больших значений критерия Рейнольдса ($Re > 5$) труба представляет собою неудобнообтекаемое тело, а ламинарный пограничный слой на поверхности трубы отрывается (из-за понижения давления у поверхности трубы вследствие увеличения скорости потока) и образует два симметричных вихря. Отрыв потока происходит при $\varphi = 80 \div 85^\circ$, где φ - угол, отсчитанный от лобовой точки трубы. При увеличении скорости потока до $Re > 10^3$ вихри за трубой периодически отрываются и уносятся потоком, образуя за трубой вихревую дорожку.

Повышение скорости потока до $Re > 2 \cdot 10^5$ приводит к тому, что энергия пограничного слоя становится достаточной для возникновения у поверхности трубы турбулентного пограничного слоя. Последний, в силу большой энергии, отрывается при угле $\varphi \approx 120^\circ$. Этот факт существенно увеличивает теплоотдачу кормовой зоны трубы.

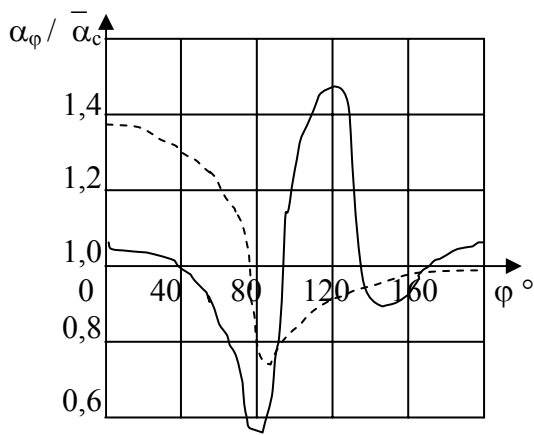


Рисунок 6.2 – Локальная теплоотдача при поперечном обтекании трубы.

-- ламинарный пограничный слой,
 — турбулентный слой.

Исследования локальной теплоотдачи по периметру трубы привели к результатам, показанным на рис. 6.2.

Существенное различие в характере теплообмена оказывает влияние на расчет средних коэффициентов теплообмена по поверхности цилиндра. Обобщение экспериментальных данных, проведенные С.С. Кутателадзе, позволили рекомендовать следующее уравнение для расчета средних коэффициентов теплоотдачи цилиндра в поперечном потоке жидкости

$$Nu_{ж,d} = C Re_{ж,d}^n Pr_{ж}^m \varepsilon_T, \quad (6.1)$$

где для газов $\varepsilon_T = (T_r/T_c)^{n/4}$, для

капельных жидкостей $\varepsilon_T = (\mu_{ж}/\mu_c)^k$, где, в свою очередь, $k = 0,25$ для нагревания и $k = 0,2$ для охлаждения жидкости. Коэффициенты в уравнении (6.1) в зависимости от критерия Рейнольдса представлены в табл. 6.1.

Следует отметить, что уравнение (6.1) получено при угле атаки (натекания потока на цилиндр) 90° . Если угол атаки (ϕ) меньше, то в уравнение (6.1) следует ввести поправку

$$\varepsilon_\phi = 1 - 0,54 \cos^2 \phi. \quad (6.2)$$

В теплообменных аппаратах, встречающихся во многих отраслях народного хозяйства, поверхность теплообмена выполняется из труб, собранных в пучки

По принципу расположения труб в пучке различают **коридорный** и **шахматный** пучки труб. Каждый пучок труб (рис.6.2) имеет геометрические характеристики, которые оказывают определенное влияние на интенсивность теплообмена. К этим характеристикам относят: шаг по фронту пучка – S_1 , шаг

в глубину пучка – S_2 , диаметр труб – d .

Течение теплоносителя в пучке труб носит, как правило, турбулентный характер, к тому же, первые ряды труб играют роль дополни-

Таблица 6.1 – Коэффициенты уравнения (6.1)

Коэффициент.	Re			
	< 40	$40 \div 10^3$	$10^3 \div 2 \cdot 10^5$	$> 2 \cdot 10^5$
C	0,76	0,52	0,26	0,023
n	0,4	0,5	0,6	0,8
m	0,37	0,37	0,37	0,4

тельных турбулизаторов потока.

Исследование гидродинамики потока в пучках труб показало, что, начиная с 3-го ряда труб, характер течения практически не зависит от глубины пучка. Обтекание первых двух рядов зависит от компоновки пучка. Соответственно, и интенсивность теплообмена, начиная с 3-го ряда труб и далее в глубину пучка, остается практически постоянной.

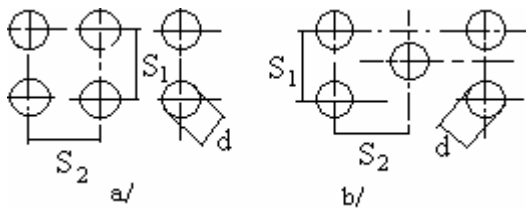


Рисунок 6.2 – Типы пучков труб
 а/ – коридорный; б/ – шахматный

Интенсивность теплообмена первых рядов труб зависит от компоновки пучка и составляет: для 1-го ряда труб независимо от компоновки пучка 60% от интенсивности теплообмена 3-го ряда; для 2-го ряда коридорного пучка – 90%, для 2-го ряда шахматного пучка – 70% от

интенсивности теплообмена 3-го ряда.

Экспериментальные исследования теплообмена пучка труб позволяют рекомендовать следующее уравнение для расчета среднего коэффициента теплоотдачи пучка труб

$$Nu_{ж,d} = C \cdot Re_{ж,d}^n \cdot Pr_{ж}^{0,33} (Pr_{ж}/Pr_{ст})^{0,25} \varepsilon_s \varepsilon_n, \quad (6.3)$$

где коэффициенты уравнения, поправки на геометрию пучка (ε_s) и количество труб в пучке (ε_n) принимаются по табл.6.2, в зависимости от типа пучка.

Таблица 6.2 – Коэффициенты уравнения (6.3)

Тип пучка	C	n	ε_n	ε_s
Шахматный	0,41	0,6	1-0,7/n	$S_1/S_2 < 2 \quad (S_1/S_2)^{1/6}$ $S_1/S_2 \geq 2 \quad 1,12$
Коридорный	0,26	0,65	1-0,5/n	$(S_2/d)^{-0,15}$

При натекании потока на пучок труб под некоторым углом атаки $\phi \neq 90^\circ$ в уравнение (6.3) следует ввести поправочный коэффициент по (6.2).

Вопросы для самопроверки

1. В чем особенность обтекания цилиндра поперечным потоком жидкости, и каким образом этот фактор сказывается на локальной интенсивности теплообмена?
2. Какова структура критериального уравнения для расчета средней интенсивности теплообмена цилиндра в поперечном потоке жидкости?
3. Структура пучков труб, влияние геометрии на интенсивность теплообмена.

Задачи к разделу 6

1. Отрезок стальной трубы ($\lambda = 40$ Вт/(м·К)) диаметром 40мм с толщиной стенки 2,5мм обтекается поперечным потоком воздуха со скоростью 10 м/с $t_{в} = 20^\circ\text{C}$. Определить тепловой поток, передаваемый от трубы в воздух, если ее длина 250мм, а температура обоих торцов трубы одинакова и равна $t_0 = 150^\circ\text{C}$.

Комментарий к задаче. Используйте комментарий к задаче 2 раздела 2.5. Коэффициент теплоотдачи находится по (6.1), где для воздуха $\varepsilon_T = 1$.

2. Стальной стержень ($\lambda = 35$ Вт/(м·К)) диаметром 15мм, длиной 150мм обтекается поперечным потоком трансформаторного масла $t_{м} = 80^\circ\text{C}$ со скоростью 0,2 м/с. Найти тепловой поток от масла к стержню, если температура у основания стержня $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Считать, что интенсивность теплообмена торца и боковой поверхности стержня одинакова.

Комментарий к задаче. Для определения теплового потока по (2.60) требуется

коэффициент теплоотдачи от масла к стержню, который может быть найден по (6.1). Однако, для капельных жидкостей $\varepsilon_T = (\mu_{ж}/\mu_{ст})^k$, а средняя температура поверхности стержня неизвестна. Поэтому в качестве первого приближения принимается $\varepsilon_T = 1$, по (6.1) определяется коэффициент теплоотдачи первого приближения α' , характеристика стержня $m = \sqrt{\alpha u / (\lambda f)}$ и средняя температура стержня из $\bar{\vartheta} = \vartheta_0 [\text{th}(mh) + N] / \{mh[1 + N \text{th}(mh)]\}$. По найденной средней температуре определяется ε_T и коэффициент теплоотдачи второго приближения как $\alpha'' = \alpha' \cdot \varepsilon_T$. При необходимости проводится расчет еще одного приближения. По уточненному значению коэффициента теплоотдачи определяется m и тепловой поток по (2.60).

3. Отрезок стальной трубы ($\lambda = 35$ Вт/(м·К)) диаметром 35мм с толщиной стенки 2,5мм обтекается воздухом $t_B = 20^\circ\text{C}$ со скоростью 8 м/с. Определить тепловой поток, передаваемый от трубы в воздух, если ее длина 250мм, температура одного торца трубы $t_1 = 150^\circ\text{C}$, а другого – $t_2 = 200^\circ\text{C}$.

Комментарий к задаче. Используйте (2.64) и комментарий к задаче 1.

4. Определить тепловой поток, передаваемый коридорным пучком труб диаметрами 51/45 мм, длиной 1,2м, шаг по фронту и в глубину пучка 75мм. По фронту пучка расположено 10 труб, в глубину пучка – 15 труб. Внутри труб течет вода со скоростью $w_{\text{вод}} = 0,5$ м/с, $t_{\text{вод}} = 20^\circ\text{C}$. Снаружи трубный пучок омывается горячим воздухом $t_{\text{воз}} = 150^\circ\text{C}$, скорость набегающего потока воздуха $w_0 = 10$ м/с.

Комментарий к задаче. Для расчета среднего коэффициента теплоотдачи при обтекании воздухом пучка труб используйте (6.3), учтя, что для воздуха $(Pr_{ж}/Pr_{ст})^{0,25} = 1$. В (6.3) критерий Рейнольдса рассчитывается по скорости в самом узком сечении пучка, т.е. $w = w_0 \cdot (S_1 - d_2) / S_1$. При определении коэффициента теплопередачи по (2.20) пренебречь термическим сопротивлением стенки трубы.

7. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ СВОБОДНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

Свободное движение жидкости возникает при изменении в объеме массовых сил (тяжести, центробежной, электромагнитной и т.д.). Наиболее часто встречается и наилучше изучено свободное движение, вызванное гравитационными силами, которое называют естественной конвекцией. При наличии теплообмена и, как следствие, разности температуры и, соответственно, разности плотности жидкости, возникает подъемная (опускная) сила.

7.1. Теплоотдача при свободном движении в большом объеме

Подобный вид теплоотдачи возникает тогда, когда наличие посторонних нагретых тел не оказывает влияние на теплообмен рассматриваемого тела.

Пусть (рис.7.1) вертикальная стенка с постоянной температурой поверхности ($t_c = \text{const}$) находится в жидкости с температурой $t_{ж} < t_c$. У поверхности стенки возникает подъемная сила, вызванная разностью плотности жидкости у поверхности и в объеме.

Расположим начало координат у нижней кромки стенки, ось x направим вдоль поверхности, ось y – нормально к поверхности. Для упрощения решения

задачи примем следующие допущения:

1. Силы инерции в движущейся жидкости пренебрежимо малы.
2. Конвективный перенос теплоты вдоль стенки не учитывается (как и теплопроводность).
3. Градиент давления отсутствует.
4. Физические параметры жидкости постоянны, за исключением плотности, которая линейно зависит от температуры.
5. Движение жидкости считается ламинарным.

Из решения уравнения энергии следует, что температура в движущемся слое жидкости толщиной δ на координате x изменяется по квадратичному закону в виде

$$\vartheta = \vartheta_0(1 - y/\delta)^2, \quad (7.1)$$

где $\vartheta = t - t_{ж}$, а $\vartheta_0 = t_c - t_{ж}$. Из условий задачи следует, что $\vartheta_0 = \text{const}$.

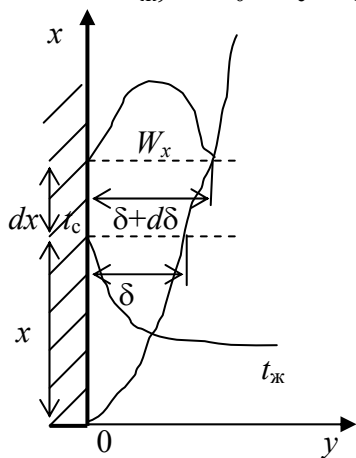


Рисунок 7.1 – Естественная конвекция около вертикальной плоскости.

Определив из (7.1) производную при $y = 0$ и используя уравнение теплоотдачи, получим:

$$\alpha = 2\lambda / \delta, \quad (7.2)$$

где δ – толщина пограничного слоя на координате x . Толщина пограничного слоя связана со скоростью движения жидкости. Уравнение движения при принятых выше допущениях будет иметь вид:

$$\mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} = -\rho g \beta \vartheta. \quad (7.3)$$

Используя (7.1), получим

$$\frac{d^2 w_x}{dy^2} = -\frac{\rho g \beta \vartheta_0}{\mu} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2. \quad (7.4)$$

Обозначив коэффициент, стоящий перед скобкой в правой части (7.4), как B , и учитывая допущение 4, проинтегрируем дважды (7.4). Получим

$$w_x = B \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3\delta} + \frac{y^4}{12\delta^2} \right) + C_1 y + C_2. \quad (7.5)$$

Граничные условия уравнения (7.3) представим в виде: при $y = 0$ $w_x = 0$; при $y = \delta$ $w_x = 0$. Тогда $C_2 \equiv 0$, $C_1 = -B \cdot \delta / 4$. Распределение скорости

$$w_x = B \left(-\frac{\delta y}{4} + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3\delta} + \frac{y^4}{12\delta^2} \right). \quad (7.6)$$

Распределение скорости по (7.6) несколько приближенно из-за неточности задания условия при $y = \delta$. В действительности наличие сил трения на внешней границе пограничного слоя приводит к вовлечению в движение некоторого слоя изотермической жидкости. Однако, эта погрешность незначительна. Приравнявая нулю первую производную (7.6) по y , получим, что максимум скорости в пограничном слое имеет место на координате

$y = 0,38 \cdot \delta$. Среднюю скорость в пограничном слое найдем интегрированием (7.6) от 0 до δ . Имеем:

$$\bar{w} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} w_x dy = \frac{\rho g \beta \vartheta_0 \delta^2}{40\mu}. \quad (7.7)$$

Аналогичным интегрированием (7.1) определим среднюю избыточную температуру пограничного слоя жидкости

$$\bar{\vartheta} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \vartheta dy = \frac{\vartheta_0}{3}. \quad (7.8)$$

Выделим элемент поверхности стенки dx на координате x от нижней кромки стенки и рассмотрим баланс теплоты жидкости в объеме элемента dx . На координате x по уравнению непрерывности расход жидкости через пограничный слой (при единице длины по координате z)

$$G = \rho \bar{w} \delta, \quad (a)$$

а его приращение на расстоянии dx , учитывая (7.7), будет

$$dG = \frac{3 \cdot \rho^2 g \beta \vartheta_0}{40 \cdot \mu} \delta^2 d\delta. \quad (7.9)$$

На расстоянии dx изменение расхода связано с вовлечением в движение жидкости при температуре $t_{ж}$. Будем считать, что в пограничном слое эта жидкость нагревается до средней температуры пограничного слоя, а на ее нагревание затрачивается тепловой поток, передаваемый от стенки в жидкость. Тогда баланс теплоты элемента жидкости примет вид:

$$dQ = c_p \bar{\vartheta} dG = \alpha \vartheta_0 dx = 2\lambda \vartheta_0 dx / \delta. \quad (7.10)$$

Определим из (7.10) dG и приравняем полученное выражение (7.9). Получим дифференциальное уравнение для определения толщины пограничного и его изменения по координате x .

$$\frac{\rho^2 \beta g c_p \vartheta_0}{80\mu \lambda} \delta^3 d\delta = dx. \quad (7.11)$$

Интегрируя (7.11) и используя очевидное условие (при $x = 0 \delta = 0$), получим изменение толщины пограничного слоя вдоль стенки

$$\delta = 4,23 \sqrt[4]{\frac{\mu \lambda x}{c_p \beta g \vartheta_0 \rho^2}}. \quad (7.12)$$

Из полученного выражения следует, что толщина пограничного слоя у поверхности стенки при свободном движении жидкости изменяется по высоте пропорционально корню четвертой степени расстояния от нижней кромки. Используя (7.2) и (7.12) получим уравнение для расчета локального значения коэффициента теплоотдачи в виде

$$\alpha = 0,473 \sqrt[4]{\frac{c_p \beta g \vartheta_0 \rho^2 \lambda^3}{\mu x}}. \quad (7.13)$$

Приведя (7.13) к безразмерному виду, получим

$$Nu_{ж,x} = 0,473 Ra_{ж,x}^{0,25}. \quad (7.14)$$

Уравнение (7.14) не учитывает изменение теплофизических характеристик жидкости при неизотермическом пограничном слое. Экспериментальные данные по теплообмену вертикальных поверхностей при свободном движении в неограниченном объеме и ламинарном пограничном слое, сохраняя общую структуру (7.14), приводят к несколько иным коэффициентам. Поэтому общее уравнение для локальных коэффициентов теплоотдачи имеет вид

$$\text{Nu}_{\text{ж},x} = C \text{Ra}_{\text{ж},x}^{0,25} \varepsilon_{\text{T}}, \quad (7.15)$$

где коэффициент уравнения при $q = \text{const}$ $C = 0,6$; при $t_{\text{с}} = \text{const}$ $C = 0,55$. Поправка на неизотермичность пограничного слоя для капельных жидкостей $\varepsilon_{\text{T}} = (\text{Pr}_{\text{ж}}/\text{Pr}_{\text{ст}})^{0,25}$, для газов $\varepsilon_{\text{T}} = 1$.

Усредняя коэффициенты теплоотдачи по (4.11) для стенки высотой h , имеем: при $q = \text{const}$ $\bar{\alpha} = 5\alpha_h/4$; при $t_{\text{ст}} = \text{const}$ $\bar{\alpha} = 4\alpha_h/3$, где α_h – коэффициент теплоотдачи на верхней кромке стенки.

Для определения средних по высоте стенки коэффициентов теплоотдачи, на основании приведенных выше данных, можно рекомендовать уравнение

$$\text{Nu}_{\text{ж},h} = 0,74 \text{Ra}_{\text{ж},h}^{0,25} \varepsilon_{\text{T}}. \quad (7.16)$$

Рассматривая (7.14) и (7.15), получаем, что локальная интенсивность теплообмена уменьшается с увеличением расстояния от нижней кромки пластины как $\alpha = C \cdot x^{-0,25}$. Следовательно, наибольшая интенсивность теплоотдачи наблюдается у нижней кромки пластины, где толщина пограничного слоя наименьшая. Однако теплообмен в этой зоне подчиняется несколько иным закономерностям, что будет рассмотрено ниже.

Развитое ламинарное течение в пограничном слое у вертикальной поверхности имеет место при $10^3 \leq \text{Ra} \leq 10^9$. При $\text{Ra} \geq 6 \cdot 10^{10}$ у поверхности существует развитое турбулентное течение. Зона $10^9 \leq \text{Ra} \leq 6 \cdot 10^{10}$ соответствует переходному режиму течения в пограничном слое, при котором расчет теплообмена затруднен. Оценка коэффициента теплоотдачи в переходной области может быть получена, как среднее арифметическое от минимального значения коэффициента теплоотдачи при ламинарном течении и значения коэффициента теплоотдачи при турбулентном течении.

Экспериментальные исследования теплоотдачи при турбулентном течении в пограничном слое, проведенные И.М. Пчелкиным, позволили рекомендовать следующее уравнение для расчета локальных значений коэффициента теплоотдачи

$$\text{Nu}_{\text{ж},x} = 0,15 \text{Ra}_{\text{ж},x}^{1/3} \varepsilon_{\text{T}}. \quad (7.17)$$

Из уравнения следует, что локальная интенсивность теплообмена при турбулентном течении в пограничном слое не зависит от координаты, следовательно, средняя интенсивность теплоотдачи совпадает с локальной интенсивностью.

7.2. Теплоотдача горизонтального цилиндра при свободном движении

Теоретическое решение подобной задачи встречает непреодолимые трудности в связи с тем, что при свободном движении жидкости у поверхности цилиндра в верхней его части происходит отрыв пограничного слоя с образованием вихревой зоны. При этом даже при высоких температурных напорах на нижней части цилиндра остается ламинарное течение в пограничном слое. Исследования И. М. Михеева и др. позволяют рекомендовать для расчета средней интенсивности теплообмена горизонтального цилиндра следующее уравнение

$$\text{Nu}_{ж,d} = 0,5 \text{ Ra}_{ж,d}^{0,25} \varepsilon_T. \quad (7.18)$$

Локальная интенсивность теплообмена по периметру цилиндра исследована недостаточно, поэтому отсутствуют достоверные данные по распределению коэффициентов теплоотдачи по боковой поверхности цилиндра и их зависимости от определяющих параметров.

7.3. Теплоотдача при малых значениях критерия Рэлея

Исследования Л. С. Эйгенсона и др. показали, что для тонких горизонтальных проволочек ($d < 1\text{ мм}$) при малых температурных напорах и высокой вязкости жидкости условия теплообмена весьма своеобразны. Т.к. поверхность проволочек мала, то мал и тепловой поток, передаваемый в жидкость. При этом у поверхности проволочки образуется неподвижный слой нагретой жидкости, а перенос теплоты осуществляется только теплопроводностью. Подобный режим теплообмена назван **пленочным** и обнаруживается при $\text{Ra}_{ж,d} < 10^{-3}$. Для этого режима критерий Нуссельта оказывается постоянным

$$\text{Nu}_{ж,d} = 0,5. \quad (7.19)$$

Пленочный режим теплообмена весьма неустойчив и при $\text{Ra}_{ж,d} > 10^{-3}$ могут возникать конвективные токи, приводящие к разрушению пленки и, соответственно, к увеличению теплоотдачи. Область значений критерия Рэлея $10^{-3} < \text{Ra}_{ж,d} < 10^3$ называют переходной зоной от пленочного режима к развитому ламинарному течению в пограничном слое. Исследования этой области, проведенные М.М. Михеевой, позволяют рекомендовать для расчета средних коэффициентов теплоотдачи уравнение

$$\text{Nu}_m = 1,18 \text{ Ra}_m^{1/8}. \quad (7.20)$$

В качестве определяющего размера в (7.20) для вертикальной стенки используется ее высота, а для горизонтального цилиндра – диаметр.

7.4. Теплоотдача при свободном движении в ограниченном пространстве

Если объем жидкости невелик и в нем располагаются поверхности с различными температурами, отличными от температуры жидкости, то, возникающие у поверхностей течения жидкости, могут тем или иным образом взаимодействовать между собою. Разделить эти течения достаточно трудно и, часто, вообще невозможно. Так, если рассматривать горизонтальные щели,

образованные двумя плоскими поверхностями (рис.7.2), то при более высокой температуре верхней поверхности движение жидкости в щели отсутствует, и перенос теплоты происходит только за счет теплопроводности. Однако, при более высокой температуре нижней поверхности, в щели возникают конвективные токи, обусловленные нагревом жидкости у нижней поверхности и охлаждением у верхней. Этот факт увеличивает, естественно, перенос теплоты между поверхностями. Таким же образом происходит конвекция в зазоре между двумя горизонтальными цилиндрами и между вертикальными плоскостями.

Экспериментальные исследования переноса теплоты в щелях и зазорах при естественной конвекции, проведенные отечественными и зарубежными авторами, показали, что плотность теплового потока в этом случае с достаточной точностью может быть определена по формулам для теплопроводности тел, соответствующей конфигурации, если использовать эквивалентный коэффициент теплопроводности среды, находящейся между поверхностями

$$\lambda_{\text{ЭК}} = \lambda \cdot \varepsilon_{\text{К}}, \quad (7.21)$$

где $\varepsilon_{\text{К}} \geq 1$ – коэффициент, учитывающий дополнительный перенос теплоты за счет естественной конвекции.

Экспериментальные данные по теплопереносу в щелях и зазорах показывают, что, если в качестве определяющей температуры принять $t_m = 0,5(t_1 + t_2)$, то при $Ra_{m,\delta} < 10^3$ интенсивность конвективных токов мала, и

перенос теплоты осуществляется только теплопроводностью, т.е. $\varepsilon_{\text{К}} = 1$. Данные Л. С. Эйгенсона по влиянию естественной конвекции на теплоперенос в щелях и зазорах обобщены следующими зависимостями

$$10^3 \leq Ra_{m,\delta} \leq 10^6 \quad \varepsilon_{\text{К}} = 0,105 Ra_{m,\delta}^{0,3}, \quad (7.22)$$

$$10^6 \leq Ra_{m,\delta} \leq 10^{10} \quad \varepsilon_{\text{К}} = 0,4 Ra_{m,\delta}^{0,2}. \quad (7.23)$$

Однако, по данным М.А. Михеева, приближенность (7.21, 7.22) позволяет для всей области аргумента $Ra_{m,\delta} > 10^3$ рекомендовать единую зависимость

$$\varepsilon_{\text{К}} = 0,18 Ra_{m,\delta}^{0,25}. \quad (7.24)$$

В последнее время проведены исследования и предложены формулы и методики расчета теплообмена при свободном движении в ограниченном объеме для рядов труб, в зазорах тепловыделяющих элементов (ТВЭЛ) ядерных реакторов и в других, практически важных случаях, но рассмотрение данных вопросов выходит за рамки настоящего курса.

Вопросы для самопроверки

1. Какова природа возникновения естественной конвекции?

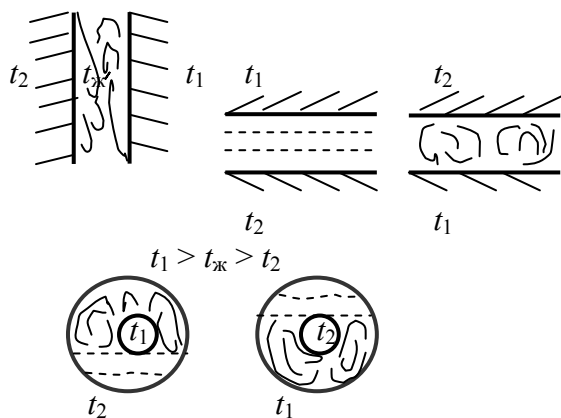


Рисунок 7.2 – Схема переноса теплоты в щелях и зазорах

2. Как можно классифицировать режимы теплообмена при естественной конвекции около вертикальной поверхности? Каков при этом характер течения в пограничном слое?
3. Как изменяется толщина пограничного слоя по высоте плоской стенки при естественной конвекции и ламинарном течении в пограничном слое?
4. Каков характер изменения коэффициента теплоотдачи по высоте плоской стенки при естественной конвекции около ее поверхности?
5. В чем особенности расчета теплообмена при естественной конвекции в случае малых значений критерия Рэлея?
6. Как рассчитать перенос теплоты в зазорах, заполненных неподвижной средой?

Задачи к разделу 7

1. По проводу ($\rho = 0,05 \text{ Ом}\cdot\text{мм}^2/\text{м}$) диаметром 8мм течет ток 90 А. Найти температуру провода, если он находится в спокойном воздухе $t_{\text{в}} = 20^\circ\text{С}$. Как изменится температура провода, если его покрыть изоляцией с $\lambda_{\text{из}} = 0,2 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ толщиной 10мм. Считать, что коэффициент теплоотдачи останется без изменения. Как в действительности изменится коэффициент теплоотдачи?

Комментарий к задаче. Температура провода находится из теплового баланса $q_l = I^2 \rho / s = \alpha \pi d (t_{\text{п}} - t_{\text{в}})$, где s – сечение провода в мм^2 . Коэффициент теплоотдачи при естественной конвекции зависит от разности температуры провод-воздух, которая неизвестна, поэтому следует задаться коэффициентом теплоотдачи в диапазоне 8 – 16 $\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$. Из теплового баланса найти температуру поверхности провода и по (7.20) определить коэффициент теплоотдачи. Учтите, что в (7.20) определяющей температурой принята средняя температура между поверхностью и воздухом. При отличии между найденным коэффициентом теплоотдачи и принятым более 10%, следует сделать расчет второго приближения. Для расчета действительного коэффициента теплоотдачи с поверхности изоляции используйте приведенные выше рекомендации, но учтите, что следует использовать (7.18), а окончание расчета оценить по ошибке в потоках $q_l = I^2 \rho / s = \alpha \pi d_2 (t_{\text{п.из}} - t_{\text{в}})$. Температуру провода найдите из $q_l = I^2 \rho / s = (t_{\text{п}} - t_{\text{в}}) / [\ln(d_2 / d) / (2 \pi \lambda_{\text{из}}) + 1 / (\alpha \pi d_2)]$.

2. Вертикальная стенка высотой 0,5м имеет температуру 120°С и покрыта слоем изоляции $\lambda_{\text{из}} = 0,2 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ толщиной 200мм. Определить средние потери тепла с единицы поверхности стенки, если она находится в спокойном воздухе при $t_{\text{в}} = 30^\circ\text{С}$.

Комментарий к задаче. Для расчета коэффициента теплоотдачи с поверхности изоляции в воздух необходимо иметь температуру поверхности изоляции. Зададимся 3 – 4 значениями $t_{\text{п.из}}$ в пределах 40 – 80°С , по (7.16) найдем коэффициенты теплоотдачи и плотность теплового потока с поверхности изоляции $q' = \alpha (t_{\text{п.из}} - t_{\text{в}})$. Построим график $q' = f(t_{\text{п.из}})$. Плотность теплового потока с поверхности изоляции в воздух должна быть равна плотности теплового потока теплопроводностью через изоляцию, который находится как $q'' = (t_{\text{ст}} - t_{\text{п.из}}) / (\delta / \lambda)$. Построим $q'' = f(t_{\text{п.из}})$. Точка пересечения графиков даст искомую плотность теплового потока и температуру поверхности изоляции.

3. По горизонтальной трубе с диаметрами 75/70 мм течет вода при

средней температуре $t_{\text{в}} = 150^{\circ}\text{C}$, со скоростью 0,4 м/с. Снаружи труба изолирована асбоцементом $\lambda_{\text{из}} = 0,3 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, толщина изоляции 200мм. Найти потери тепла с погонного метра трубы, если она находится в спокойном воздухе $t_{\text{вз}}=20^{\circ}\text{C}$. Термическим сопротивлением стенки трубы пренебречь.

Комментарий к задаче. См. комментарий к задаче 2. Учтите, что погонная плотность теплового потока от воды к поверхности изоляции должна быть записана как $q'_l = (t_{\text{в}} - t_{\text{п.из}}) / [1/(\alpha_1 \pi d_1) + \ln(d_3 / d_2) / (2 \pi \lambda_{\text{из}})]$, а с поверхности изоляции в воздух $q''_l = \alpha_2 \pi d_3 (t_{\text{п.из}} - t_{\text{вз}})$. Для определения коэффициента теплоотдачи следует использовать (7.18).

4. Стальной стержень $\lambda = 30 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ диаметром 20мм, длиной 120мм имеет температуру у основания 120°C и расположен горизонтально в спокойном воздухе $t_{\text{в}} = 20^{\circ}\text{C}$. Найти средний тепловой поток, рассеянный стержнем в воздух.

Комментарий к задаче. Для определения теплового потока следует найти коэффициент теплоотдачи с поверхности стержня в воздух по средней температуре стержня, которая неизвестна. Используйте рекомендации к задаче 1, учтите, что для определения коэффициента теплоотдачи следует использовать (7.18). По принятому коэффициенту теплоотдачи находится характеристика стержня $m = \sqrt{\alpha u / (\lambda f)}$ и средняя температура стержня $\bar{\vartheta} = \vartheta_0 \text{th}(mh) / (mh)$. По средней температуре стержня и (7.18) находится коэффициент теплоотдачи. При отличии принятого и найденного коэффициентов теплоотдачи более 10% следует провести еще одно приближение.

5. В горизонтальной трубе с диаметрами 65/60 мм течет воздух со средней температурой 150°C , скорость воздуха 15 м/с. Определить необходимую толщину изоляции ($\lambda_{\text{из}} = 0,2 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$), чтобы тепловые потери не превышали 100 Вт/м при температуре поверхности изоляции 50°C . Какова при этом температура наружного спокойного воздуха?

Комментарий к задаче. Определить наружный диаметр изоляции можно из $q_l = (t_{\text{в}} - t_{\text{п.из}}) / [1/(\alpha_1 \pi d_1) + \ln(d_3 / d_2) / (2 \pi \lambda_{\text{из}})]$, где α_1 – коэффициент теплоотдачи от воздуха к внутренней поверхности трубы, который определяется по (5.11). Для того чтобы найти температуру наружного воздуха, следует задаться коэффициентом теплоотдачи с поверхности изоляции в воздух (4 – 8 Вт/(м²К)), определить в первом приближении температуру наружного воздуха из $q_l = \alpha_2 \pi d_3 (t_{\text{п.из}} - t_{\text{н.в}})$. По найденной температуре воздуха из (7.18) рассчитать коэффициент теплоотдачи сравнить с принятым. При расхождении в коэффициентах теплоотдачи более 10% сделать еще приближения.

8. ОТДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

8.1. Теплоотдача жидких металлов

Расплавленные металлы применяют в качестве теплоносителей в тех случаях, когда требуется интенсивный теплоотвод при малых температурных напорах или необходимо при низком давлении иметь высокую температуру теплоносителя.

Вода, обеспечивая высокую интенсивность теплоотдачи, имеет низкую

критическую температуру и требует высоких давлений. Газ может быть нагрет до высокой температуры при малом давлении, но интенсивность теплообмена у газовой среды мала. Жидкие металлы имеют высокую критическую температуру, что позволяет получать высокие температуры при низких давлениях, и обеспечивает высокие коэффициенты теплоотдачи. В качестве жидкометаллических теплоносителей применяются щелочные (Na, K, Li), тяжелые (Hg, Pb) металлы и их сплавы.

Основное отличие жидкометаллических теплоносителей состоит в том, что они имеют высокий коэффициент теплопроводности ($40 \div 90 \text{ Вт/(мК)}$) при высокой плотности и сравнительно низкой теплоемкости. Это обстоятельство приводит к весьма низким значениям критерия Прандтля ($Pr = 0,005 \div 0,05$), т.е. к существенному превышению толщины теплового пограничного слоя по сравнению с гидродинамическим пограничным слоем. Если в капельных жидкостях при турбулентном течении основное термическое сопротивление приходится на ламинарный подслой, а в турбулентном пограничном слое температура выравнивается за счет макропереноса теплоты, то в жидких металлах перенос теплоты теплопроводностью может конкурировать с турбулентным переносом теплоты и приводить к большим градиентам температуры в турбулентном пограничном слое.

Численное решение уравнения Лайона при условии равенства турбулентного переноса теплоты и массы позволило получить уравнение для расчета теплообмена при стабилизированном течении жидкометаллических теплоносителей

$$Nu_d = C + 0,025 Re_d^{0,8}, \quad (8.1)$$

где коэффициент C зависит от условий на стенке. При $t_c = \text{const}$ $C = 5$; при $q_c = \text{const}$ $C = 7$.

Двучленность уравнения (8.1) объясняется существенным влиянием радиальной теплопроводности. Тогда, даже при малом значении Re , имеется достаточно высокая интенсивность теплообмена. Уравнение (8.1) получено аналитически и не учитывает многих реальных факторов, определяющих действительный процесс теплоотдачи жидких металлов, в частности, образование оксидной пленки на поверхности стальных труб при взаимодействии с жидким металлом. Экспериментальные исследования теплообмена жидких металлов, проведенные М.А. Михеевым, О.С. Федюкиным и др., обобщены следующей зависимостью для средних коэффициентов теплоотдачи при турбулентном течении

$$Nu_d = (3,3 + 0,014 Re_d^{0,8}) \varepsilon_l, \quad (8.2)$$

где поправка на влияние участка стабилизации потока при $l/d < 20$ $\varepsilon_l = 1,72 (d/l)^{0,18}$.

Теплоотдача при поперечном обтекании пучков труб жидкометаллическими теплоносителями изучена сравнительно мало. По данным В.М. Боришанского и др. средний коэффициент теплоотдачи для глубинных рядов пучка описывается уравнением

$$\text{Nu}_{ж,d} = \text{Pe}_{ж,d}^{0,5}. \quad (8.3)$$

Особый интерес для практики представляет теплоотдача жидких металлов при естественной конвекции. Исследования, проведенные в МЭИ, показали, что в этом случае интенсивность теплообмена существенно сложнее зависит от критерия Прандтля, чем для неметаллических теплоносителей. Обобщение экспериментальных данных привело к уравнению

$$\text{Nu}_m = C \text{Gr}_m^n \text{Pr}_m^k, \quad (8.4)$$

где для ламинарного течения в пограничном слое при $10^2 < \text{Gr}_m < 10^9$ $C = 0,52$, $n = 0,25$; при турбулентном пограничном слое $\text{Gr}_m > 10^9$ $C = 0,105$, $n = 1/3$. Показатель степени при критерии Прандтля определяется по соотношению

$$k = 0,3 + 0,02/\text{Pr}_m^{1/3}. \quad (8.5)$$

Данные Сперроу и др. по теплообмену жидких металлов при естественной конвекции обобщены несколько иными уравнениями:

$$\text{для ламинарного течения} \quad \text{Nu}_{ж} = 0,775(\text{Pr}^2 \text{Gr})_{ж}^{0,25}, \quad (8.6)$$

$$\text{для турбулентного течения} \quad \text{Nu}_{ж} = 0,13(\text{Pr}^2 \text{Gr})_{ж}^{1/3}.$$

8.2. Теплообмен при движении газа с высокой скоростью

При движении газа с высокими скоростями процесс переноса теплоты связан с газодинамическими процессами в пограничном слое. Согласно первому закону термодинамики для потока газа

$$(i_1 + w_1^2/2) - (i_2 + w_2^2/2) = Q/G, \quad (8.7)$$

где Q – тепловой поток, переданный между сечениями 1 и 2; G – расход газа. При адиабатном течении $Q = 0$ и увеличение скорости сопровождается падением энтальпии и наоборот. Энтальпией адиабатного торможения называют

$$i_T = i_1 + w_1^2/2, \quad (8.8)$$

а для газов температура адиабатного торможения будет

$$T_T = T + w^2/(2c_p). \quad (8.9)$$

Из термодинамики известно, что скорость звука $c_3 = \sqrt{kRT}$. Тогда (8.9) можно представить в виде

$$T_T = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right), \quad (8.10)$$

где число (критерий) Маха $M = w/c_3$. Из последнего уравнения следует, что отличие термодинамической температуры (T) от температуры адиабатного торможения (T_T) становится существенным при $M > 0,5$. В частности при $k = 1,4$ и $M = 1$ $T_T = 1,2T$, а при $M = 3$ $T_T = 2,8T$.

У поверхности тела вследствие действия сил трения происходит торможение потока, а на самой поверхности $w = 0$ (поток полностью заторможен). При этом согласно (8.10) температура потока повышается до температуры адиабатного торможения. В потоке у стенки как бы действуют внутренние источники тепла, мощность которых пропорциональна квадрату

скорости потока. В реальных условиях процесс преобразования энергии при торможении у стенки сопровождается обменом теплотой (и работой) смежных слоев газа. Это приводит к отличию реальной температуры газа у стенки от адиабатной. Температуру заторможенного реального потока у стенки называют **собственной температурой** и определяют из соотношения

$$T_{\text{соб}} = T \left(1 + r \frac{k-1}{2} M^2 \right), \quad (8.11)$$

где r – коэффициент восстановления. Если выделение теплоты за счет диссипации механической энергии преобладает над отводом теплоты, то $r > 1$. При $r < 1$ преобладают процессы отвода теплоты.

В случае, когда $T_{\text{ст}} = T_{\text{соб}}$, тепловой поток у стенки равен нулю и теплообмен происходит только внутри газа (рис.8.1). При этом касательная к распределению температуры нормальна к поверхности тела. Если $T_{\text{ст}} > T_{\text{соб}}$, $(\partial T / \partial n)_{n=0} < 0$ и $q > 0$, т.е. поток направлен от стенки в газ. При $T_{\text{ст}} < T_{\text{соб}}$ тепловой поток направлен от газа к стенке даже в случае $T < T_{\text{ст}}$. Т.е. газ с термодинамической температурой меньше, чем температура стенки (газ холоднее стенки) нагревает стенку.

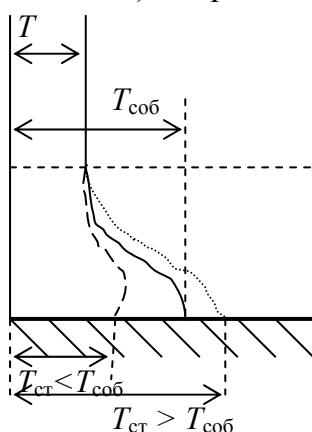


Рисунок 8.1 – Распределение температуры в пограничном слое при торможении потока газа

Таким образом, при $T > T_{\text{ст}}$ тепловой поток направлен всегда в сторону стенки (при любых скоростях потока). Однако, при $T \leq T_{\text{ст}}$ тело будет получать теплоту от газа в результате эффекта аэродинамического нагрева пограничного слоя при $T_{\text{ст}} < T_{\text{соб}}$. Только при $T_{\text{ст}} > T_{\text{соб}}$ тепловой поток направлен от стенки в газ. Тогда, очевидно, закон Ньютона следует записать в виде

$$q = \alpha (t_{\text{соб}} - t_{\text{ст}}). \quad (8.12)$$

Экспериментальные исследования теплообмена при высоких скоростях воздуха показали, что для расчета коэффициентов теплоотдачи можно использовать те же критериальные уравнения, что и для обычных скоростей, но с

использованием дополнительного множителя, учитывающего эффект торможения потока

$$\varepsilon_{\text{тор}} = (T/T_{\text{ст}})^{0,4}. \quad (8.13)$$

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит особенность теплообмена жидких металлов, по сравнению с другими средами?
2. Что такое «температура торможения»? Чем она отличается от «собственной температуры»?

9. ТЕПЛООБМЕН ПРИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ

Фазовые превращения (конденсация или кипение) могут происходить как в среде одного вещества (чистого вещества), так и в многокомпонентной среде.

В последнем случае процесс теплообмена осложняется процессом массопереноса и сопровождающими последний процессами диффузии. В настоящем разделе рассматриваются фазовые превращения чистого вещества.

9.1. ТЕПЛООБМЕН ПРИ КОНДЕНСАЦИИ ЧИСТЫХ ПАРОВ

При конденсации пара происходит выделение теплоты фазового перехода, поэтому данный процесс неразрывно связан с теплообменом. Конденсация может происходить как в объеме пара, так и на охлаждаемой поверхности. В первом случае процесс происходит при значительном переохлаждении пара (визуализация треков элементарных частиц в камере Вильсона), второй случай, как наиболее часто встречающийся в промышленных условиях, и рассматривается в настоящем разделе.

Конденсация насыщенного или перегретого пара на поверхности происходит только в том случае, когда температура поверхности ниже температуры насыщения при данном давлении пара. При этом на поверхности может образоваться пленка конденсата (**пленочный режим**) или поверхность покрывается отдельными каплями конденсата (**капельный режим**). В первом случае жидкость смачивает поверхность конденсации, а во втором – нет. Эффект смачивания связан с действием сил поверхностного натяжения, которые проявляются в поверхностном (капиллярном) слое на расстоянии действия межмолекулярных сил и стремятся сократить поверхность раздела фаз. Сила, отнесенная к единице длины какого-либо контура на границе раздела фаз, направленная по касательной к межфазной поверхности и нормально к контуру, называется **коэффициентом поверхностного натяжения**. Наличие поверхностного натяжения приводит к искривлению поверхности жидкости при соприкосновении трех тел: жидкости, пара и стенки. Состояние равновесия в точке *A* (рис. 9.1) твердой поверхности на границе раздела трех сред определяется из уравнения

$$\sigma(c, p) = \sigma(j, c) + \sigma(j, p) \cdot \cos(\varphi) \quad , \quad (9.1)$$

или

$$\cos(\varphi) = \frac{\sigma(c, p) - \sigma(j, c)}{\sigma(j, p)} \quad (9.2)$$

где φ - краевой угол смачивания. Если $\varphi < 90^\circ$ [$\sigma(c, p) > \sigma(j, c)$], то жидкость смачивает стенку. В пределе, когда $\sigma(c, p) > [\sigma(j, c) + \sigma(c, p)]$, жидкость абсолютно смачивает стенку ($\varphi = 0$), растекаясь по ней. Паровая среда со стенкой не контактирует. Если $\sigma(j, p) < |\sigma(c, p) - \sigma(j, c)|$ и $\sigma(j, c) > \sigma(c, p)$, то имеет место случай абсолютно не смачиваемой поверхности (гидрофобной – для воды) и $\varphi = 180^\circ$. При этом жидкость не контактирует с поверхностью (между жидкостью и поверхностью имеется микронный слой пара).

Реально существуют частично смачиваемые ($0 < \varphi < 90^\circ$) и частично не смачиваемые ($90^\circ < \varphi < 180^\circ$) поверхности. При пленочной конденсации пара на смачиваемой поверхности общее термическое сопротивление переносу теплоты от пара t_n к стенке t_c складывается из (рис.9.2) термического

сопротивления пленки конденсата $\Delta t_{пл}$ и термического сопротивления фазового перехода $\Delta t_{ф.п.}$.



Рисунок 9.1 – Силы поверхностного натяжения на границе трех фаз

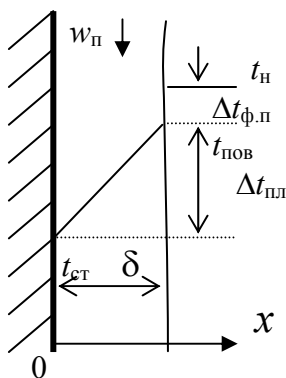


Рисунок 9.2 – Распределение температуры по пленке конденсата.

Последнее связано с тем фактором, что вблизи поверхности конденсата (на расстоянии порядка длины свободного пробега молекулы) существует два потока молекул: один направлен к поверхности конденсата и средняя скорость его молекул соответствует $t_{н}$, второй направлен в сторону пара и средняя скорость молекул этого потока соответствует $t_{пов}$. Очевидно, что эта разность температуры тем больше, чем больше длина свободного пробега молекул, т.е. чем меньше давление пара. В практических расчетах при $P_n \geq 0,01$ бар сопротивлением фазового перехода можно пренебречь, и считать, что температура поверхности пленки конденсата равна температуре насыщения.

Термическое сопротивление пленки конденсата зависит от характера ее течения. Поперек пленки, текущей ламинарно, перенос теплоты осуществляется только теплопроводностью, тогда как при турбулентном течении пленки следует учитывать и турбулентный перенос тепла.

Если записать критерий Рейнольдса для пленки конденсата, с учетом ее эквивалентного диаметра, то $d_{эк} = 4f/u = 4L\delta/L = 4\delta$, $Re = 4\bar{w}\delta/\nu$, и при $Re < Re_{кр}$ ($Re_{кр}=1600$) имеет место ламинарное течение пленки конденсата.

9.1.1. Теплообмен при конденсации насыщенного пара на вертикальной поверхности

Рассмотрим вертикальную, плоскую стенку (рис.9.3) высотой h , имеющую постоянную температуру $t_{ст} < t_{н}$. Расположим ось x вдоль поверхности, ось y – нормально к поверхности. Начало координат поместим на верхнем крае стенки. Будем считать пар сухим, насыщенным.

Примем допущения:

- силы инерции в пленке конденсата малы, и ими можно пренебречь;
- конвективный перенос теплоты в пленке конденсата и теплопроводность по оси x не учитываются;
- трение на границе паровой и жидкой фазы отсутствует;
- температура внешней границы пленки конденсата равна температуре насыщения;
- физические параметры конденсата не зависят от температуры;
- силы поверхностного натяжения на внешней границе пленки не влияют

на характер ее течения;

- плотность пара мала, по сравнению с плотностью конденсата.

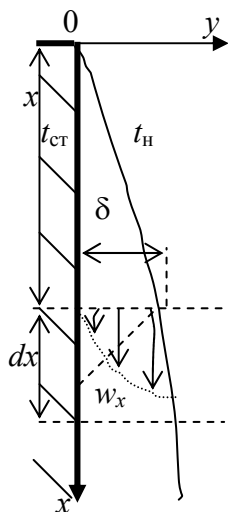


Рисунок 9.3 – Пленка конденсата на вертикальной стенке

Пусть на координате x от начала стенки толщина пленки конденсата δ . Пренебрегая теплотой переохлаждения конденсата, можно считать, что отведенный от пара тепловой поток

$$Q = r \cdot G, \quad (9.3)$$

где G – количество пара, сконденсировавшегося на стенке от ее начала до координаты x . По уравнению непрерывности $G = \rho' \bar{w} L \delta$, а поверхность переноса теплоты $F = Lx$. Тогда из (9.3) получим

$$\bar{w} \delta = G / (r \rho') = \alpha \Delta t x / (r \rho'),$$

и критерий Рейнольдса приобретает вид

$$Re = \frac{4 \alpha \Delta t x}{r \rho' \nu}. \quad (9.4)$$

Таким образом, при конденсации пара критерий Рейнольдса, помимо роли гидродинамического критерия, играет роль определяемого критерия.

Учитывая сделанные выше допущения, уравнения энергии и движения для пленки конденсата запишутся в виде

$$d^2 t / dy^2 = 0, \quad (9.5)$$

$$\mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} = -\rho' g. \quad (9.6)$$

Граничные условия для этих уравнений при тех же допущениях будут:

$$\text{при } y = 0 \quad t = t_{ст}, \quad w_x = 0, \quad (9.7)$$

$$\text{при } y = \delta \quad t = t_n, \quad dw_x / dy = 0.$$

Интегрируя дважды (9.5) и используя (9.7) получим

$$-\frac{dt}{dy} = \frac{t_n - t_{ст}}{\delta}. \quad (9.8)$$

Из уравнения теплоотдачи, используя (9.8), получим

$$\alpha = \frac{-\lambda(dt/dy)}{t_n - t_{ст}} = \frac{\lambda}{\delta}. \quad (9.9)$$

Таким образом, локальный коэффициент теплоотдачи представляет собою величину обратную термическому сопротивлению пленки конденсата.

Определим закон изменения толщины пленки конденсата по высоте стенки, для чего найдем вначале среднюю скорость течения пленки на координате x от начала стенки. Проинтегрируем дважды (9.6) и учтем граничные условия (9.7). Получим

$$w_x = \frac{\rho' g}{\mu} (\delta y - y^2 / 2). \quad (9.10)$$

Среднюю скорость течения пленки конденсата определим по теореме о

среднем

$$\bar{w} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} w_x dy = \frac{\rho' g \delta^2}{3\mu}. \quad (9.11)$$

Количество конденсата, протекающее через поперечное сечение пленки в единицу времени при ширине пленки равной единице, определяется по уравнению непрерывности $G = \rho' \bar{w} \delta$. Через сечение, лежащее на dx ниже, проходит конденсата больше на $dG = d(\rho' \bar{w} \delta)$, что вызвано конденсацией пара на поверхности dx . Считая, что при конденсации отводится только теплота фазового перехода, получим, с учетом (9.9)

$$dG = \frac{dQ}{r} = \frac{q dx}{r} = \frac{\alpha(t_n - t_{ct}) dx}{r} = \frac{\lambda(t_n - t_c) dx}{r \delta}. \quad (9.12)$$

Приравнявая полученные выражения для dG с учетом (9.11), проведя дифференцирование, получим дифференциальное уравнение, связывающее толщину пленки конденсата с расстоянием от верхней кромки стенки в виде

$$\frac{r \rho'^2 g}{\lambda \mu} \delta^3 d\delta = (t_n - t_{ct}) dx. \quad (9.13)$$

Интегрируя (9.13) и, учитывая, что $t_{ct} = \text{const}$, а при $x = 0$ $\delta = 0$, получим

$$\delta = \sqrt[4]{\frac{4\lambda\mu(t_n - t_{ct})x}{r\rho'^2 g}}. \quad (9.14)$$

Из (9.14) следует, что толщина пленки конденсата пропорциональна расстоянию от верхней кромки стенки в виде $\delta = c \cdot x^{0,25}$. Подставив (9.14) в (9.9), получим

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{r\rho'^2 g \lambda^3}{4\mu(t_n - t_{ct})x}} \quad (9.15)$$

Полученное выражение для локальных коэффициентов теплоотдачи показывает, что с увеличением расстояния от верхней кромки пластины (при постоянной разности температуры) интенсивность теплообмена уменьшается как $\alpha = c \cdot x^{-0,25}$. Подобное влияние, как на коэффициент теплоотдачи, так и на толщину пленки конденсата, оказывает и изменение температурного напора. Однако если при постоянном температурном напоре плотность теплового потока уменьшается по мере увеличения координаты x , то при изменяющемся температурном напоре $q = c \cdot \Delta t^{0,75}$, и, следовательно, при увеличении температурного напора по координате x плотность теплового потока также увеличивается.

Среднее значение коэффициента теплоотдачи можно получить из (9.15) по (4.11). В итоге

$$\bar{\alpha}_N = \frac{4}{3} \alpha_h = 0,943 \sqrt[4]{\frac{r\rho'^2 g \lambda^3}{\mu \Delta t h}}. \quad (9.16)$$

Это уравнение впервые было получено Нуссельтом. Принятые выше допущения делают решение Нуссельта приближенным. Более точные решения

показывают, что при больших температурных напорах и в около критической области интенсивность теплообмена существенно выше, чем по решению Нуссельта. При конденсации паров жидких металлов интенсивность теплоотдачи существенно ниже, чем по решению Нуссельта.

Влияние переменности теплофизических характеристик конденсата по толщине пленки можно учесть по рекомендации Лабунцова в виде

$$\varepsilon_T = \left[\left(\frac{\lambda_{ст}}{\lambda_H} \right)^3 \frac{\mu_H}{\mu_{ст}} \right]^{1/8}, \quad (9.17)$$

которая по числовым значениям весьма близка к поправке Михеева $\varepsilon_T = (Pr_H/Pr_{ст})^{0,25}$.

Экспериментальные данные по характеру течения ламинарной пленки конденсата по вертикальной поверхности показывают, что при $Re > 80$ на поверхности пленки появляются устойчивые волны, приводящие к уменьшению средней толщины пленки конденсата и, как следствие, к увеличению интенсивности переноса теплоты. По опытным данным учет волнового движения пленки конденсата может быть проведен с помощью комплекса

$$\varepsilon_v = Re^{0,04}. \quad (9.18)$$

Тогда средний коэффициент теплоотдачи при конденсации пара на вертикальной поверхности может определяться по уравнению

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_N \varepsilon_T \varepsilon_v, \quad (9.19)$$

где $\bar{\alpha}_N$ - средний коэффициент теплоотдачи по решению Нуссельта.

Приведя к безразмерному виду (9.19) и учитывая (9.4), получим

$$Re_{н,h} = 3,8 Z_{н,h}^{0,78} \varepsilon_T, \quad (9.20)$$

где $Z = Ga^{1/3} \frac{\lambda \Delta t}{r \rho' \nu}$, $Ga = \frac{g h^3}{\nu^2}$.

Для практических расчетов конденсации водяного пара, как наиболее распространенного энергетического теплоносителя, критерий Рейнольдса представляется в виде

$$Re = \alpha \Delta t h \frac{4}{r \rho' \nu} = \alpha \Delta t h B, \quad (9.21)$$

где комплекс B является функцией только температуры насыщения и для воды табулирован (см. табл. П.6). Аналогично переменная Z представляется в виде

$$Z = \Delta t h \left[\left(\frac{g}{\nu^2} \right)^{1/3} \frac{\lambda}{r \rho' \nu} \right] = \Delta t h A, \quad (9.22)$$

где комплекс A также является функцией только температуры насыщения и для воды табулирован (см. табл. П.6).

При конденсации пара на достаточно высоких стенках (или длинных вертикальных трубах) на их нижней части может произойти переход ламинарного течения пленки конденсата в турбулентное (при $Re > 1600$). При

этом на верхней части поверхности течение остается ламинарным. В этих условиях средний по высоте коэффициент теплоотдачи можно найти из уравнения

$$\text{Re}_{n,h} = \left[253 + 0,069 \text{Pr}_n^{0,5} (\text{Pr}_n / \text{Pr}_{ct})^{0,25} (Z - 2300) \right]^{4/3} \quad (9.23)$$

Первое слагаемое правой части (9.23) учитывает среднее значение коэффициента теплоотдачи ламинарной пленки при $Z_{кр} = 2300$. Второе – теплообмен при турбулентном течении пленки конденсата.

В некоторых задачах конденсации пара на вертикальной поверхности в качестве независимой переменной задается плотность теплового потока на поверхности. Тогда, учитывая, что $q = \alpha \Delta t$, критерий Рейнольдса $\text{Re} = q h B$ является известной величиной. При $\text{Re} < 1600$ течение пленки конденсата является ламинарным, и из (9.20) путем последовательных приближений можно определить Δt и искомый коэффициент теплоотдачи. При $\text{Re} > 1600$ и смешанном течении пленки конденсата, из (9.23) можно получить соотношение

$$\frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{v^2}{g} \right)^{1/3} = \frac{\text{Re}}{2300 + 14,5 \text{Pr}_n^{-0,5} (\text{Re}^{3/4} - 253) (\text{Pr}_n / \text{Pr}_{ct})^{0,25}}, \quad (9.24)$$

из которого также последовательными приближениями можно определить искомый коэффициент теплоотдачи.

9.1.2. Пленочная конденсация на горизонтальной трубке

При тех же упрощающих допущениях, как и в случае вертикальной поверхности, и, считая, что ось x совпадает с направлением течения пленки конденсата, коэффициент теплоотдачи для наклонной поверхности (под углом φ к направлению силы тяжести) должен определяться по проекции ускорения силы тяжести $g_x = g \cos(\varphi)$. Тогда коэффициент теплоотдачи получается в виде $\alpha_\varphi = \bar{\alpha}_N \cos(\varphi)^{0,25}$, где $\bar{\alpha}_N$ - коэффициент теплоотдачи для вертикальной поверхности по решению Нуссельта.

Для криволинейной поверхности, в частности для горизонтальной трубки, угол φ является переменной величиной. Учитывая этот факт, Нуссельтом было получено решение для конденсации на горизонтальной трубке в виде

$$\bar{\alpha}_N = 0,728 \sqrt[4]{\frac{r \lambda^3 g \rho'^2}{\mu \Delta t d}}. \quad (9.25)$$

Это решение отличается от решения для вертикальной поверхности только постоянным коэффициентом. По некоторым данным для случая $q = \text{const}$ постоянная перед корнем равна 0,693.

Преобразовав (9.25) к виду, подобному (9.20), и введя вместо диаметра трубки путь течения пленки конденсата (πR), получим уравнение

$$\text{Re} = 3,25 Z^{0,75} \varepsilon_T, \quad (9.26)$$

где $\text{Re} = \alpha \Delta t \pi R B$, $Z = \Delta t \pi R A$.

В последнем уравнении отсутствует поправка на волновой характер движения пленки конденсата, т.к. на поверхности горизонтального цилиндра в

силу малой толщины пленки конденсата волновое течение не успевает развиться.

9.1.3. Конденсация движущегося пара на горизонтальной трубке и пучке труб

Экспериментальные исследования показали, что при $\rho'' w^2 < 1$ влиянием кинетической энергии парового потока на толщину пленки конденсата (и на интенсивность теплообмена) можно пренебречь, и теплообмен следует рассчитывать по зависимостям для неподвижного пара. При больших скоростях происходит сдвиг пленки конденсата с горизонтальной трубки и, как следствие, увеличение интенсивности теплообмена. Оценка этого влияния различна у разных исследователей. Остановимся на рекомендациях Л.Д. Бермана, согласно которым среднее значение коэффициента теплоотдачи при конденсации движущегося пара на горизонтальной трубке может быть найдено из уравнения

$$\text{Nu}_{n,d} = 0,72 D \text{Re}_{\Pi}^{0,16} \text{Re}_k^{-0,125} \text{Ga}_n^{0,045} (\mu_n / \mu_{\text{ст}})^{0,08}, \quad (9.27)$$

где $\text{Nu}_{n,d} = \alpha d / \lambda$, $\text{Re}_{\Pi} = w_{\Pi} d / \nu''$, $\text{Re}_k = \lambda \Delta t / (r \rho' \nu')$, $\text{Ga}_n = g d^3 / \nu'^2$.

При конденсации водяного пара коэффициент $D = 42$.

Из (9.27) следует, что коэффициент теплоотдачи уменьшается с ростом температурного напора как $\alpha = c \Delta t^{-0,125}$, тогда, как для неподвижного пара из (9.15) $\alpha = c_1 \Delta t^{-0,25}$.

Теплообменные аппараты, в которых происходит конденсация пара, как правило, выполняются из горизонтальных труб, собранных в пучки (коридорный или шахматный). В этом случае процесс конденсации пара протекает иначе, чем на единичной трубке, т.к. по глубине пучка уменьшается скорость парового потока из-за конденсации пара, а конденсат, образовавшийся на верхних рядах труб, стекает на нижние, увеличивая тем самым толщину пленки конденсата. Влияние последнего фактора для n -го ряда труб можно учесть с помощью соотношения

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_1} = \left(\sum_{i=1}^n G_i / G_n \right)^{-0,07}, \quad (9.28)$$

где α_n и α_1 соответственно коэффициенты теплоотдачи n -го и первого ряда труб, G_i – количество конденсата, образовавшееся на i -ой трубке пучка.

Полагая, что температурный напор и давление пара по глубине пучка остаются постоянными, Л.Д. Берманом было получено приближенное соотношение для определения среднего по пучку коэффициента теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = \alpha_1 \frac{0,84 \varepsilon}{[1 - (1 - \varepsilon)^{0,84}] n^{0,07}}, \quad (9.29)$$

где $\varepsilon = (G_{\text{вх}} - G_{\text{вых}}) / G_{\text{вх}}$ – степень конденсации пара, n – количество рядов труб.

Таким образом, с помощью (9.28) можно последовательно рассчитать теплообмен по глубине пучка труб, при этом коэффициент теплоотдачи для каждого ряда труб следует определять с учетом изменения скорости пара из-за

конденсации, а затем использовать (9.28) для оценки поправки на влияние конденсата, стекающего с верхних рядов труб.

9.1.4. Теплообмен при капельной конденсации пара

Капельная конденсация возникает на не смачиваемой поверхности (для воды – на гидрофобной поверхности). При этом поверхность конденсации покрывается отдельными каплями конденсата, которые спонтанно возникают на поверхности, растут в объеме за счет конденсации пара на поверхности капли до тех пор, пока не скатываются с поверхности под действием силы тяжести. По мере роста капли могут сливаться при соприкосновении. Поэтому, строго говоря, процесс капельной конденсации не является стационарным процессом, но, если рассматривать усредненные во времени характеристики процесса, то процесс капельной конденсации можно считать квазистационарным процессом.

В связи с тем, что на криволинейной поверхности раздела фаз (поверхности капли) возникает дополнительное давление, обусловленное силами поверхностного натяжения, которое по Лапласу для сферической капли имеет вид

$$P_{\text{ж}} = P_{\text{н}} + 2\sigma/R, \quad (9.30)$$

где $P_{\text{ж}}$, $P_{\text{н}}$ – давление жидкости в капле и давление пара (насыщения), σ – коэффициент поверхностного натяжения, R – радиус капли, при фиксированной температуре стенки могут образовываться и существовать только капли с радиусом, большим, чем критический (по Томпсону)

$$R_{\text{кр}} = \frac{2\sigma T_{\text{н}}}{r\rho'(T_{\text{н}} - T_{\text{ст}})}. \quad (9.31)$$

При капельной конденсации, наряду с каплями конденсата, на поверхности образуется очень тонкая (порядка действия межмолекулярных сил $\approx 1\mu\text{м}$) пленка конденсата. Пленка эта неустойчива, периодически разрывается и под действием сил поверхностного натяжения стягивается в капли. Таким образом, при капельной конденсации жидкая фаза находится в движении, вызванным действием капиллярных сил на поверхности раздела фаз при переменной температуре. Такое движение называют термокапиллярным, а термокапиллярная движущая сила имеет размерность давления и определяется

$$P_t = \theta\sigma \text{grad}(t_{\text{н}}), \quad (9.32)$$

где $\theta = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt}$ – температурный коэффициент поверхностного натяжения.

Эти представления о процессе капельной конденсации были использованы В.П. Исаченко при разработке математической модели процесса и обработке экспериментальных данных. В результате получены уравнения для определения средних коэффициентов теплоотдачи при капельной конденсации неподвижного пара

$$\begin{aligned} &\text{при } 8 \cdot 10^{-4} \leq \text{Re}_k < 3,3 \cdot 10^{-3} \\ &\text{Nu} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{Re}_k^{-0,84} \Pi_k^{1,16} \text{Pr}_{\text{н}}^{1/3}, \end{aligned} \quad (9.33)$$

при $3,3 \cdot 10^{-3} \leq Re_k < 1,8 \cdot 10^{-2}$

$$Nu = 5 \cdot 10^{-6} Re_k^{-1,57} \Pi_k^{1,16} Pr_H^{1/3}, \quad (9.34)$$

где $Nu = \frac{\alpha R_{кр}}{\lambda_{ж}}$, $Re_k = \frac{w_k R_{кр}}{\nu'} = \frac{\lambda_{ж}(t_H - t_{ст})}{r \rho' \nu'}$, $\Pi_k = \frac{2\theta \sigma^2 T_H}{r \rho'^2 \nu'^2}$.

Условная скорость роста конденсированной фазы, входящая в критерий Re_k , определяется из условия отвода теплоты фазового перехода теплопроводностью $w_k = \lambda \Delta t / (r \rho' R_{кр})$. Определяющая температура – температура насыщения, определяющий размер – критический радиус капли. Критерий Π_k учитывает влияние термокапиллярного движения на интенсивность теплообмена.

Из приведенных выше уравнений следует, что при заданной разности температуры стенки и пара интенсивность теплообмена зависит только от теплофизических свойств жидкости. Для воды легко построить номограмму зависимости интенсивности теплообмена от температуры насыщения и разности температуры стенка – пар. Из (9.33) следует, что при $Re_k < 3,3 \cdot 10^{-3}$ интенсивность теплообмена $\alpha \approx \Delta t^{0,16}$, а плотность теплового потока $q \approx \Delta t^{1,16}$. Однако, при $Re_k \geq 3,3 \cdot 10^{-3}$ зависимость интенсивности теплообмена и плотности теплового потока от разности температуры между стенкой и паром существенно изменяется $\alpha \approx \Delta t^{-0,57}$, $q \approx \Delta t^{0,43}$. Т.е. при малых температурных напорах интенсивность теплообмена растет с ростом температурного напора, при чем очень незначительно, а при высоких – уменьшается достаточно сильно при увеличении температурного напора. Этот факт можно объяснить следующим образом. При малых температурных напорах скорость конденсации лимитируется необходимостью переохлаждения пара у поверхности. Чем больше переохлаждение пара, тем меньше $R_{кр}$ и, соответственно, больше число центров конденсации, и выше интенсивность теплообмена. Однако с увеличением скорости конденсации увеличивается количество конденсированной фазы, и на интенсивность теплообмена начинает оказывать влияние термическое сопротивление конденсированной фазы (затрудняется доступ пара к поверхности стенки). При $Re_k \geq 3,3 \cdot 10^{-3}$ скорость конденсации, прежде всего, зависит от термического сопротивления образовавшегося конденсата. Происходит своеобразный кризис капельной конденсации.

Опыты с капельной конденсацией пара на пучках горизонтальных труб показали, что влияние стекающей с верхних рядов труб жидкости на интенсивность теплообмена весьма мало, как и мало влияние кривизны поверхности. Поэтому расчет интенсивности теплообмена можно проводить по приведенным выше соотношениям.

На интенсивность капельной конденсации существенное влияние оказывает наличие в паре неконденсирующихся газов.

Вопросы для самопроверки

1. Как связаны процессы фазового перехода и теплообмена?
2. Какие бывают режимы конденсации пара на поверхности, чем они

определяются?

3. Какова роль критерия Рейнольдса при расчете режима течения пленки конденсата по вертикальной поверхности и интенсивности теплообмена?
4. Как изменяется режим течения пленки конденсата на вертикальной поверхности? Особенности течения пленки.
5. Структура критериального уравнения для расчета теплообмена при ламинарном течении пленки конденсата. При смешанном режиме течения на вертикальной поверхности.
6. В чем особенность процесса конденсации на горизонтальных трубах.
7. Структура уравнения для расчета теплообмена при конденсации на трубах. Определяющий размер.
8. Особенности конденсации пара на пучке горизонтальных труб.
9. Влияние скорости движения пара на интенсивность теплообмена при конденсации пара на горизонтальной трубке.
10. Факторы, определяющие капельную конденсацию пара на поверхности. Критический радиус капли.
11. Структура уравнения для расчета теплообмена при капельной конденсации пара. Зависимость интенсивности теплообмена от разности температуры пар-стенка.

Задачи к разделу 9.1

1. На вертикальной трубке диаметром 30мм, высотой 2м конденсируется водяной пар при давлении 1 бар. Определить количество конденсата, образовавшегося на трубке за 1с, если температура поверхности трубки 90°C.

Комментарий к задаче. Используйте (9.20) и уравнение теплового баланса в виде $Q = Gr = \alpha \pi d l (t_n - t_{ст})$.

2. Как повлияет на интенсивность теплообмена и количество образовавшегося конденсата по условиям задачи 1 увеличение высоты трубки до 4м, а до 6м?

Комментарий к задаче. Если $Z = \alpha \Delta t h A \leq 2300$ используйте (9.20), иначе (9.23) и уравнение теплового баланса.

3. Как изменится количество конденсата, если трубку расположить горизонтально, а условия конденсации соответствуют задаче 1?

Комментарий к задаче. Используйте (9.26) и уравнение теплового баланса.

4. Как изменится количество конденсата по предыдущей задаче, если пар движется сверху вниз со скоростью 5 м/с?

Комментарий к задаче. Оцените влияние кинетической энергии пара и используйте либо (9.26), либо (9.27) и уравнение теплового баланса.

5. Как изменится количество конденсата, если трубку покрыть гидрофобным слоем, а прочие условия оставить без изменения (как для неподвижного пара)?

Комментарий к задаче. Используйте (9.33) или (9.34) в зависимости от Re_k и уравнение теплового баланса. Приблизительно $\theta \approx \frac{1}{\sigma} \frac{|\Delta\sigma|}{\Delta t}$ по табл. П4.

9.2. ТЕПЛОБМЕН ПРИ КИПЕНИИ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ

9.2.1. Механизм процесса теплообмена и режимы кипения

Процесс кипения чистой жидкости возможен в диапазоне от тройной точки до критического состояния. При кипении происходит поглощение теплоты фазового перехода, т.е. процесс кипения, как и процесс конденсации, неразрывно связан с процессом теплообмена.

Различают кипение на твердой поверхности, к которой извне подводится теплота, и кипение в объеме жидкости. В последнем случае паровая фаза возникает спонтанно по всему объему жидкости. Такой процесс происходит при значительном перегреве жидкости относительно температуры насыщения, что чаще всего имеет место при резком сбросе давления. Этот случай редко встречается в практике и поэтому далее не рассматривается.

При кипении жидкости у твердой поверхности необходимо наличие двух условий: перегрев жидкости у поверхности и наличие центров парообразования. Последними могут быть различные микро неровности поверхности, которые облегчают появление паровых пузырьков. Процесс кипения, при котором на поверхности пар образуется в виде отдельных пузырьков, растущих с течением времени и периодически отрывающихся от поверхности, называется **пузырьковым режимом** кипения. По мере роста количества пузырьков пара отдельные пузырьки пара могут сливаться, образуя у поверхности паровую пленку, которая периодически отрывается от поверхности. Такой режим кипения называют **пленочным режимом** кипения.

При пузырьковом режиме кипения основной поток теплоты от стенки отводится жидкой фазой, т.к. ее теплопроводность существенно выше, чем паровой фазы. Поэтому, как и в случае конвекции однофазной жидкости, основным термическим сопротивлением является сопротивление пограничного слоя жидкости. Однако, периодическое возникновение, рост и отрыв пузырьков пара приводит к существенной турбулизации пограничного слоя, что, в свою очередь, приводит к значительному увеличению теплоотдачи.

9.2.2. Минимальный радиус парового пузырька

Для возникновения и существования в окружении жидкости парового пузырька, необходимо, чтобы суммарное давление в нем было не меньше суммы сил, действующих на него. В момент образования пузырька на него действуют две силы: давление жидкости и поверхностное натяжение на поверхности раздела фаз. Условие равновесия этих сил определяется уравнением Лапласа

$$\Delta P = P_1 - P = 2\sigma/R_k, \quad (9.35)$$

где R_k – минимальный или критический радиус пузырька.

Как указывалось выше, образование пузырька возможно только в том случае, если жидкость у поверхности перегрета относительно температуры

насыщения, т.е. имеется разность температуры $\Delta t = T_{\text{ж}} - T_{\text{н}}$. Тогда разность давлений, обусловленная этой разностью температуры

$$\Delta P = P' \cdot \Delta T. \quad (9.36)$$

Если учесть зависимость давления от кривизны поверхности пузырька пара, получается

$$\Delta P = P' \cdot \Delta T \cdot (\rho' - \rho'') / \rho'. \quad (9.37)$$

Производная от давления по температуре на кривой насыщения определяется по уравнению Клапейрона – Клаузиуса

$$P' = \frac{r \rho'' \rho'}{T_{\text{н}} (\rho' - \rho'')}. \quad (9.38)$$

Из (9.35) с учетом (9.37) и (9.38) находится критический радиус парового пузырька

$$R_k = \frac{2 \sigma T_{\text{н}}}{r \rho'' (T_{\text{ж}} - T_{\text{н}})}. \quad (9.39)$$

Это соотношение аналогично уравнению Томпсона для процесса капельной конденсации, но в знаменателе стоит плотность паровой фазы. При $R < R_k$ паровой пузырек, возникающий на стенке, конденсируется (схлопывается), в противном случае он начинает расти и, в конечном итоге, отрывается от поверхности.

9.2.3. Отрывной диаметр парового пузырька

Зародившийся на поверхности паровой пузырек растет до некоторого диаметра d_0 , при котором он отрывается от поверхности. При статических условиях и в предположении сферичности поверхности пузырька этот диаметр определяется из условия механического равновесия между подъемной силой $g(\rho' - \rho'')V$, стремящейся оторвать пузырек от поверхности, и силой поверхностного натяжения σF , удерживающей его на поверхности. Объем V и поверхность F парового пузырька пропорциональны, соответственно, кубу и квадрату характерного размера δ . Тогда из условия равенства сил

$$\delta = \sqrt{\sigma / [g(\rho' - \rho'')]} \quad (9.40)$$

Эта величина называется «**капиллярная постоянная**» и зависит от рода жидкости и давления.

Если под отрывным диаметром пузырька понимать его эквивалентный диаметр, то на основании (9.40) можно получить

$$d_0 = 0,0208 \Theta \sqrt{\sigma / [g(\rho' - \rho'')]}, \quad (9.41)$$

где Θ - краевой угол смачивания в угловых градусах. Величина отрывного диаметра прямо пропорциональна краевому углу смачивания. С увеличением этого угла смачиваемость поверхности жидкостью ухудшается, и паровой пузырек при отрыве приобретает большие размеры. Для жидкости, не смачивающей поверхность, $\Theta \geq 90^\circ$, это приводит к резкому увеличению поверхности стенки, занятой основаниями растущих пузырьков пара, и, соответственно, уменьшению теплоотдачи.

При движении жидкости у парогенерирующей поверхности на условия отрыва пузырька пара дополнительно оказывает влияние динамический напор потока.

После отрыва от поверхности паровой пузырек движется через жидкость (всплывает). Если температура жидкости меньше температуры насыщения (пара в объеме пузырька), то происходит конденсация пара на поверхности пузырька и уменьшение его размеров вплоть до полной конденсации (схлопывания пузырька). При температуре жидкости выше температуры насыщения по мере движения пузырька происходит испарение жидкости в объем пузырька и увеличение его размера. Опыты показывают, что интенсивность теплообмена между перегретой жидкостью и поверхностью парового пузырька весьма велика ($\approx 2 \cdot 10^5$ Вт/(м²К)). За счет этого происходит интенсивное испарение жидкости в объем пузырька, и при всплывании пузырек существенно увеличивается в размерах.

9.2.4. Зависимость плотности теплового потока от температурного напора и способа обогрева поверхности парообразования (кривая кипения)

При кипении жидкости в неограниченном объеме у нагретой поверхности плотность теплового потока, передаваемого в жидкость от стенки, достаточно сложно зависит от разности температуры стенка-жидкость, что указывает на существенное влияние различных факторов. Характерная кривая кипения чистой однокомпонентной жидкости представлена на рис.9.4. Анализ этой кривой позволяет сделать некоторые выводы.

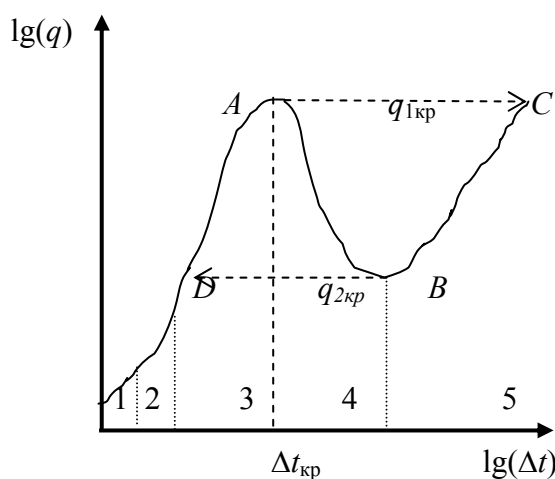


Рисунок 9.4 – Зависимость плотности теплового потока от температурного напора и способа обогрева поверхности

При малых температурных напорах, когда количество центров парообразования сравнительно невелико и турбулизация пограничного слоя мала, интенсивность теплообмена определяется только естественной конвекцией и плотность теплового потока зависит от разности температуры как $\Delta t^{1,25}$. Зона 1 рис. 9.4. По мере роста температуры поверхности количество центров парообразования увеличивается (R_k уменьшается) и имеет место переходная зона (2).

Область 3 (рис.9.4) соответствует развитому пузырьковому кипению жидкости, когда малому изменению температуры стенки соответствует существенный рост плотности теплового потока. При этом по мере роста температуры стенки скорость роста q замедляется, и плотность теплового потока достигает максимума ($q_{1кр}$) для пузырькового режима кипения (точка A). Дальнейшее поведение кривой кипения зависит от способа обогрева поверхности кипения.

Если обогрев поверхности осуществляется так, что имеется возможность управления ее температурой (например, паровой обогрев с более высокими параметрами пара), то дальнейшее повышение температуры поверхности приводит к уменьшению плотности теплового потока (к снижению интенсивности теплообмена, зона 4). Этот факт объясняется тем, что все большая часть парогенерирующей поверхности покрывается паровой пленкой. Интенсивность переноса теплоты от стенки к паровой среде существенно ниже, чем к жидкой фазе. Зона 4 является переходной зоной от пузырькового кипения к пленочному кипению. Точка *B* соответствует минимуму теплообмена при пленочном режиме кипения.

При дальнейшем увеличении температурного напора плотность теплового потока растет за счет увеличения радиационной составляющей, т.к. зона 5 представляет собою область достаточно высоких температур поверхности (для воды $> 500^{\circ}\text{C}$). Эта зона является областью пленочного режима кипения.

Если обогрев поверхности кипения осуществляется таким образом, что независимой переменной является плотность теплового потока (например, электрический обогрев поверхности), то по достижении максимума теплообмена при пузырьковом кипении (точка *A*) и дальнейшем повышении плотности теплового потока происходит резкий переход в область пленочного режима кипения (точка *C*). При этом температура поверхности резко увеличивается ($\approx 700 \div 900^{\circ}\text{C}$). Если происходит уменьшение теплового потока при электрическом обогреве, а температура поверхности выше, чем в точке *C*, то пленочный режим кипения сохраняется, вплоть до точки *B*, после чего температура поверхности резко уменьшается (точка *D*), а процесс кипения переходит в пузырьковый режим.

Плотность теплового потока, соответствующая точке *A*, называется первой критической плотностью теплового потока $q_{1\text{кр}}$. Она зависит от теплофизических свойств жидкости и давления (температуры насыщения). Минимальная плотность теплового потока при пленочном кипении, соответствующая точке *B*, называется второй критической плотностью теплового потока $q_{2\text{кр}}$. Опыты показывают, что эта величина зависит от давления, рода жидкости, шероховатости поверхности кипения и ряда иных факторов. Н. Зибером показано, что $q_{2\text{кр}}$ пропорциональна скорости всплывания пузырей пара

$$\frac{q_{2\text{кр}}}{r\rho''} = c\sqrt{\sigma g(\rho' - \rho'')/\rho''^2}, \quad (9.42)$$

где постоянная $c = 0,11 \div 0,14$. Это соотношение не учитывает ряда факторов, но, тем не менее, дает результаты, близкие к экспериментальным данным.

9.2.5. Теплоотдача при пузырьковом кипении жидкости в большом объеме

При пузырьковом кипении жидкости в большом объеме на поверхности подвода теплоты возникает большое количество паровых пузырьков различных размеров. Отрыв их от поверхности приводит к нарушению пограничного слоя

жидкости, а всплывающие пузырьки существенно турбулизируют жидкость в объеме. Если в объеме жидкости находится $M_{\text{п}}$ кг пара и, соответственно $M_{\text{ж}}$ кг жидкости, то общий объем смеси составит $V_{\text{см}} = M_{\text{п}}/\rho'' + M_{\text{ж}}/\rho'$. Отношение объема пара к объему смеси называют объемным паросодержанием

$$\varphi = M_{\text{п}} / \rho'' / V_{\text{см}}. \quad (9.43)$$

Если к поверхности кипения F подводится тепловой поток Q и этот поток расходуется на испарение жидкости, то приведенной скоростью парообразования (кипения) называют

$$w_{\text{кип}} = \frac{Q}{F r \rho''} = \frac{q}{r \rho''}. \quad (9.44)$$

Скорость движения пузырьков пара в жидкости выше этой скорости, т.к. площадь сечения, занимаемая паром, меньше общей поверхности нагрева и составляет φF . Тогда

$$w_{\text{п}} = w_{\text{кип}} / \varphi. \quad (9.45)$$

Процесс теплоотдачи при кипении отличается сложностью математического описания, т.к. к дифференциальным уравнениям теплоотдачи добавляется уравнение движения парового пузырька в жидкости

$$d g (\rho' - \rho'') / 3 = c \rho'' w_{\text{п}}^2 / 4, \quad (9.46)$$

и уравнение теплообмена на внутренней поверхности парового пузырька, которое учитывает, что тепловой поток от перегретой жидкости к пару (переданный путем теплопроводности) затрачивается на испарение жидкости и обеспечивает увеличение объема пузырька

$$- \int_F \lambda (dt / dn) dF = r \rho'' d(\pi d^3 / 6) / d\tau. \quad (9.47)$$

Анализ системы дифференциальных уравнений теплоотдачи при пузырьковом кипении в большом объеме методами теории подобия позволил получить обобщенные переменные, характерные для данного процесса

$$K_u = l_* / \delta, \quad K_q = \frac{q \delta}{r \rho'' a' l_*} \frac{\delta}{l_*}, \quad \text{где } \delta - \text{ капиллярная постоянная,}$$

$$l_* = \frac{c_p \rho' \sigma T_n}{(r \rho'')^2} = \frac{R_k}{2} \frac{c_p \Delta t}{r} \frac{\rho'}{\rho''} - \text{ величина, имеющая размерность длины и}$$

пропорциональная критическому радиусу пузырька, которую иногда называют «**приведенный критический радиус**», a' – коэффициент теплопроводности жидкости.

Теплоотдача при развитии пузырькового кипения на погруженных в жидкость поверхностях не зависит от их ориентации, если реализованы условия беспрепятственного отвода пара от поверхности. Это означает, что ускорение силы тяжести не должно оказывать влияние на теплоотдачу, а интенсивность теплообмена определяется, главным образом, интенсивностью пульсации жидкости, вызванной образованием и отрывом паровых пузырьков на поверхности. Условие движения жидкости в объеме (естественная конвекция за счет движения паровых пузырьков или вынужденное движение при $w \leq 12$ м/с)

не оказывают существенного влияния на интенсивность теплообмена. Учитывая автомодельность теплоотдачи относительно сил тяжести, Лабунцовым было получено критериальное уравнение

$$\text{Nu}_* = f(\text{Re}_*, \text{Pr}_j),$$

где $\text{Nu}_* = \alpha l_* / \lambda$, $\text{Re}_* = w_{\text{кип}} l_* / \nu' = q l_* / (r \rho'' \nu')$. Для воды, как наиболее распространенного в энергетике теплоносителя l_* и $l_* / r \rho'' \nu'$ табулированы в зависимости от температуры насыщения (см. табл. П.7).

Обобщение этим же автором опытных данных по теплообмену при пузырьковом кипении различных жидкостей позволило получить следующую зависимость

$$\text{Nu}_* = C \text{Re}_*^n \text{Pr}_j^{1/3} \quad (9.48)$$

где при $\text{Re}_* < 0,01$ $C = 0,0625$, $n = 0,5$;

при $\text{Re}_* \geq 0,01$ $C = 0,125$, $n = 0,65$.

Данная зависимость справедлива при $10^{-5} \leq \text{Re}_* \leq 10^4$; $0,86 \leq \text{Pr}_j \leq 7,6$; $w \leq 7$ м/с.

Для определенного рода жидкости при развитом кипении (область 3) коэффициент теплоотдачи зависит только от тепловой нагрузки и давления. Это позволило М.А. Михееву рекомендовать для расчета теплоотдачи при кипении воды в диапазоне давлений от 1 до 40 бар следующие уравнения

$$\alpha = 3,14 q^{0,7} p^{0,15}, \quad (9.49)$$

$$\alpha = 33,4 \Delta t^{2,33} p^{0,5}.$$

В этих уравнениях размерности q [Вт/м²], p [бар].

Уравнение (9.48) требует задания в качестве независимой переменной плотности теплового потока. Тогда в процессе расчета определяется температура поверхности. Если по условиям задачи известна температура поверхности, а требуется определить плотность теплового потока, то (9.48) можно преобразовать по независимой переменной Δt . Учтя гипотезу Ньютона, получим

$$\text{при } \frac{\lambda \Delta t}{r \rho'' \nu'} \text{Pr}_j^{1/3} \leq 1,6 \quad \text{Nu}_* = 3,91 \cdot 10^{-3} \frac{\lambda}{r \rho'' \nu'} \Delta t \text{Pr}_j^{2/3}, \quad (9.50)$$

$$\text{при } \frac{\lambda \Delta t}{r \rho'' \nu'} \text{Pr}_j^{1/3} > 1,6 \quad \text{Nu}_* = 2,63 \cdot 10^{-3} \left(\frac{\lambda}{r \rho'' \nu'} \Delta t \right)^{1,86} \text{Pr}_j^{0,952}. \quad (9.51)$$

Комплекс $\frac{\lambda}{r \rho'' \nu'}$ зависит только от температуры насыщения, и для воды табулирован (см. табл. П.7).

Уравнения (9.48), (9.50) и (9.51) справедливы только для пузырькового режима кипения, т.е. при $q \leq q_{\text{кр}}$. По данным Лабунцова критическая плотность теплового потока может быть определена из уравнения

$$\text{Re}_{*\text{кр}} = 68 \text{Ar}_*^{4/9} \text{Pr}_j^{-1/3}, \quad (9.52)$$

$$\text{где } Ar_* = \frac{g l_*^3}{\nu'^2} \frac{\rho' - \rho''}{\rho'}, \quad Re_{*кр} = \frac{q_{1кр} l_*}{r \rho'' \nu'}.$$

9.2.5. Теплообмен при кипении жидкости в трубах

Труба или канал представляют собою ограниченную систему, в которой при движении кипящей жидкости происходит увеличение паровой и уменьшение жидкой фазы. Соответственно изменяется и структура потока (рис.9.5). Различают три основные области: I – экономайзерный участок, где температура жидкости в пристеночном слое ниже температуры насыщения; II – участок кипения жидкости; III – участок подсушки пара. На участке испарения жидкой фазы (II) различают области с различным содержанием паровой фазы, что определяет характер течения парожидкостной смеси: 2 – область пристеночного кипения, когда в объеме трубы температура жидкости ниже температуры насыщения; 3 – область пузырькового кипения в объеме; 4 – область снарядного течения, когда паровая фаза концентрируется в средней части трубы в виде достаточно больших пузырей пара, которые движутся со скоростью, большей средней скорости движения смеси; 5 – область стержневого течения, когда центральная часть трубы занята паровой фазой, а кипящая жидкость оттесняется к стенкам трубы.

При течении кипящей жидкости в горизонтальных трубах структура потока несколько изменяется. При снарядном и стержневом течении паровая фаза при малых скоростях течения может занимать верхнюю часть трубы, а нижнюю занимает кипящая жидкость.

Известные характеристики двухфазного потока: массовое расходное паросодержание и объемное расходное паросодержание (соответственно $x = G_{п}/G_{см}$ и $\beta = V_{п}/V_{см}$), существенно влияют на интенсивность теплообмена.

Эти характеристики связаны между собою соотношением $x/(1-x) = (\rho''/\rho') \cdot \beta/(1-\beta)$, откуда следует, что всегда $x < \beta$. В области $0 < x < 0,3$ интенсивность теплообмена самая высокая и достигает $170 \div 200$ кВт/(м²К). Затем она резко падает (в $7 \div 10$ раз) и в дальнейшем практически не зависит от x . Это объясняется рассмотренной выше структурой парожидкостного потока.

В конце стержневого режима и перехода на участок подсушки влажного пара ($x > 0,3$, $\beta > 0,9$) жидкость в потоке содержится в виде капель. При этом стенка трубы омывается не водой, а влажным насыщенным паром, что резко уменьшает интенсивность теплообмена.

В расчете коэффициента теплоотдачи при кипении жидкости в трубах исходят из того факта, что интенсивность теплообмена зависит как от пульсационного характера движения, вызванного кипением жидкости, так и от гидродинамики потока, определяемой скоростью движения жидкости в трубе.

Поэтому используется следующий метод расчета. По закономерностям конвективного теплообмена при движении однофазного потока рассчитывается коэффициент теплоотдачи α_w .

По закономерностям развитого кипения жидкости в неограниченном объеме рассчитывается коэффициент теплоотдачи α_q .

При этом предполагается, что движение жидкости не влияет на теплообмен. Далее используется следующие соотношения

$$\begin{aligned} \text{при } \alpha_q / \alpha_w < 0,5 & \quad \alpha = \alpha_w, \\ \text{при } 0,5 \leq \alpha_q / \alpha_w \leq 2 & \quad \alpha = \alpha_w \frac{4\alpha_w + \alpha_q}{5\alpha_w - \alpha_q}, \quad (9.53) \\ \text{при } 2 < \alpha_q / \alpha_w & \quad \alpha = \alpha_q. \end{aligned}$$

9.2.6. Теплообмен при пленочном режиме кипения

Пленочное кипение наблюдается при закалке металла, в некоторых интенсифицированных перегонных аппаратах, при охлаждении ракетных двигателей и в некоторых иных случаях. При высоком давлении пара, когда плотность пара соизмерима с плотностью кипящей жидкости, интенсивность теплообмена при пленочном режиме достаточно высока и перегрева (пережога) поверхности кипения не происходит, хотя температурный напор сохраняется достаточно

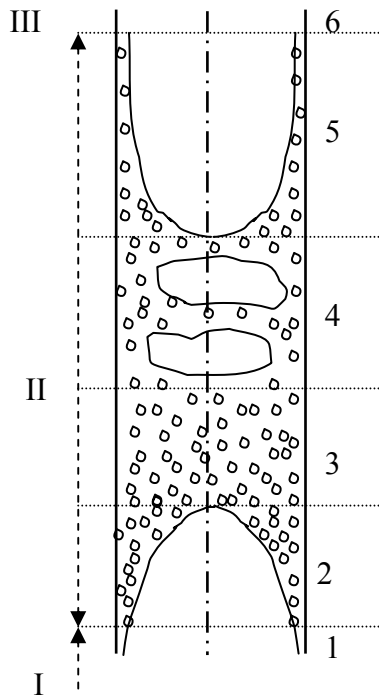


Рисунок 9.5 – Характерные области при кипении движущейся в трубе жидкости

высоким. Это обеспечивает практическое применение пленочного режима кипения.

Пленочное кипение возникает при наличии большого количества центров парообразования, когда отдельные пузырьки пара сливаются, образуя у поверхности сплошной слой пара. Периодически пар с поверхности прорывается в объем жидкости в виде больших пузырей. Через паровую пленку теплота передается не только конвекцией и теплопроводностью, но и излучением. Доля лучистого переноса возрастает по мере увеличения температуры поверхности. Все формы переноса теплоты взаимно влияют друг на друга. Так пар, образующийся за счет лучистого переноса теплоты, увеличивает паровую пленку и уменьшает интенсивность конвективного переноса.

Расчетные данные по теплоотдаче при пленочном кипении жидкости можно получить теоретическим путем, используя ту же физическую модель, что и в теории пленочной конденсации. Соответственно исходная система уравнений будет также идентичной. Отличия в граничных условиях на границе раздела фаз будут

$$\text{при неподвижной жидкости} \quad t = t_n, \quad w = 0; \quad (9.54)$$

$$\text{при движущейся жидкости} \quad t = t_n, \quad (dw/dn)_{\text{гр}} = 0. \quad (9.55)$$

Решение для вертикальной поверхности и горизонтального цилиндра при ламинарном течении паровой пленки имеют одинаковый вид и различаются

постоянными. Характерный размер L принят – высота для пластины и диаметр для цилиндра. Уравнение для расчета коэффициента теплоотдачи имеет вид

$$\alpha = C \sqrt[4]{\frac{\lambda_{\text{п}}^3 r (\rho' - \rho'')}{\nu'' \Delta t L}}, \quad (9.56)$$

где: для пластины при (9.54) $C = 0,667$; при (9.55) $C = 0,943$;
для цилиндра при (9.54) $C = 0,50$; при (9.55) $C = 0,72$.

Лучистая составляющая может быть рассчитана по закономерностям лучистого теплообмена при известной температуре поверхности и пара.

Теплоотдача при пленочном режиме кипения зависит от недогрева жидкости до температуры кипения. Расчеты показывают, что при малом значении комплекса $c_{\text{п}} \Delta t / r$ (т.е. малом перегреве пара в пленке), влияние недогрева мало, а при большом – велико. При этом расчетные зависимости (по данным Е. Сперроу и др.) оказываются достаточно сложными.

Для вертикальной стенки при пленочном кипении более вероятным является турбулентное движение пленки пара. Строгой теории для этого случая пока нет. Экспериментальные данные Лабунцова обобщены зависимостью

$$\text{Nu}_m = 0,25 (\text{Ar} \cdot \text{Pr})_m^{1/3}, \quad (9.57)$$

где определяющей температурой является средняя температура паровой

пленки, критерий Архимеда $\text{Ar} = \frac{g L^3 \rho' - \rho''}{\nu_{\text{п}}^2 \rho'}$. Зависимость справедлива при

$(\text{Ar} \cdot \text{Pr}) > 2 \cdot 10^7$.

Вопросы для самопроверки

1. Как классифицируются режимы кипения чистой жидкости?
2. Что такое «критический радиус парового пузырька», от чего он зависит? Условие существования парового пузырька в жидкости.
3. Нарисуйте и прокомментируйте «кривую кипения». Как зависит вид этой кривой от способа обогрева поверхности кипения?
4. Что определяет первая критическая плотность теплового потока? От чего она зависит?
5. Какова структура критериального уравнения для расчета теплообмена при кипении жидкости в неограниченном объеме при пузырьковом кипении?
6. Применение пленочного режима кипения в практике. Оценка интенсивности теплообмена в этом режиме кипения.
7. Особенности кипения жидкости при движении в трубах. Зоны кипения в зависимости от структуры потока.
8. Расчет теплообмена при кипении движущейся в трубах жидкости.

Задачи к разделу 9.2

1. Определить необходимую поверхность нагрева парогенератора производительностью 2 т/час насыщенного пара при давлении 10 бар, если температура поверхности кипения 190 °С.

Комментарий к задаче. Используйте уравнение теплового баланса в виде $Q = Gr = \alpha (t_{\text{ст}} - t_{\text{п}}) F$. Коэффициент теплоотдачи определяется по (9.50) или (9.51), а

необходимые комплексы по табл. П7.

2. Найти максимальную паропроизводительность этой поверхности при заданном давлении. Какова при этом температура поверхности?

Комментарий к задаче. Максимальная паропроизводительность имеет место при первой критической плотности теплового потока, которая определяется по (9.52). Тогда $G_{\max} = q_{1\text{кр}} F / r$, а коэффициент теплоотдачи находится из (9.48) по $Re_{*1\text{кр}}$. Тогда температура поверхности находится из $q_{1\text{кр}} = \alpha_{\text{кр}} (t_{\text{ст}} - t_{\text{н}})$.

3. Найти паропроизводительность 3 м^2 поверхности кипения при давлении 1 бар, если плотность теплового потока на поверхности составляет $3 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$. Какова температура поверхности?

Комментарий к задаче. Используйте комментарий к предыдущей задаче.

4. В трубке диаметром 18мм движется кипящая вода при давлении 8 бар со скоростью 1 м/с. Определить тепловой поток, передаваемый с погонного метра трубки к воде, и коэффициент теплоотдачи, если температура стенки трубки составляет: 173°C , 175°C , 180°C .

Комментарий к задаче. Для определения α_w используйте (5.11), а для α_q – (9.50) или (9.51). Окончательно коэффициент теплоотдачи определите по (9.53).

10. ТЕПЛОБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ

10.1. Основные понятия

Процесс переноса теплоты с помощью электромагнитных волн называют

Таблица 10.1 – Классификация излучения

Вид излучения	длина волны
Космическое	$< 0,05 \text{ мкм}$
Гамма излучение	$0,05 \div 1 \text{ мкм}$
Рентгеновское излучение	$1 \text{ мкм} \div 20 \text{ мкм}$
Ультрафиолетовое	$20 \text{ мкм} \div 0,4 \text{ мкм}$
Видимый свет	$0,4 \div 0,8 \text{ мкм}$
Инфракрасное излучение	$0,8 \text{ мкм} \div 1 \text{ мм}$
Радиоволны	$> 1 \text{ мм}$

тепловым излучением. При этом на поверхности излучающего тела происходит преобразование внутренней энергии в кванты электромагнитного излучения, а на поверхности тела, поглощающего излучение, происходит обратный процесс – преобразование квантов

электромагнитного излучения во внутреннюю энергию тела. Излучение характеризуется длиной волны (λ) и частотой колебания (ν), связь между которыми: $c = \lambda \cdot \nu$, где c – скорость света в пустоте. Исторически принятая классификация излучения приведена в таблице 10.1 в зависимости от длины волны, хотя природа электромагнитного излучения едина.

Большинство твердых и жидких тел имеют сплошной спектр излучения, т.е. излучают энергию всех длин волн от 0 до ∞ . Однако некоторые тела излучают энергию только определенных длин волн (или диапазонов волн), т.е. имеют селективный спектр излучения. К таким телам относятся чистые металлы и газы. В твердых телах процесс излучения и поглощения происходит в поверхностном слое ($\approx 1 \text{ мкм}$ для проводников и 1 мм для диэлектриков), в газах из-за малой плотности в процессе излучения и поглощения участвует весь объем газа.

10.2. Виды лучистых потоков

Интегральным лучистым потоком называют количество теплоты, излучаемое некоторой поверхностью тела в единицу времени, по всем направлениям (в полупространство), в диапазоне длин волн от 0 до ∞ . Эту величину обозначают Q . Если выделить поток теплоты в диапазоне длин волн от λ до $\lambda+d\lambda$, то получим монохроматический (спектральный, однородный) лучистый поток, обозначаемый Q_λ .

Плотностью интегрального излучения E (излучательной способностью, плотностью собственного излучения) называют интегральный тепловой поток с единицы поверхности тела

$$E = dQ/dF. \quad (10.1)$$

Тогда интегральный лучистый поток находится как

$$Q = \int_F E dF, \quad (10.2)$$

или при $E = \text{const}$

$$Q = E \cdot F. \quad (10.3)$$

Спектральной интенсивностью излучения называют отношение плотности излучения в интервале длин волн от λ до $\lambda+d\lambda$ к этому интервалу

$$J_\lambda = dE/d\lambda. \quad (10.4)$$

Кроме изменения интенсивности излучения по длине волны, она может изменяться по направлению излучения. Тепловой поток, испускаемый в определенном направлении под углом ϕ к направлению нормали, с единицы поверхности, в единице телесного угла называют угловой плотностью излучения

$$E_\phi = \frac{d^2 Q}{dF d\omega} = \frac{dE}{d\omega}, \quad (10.5)$$

тогда

$$dE = E_\phi d\omega. \quad (10.6)$$

10.3. Баланс теплоты падающего излучения

Пусть извне на некоторое тело падает интегральный лучистый поток $Q_{\text{пад}}$.

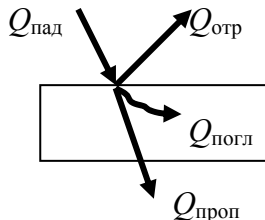


Рисунок 10.1 – Баланс падающего излучения

На поверхности тела часть лучистого потока $Q_{\text{отр}}$ отражается, часть лучистого потока поглощается телом $Q_{\text{погл}}$ и идет на изменение его внутренней энергии, а часть потока $Q_{\text{проп}}$ проходит через тело. Согласно закону сохранения энергии можно записать

$$Q_{\text{пад}} = Q_{\text{отр}} + Q_{\text{погл}} + Q_{\text{проп}}. \quad (10.7)$$

Приведем это уравнение к безразмерному виду, для чего разделим левую и правую части на $Q_{\text{пад}}$.

Получим

$$1 = R + A + D, \quad (10.8)$$

где $R = Q_{\text{отр}}/Q_{\text{пад}}$ – отражательная способность тела ($R = 1$ – абсолютно белое

тело, а если отражение подчиняется законам линейной оптики, то абсолютно зеркальное тело); $A = Q_{\text{погл}} / Q_{\text{пад}}$ – поглощательная способность тела ($A = 1$ – абсолютно черное тело); $D = Q_{\text{проп}} / Q_{\text{пад}}$ – пропускательная способность тела (при $D = 1$ – абсолютно прозрачное, диатермическое тело, при $D = 0$ – не прозрачное тело, т.е. тело, не пропускающее никакого излучения). Для не прозрачного тела уравнение (10.8), очевидно запишется как

$$A + R = 1. \quad (10.9)$$

10.4. Законы излучения абсолютно черного тела

Законы излучения черного тела строго получены в идеальном случае равновесного излучения, когда некоторая замкнутая система состоит из тел с одинаковой температурой, т.е. каждое тело такой системы поглощает и излучает одинаковый тепловой поток. Для черного тела установлены теоретически и подтверждены экспериментально следующие законы излучения.

10.4.1. Закон Планка

Закон Планка устанавливает связь между спектральной интенсивностью излучения длиной волны и температурой тела. Для равновесного излучения черного тела этот закон может быть записан в виде

$$J_{0\lambda} = C_1 / [\lambda^5 (e^{C_2/\lambda T} - 1)], \quad (10.10)$$

где постоянные Планка $C_1 = 0,374 \cdot 10^{-15} [\text{Вт} \cdot \text{м}^2]$, $C_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2} [\text{м} \cdot \text{К}]$.

Закон Планка имеет два предельных случая. Первый имеет место при $\lambda \cdot T \gg C_2$. Тогда показатель при экспоненте мал и, разложив экспоненту в ряд, ограничившись двумя членами разложения, получим соотношение

$$J_{0\lambda} = C_1 T / C_2 \lambda^4, \quad (10.11)$$

называемое законом Рэлея – Джинса. Этот закон указывает, что при любой температуре и $\lambda \rightarrow \infty$ $J_{0\lambda} \rightarrow 0$.

Второй предельный случай соответствует условию $\lambda \cdot T \ll C_2$, т.е. в случае малых длин волн. Тогда показатель степени при экспоненте велик и единицей в знаменателе (10.10) можно пренебречь.

$$J_{0\lambda} = C_1 / (\lambda^5 e^{C_2/\lambda T}). \quad (10.12)$$

Это соотношение называют законом Вина. Приравняв нулю первую производную по длине волны, получим значение длины волны, при котором интенсивность излучения черного тела для данной температуры имеет максимальное значение. Эта длина волны

$$\lambda_{\text{max}} \cdot T = 2898 [\mu\text{м} \cdot \text{К}]. \quad (10.13)$$

При этом максимум спектральной интенсивности излучения

$$J_{0\text{max}} = C_3 T^5, \quad (10.14)$$

где $C_3 = 1,286 \cdot 10^{-5} [\text{Вт}/(\text{м}^3 \text{К}^5)]$.

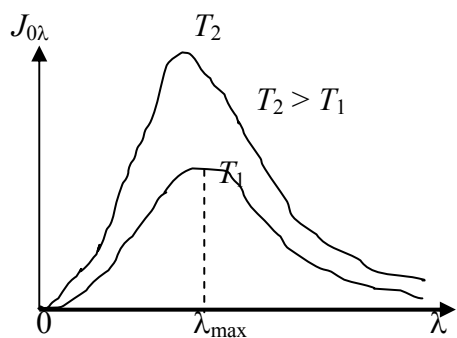


Рисунок 10.2 – Спектр излучения
черного тела.

Таким образом, из (10.13) следует, что при увеличении температуры черного тела максимум спектральной интенсивности излучения смещается в сторону более коротких длин волн. Это обстоятельство называют законом смещения Вина.

10.4.2. Закон Стефана – Больцмана

Этот закон был впервые установлен болгарским физиком Стефаном и, позднее, подтвержден теоретически немецким физиком и математиком Больцманом. Исторически этот закон был сформулирован раньше закона Планка. Закон Стефана – Больцмана устанавливает связь между излучательной способностью черного тела и его температурой. Подставим (10.10) в (10.4) и проинтегрируем по длине волны от 0 до ∞ . Получим

$$E_0 = \int_0^{\infty} J_{0\lambda} d\lambda = \sigma_0 T^4 = C_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4, \quad (10.15)$$

где постоянная Стефана – Больцмана (постоянная излучения черного тела) $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$ или $C_0 = 5,67$ [Вт/(м²К⁴)].

10.5. Серые тела. Закон Кирхгоффа

Абсолютно черные тела в природе практически не встречается (исключения: зрачок глаза, малое отверстие в стенке черного ящика и некоторые подобные тела). Поэтому возникает желание использовать законы излучения черного тела в расчете процесса излучения реальных тел. Серым телом называют тело, у которого спектр излучения подобен спектру излучения черного тела, но спектральная интенсивность излучения меньше, чем черного тела. Условие подобия спектров излучения можно представить в виде

$$\varepsilon_\lambda = J_\lambda / J_{0\lambda} = \text{const}, \quad (10.16)$$

где ε_λ – спектральная степень черноты тела.

Интегральной степенью черноты тела называют отношение излучательной способности тела к излучательной способности черного тела при одинаковой температуре. Тогда

$$\varepsilon = E / E_0, \quad (10.17)$$

где ε – интегральная степень черноты тела.

Для серых тел, используя (10.15) и (10.16), можно легко доказать, что $\varepsilon = \varepsilon_\lambda$, т.е. интегральная и спектральная степени черноты равны.

Из определения интегральной степени черноты следует, что излучательная способность реального тела может быть определена по излучательной способности черного тела в виде

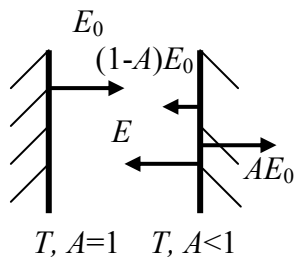


Рисунок 10.3 – Равновесное излучение черного и серого тела

$$E_0 = \varepsilon \cdot E_0 = \varepsilon \cdot C_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4. \quad (10.18)$$

Закон Кирхгоффа устанавливает связь между излучательной и поглощательной способностью серого тела.

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из черного и серого тел (рис.10.3) и находящуюся в равновесии, т.е. температуры тел равны. Известна поглощательная способность серого тела A . Черное тело излучает на серое плотность теплового потока, равную E_0 . На поверхности серого тела часть этого потока поглощается AE_0 . Примем серое тело непрозрачным ($D = 0$). Тогда серое тело отражает с поверхности в направлении черного тела тепловой поток $(1-A)E_0$. Кроме того, в направлении черного тела серое тело излучает плотность собственного излучения E .

Составим тепловой баланс серого тела, учитывая условие равновесия

$$E = A \cdot E_0. \quad (10.19)$$

Составим тепловой баланс черного тела при тех же условиях

$$E_0 = E + (1 - A)E_0. \quad (10.20)$$

Оба эти баланса теплоты приводят к одному и тому же соотношению

$$E/A = E_0, \quad (10.21)$$

которое выражает закон Кирхгоффа: отношение излучательной способности серого тела к его поглощательной способности равно излучательной способности черного тела при той же температуре. Следует отметить, что строго закон Кирхгоффа выполняется только для равновесного излучения. Сопоставив (10.21) с (10.18), получим следствие из закона Кирхгоффа

$$\varepsilon = A, \quad (10.22)$$

т.е. интегральная степень черноты серого тела равна его поглощательной способности.

Т.к. закон Кирхгоффа справедлив только для равновесного излучения, то соотношение (10.22) также строго справедливо только для равновесного излучения серых тел. Для твердых тел это соотношение с достаточной степенью точности выполняется и при неравновесном излучении при условии непрерывности спектра излучения. Для чистых металлов и газов в силу селективности спектра излучения это соотношение не справедливо.

10.6. Эффективный лучистый поток и результирующее излучение

Рассмотрим серое тело, на единицу поверхности которого извне падает лучистый поток $E_{\text{пад}}$ (рис. 10.4). С единицы поверхности тела отражается лучистый поток $E_{\text{отр}} = (1-A)E_{\text{пад}}$. Часть потока теплоты тело поглощает в количестве $E_{\text{погл}} = AE_{\text{пад}}$. В то же время с единицы поверхности тела в среду поступает сумма собственного излучения тела и отраженный поток. Назовем эту сумму «**эффективный лучистый поток**». Тогда $E_{\text{эфф}} = E + E_{\text{отр}}$.

Рассмотрим баланс лучистых потоков, проходящих через плоскость (б-б), проведенную вне тела, бесконечно близко к его поверхности. Через эту плоскость проходит падающее излучение, направленное к поверхности тела, и эффективный поток, направленный от тела. В общем случае эти потоки не равны. Назовем **результующим тепловым потоком** разность между эффективным и падающим потоком.

$$q_{\text{рез}} = E_{\text{эфф}} - E_{\text{пад}} \quad (10.23)$$

Составим баланс теплоты лучистых потоков, проходящих через плоскость (а-а), проведенную внутри тела, бесконечно близко к его поверхности. Через эту плоскость проходит поглощенное излучение и собственное излучение. Очевидно, что в общем случае разность между этими потоками также будет равна плотности результирующего излучения. Тогда

$$q_{\text{рез}} = E - E_{\text{погл}} = E - AE_{\text{пад}} \quad (10.24)$$

Исключим из (10.23) и (10.24) $E_{\text{пад}}$ и воспользуемся законом Кирхгоффа. Получим

$$E_{\text{эфф}} = E_0 + (1 - 1/A) q_{\text{рез}} \quad (10.25)$$

Таким образом, связь между эффективным и результирующим тепловыми потоками устанавливается соотношением (10.25).

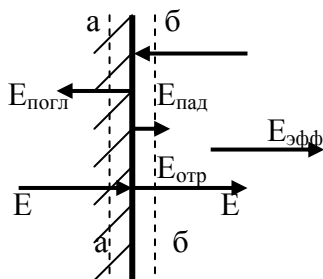


Рисунок 10.4 – Схема лучистых потоков

10.7. Теплообмен излучением двух бесконечных плоскопараллельных пластин

Рассмотрим (рис. 10.5) две бесконечные плоскопараллельные пластины, которые имеют температуры и поглощательные способности соответственно T_1, A_1 и T_2, A_2 . Пусть $T_1 > T_2$. Проведем плоскость (с-с) между этими пластинами. С первой пластины в направлении второй с единицы поверхности направляется лучистый поток $E_{\text{эфф},1}$, со второй на первую – $E_{\text{эфф},2}$.

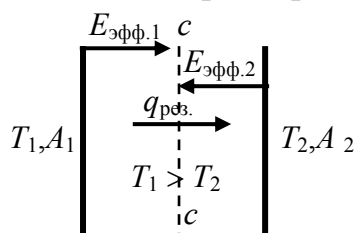


Рисунок 10.5 – Система двух пластин

При неравенстве этих потоков возникает результирующий тепловой поток. В рассматриваемом случае, используя то обстоятельство, что в процессе лучистого теплообмена тела обмениваются эффективными лучистыми потоками, имеем

$$q_{\text{рез}} = E_{\text{эфф},1} - E_{\text{эфф},2} \quad (10.26)$$

Используя (10.25), получим, представив $q_{\text{рез}} = q_{1,2}$. Тогда

$$q_{1,2} = [E_{01} + (1 - 1/A_1) q_{1,2}] - [E_{02} + (1 - 1/A_2) q_{2,1}] \quad (10.27)$$

Учтя, что $q_{1,2} = -q_{2,1}$, разрешим полученное уравнение относительно $q_{1,2}$. Получим, учтя закон Стефана – Больцмана,

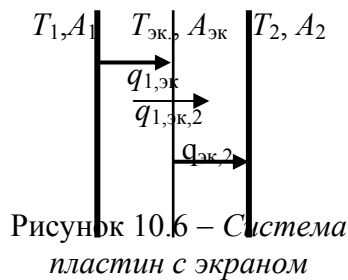
$$q_{1,2} = \frac{C_0[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4]}{1/A_1 + 1/A_2 - 1}. \quad (10.28)$$

Принимая во внимание следствие из закона Кирхгоффа ($A = \varepsilon$) и обозначив приведенную степень черноты системы двух плоских неограниченных пластин

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}, \quad (10.29)$$

получим

$$q_{1,2} = \varepsilon_{\text{пр}} C_0[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4]. \quad (10.30)$$



Для уменьшения результирующего излучения в системе тел обычно применяются экраны. Рассмотрим (рис.10.6) систему двух пластин с известными температурами и поглощающими способностями, между которыми установлен экран с известной поглощательной способностью $A_{\text{эк}}$. Определим плотность результирующего излучения в этой системе тел и температуру экрана. Используя (10.29) и (10.30) запишем результирующий тепловой поток от первой пластины к экрану. Получим:

$$q_{1,\text{эк}} = \varepsilon_{\text{пр1}} C_0[(T_1/100)^4 - (T_{\text{эк}}/100)^4]. \quad (a)$$

Тепловой поток от экрана ко второй пластине запишется аналогично

$$q_{\text{эк},2} = \varepsilon_{\text{пр2}} C_0[(T_{\text{эк}}/100)^4 - (T_2/100)^4]. \quad (б)$$

В стационарном случае переноса теплоты эти потоки должны быть равны. Приравняв (а) и (б), найдем искомую температуру экрана

$$(T_{\text{эк}}/100)^4 = \frac{\varepsilon_{\text{пр1}}(T_1/100)^4 + \varepsilon_{\text{пр2}}(T_2/100)^4}{\varepsilon_{\text{пр1}} + \varepsilon_{\text{пр2}}}.$$

Из полученного соотношения следует, что температура экрана, расположенного между двумя плоскими неограниченными пластинами, не зависит от его месторасположения. Подставив температуру экрана в (а) или (б), получим искомый результирующий поток

$$q_{1,\text{эк},2} = \varepsilon_{\text{пр}} C_0[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4], \quad (10.32)$$

где приведенная степень черноты системы пластины – экран

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 + 2/\varepsilon_{\text{эк}} - 2}. \quad (10.33)$$

Сопоставив (10.33) с (10.28), получим, что при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{\text{эк}}$ введение экрана в систему двух бесконечных параллельных пластин уменьшает результирующий тепловой поток в 2 раза. Анализ (10.33) показывает, что результирующий, лучистый поток в рассмотренной системе тем меньше, чем меньше степень черноты экрана.

Если в системе двух бесконечных параллельных пластин расположено n

экранов с одинаковой степенью черноты $\varepsilon_{\text{эк}}$, то легко показать, что приведенная степень черноты такой системы

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 + 2n/\varepsilon_{\text{эк}} - (n+1)}. \quad (10.34)$$

Задачи к разделам 10.1-10.7

1. На тело, имеющее температуру 127°C и поглощательную способность $A = 0,7$, падает лучистый поток плотностью 1000 Вт/м^2 . Определить остальные лучистые потоки.

Комментарий к задаче. Используйте (10.9), (10.18), (10.22) и определение эффективного потока.

2. Считая поверхность Солнца черной и имеющей температуру 5770K , определить длину волны максимума спектральной интенсивности излучения и плотность падающего на Землю интегрального лучистого потока (расстояние Земли от Солнца принять $150 \cdot 10^6 \text{ км}$, радиус Солнца – $6,96 \cdot 10^5 \text{ км}$).

Комментарий к задаче. Используйте (10.15) и $q_{\text{пад}} = E_0 (R_c / R_{c-3})^2$.

3. Обмуровка топочной камеры парового котла выполнена из шамота, а внешняя обшивка из стального листа. Расстояние между обмуровкой и обшивкой мало. Найти потери тепла излучением с единицы поверхности обмуровки, если ее температура 120°C , степень черноты $0,8$, а температура обшивки 50°C , степень ее черноты $0,6$.

Комментарий к задаче. Используйте (10.28).

4. В системе двух бесконечных параллельных пластин одна имеет температуру 127°C и поглощательную способность $A_1 = 0,8$. Вторая имеет поглощательную способность $A_2 = 0,6$. Определить температуру второй пластины, если плотность эффективного потока первой пластины 1700 Вт/м^2 .

Комментарий к задаче. Из (10.15) и (10.25) определяется q_{12} . Из баланса эффективных потоков $q_{12} = E_{1\text{эф}} - E_{2\text{эф}}$ находится $E_{2\text{эф}}$, а из (10.25) – E_{02} , учтя, что $q_{12} = -q_{21}$. Из (10.15) находится температура второй пластины.

5. В системе двух бесконечных параллельных пластин с поглощательными способностями $A_1 = 0,7$, $A_2 = 0,8$ известны плотность результирующего излучения 600 Вт/м^2 и эффективный поток с первой пластины 1400 Вт/м^2 . Определить температуру пластин и остальные лучистые потоки.

Комментарий к задаче. Предполагая, что результирующий поток направлен от первой пластины ко второй, получим $E_{2\text{эф}} = E_{1\text{эф}} - q_{12}$. Из (10.25), и $q_{12} = -q_{21}$ находим E_{01} и E_{02} , а из (10.15) – температуру пластин. Учитывая, что $E_{1\text{эф}} = E_{2\text{пад}}$ и $E_{2\text{эф}} = E_{1\text{пад}}$, из баланса тепла падающего излучения определяются остальные потоки.

6. В системе двух бесконечных параллельных пластин с поглощательными способностями $A_1 = 0,6$, $A_2 = 0,8$ известны плотности эффективных потоков $E_{\text{эфф.1}} = 1800$, $E_{\text{эфф.2}} = 900 \text{ Вт/м}^2$. Определить температуру пластин и все лучистые потоки.

Комментарий к задаче. См. комментарий к предыдущей задаче.

10.8. Лучистый теплообмен тел, произвольно расположенных в пространстве

10.8.1. Закон Ламберта

При рассмотрении основных видов лучистых потоков была определена угловая плотность излучения в виде $E_\phi = dE/d\omega$.

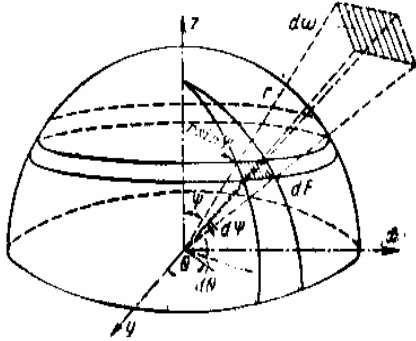


Рисунок 10.7 – К определению телесного угла

Яркостью излучения называют лучистый поток в данном направлении (под углом ϕ к направлению нормали) с единицы площади, отнесенный к проекции площадки на плоскость, ортогональную к направлению излучения. Тогда

$$B = E_\phi / \cos\phi = dE / (d\omega \cdot \cos\phi).$$

Иначе

$$dE = B \cdot \cos\phi \, d\omega \quad (10.35)$$

По определению телесный угол равен отношению элементарной площадки, вырезанной данным углом на поверхности сферы, радиуса r , к квадрату радиуса (рис. 10.7). Тогда элементарную площадку можно представить как $dF = r \cdot \sin\phi \cdot d\theta \cdot r \cdot d\phi$. Телесный угол $d\omega$ получается

$$d\omega = \frac{dF}{r^2} = \sin\phi \cdot d\phi \cdot d\theta. \quad (10.36)$$

Для черного и серого диффузного излучения яркость не зависит от направления излучения. Подставим (10.36) в (10.35) и проинтегрируем по полупространству. Получим

$$E_0 = B_0 \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\phi \cdot \cos\phi \cdot d\phi = B_0 \cdot \pi. \quad (10.37)$$

Из полученного выражения следует, что яркость излучения черного тела в π раз меньше плотности его полусферического излучения. Подставив (10.37) в (10.35), получим закон Ламберта

$$dE_0 = \frac{E_0}{\pi} \cos\phi \cdot d\omega. \quad (10.38)$$

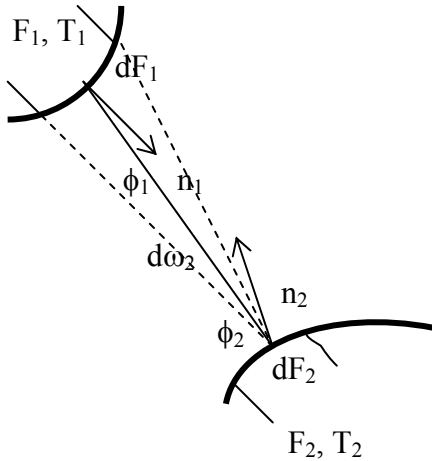
Следует отметить, что закон Ламберта выполняется приближенно для диэлектриков (яркость постоянна в диапазоне $0 \div 70^\circ$, а затем падает до 0) и не выполняется для полированных металлов (яркость при угле $70 \div 80^\circ$ превышает яркость при 0°). У всех реальных тел при $\phi \rightarrow 90^\circ$ яркость стремится к 0.

10.8.2. Теплообмен двух черных тел, произвольно расположенных в пространстве

Рассмотрим два невогнутых черных тела (рис. 10.8) с различными температурами ($T_1 > T_2$) и поверхностями F_1 и F_2 . Выделим на каждом теле по элементарной площадке dF_1 и dF_2 соответственно. Пусть расстояние между центрами площадок – r , а угол между нормалью к площадке и прямой,

соединяющей их центры, ϕ_1 и ϕ_2 соответственно.

Телесный угол, под которым из площадки первого тела видна площадка второго тела, $d\omega_1$; а из второй – первая $d\omega_2$. Лучистый поток, падающий с первой площадки на вторую, определится по закону Ламберта



$$d^2Q_{\text{пад1}} = \frac{E_{01}}{\pi} \cos \phi_1 d\omega_1 dF_1, \quad (10.39)$$

а со второй – на первую

$$d^2Q_{\text{пад2}} = \frac{E_{02}}{\pi} \cos \phi_2 d\omega_2 dF_2. \quad (10.40)$$

Имея в виду, что телесные углы соответственно равны

$$d\omega_1 = dF_2 \cdot \cos \phi_2 / r^2, \quad (10.41)$$

$$d\omega_2 = dF_1 \cdot \cos \phi_1 / r^2.$$

Рисунок 10.8 – Система двух черных тел, произвольно расположенных в пространстве.

получим падающие потоки в виде

$$d^2Q_{\text{пад1}} = \frac{E_{01}}{\pi} \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2}{r^2} dF_1 dF_2, \quad (10.42)$$

$$d^2Q_{\text{пад2}} = \frac{E_{02}}{\pi} \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2}{r^2} dF_2 dF_1. \quad (10.43)$$

Введем обозначение

$$d\phi_{1,2} = \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2}{\pi r^2} dF_2, \quad (10.44)$$

$$d\phi_{2,1} = \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2}{\pi r^2} dF_1,$$

и назовем эти величины «элементарные угловые коэффициенты облучения». Тогда (10.42) и (10.43) можно представить в виде

$$d^2Q_{\text{пад1}} = E_{01} d\phi_{1,2} dF_1, \quad (10.45)$$

$$d^2Q_{\text{пад2}} = E_{02} d\phi_{2,1} dF_2.$$

Из (10.45) следует физический смысл элементарного углового коэффициента облучения

$$d\phi_{1,2} = \frac{d^2Q_{\text{пад1}}}{E_{01} dF_1} = \frac{d^2Q_{\text{пад1}}}{dQ_1}, \quad (10.46)$$

т.е. элементарный угловой коэффициент облучения численно равен отношению потока излучения элементарной площадки одного тела, попавшего на элементарную площадку второго тела, к интегральному излучению площадки первого тела в полупространство.

Проинтегрируем падающий лучистый поток, определенный из (10.45), по F_2 для потока первого тела и по F_1 – для второго. Получим

$$dQ_{\text{пад1}} = E_{01} \int_{F_2} d\varphi_{1,2} dF_1 = E_{01} \varphi_{1,2} dF_1, \quad (10.47)$$

$$dQ_{\text{пад2}} = E_{02} \int_{F_1} d\varphi_{2,1} dF_2 = E_{02} \varphi_{2,1} dF_2,$$

где

$$\varphi_{1,2} = \int_{F_2} \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2}{\pi r^2} dF_2, \quad (10.48)$$

$$\varphi_{2,1} = \int_{F_1} \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2}{\pi r^2} dF_1. \quad (10.48a)$$

локальные угловые коэффициенты облучения элементарной площадкой первого тела – второе тело и элементарной площадкой второго тела – первое. Если (10.47) представить в виде

$$\varphi_{1,2} = dQ_{\text{пад1}}/E_{01}dF_1, \quad \varphi_{2,1} = dQ_{\text{пад2}}/E_{02}dF_2, \quad (10.49)$$

то ясен физический смысл этого понятия: **локальный угловой коэффициент облучения численно равен отношению лучистого потока с элементарной площадки одного тела, падающего на второе тело, к интегральному лучистому потоку с этой площадки в полупространство.**

Проинтегрировав (10.47) по всей поверхности излучающего тела и используя теорему о среднем интегрального исчисления, получим

$$Q_{\text{пад1}} = E_{01} \bar{\varphi}_{1,2} F_1, \quad (10.50)$$

$$Q_{\text{пад2}} = E_{02} \bar{\varphi}_{2,1} F_2,$$

где $\bar{\varphi}_{1,2}, \bar{\varphi}_{2,1}$ – средние угловые коэффициенты облучения первым телом второго и вторым – первого соответственно. Из этого же соотношения следует и физический смысл среднего углового коэффициента облучения: **средний угловой коэффициент облучения есть доля интегрального лучистого потока данного тела, которая падает на другое тело.**

Определим результирующий, лучистый поток между рассмотренными черными телами. Т.к. черное тело поглощает все падающее на него излучение, то результирующий, лучистый поток в системе двух черных тел будет

$$Q_{\text{рез}} = Q_{\text{пад1}} - Q_{\text{пад2}} = E_{01} F_1 \bar{\varphi}_{1,2} - E_{02} F_2 \bar{\varphi}_{2,1}. \quad (10.51)$$

Если система находится в равновесии, то $T_1 = T_2$, $E_{01} = E_{02}$ и результирующий тепловой поток должен быть равным 0. Тогда из (10.51) получаем

$$F_1 \bar{\varphi}_{1,2} = F_2 \bar{\varphi}_{2,1}, \quad (10.52)$$

выражающее одно из свойств лучистых потоков: **свойство взаимности.**

Обозначим $\bar{H}_{1,2} = F_1 \bar{\varphi}_{1,2}$, $\bar{H}_{2,1} = F_2 \bar{\varphi}_{2,1}$ и назовем «**взаимные облучающие поверхности**». Тогда из (10.52) следует, что $Q_{\text{пад1}} = E_{01} \bar{H}_{1,2}$, $Q_{\text{пад2}} = E_{02} \bar{H}_{2,1}$, т.е. взаимная облучающая поверхность тела есть часть поверхности данного тела, интегральный лучистый поток с которой есть падающее излучение на другое тело. Тогда из (10.52) свойство взаимности лучистых потоков можно сформулировать в виде: «**взаимные облучающие**

поверхности двух тел равны».

Окончательно результирующий, лучистый поток между двумя черными телами, произвольно расположенными в пространстве, используя закон Стефана – Больцмана, можно записать

$$Q_{\text{рез}} = C_0[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4] \cdot \bar{H}_{1,2} . \quad (10.53)$$

10.8.3. Свойства лучистых потоков

Выше было получено первое свойство лучистых потоков – свойство взаимности. Рассмотрим замкнутую систему из трех черных тел с поверхностями F_1, F_2, F_3 . Составим баланс теплоты первого тела. В общем случае излучение первого тела попадает на второе и третье тела, и частично может попадать и на само тело, если данное тело вогнуто. Тогда

$$Q_{\text{пад1,2}} + Q_{\text{пад1,3}} + Q_{\text{пад1,1}} = Q_1 . \quad (10.54)$$

Если тело не вогнуто (плоское или выпуклое), то, очевидно, что поток самооблучения тела отсутствует.

Разделив левую и правую часть (10.54) на интегральный поток излучения первого тела, и учитывая (10.50), получим

$$\bar{\varphi}_{1,2} + \bar{\varphi}_{1,3} + \bar{\varphi}_{1,1} = 1 . \quad (10.55)$$

Уравнение (10.55) представляет следующее свойство лучистых потоков – **свойство замыкаемости** – «в замкнутой системе тел сумма средних угловых коэффициентов взаимного облучения для каждого тела равна 1».

Как было указано выше, если тело не вогнуто, то самооблучение тела отсутствует. Тогда свойство **не вогнутости** – «если тело не вогнуто, то угловой коэффициент самооблучения равен 0» ($\bar{\varphi}_{1,1} = 0$).

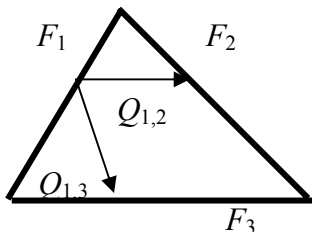


Рисунок 10.9 – Замкнутая плоская система трех тел

Условие замыкаемости для системы трех не вогнутых тел (рис.10.9) на основании (10.55) представится в виде

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{1,2} + \bar{\varphi}_{1,3} &= 1, \\ \bar{\varphi}_{2,1} + \bar{\varphi}_{2,3} &= 1, \\ \bar{\varphi}_{3,1} + \bar{\varphi}_{3,2} &= 1. \end{aligned} \quad (10.56)$$

Умножив по строкам полученную систему уравнений: первую строку на F_1 , вторую – на F_2 , третью – на F_3 , получим

$$\begin{aligned} \bar{H}_{1,2} + \bar{H}_{1,3} &= F_1, \\ \bar{H}_{2,1} + \bar{H}_{2,3} &= F_2, \\ \bar{H}_{3,1} + \bar{H}_{3,2} &= F_3. \end{aligned} \quad (10.57)$$

Свойство **затеняемости** лучистых потоков состоит в том, что, **если на пути лучистого потока находится непрозрачное тело, то результирующий лучистый поток на затененные тела равен 0**. В этом случае и угловой коэффициент облучения на затененное тело равен 0.

Строго говоря, свойство взаимности лучистых потоков получено в предположении лучистого теплообмена между черными телами. Однако с достаточной для практики степенью точности это свойство можно использовать и для расчета теплообмена серых тел.

10.8.4. Методы определения угловых коэффициентов облучения

а/. Аналитический метод

Для определения локального (местного) коэффициента облучения требуется вычислить

$$\varphi_{1,2} = \int_{F_2} \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2}{\pi r^2} dF_2, \quad (10.58)$$

а для среднего углового коэффициента облучения –

$$\bar{\varphi}_{1,2} = \frac{1}{F_1} \int_{F_1} dF_1 \int_{F_2} \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2}{\pi r^2} dF_2. \quad (10.59)$$

Точное вычисление подобных интегралов может быть проведено в простейших случаях. Использование численных методов и ЭВМ позволяет проводить вычисление этих интегралов и в достаточно сложных системах.

б/. Методы моделирования

Методы моделирования (в частности – световое моделирование) позволяют найти средние угловые коэффициенты облучения реальной системы на ее модели. При этом должны соблюдаться общие требования моделирования: соблюдение масштабов, тождественность оптических свойств системы и т.д. Излучающее тело собирают из точечных источников света, а поглощающее тело – из светодиодов. Общий ток от светодиодов пропорционален лучистому потоку, падающему на поглощающее тело. Подобные методы достаточно сложны в реализации.

в/. Метод поточной алгебры (алгебры лучистых потоков)

Полученное выше свойство затеняемости позволяет плоскую замкнутую систему из любого числа тел свести к системе из трех тел. Продолжим рассмотрение приведенной выше системы трех черных тел. Добавим к условию замыкаемости (10.57) условия взаимности (10.54). Получим систему из шести уравнений с шестью неизвестными.

$$\begin{aligned} \bar{H}_{1,2} &= \bar{H}_{2,1}, & \bar{H}_{1,2} + \bar{H}_{1,3} &= F_1 \\ \bar{H}_{1,3} &= \bar{H}_{3,1}, & \bar{H}_{2,1} + \bar{H}_{2,3} &= F_2 \\ \bar{H}_{3,2} &= \bar{H}_{2,3}, & \bar{H}_{3,1} + \bar{H}_{3,2} &= F_3 \end{aligned} \quad (10.60)$$

Разрешая данную систему относительно любого неизвестного, получим, в частности

$$\bar{H}_{1,2} = (F_1 + F_2 - F_3)/2, \quad (10.61)$$

или

$$\bar{\varphi}_{1,2} = (F_1 + F_2 - F_3)/(2F_1). \quad (10.62)$$

Из последнего следует общее правило определения среднего углового

коэффициента облучения в системе трех тел: **«Средний угловой коэффициент облучения равен отношению суммы поверхностей тел, участвующих в теплообмене, без поверхности третьего тела, к удвоенной поверхности излучающего тела».**

Частным случаем замкнутой системы, часто встречающейся в практике, является система из четырех не вогнутых тел, когда требуется определить угловые коэффициенты облучения противоположащих тел. Рассмотрим систему тел, приведенную на рис.10.10. Пусть требуется определить угловой коэффициент облучения с первого тела на второе.

Введем условные разделяющие непрозрачные диагональные поверхности F_5, F_6 , которые не пересекают поверхности тел. Из исходной системы получаем

$$\bar{\varphi}_{1,2} + \bar{\varphi}_{1,3} + \bar{\varphi}_{1,4} = 1, \text{ или } \bar{\varphi}_{1,2} = 1 - \bar{\varphi}_{1,3} - \bar{\varphi}_{1,4}. \quad (a)$$

Из системы трех тел ($F_1-F_4-F_5$) получаем

$$\bar{\varphi}_{1,4} = (F_1 + F_4 - F_5)/(2F_1), \quad (б)$$

а из системы ($F_1-F_3-F_6$) получаем

$$\bar{\varphi}_{1,3} = (F_1 + F_3 - F_6)/(2F_1). \quad (в)$$

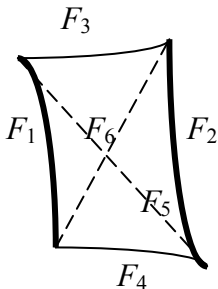


Рисунок 10.10 – Система четырех тел

Подставив (б) и (в) в (а), получим

$$\bar{\varphi}_{1,2} = (F_5 + F_6 - F_3 - F_4)/(2F_1), \quad (10.63)$$

откуда следует правило получения искомого коэффициента взаимного облучения: **«В системе четырех не вогнутых тел угловой коэффициент облучения двух противоположащих тел равен отношению суммы замыкающих, диагональных поверхностей, без поверхностей тел, не участвующих в теплообмене, к удвоенной поверхности**

излучающего тела».

10.8.5. Теплообмен излучением в замкнутой системе серых тел

Как указывалось выше, любую замкнутую плоскую систему тел можно свести к системе из трех тел, используя свойство затеняемости. Поэтому рассмотрим систему из трех серых тел (рис.10.11), которые имеют поверхности F_1, F_2, F_3 ; температуры T_1, T_2, T_3 ; поглотительные способности A_1, A_2, A_3 . Учтем положение, согласно которому в процессе лучистого теплообмена серые тела обмениваются эффективными лучистыми потоками. Будем также считать, что полученное выше соотношение (10.62) для черных тел, справедливо и для серых тел, т.к. средний угловой коэффициент облучения зависит только от геометрии системы. В результате получим результирующий, лучистый поток между первым и вторым телом в виде

$$Q_{1,2} = Q_{эфф1} \bar{\varphi}_{1,2} - Q_{эфф2} \bar{\varphi}_{2,1}. \quad (10.64)$$

Используем связь между $E_{эфф}$ и $q_{рез}$. Получим

$$Q_{1,2} = [E_{01} + (1 - 1/A_1)q_{1,2}]F_1\bar{\varphi}_{1,2} - [E_{02} + (1 - 1/A_2)q_{2,1}]F_2\bar{\varphi}_{2,1}.$$

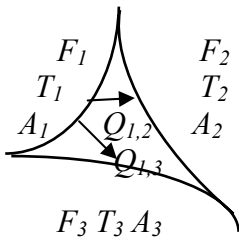


Рисунок 10.11 – Система трех серых тел

Учтя, что $Q_{1,2} = q_{1,2}F_1 = -q_{2,1}F_2$, а также условие взаимности, получим после группировки подобных членов

$$Q_{1,2} = \frac{C_0[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4]F_1\bar{\varphi}_{1,2}}{1 + (1/A_1 - 1)\bar{\varphi}_{1,2} + (1/A_2 - 1)\bar{\varphi}_{2,1}}. \quad (10.65)$$

Полученное соотношение позволяет определить результирующий тепловой поток между двумя произвольно расположенными в пространстве

телами, если определены средние угловые коэффициенты взаимного облучения этих тел. Рассмотрим некоторые частные случаи расположения тел.

а/. Система из двух бесконечных параллельных пластин

В этом случае, очевидно, что все излучение одной пластины попадает на вторую, и, следовательно, $\bar{\varphi}_{1,2} = \bar{\varphi}_{2,1} = 1$, а (10.65) преобразуется в (10.28).

б/. Первое тело находится в полости второго

В связи с принятым условием, очевидно, что все излучение первого тела попадает на поверхность второго тела и $\bar{\varphi}_{1,2} = 1$. Тогда из условия взаимности получается $\bar{\varphi}_{2,1} = F_1/F_2$, и результирующий поток

$$Q_{1,2} = \frac{C_0[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4]F_1}{1/A_1 + (1/A_2 - 1)F_1/F_2} \quad (10.66)$$

Частный случай, когда второе тело абсолютно черное ($A_2 = 1$),

$$Q_{1,2} = A_1 C_0 [(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4] F_1 \quad (10.67)$$

Если тело находится в неограниченном пространстве ($F_2 \gg F_1$), то (10.66) также приводится к (10.67), где T_2 – температура окружающего пространства.

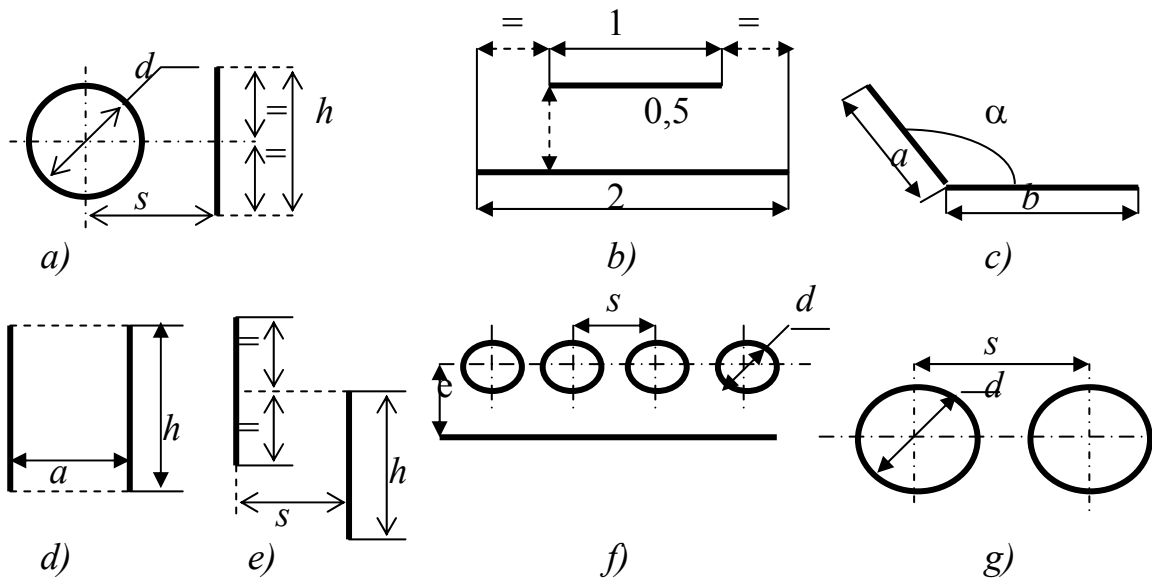
Задачи к разделу 10.8

1. Две плоские параллельные шины высотой каждая 150мм расположены на расстоянии 60мм друг от друга по схеме d . Температура одной шины 77°C . Считая, что поглотательные способности шин одинаковы $A_1 = A_2 = 0,6$, определить температуру второй шины, если они находятся в помещении с температурой среды 20°C . Конвективным переносом теплоты пренебречь.

Комментарий к задаче. Т.к. температура первой шины наибольшая в заданной системе тел, то она является источником теплоты. Рассматривая шины, как серые тела, произвольно расположенные в пространстве, результирующий тепловой поток от первой шины ко второй определяется по (10.65), где поверхность шины длиной 1м в плоскости, перпендикулярной плоскости схемы, $F = h$. Составив баланс тепла для второй шины, получим уравнение для определения искомой температуры. С одной плоскости второй шины результирующий поток определяется по (10.67), со второй – как поток, направленный от шины на условные тела $F_3 = F_4 = a$, замыкающие систему по (10.65). Однако, весь лучистый поток, падающий на F_3 и F_4 , полностью поглощается средой. Поэтому F_3 и F_4 следует считать черными телами. Средний угловой коэффициент облучения $\bar{\varphi}_{12} = \bar{\varphi}_{21}$ определяется по (10.63), где $F_3 = F_4 = a$,

$F_1 = F_2 = h$, $F_5 = F_6 = \sqrt{h^2 + a^2}$. Получим $\bar{\varphi}_{12} = \bar{\varphi}_{21} = 0,677$. Из условия замыкаемости для 2-й шины $\bar{\varphi}_{21} + \bar{\varphi}_{23} + \bar{\varphi}_{24} = 1$ и симметрии системы $\bar{\varphi}_{23} = \bar{\varphi}_{24}$ имеем $\bar{\varphi}_{23} = 0,1675$.

2. Найти средние угловые коэффициенты облучения в приведенных плоских системах тел.



Комментарий к задаче. Рассмотрим, например, схему c). Замкнув систему условным телом 3, соединяющим концы пластин a и b . Используем (10.62) и теорему

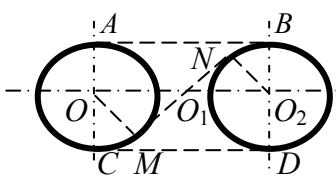


Рисунок 10.12 – К схеме g)

косинусов $\bar{\varphi}_{ab} = 0,5 \cdot (1 + b/a - \sqrt{1 + (b/a)^2 - 2b \cos \alpha / a})$.

Для схемы e) замкнем систему непрозрачными телами 3 и 4, соединяющими концы пластин. Проведем диагонали 5 и 6, соединяющие противоположные концы пластин.

$$F_3 = F_4 = F_5 = \sqrt{s^2 + 0,25h^2}, \quad \text{а} \quad F_6 = \sqrt{s^2 + (1,5h)^2}.$$

Подставим найденное в (10.63) и получим

$$\bar{\varphi}_{12} = 0,5 \cdot [\sqrt{2,25 + (s/h)^2} - \sqrt{0,25 + (s/h)^2}].$$

Из условия взаимности $\bar{\varphi}_{12} = \bar{\varphi}_{21}$.
 Для схемы g) воспользуемся рис.10.12, где проведены замыкающие плоскости $AB = CD = s$ и диагональ CB , состоящая из дуг $CM = NB$ (в силу симметрии) и касательной к окружностям MN . Для определения длины дуг необходимо найти центральные углы $\angle COM = \angle BO_2N = \alpha$. Очевидно, что $\angle COM = \angle OO_1M = \arcsin(d/s)$. Касательная $NM = 2NO_1 = \sqrt{s^2 - d^2}$. Исходим из определения среднего углового коэффициента облучения и (10.63) $\bar{\varphi}_{12} = [\sqrt{(s/d)^2 - 1} + \arcsin(d/s) - s/d] / \pi$.

Для схемы f) воспользуйтесь тем, что для двух бесконечных плоскостей: заданной и касательной к ряду труб, средний угловой коэффициент облучения = 1, и схемой g).

Остальные схемы решите самостоятельно, на основании сказанного выше.

3. Плоская и цилиндрическая шины расположены по схеме a) (задача 2). Диаметр цилиндрической шины 100мм, высота плоской 100мм, расстояние между шинами $S = 120$ мм. Определить температуру цилиндрической шины, если температура плоской 80°C , а температура воздуха в помещении 20°C . Поглощательные способности тел принять $A_1 = A_2 = 0,7$. Пренебрегать

конвективным переносом теплоты нельзя.

Комментарий к задаче. Из теплового баланса цилиндрической шины (тело 2) следует, что результирующий тепловой поток от плоской шины (тело 1) к цилиндрической шине равен тепловому потоку от тела 2 в окружающее помещение, который состоит из лучистой и конвективной составляющих. Конвективный поток найдем из (3.1), а коэффициент теплоотдачи из (7.17), учтя, что для воздуха $(Pr_{ж}/Pr_{ст})^{0,25} = 1$. Из (7.17) следует, что для воздуха $\alpha = C \cdot \Delta t^{0,25}$, где Δt – разность температуры поверхность-воздух, и из (3.1) получаем $q_l = C \cdot \Delta t^{1,25} \pi d$. Результирующий поток q_{l12} находится по (10.65), а угловые коэффициенты облучения из схемы *a*) предыдущей задачи. Результирующий поток от тела 3 в помещение находится также по (10.65), где из условия замыкаемости для тела 2 $\bar{\varphi}_{2н} = 1 - \bar{\varphi}_{21}$, а $\bar{\varphi}_{н2} = 0$ – исходя из определения среднего углового коэффициента облучения. В итоге из уравнения теплового баланса получаем уравнение с одним неизвестным – температурой тела 2, которое простыми арифметическими преобразованиями приводится к виду $(T_2/100)^4 = A - B \cdot \Delta t^{1,25}$, где A и B – постоянные. Уравнение решается последовательными приближениями.

4. Две плоские шины толщиной каждая 2мм расположены по схеме *e* (задача 2). Высота шин 100мм, расстояние между шинами 50мм. Шины расположены в помещении с температурой воздуха 20°C. Температура одной шины 27 °С, ее поглощательная способность 0,6. Определить ток, идущий по второй шине, если ее поглощательная способность 0,8, а удельное электрическое сопротивление $\rho = 0,2 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$.

Комментарий к задаче. Пусть в схеме *e* левая шина – 1, правая – 2. Тепловой баланс шины 1 (на 1 пог. м) состоит из: подвода теплоты от шины 2 излучением и отвод теплоты в помещение излучением и конвекцией. Результирующий поток от шины 2 определяется по (10.62) (поменяв местами T_1 и T_2) и см. комментарий к задаче 2. Конвективный тепловой поток от шины 1 – по (3.1) с учетом (7.15) и комментария к этому уравнению. Лучистый поток с левой грани шины 1 – по (10.67), а с правой – в направлении условных тел 3 и 4, замыкающих систему тел по схеме *e* по (10.62), но при этом $A_3 = A_4 = 1$, т.к. весь лучистый поток от шины 1 в направлении этих тел полностью поглощается. Из этого баланса тепловых потоков находится температура шины 2. Тепловой баланс шины 2 состоит из: Джоулевой теплоты при прохождении тока $q_l = I^2 \rho / s$, результирующего потока к шине 1 и потерь теплоты в помещение излучением и конвекцией (см. для шины 1). Откуда и определяется ток.

5. Определить потери тепла с погонного метра трубопровода диаметром 100мм, покрытого изоляцией толщиной 50мм ($\lambda = 0,2 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$). Температура трубопровода 150°C. Температура воздуха в помещении 20°C. Степень черноты поверхности изоляции 0,8.

Комментарий к задаче. С поверхности изоляции в помещение имеет место тепловой поток излучением по (10.67) и конвекцией по (3.1). Для определения потока по (10.67) и коэффициента теплоотдачи по (7.17) требуется температура поверхности изоляции, которая неизвестна. Следует задаться 3-4мя значениями этой температуры в диапазоне 40-60°C и рассчитать тепловой поток. Тепловой поток с поверхности изоляции в помещение должен быть равен тепловому потоку теплопроводностью через слой изоляции по (2.18).

6. Две трубы диаметрами 100мм каждая расположены горизонтально в помещении с температурой воздуха 20°С (схема g задача 2). Расстояние между трубами 150мм. Определить тепловой поток, передаваемый с погонного метра трубы в помещение, если температура труб одинакова и равна 100°С, поглощательные способности труб также равны и составляют 0,7.

Комментарий к задаче. Используйте комментарии к задачам 2 и 3. Учтите, что результирующий поток между трубами = 0, т.к. их температура одинакова.

10.9. Зональный метод расчета лучистого теплообмена

Сущность зонального метода расчета лучистого теплообмена состоит в том, что неизотермическая поверхность F (или объем V) разделяется на n зон с поверхностью каждой F_i . В пределах каждой зоны оптические характеристики и температура полагаются постоянными. Следовательно, непрерывные характеристики заменяются дискретными. Очевидно, что с увеличением n увеличивается и точность расчета, но возрастает и объем вычислений. При этом

$F = \sum_{i=1}^n F_i$. Для эффективного лучистого потока получаем систему алгебраических уравнений:

$$Q_{\text{эфф.}i} = E_i F_i + R_i \sum_{k=1}^n Q_{\text{эфф.}k} \bar{\varphi}_{k,i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (10.68)$$

и для результирующего потока

$$Q_{\text{рез.}i} = Q_{\text{эфф.}i} + \sum_{k=1}^n Q_{\text{эфф.}k} \bar{\varphi}_{k,i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10.69)$$

Кроме того, для замкнутой системы

$$\sum_{i=1}^n Q_{\text{рез.}i} = 0. \quad (10.70)$$

Таким образом, имеется система из $2n$ уравнений (10.68) и (10.69), содержащая столько же неизвестных: температура n поверхностей и результирующие потоки на этих поверхностях $Q_{\text{рез.}i}$. При задании n неизвестных (температура поверхностей) решение этой системы уравнений позволяет найти результирующие потоки. В принципе могут быть известны и некоторые результирующие потоки, тогда подлежат определению соответствующие зональные температуры.

Зональный метод расчета лучистого теплообмена находит применение в тепловых расчетах рабочего пространства пламенных и электрических печей, при расчете топочных устройств парогенераторов и других случаях.

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите основные виды лучистых потоков. Дайте их определения.
2. Дайте определение излучательной способности.
3. Дайте определение поглощательной, отражательной и пропускательной способностей.
4. Сформулируйте законы излучения черного тела.
5. Дайте определение «серого тела». Что такое интегральная степень

черноты.

6. Сформулируйте закон Кирхгоффа. Следствие из этого закона, применимость.
7. Напишите плотность результирующего лучистого потока в системе двух бесконечных пластин. Что такое приведенная степень черноты?
8. Как влияет установка экрана и его оптические характеристики на результирующий лучистый поток в системе двух пластин?
9. Дайте определение «угловой плотности» излучения. Сформулируйте закон Ламберта.
10. Дайте определение локального и среднего углового коэффициента облучения.
11. Сформулируйте свойства лучистых потоков: замыкаемости, взаимности, затемняемости. Запишите уравнения, характеризующие эти свойства.
12. Как определить средний угловой коэффициент облучения в системе трех тел?

10.10. Излучение газовых сред

Газообразные среды, состоящие из одно- и двухатомных газов, практически диатермичны для теплового излучения. Существенной излучательной и, соответственно, поглощательной способностью обладают трех- и более атомные газы. Из них наибольший практический интерес для энергетиков представляют CO_2 и H_2O , содержащиеся в продуктах сгорания органического топлива, и меньший – SO_2 (из-за малой концентрации).

В отличие от твердых тел, имеющих непрерывный спектр излучения, излучение газов носит селективный характер, т.е. процесс излучения и поглощения происходит в некотором диапазоне длин волн, а для остального спектра газ является прозрачной средой. Основные полосы поглощения для CO_2 и H_2O приведены в табл. 10.2.

Кроме того, отличие излучения газов от подобного процесса в твердом теле состоит в том, что, в связи с малой плотностью газа, излучение происходит по всему объему, в то время как для твердого тела излучение происходит в поверхностном слое толщиной до 1мм.

Таблица 10.2 – Основные полосы поглощения CO_2 и H_2O

№ полосы	CO_2			H_2O		
	λ_1 мк	λ_2 мк	$\Delta\lambda$ мк	λ_1 мк	λ_2 мк	$\Delta\lambda$ мк
1	2,4	3,0	0,6	1,7	2,0	0,3
2	4,0	4,8	0,8	2,2	3,0	0,8
3	12,5	16,5	4,0	4,8	8,5	3,7
4	–	–	–	12	30	18

С увеличением температуры газа плотность его уменьшается, а ширина полос поглощения увеличивается. Эти факторы противоположным образом

влияют на излучательную способность газа: первый фактор ее уменьшает, а второй – увеличивает. Согласно экспериментальным данным для CO_2 и H_2O их излучательные способности представляются в виде

$$E_{\text{CO}_2} = 3,5(pL)^{0,33}(T/100)^{3,5},$$

$$E_{\text{H}_2\text{O}} = 3,5 p^{0,8} L^{0,6} (T/100)^3,$$
(10.71)

где p – парциальное давление данного газа, L – толщина излучающего слоя.

Соотношения (10.71) представляют собою интегральную характеристику излучения газа. Их анализ показывает, что с ростом температуры излучательная способность газа растет медленнее, чем излучательная способность черного тела. Введя, как и ранее, понятие интегральной степени черноты газа, как отношение излучательной способности газа к излучательной способности черного тела при той же температуре, получим

$$\varepsilon_{\text{CO}_2} = E_{\text{CO}_2}/E_0, \quad \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} = E_{\text{H}_2\text{O}}/E_0$$
(10.72)

Для практических расчетов построены номограммы по соотношениям (10.72) с учетом (10.71) в функции от температуры газа по параметру pL . Учитывая, что по (10.71) излучательная способность водяного пара зависит от p и L по-разному (более существенное влияние оказывает парциальное давление и меньшее – оптическая толщина слоя), для определения интегральной степени черноты водяного пара вводится поправка на этот фактор в зависимости от p и произведения pL . Обычно в литературе эта поправка обозначается β . Тогда

$$\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} = \beta \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}$$
(10.73)

При сжигании природного топлива в продуктах сгорания содержится как углекислый газ, так и водяной пар. Поэтому в практике приходится определять степень черноты смеси этих газов.

Полосы поглощения углекислого газа и водяного пара частично перекрываются (см. табл. 10.2), т.е. излучение одного газа поглощается вторым газом. Это обстоятельство приводит к тому, что суммарная излучательная способность (а, соответственно, и степень черноты) смеси газов оказывается меньше, чем арифметическая сумма излучательных способностей компонентов. Для смеси углекислого газа и водяного пара получается

$$\varepsilon_{\text{см}} = \varepsilon_{\text{CO}_2} + \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} - \Delta\varepsilon,$$
(10.74)

где приближенно можно считать $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\text{CO}_2} \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}$ – поправка на перекрытие полос поглощения.

Для более точных расчетов эта поправка определяется по специальным номограммам в зависимости от концентрации каждого из компонентов.

На приведенных рис. 10.12 – 10.14 представлены номограммы для расчета степени черноты CO_2 и H_2O .

10.11. Поглощение энергии газовыми средами

Рассмотрим плоскопараллельный пучок монохроматического излучения, падающий на некоторый газовый поглощающий слой (рис.10.15). Пусть спектральная интенсивность падающего излучения $J_{\lambda_{\text{вх}}}$, прошедшего через слой $J_{\lambda_{\text{вых}}}$. Согласно гипотезе Бугера, относительное изменение плотности монохроматического излучения при прохождении через поглощающую среду пропорционально длине пути луча в среде. Тогда, если при изменении координаты x на dx , интенсивность излучения изменяется на dJ_{λ} , получим

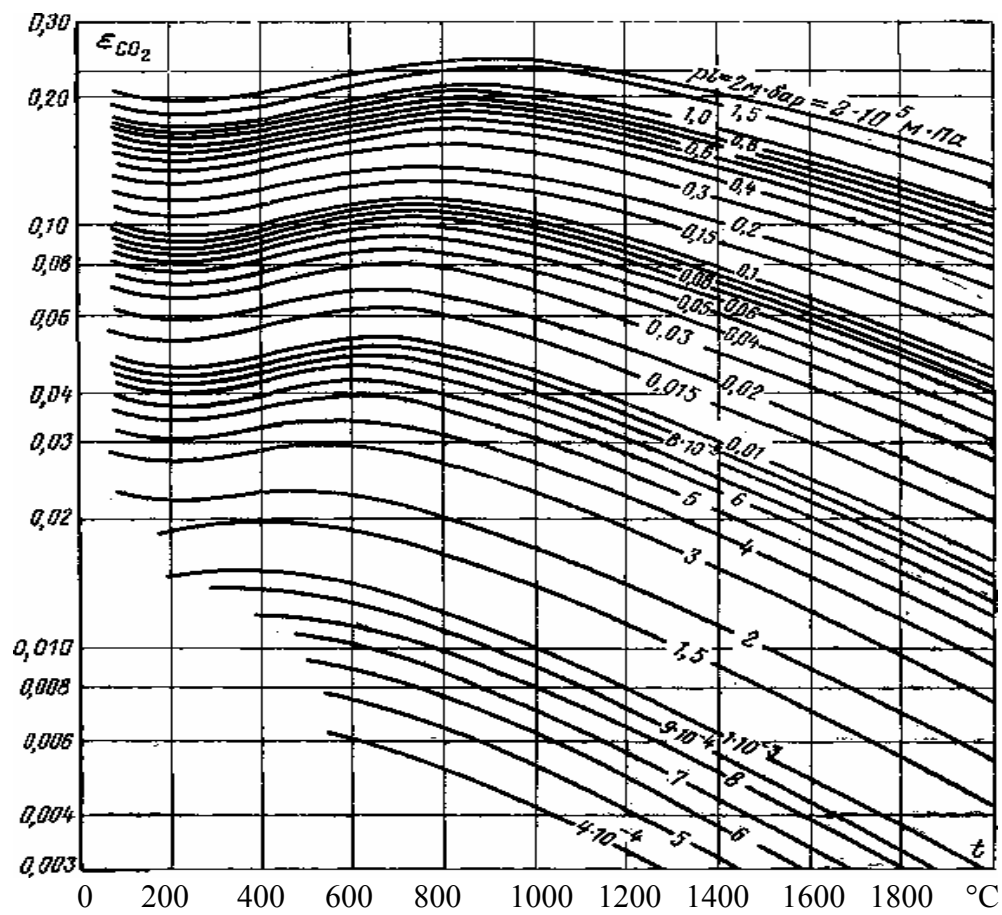


Рисунок 10.12 – Степень черноты CO_2

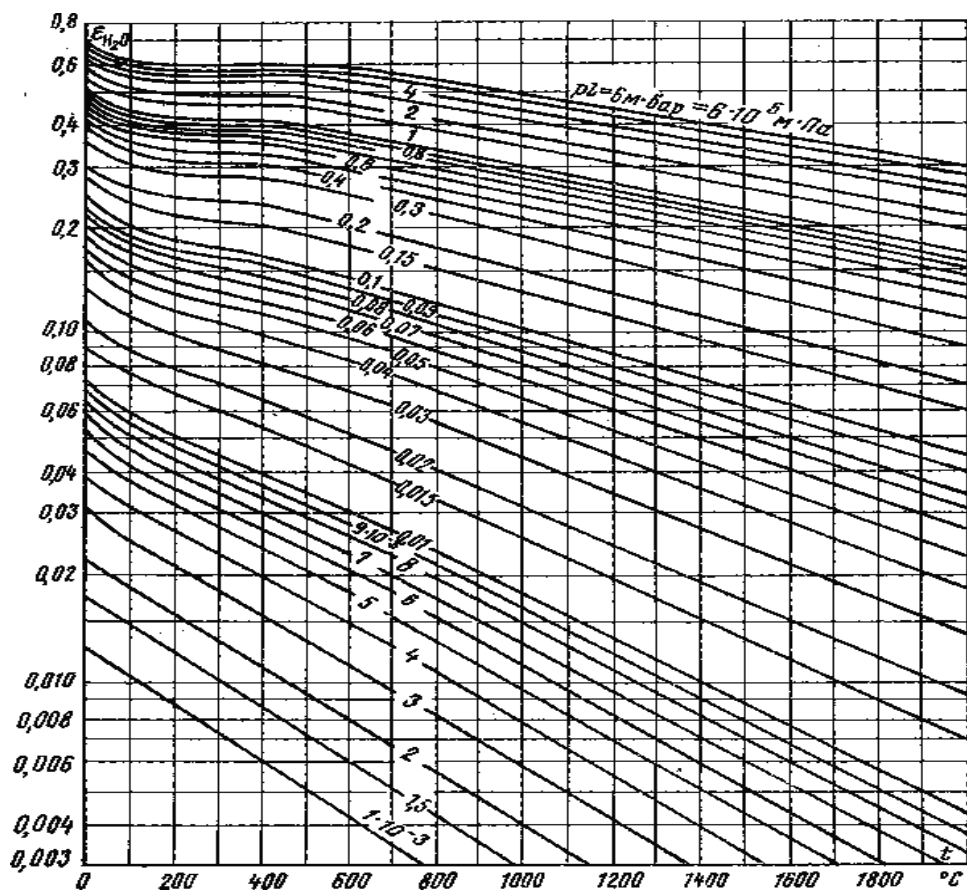


Рисунок 10.13 – Степень черноты H_2O

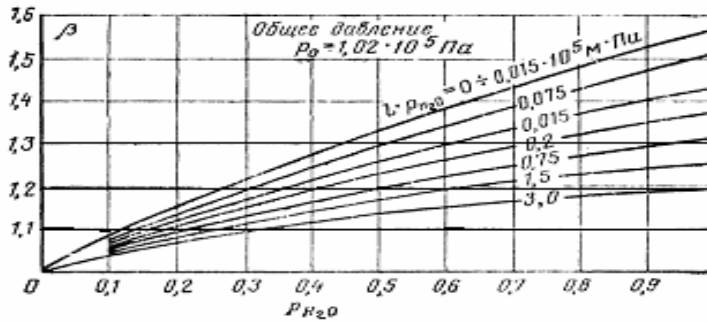


Рисунок 10.14 – Поправочный коэффициент к степени черноты H_2O

$$dJ_\lambda / J_\lambda = -k \cdot dx, \quad (10.75)$$

где k – коэффициент ослабления. Полагая k постоянным, проинтегрируем (10.75) по толщине слоя. Получим

$$\ln(J_{\lambda_{\text{ВЫХ}}} / J_{\lambda_{\text{ВХ}}}) = -kL, \quad J_{\lambda_{\text{ВЫХ}}} / J_{\lambda_{\text{ВХ}}} = e^{-kL}. \quad (10.76)$$

Отношение $J_{\lambda_{\text{ВЫХ}}} / J_{\lambda_{\text{ВХ}}}$ представляет собою пропускательную монохроматическую способность газа. Считая, что газовый слой не отражает падающее излучение ($R = 0$), получим поглощательную монохроматическую способность газа в виде

$$A_\lambda = 1 - e^{-kL}. \quad (10.77)$$

Суммируя (10.76) по всему спектру поглощения газа (по длинам волн, входящим в спектр), получим

$$A = 1 - e^{-\bar{k}L}, \quad (10.78)$$

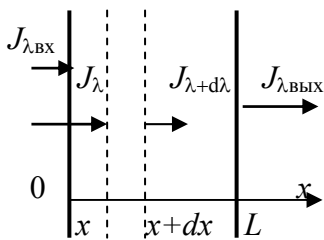


Рисунок 10.15 – Монохроматический лучистый поток.

где \bar{k} – некоторый средний коэффициент ослабления интегрального излучения, A – интегральная поглощательная способность газового слоя.

При анализе излучательной способности газов было отмечено, что на нее оказывает влияние и парциальное давление (концентрация) излучающей среды. Поэтому Беером была внесена поправка к закону Бугера, согласно которой относительное изменение плотности монохроматического излучения при прохождении лучистого потока через газовый поглощающий слой пропорциональна длине пути луча и концентрации поглощающей среды. Тогда интегральная поглощательная способность газового слоя получится в виде

$$A = 1 - e^{-\bar{k} p L}, \quad (10.79)$$

где p – концентрация (парциальное давление) поглощающего газа.

Для практического расчета лучистого теплообмена в топках парогенераторов при сжигании различных топлив, а также в рабочем пространстве пламенных печей при отоплении их органическим топливом, можно использовать рекомендованное Ключниковым экспериментальное значение среднего коэффициента поглощения газового слоя

$$\bar{k} = \frac{0,78 + 1,6 p_{\text{H}_2\text{O}}}{\sqrt{p_{\text{сум}} L}} \left(1 - 0,38 \frac{T}{1000} \right), \quad (10.80)$$

где $p_{\text{сум}}$ – суммарное парциальное давление CO_2 и H_2O (в барах).

В связи с тем, что спектр излучения, падающего на газовый поглощающий слой, зависит от температуры излучателя (стенки, если рассматривается теплообмен между газом и оболочкой), можно использовать метод расчета поглотительной способности газа, основанный на номограммах степени черноты газов (приведены выше). Для этого предварительно определяется произведение pL для CO_2 и H_2O . По температуре излучателя (стенки) с помощью номограмм определяется степени черноты $\varepsilon_{\text{CO}_2}(T_{\text{ст}})$, $\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}(T_{\text{ст}})$ и поправка на отклонение излучения (поглощения) H_2O от закона Бугера – Беера β . Итоговая поглотительная способность газовой смеси определяется как

$$A_{\Gamma} = \varepsilon_{\text{CO}_2}(t_{\text{ст}})(T_{\Gamma}/T_{\text{ст}})^{0,65} + \beta \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}(t_{\text{ст}})(T_{\Gamma}/T_{\text{ст}})^{0,45} - \Delta A, \quad (10.81)$$

где ΔA – поправка на перекрытие полос поглощения CO_2 и H_2O , определяемая как

$$\Delta A = A_{\text{CO}_2} A_{\text{H}_2\text{O}}. \quad (10.82)$$

При пылевом сжигании твердого топлива в топках парогенераторов в продуктах сгорания содержится весьма большое количество золых частиц с размерами от микрон до миллиметров. Концентрация этих частиц составляет от 10 до 200 г/м³, а степень их черноты близка к 1, т.к. поверхность частиц пористая. Очевидно, что эти частицы существенным образом влияют на оптические свойства газовой среды.

Экспериментальные исследования оптических свойств запыленных потоков газа показали, что концентрация пыли и оптическая толщина слоя одинаково влияют на оптические свойства этого потока. Тогда для поглотительной способности пыли в потоке газа можно использовать закон Бугера – Беера в виде

$$A_{\Pi} = 1 - e^{-k F_{\Pi} m L} = 1 - e^{-k_{\Pi} m L}, \quad (10.83)$$

где $k F_{\Pi} = k_{\Pi}$ – коэффициент ослабления излучения пылевыми частицами, m – концентрация пыли, F_{Π} – удельная поверхность пылевых частиц. Для коэффициента ослабления пылевого потока в топках парогенераторов при сжигании каменных углей предложено соотношение

$$k_{\Pi} = 7 \sqrt[3]{T_{\Gamma}^2 d^2}, \quad (10.84)$$

где T_{Γ} – абсолютная температура газа, d – среднегеометрический размер пылевых частиц.

Общая поглотительная способность запыленного газового потока определяется как

$$A = 1 - e^{-(k_{\Pi} m + \bar{k} p) L} \quad (10.85)$$

Если при сжигании природного газа происходит его реформация с выделением сажистого углерода (сажи), то при определении оптических свойств такого газового потока необходимо учитывать и поглощение излучения

сажистыми частицами.

10.12. Эффективная длина пути луча в поглощающей среде

Как излучение, так и поглощение энергии газами зависит от оптической длины пути луча в газовой среде. Плоскопараллельный лучистый поток в практике не встречается, поэтому возникает вопрос определения средней (эффективной) длины луча. Рассмотрев простейший процесс переноса теплоты между двумя плоскопараллельными пластинами, разделенными поглощающей средой, получим очевидный факт, что длина луча зависит от отклонения его от нормали к поверхности. Среднюю длину пути луча в простейших схемах можно определить интегрированием по угловой координате. Однако, в более сложных случаях это практически невозможно. Поэтому в практике расчета лучистого теплообмена в поглощающих средах эффективную длину пути луча определяют по соотношению

$$L_{\text{эфф}} = 3,6 \frac{V}{F}, \quad (10.86)$$

где V – излучающий газовый объем, F – лучевоспринимающая поверхность.

Тогда для простейших случаев получим: система двух плоскопараллельных бесконечных пластин на расстоянии h одна от другой $L_{\text{эфф}} = 1,8h$; полый бесконечный цилиндр $L_{\text{эфф}} = 0,9d$; бесконечный квадратный канал со стороной a – $L_{\text{эфф}} = 0,9a$.

10.13. Лучистый теплообмен между газом и оболочкой

Рассмотрим лучистый теплообмен между газом с температурой T_g , излучательной способностью E_g и поглощательной способностью A_g и замкнутым объемом с поверхностью F , температурой $T_{\text{ст}}$, излучательной способностью $E_{\text{ст}}$, поглощательной способностью A_c (рис.10.16). Пусть $T_g > T_{\text{ст}}$.

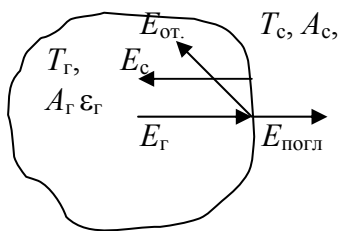


Рисунок 10.16 – Схема лучистого теплообмена между газом и оболочкой.

На единицу поверхности, окружающей объем газа, падает лучистый поток $E_{\text{пад.}} = E_g$. Стенка поглощает поток излучения в количестве $E_{\text{погл.с.}} = A_c E_g$ и отражает (при $D=0$) $E_{\text{от.с}} = (1-A_c)E_g$. Отраженный поток проходит через поглощающий газ, частично поглощается им и снова может попасть на поверхность.

С единицы поверхности в газовую среду излучается поток $E_{\text{ст}}$. Этот поток частично поглощается газовой средой в количестве $E_{\text{погл.г.}} = A_g E_{\text{ст}}$, а остальной поток проходит через газ ($R_g = 0$) и снова попадает на поверхность, где частично поглощается поверхностью, а частично отражается.

Пренебрегая влиянием отраженных потоков (ограничившись одним туром излучение – поглощение энергии) можем определить плотность результирующего излучения как разность потоков поглощенного стенкой

(поверхностью) и поглощенного газом. Получим, используя закон Стефана – Больцмана,

$$q_{\text{рез}} = E_{\text{погл.ст}} - E_{\text{погл.г}} = A_{\text{ст}} \varepsilon_{\text{г}} C_0 (T_{\text{г}}/100)^4 - A_{\text{г}} \varepsilon_{\text{ст}} C_0 (T_{\text{ст}}/100)^4.$$

Учитывая, что по следствию из закона Кирхгоффа для твердых тел можно с достаточной степенью точности принять $A_{\text{ст}} = \varepsilon_{\text{ст}}$, получим

$$q_{\text{рез}} = \varepsilon_{\text{ст}} C_0 [\varepsilon_{\text{г}} (T_{\text{г}}/100)^4 - A_{\text{г}} (T_{\text{ст}}/100)^4]. \quad (10.87)$$

Полученное выражение является приближенным, т.к. не учитывает последующие туры процесса поглощения – отражения лучистого потока. Эти туры должны увеличить результирующий поток из-за значительной (как правило) степени черноты стенки. Один из возможных путей учета указанного обстоятельства – введение эффективной степени черноты стенки в (10.87) как

$$\varepsilon_{\text{эфф.ст}} = (\varepsilon_{\text{ст}} + 1)/2. \quad (10.88)$$

Тогда окончательно для результирующего, лучистого потока между газом и стенкой получим

$$q_{\text{рез}} = \varepsilon_{\text{эфф.ст}} C_0 [\varepsilon_{\text{г}} (T_{\text{г}}/100)^4 - A_{\text{г}} (T_{\text{ст}}/100)^4]. \quad (10.89)$$

Существует иной метод расчета результирующего лучистого потока между газом и твердой оболочкой, основанный на понятии предельной степени черноты газового слоя. При бесконечно большой оптической толщине слоя газа ($pL \rightarrow \infty$) в силу селективности спектра излучения газа его степень черноты оказывается существенно меньше 1, т.е. излучательная способность газа оказывается ниже, чем у черного тела. На рис. 10.17 показаны предельные степени черноты CO_2 и H_2O . Используя известную связь между результирующим и эффективным лучистыми потоками, можно записать для системы газ – стенка очевидное соотношение

$$q_{\text{рез}} = (E_{\text{эфф.г}})_{\Delta\lambda} - (E_{\text{эфф.ст}})_{\Delta\lambda}, \quad (10.90)$$

где символ $\Delta\lambda$ указывает, что эффективный поток газа и стенки рассматривается только в диапазонах длин волн для зон поглощения газа. На приведенном ниже рис. 10.18 условно показаны две полосы поглощения ($\lambda_1 - \lambda_2$ и $\lambda_3 - \lambda_4$). Плотность эффективного лучистого потока газа связана с результирующим излучением известным соотношением, полученным ранее

$$E_{\text{эфф.г}} = (E_{0\text{г}})_{\Delta\lambda} + (1 - 1/\varepsilon_{\text{г}\Delta\lambda}) q_{\text{рез.г}},$$

где символ $\Delta\lambda$ оговорен выше, а $(E_{0\text{г}})_{\Delta\lambda} = \tilde{\varepsilon}_{\text{г}}(T_{\text{г}}) C_0 (T_{\text{г}}/100)^4$.

Эффективный лучистый поток стенки, соответственно, запишется

$$E_{\text{эфф.ст}} = (E_{0\text{с}})_{\Delta\lambda} + (1 - 1/\varepsilon_{\text{ст}\Delta\lambda}) q_{\text{рез.ст}},$$

где

$$(E_{0\text{ст}})_{\Delta\lambda} = \tilde{\varepsilon}_{\text{ст}}(T_{\text{ст}}) C_0 (T_{\text{ст}}/100)^4,$$

т.е. излучательная способность стенки в указанном диапазоне длин волн при предельной степени черноты газа, определенной по температуре стенки.

Степень черноты $\varepsilon_{\text{г}\Delta\lambda}$ может быть определена как отношение площадей (см. рис.10.18)

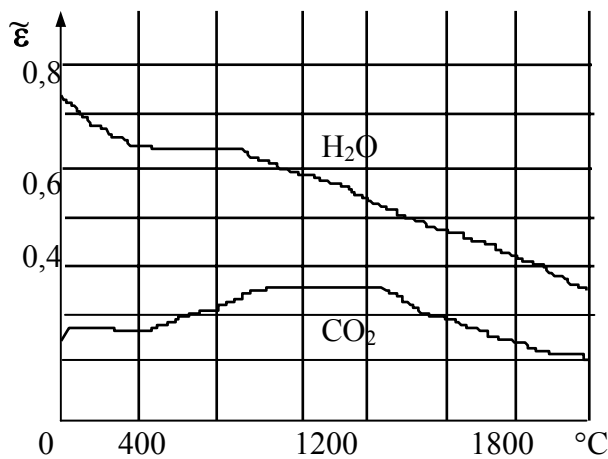


Рисунок 10.17 – Предельные степени черноты CO_2 и H_2O

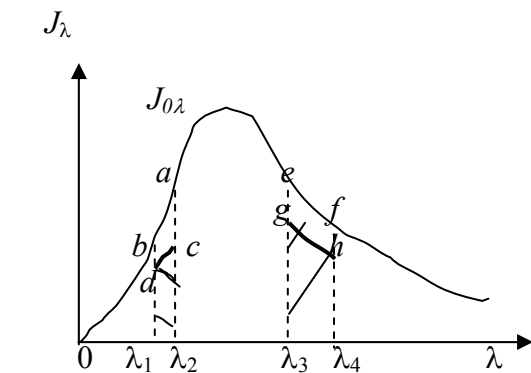


Рисунок 10.18 – К определению расчетной степени черноты газа.

$$\varepsilon_{\Gamma\Delta\lambda} = \frac{\text{пл}(dc) + \text{пл}(gh)}{\text{пл}(ab) + \text{пл}(ef)} = \frac{\varepsilon_{\Gamma}}{\tilde{\varepsilon}_{\Gamma}}. \quad (10.91)$$

Если учесть, что $q_{\text{рез.г.}} = -q_{\text{рез.с.}}$, а $\varepsilon_{\text{с}\Delta\lambda} = \varepsilon_{\text{с}}$, т.е. спектральная степень черноты стенки равна интегральной, то (10.90) легко получить

$$q_{\text{рез}} = \frac{C_0 [\tilde{\varepsilon}_{\Gamma}(T_{\Gamma})(T_{\Gamma}/100)^4 - \tilde{\varepsilon}_{\Gamma}(T_{\text{ст}})(T_{\text{ст}}/100)^4]}{\frac{\tilde{\varepsilon}_{\Gamma}}{\varepsilon_{\Gamma}} + \frac{1}{\varepsilon_{\text{ст}}} - 1}. \quad (10.92)$$

Следует отметить, что при расчете по последней методике лучистого теплообмена смеси газов со стенкой следует предельную степень черноты смеси газов определять так же, как и степень черноты с учетом частичного перекрытия спектров поглощения водяного пара и углекислого газа.

Из-за селективности спектра излучения и поглощения газов расчет результирующего лучистого потока является достаточно сложной задачей. Рассмотренные выше методы такого расчета достаточно приближенные. Более точные расчеты такого рода должны учитывать все особенности спектра излучения – поглощения газов.

Вопросы для самопроверки

1. Какие газовые среды излучают и поглощают энергию?
2. В чем отличие излучения и поглощения энергии газами от тех же процессов в твердых телах?
3. От каких факторов зависит излучательная способность CO_2 и H_2O ?
4. Как определяется степень черноты смеси газов (в частности CO_2 и H_2O)?
5. Сформулируйте и запишите закон Бугера. В чем смысл поправки Беера к закону Бугера?
6. В чем смысл понятия «эффективная длина пути луча». Как определяется эта величина?
7. Запишите плотность результирующего излучения между газом и оболочкой.
8. В чем смысл понятия «эффективная степень черноты стенки»?

Задачи к разделам 10.10 – 10.13

1. Коридорный пучок труб диаметром 65мм, расположенных с шагом по фронту и в глубину пучка 90мм, омывается поперечным потоком топочных газов с температурой 600°C. Скорость набегающего потока газа 6м/с. Парциальные давления $p_{\text{CO}_2} = 0,12$ бар; $p_{\text{H}_2\text{O}} = 0,14$ бар. Определить средний тепловой поток, передаваемый погонному метру труб, если по ходу газа расположено 10 труб с температурой поверхности 200°C и степенью черноты 0,8.

Комментарий к задаче. Лучистый тепловой поток определяется по (10.89) с учетом поверхности 1 пог.м. Степень черноты и поглощательная способность смеси газов – по (10.74) и (10.81) с помощью номограмм рис.10.12-10.14. Эффективную длину пути луча определите по (10.86), для чего рассмотрите один шаг труб по фронту и в глубину пучка. Тепловый поток конвекцией найдите, используя комментарий к задаче 4 раздела 6.

2. По футерованному газоходу с диаметром 500мм текут топочные газы со средней температурой 700°C. Скорость газов 5м/с. Парциальные давления $p_{\text{CO}_2} = 0,1$ бар. $p_{\text{H}_2\text{O}} = 0,13$ бар. Определить потери тепла на погонный метр газохода. если температура футеровки 400°C, а ее степень черноты $\varepsilon_{\text{ст}} = 0,8$.

Комментарий к задаче. Используйте комментарий к предыдущей задаче. Тепловой поток конвекцией найдите, используя (3.1) и (5.11).

3. Как изменятся потери тепла, если газоход прямоугольного сечения с размерами 0,5x1 м, а остальные условия остаются без изменения?

11. ОСНОВЫ МАССООБМЕНА

В технике многие процессы теплообмена непосредственно связаны с переносом массы компонентов среды, если в процессе участвует многокомпонентная смесь (по крайней мере, смесь двух компонентов – бинарная смесь). Так обстоит дело при конденсации пара из парогазовой смеси, испарение жидкости в парогазовый поток и т.д. При этом паровая среда проникает в поток двухкомпонентной смеси, что влияет на процесс течения и, соответственно, на теплообмен.

Диффузией называют самопроизвольный процесс установления в многокомпонентной среде равновесного распределения концентрации компонентов. В однородной по температуре и давлению смеси процесс диффузии направлен на выравнивание концентрации в системе. При этом происходит перенос вещества из области большей в область меньшей концентрации. Аналогично теплообмену, массообмен может происходить как на молекулярном (диффузия), так и на молярном уровне.

Диффузия характеризуется потоком массы через изоконцентрационную поверхность в направлении нормали к этой поверхности. Обозначим поток массы через некоторую поверхность G [кг/с]. Тогда плотность потока массы $g = dG/dF$ [кг/(м² с)]. Плотность потока массы является векторной величиной и в случае однородной по температуре и давлению смеси диффузионный поток массы определяется законом Фика

$$g_{m,i} = -D_i \frac{d\rho_i}{dn}, \quad (11.1)$$

где ρ_i – концентрация (плотность) данного компонента; D_i – коэффициент диффузии по концентрации. Знак минус в (11.1), как и в законе Фурье, показывает, что направление потока массы и градиента концентрации обратные по направлению. В случае бинарной смеси плотности потока массы первого и второго компонентов равны по величине и обратные по направлению, также равны и градиенты концентрации. Тогда следует, что и коэффициенты диффузии равны ($D_1 = D_2$).

Если компоненты смеси можно считать идеальными газами, то плотность диффузионного потока массы можно записать в виде

$$g_{m,i} = -D_{p,i} \frac{dp_i}{dn}, \quad (11.2)$$

где p_i – парциальное давление компонента; $D_{p,i} = D/(R_i T)$ – коэффициент диффузии по парциальному давлению.

Учитывая уравнение состояния идеального газа, получим

$$D = D_{p,1} R_1 T = D_{p,2} R_2 T, \quad (11.3)$$

или

$$D_{p,1}/D_{p,2} = R_2/R_1 = \mu_1/\mu_2. \quad (11.4)$$

где μ_1, μ_2 – молекулярные массы компонентов.

Если температура смеси газов переменна по объему, то возникает термодиффузия (эффект Сорре). При этом более массивные молекулы стремятся переместиться в область пониженной температуры. Термодиффузия приводит к возникновению градиента концентрации, что, в свою очередь, обуславливает возникновение концентрационной диффузии, стремящейся выровнять концентрации веществ. С течением времени термодиффузия и концентрационная диффузия уравниваются. Следствием концентрационной диффузии является возникновение разности температуры в результате диффузионного смешения газов, первоначально имевших одинаковую температуру (диффузионный термоэффект или эффект Дюфо). Например, при смешении водорода и азота возникает разность температуры порядка нескольких градусов. Чем меньше отличаются молекулярные массы смешивающихся газов, тем меньше эффект Дюфо.

Если в объеме газов имеется градиент полного давления, то возникает бародиффузия. Коэффициенты термодиффузии и бародиффузии на несколько порядков меньше, чем у концентрационной диффузии. Поэтому в дальнейшем рассматривается только концентрационная диффузия (назовем ее просто «диффузия»).

Кроме диффузионного переноса массы, в движущейся среде имеет место и молекулярный перенос массы, плотность потока которого для i -го компонента

$$g_{k,i} = \rho_i w. \quad (11.5)$$

В общем случае плотность потока массы равна сумме молекулярного и

молярного переноса, т.е.

$$g_i = g_{m,i} + g_{k,i}. \quad (11.6)$$

В двухкомпонентной среде при постоянном полном давлении количество массы в единице объема должно оставаться постоянным, поэтому плотности потока массы диффундирующих веществ должны быть равны по величине и обратные по направлению, т.е. $g_1 = -g_2$. Вместе с потоком массы переносится и тепловой поток равный

$$q = g_1 i_1 + g_2 i_2 = g_1 (i_1 - i_2) = g_1 (c_{p1} - c_{p2}) t. \quad (11.7)$$

Диффузионный перенос теплоты отсутствует при $i_1 = i_2$, $c_{p1} = c_{p2}$. Общий тепловой поток в движущейся среде представляется в виде

$$q = -\lambda grad(t) + \rho w i + g_1 (i_1 - i_2). \quad (11.8)$$

Таким образом, плотность теплового потока в движущейся среде зависит и от диффузионного потока массы.

11.1. Дифференциальные уравнения тепло- и массообмена

Для определения теплового потока, переносимого от движущейся среды к поверхности тела необходимо иметь поля температуры, скорости и концентрации вещества в пограничном слое. Ранее были получены уравнения для однокомпонентной среды без диффузионного переноса теплоты. Необходимо получить уравнения для двухкомпонентной среды.

а/. Уравнение энергии

Уравнение энергии для однокомпонентной среды получено выше в виде

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = -\text{div}(q). \quad (11.9)$$

Учитывая (11.8), определим составляющие правой части уравнения (11.9). Получим:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \rho \left(w_x \frac{\partial i}{\partial x} + i \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial [(i_1 - i_2) g_{x1}]}{\partial x}, \quad (11.10a)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} = -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \rho \left(w_y \frac{\partial i}{\partial y} + i \frac{\partial w_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial [(i_1 - i_2) g_{y1}]}{\partial y}, \quad (11.10б)$$

$$\frac{\partial q_z}{\partial z} = -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \rho \left(w_z \frac{\partial i}{\partial z} + i \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial [(i_1 - i_2) g_{z1}]}{\partial z}. \quad (11.10в)$$

Подставив полученные частные производные в (11.9) и учитывая уравнение неразрывности, получим

$$\rho \frac{Di}{d\tau} = \lambda \nabla^2 t - \text{div}[(i_1 - i_2) g_1]. \quad (11.11)$$

Считая, что перенос массы осуществляется только концентрационной диффузией и, используя закон Фика, записанный через относительную концентрацию $m_1 = \rho_1 / \rho$, где ρ_1 – плотность данного компонента, ρ – плотность смеси, получим

$$g_1 = -\rho D \nabla m_1. \quad (11.12)$$

Уравнение энергии для рассматриваемого случая представится в виде

$$\rho \frac{Di}{d\tau} = \lambda \nabla^2 t + \text{div}[(i_1 - i_2) \rho D \nabla m_1]. \quad (11.13)$$

В уравнение (11.13) дополнительно входит относительная концентрация компонента смеси. Таким образом, при наличии диффузионного переноса массы система дифференциальных уравнений конвективного теплообмена становится незамкнутой. Необходимо иметь дифференциальное уравнение, описывающее распределение концентрации компонентов смеси.

б/. Уравнение массообмена

Для нахождения уравнения, описывающего распределение концентрации данного компонента в движущейся смеси, выделим в жидкости неподвижный и недеформируемый элементарный объем с ребрами dx , dy , dz , и рассмотрим для него баланс массы, пренебрегая термо и бародиффузией. Будем считать жидкость несжимаемой.

По оси x в данный объем вносится масса $M_{1x} = g_{1x} dy dz d\tau$, а уносится масса $M_{1(x+dx)} = g_{1(x+dx)} dy dz d\tau$. Разложив $g_{1(x+dx)}$ в ряд Тейлора в окрестности точки x , и ограничившись двумя членами разложения, получим, что в элементе аккумулирована масса

$$dM_{1x} = M_{1x} - M_{1(x+dx)} = -\frac{\partial g_{1x}}{\partial x} dv d\tau. \quad (a)$$

Аналогично можно получить и для остальных осей:

$$dM_{1y} = M_{1y} - M_{1(y+dy)} = -\frac{\partial g_{1y}}{\partial y} dv d\tau, \quad (b)$$

$$dM_{1z} = M_{1z} - M_{1(z+dz)} = -\frac{\partial g_{1z}}{\partial z} dv d\tau. \quad (c)$$

Аккумуляция массы в недеформируемом элементе приводит к изменению плотности данного компонента в этом объеме, т.е.

$$dM_1 = dM_{1x} + dM_{1y} + dM_{1z} = \frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} dv d\tau = \rho \frac{\partial m_1}{\partial \tau} dv d\tau. \quad (d)$$

Подставив (a),(b),(c) в (d) и сократив, получим

$$\rho \frac{\partial m_1}{\partial \tau} = -\text{div}(g_1) \quad (e)$$

Учитывая (11.6) и условие несжимаемости, получим дифференциальное уравнение массообмена:

$$\frac{Dm_1}{d\tau} = D \left(\frac{\partial^2 m_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m_1}{\partial z^2} \right) = D \nabla^2 m_1. \quad (11.14)$$

11.2. Тепло- и массоотдача

По аналогии с конвективным теплообменом процесс совместного

молекулярного и молярного переноса массы в движущейся многокомпонентной среде называют конвективным массообменом. При наличии массообмена усложняется и процесс теплообмена, т.к. осуществляется дополнительный перенос теплоты за счет массообмена. Практический интерес представляет процесс теплообмена и массообмена при испарении, конденсации, сублимации и других подобных процессах. Поверхность жидкой фазы (при испарении или конденсации) или твердой (при сублимации) играет роль полупроницаемой поверхности, около которой происходят процессы теплообмена и диффузии. Например, при конденсации пара из парогазовой среды пленка конденсата проницаема для молекул пара и непроницаема для молекул воздуха.

Аналогично теплоотдаче массообмен между паровой фазой и жидкой (твердой) поверхностью называют «массоотдачей». При этом аналогично закону Ньютона для теплоотдачи

$$q = \alpha(t_{\text{ст}} - t_0) \text{ [Вт/м}^2\text{]},$$

для практических расчетов массоотдачи используют

$$g = b(\rho_{\text{ст}} - \rho_0) \text{ [кг/(м}^2\text{с)],} \quad (11.15)$$

где b – коэффициент массоотдачи, отнесенный к разности концентрации диффундирующего вещества на поверхности ($\rho_{\text{ст}}$) и в объеме (ρ_0). Считая компоненты смеси идеальными газами и перейдя от концентрации к парциальному давлению, (11.15.) можно записать в виде

$$g = b_p(p_{\text{ст}} - p_0), \quad (11.15a)$$

где $b_p = b/RT$ – коэффициент массоотдачи отнесенный к разности парциальных давлений.

Рассмотрим (рис.11.1) процесс конденсации пара из парогазовой смеси на

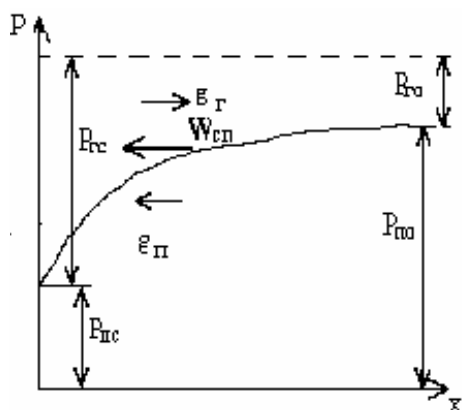


Рисунок 11.1 – Стефанов поток массы у полупроницаемой поверхности

поверхности пленки конденсата при постоянном полном давлении смеси. Вследствие конденсации пара на поверхности пленки парциальное давление пара $p_{\text{вс}} < p_{\text{во}}$ и имеет место диффузионный перенос массы пара в направлении пленки $g_{\text{в}}$. Т.к. при постоянном полном давлении смеси $dp_{\text{в}}/dx = -dp_{\text{г}}/dx$, то газ должен диффундировать в направлении, обратном направлению диффузии пара, т.е. от пленки в среду. Очевидно, что диффузионное перемещение газа от пленки в среду должно компенсироваться молярным (конвективным) переносом массы из объема в направлении пленки (полупроницаемой поверхности).

Этот конвективный поток массы, возникающий около полупроницаемой поверхности, называют «**стефановым потоком**» (по имени болгарского физика Стефана впервые рассмотревшего этот процесс). Обозначим скорость этого потока $W_{\text{стп}}$. Тогда суммарный поток пара на поверхности пленки можно представить в виде

$$g_{п.с.г} = -D_{п.п} \left(\frac{dp_{п}}{dx} \right)_{ст} + \rho_{п.с.г} W_{сн.с.г}, \quad (11.16)$$

а поток газа на поверхности пленки

$$g_{г.с.г} = -D_{п.г} \left(\frac{dp_{г}}{dx} \right)_{ст} + \rho_{г.с.г} W_{сн.с.г}. \quad (11.17)$$

Т.к. пленка непроницаема для газа, то поток газа на поверхности пленки должен быть равен 0. Тогда скорость стефанового потока на поверхности пленки с учетом (11.4)

$$W_{сн.с.г} = -\frac{D_{п.п} R_{п}}{\rho_{г.с.г} R_{г}} \left(\frac{dp_{п}}{dx} \right)_{ст}. \quad (11.18)$$

Подставив (11.18.) в (11.16.) получим плотность потока пара на поверхности пленки

$$g_{п.с.г} = -D_{п.п} \left(\frac{dp_{п}}{dx} \right)_{ст} \left(1 + \frac{\rho_{п.с.г} R_{п}}{\rho_{г.с.г} R_{г}} \right) = -D_{п.п} \frac{P}{p_{г.с.г}} \left(\frac{dp_{п}}{dx} \right)_{ст}. \quad (11.19)$$

Уравнение (11.19) было впервые получено Стефаном и отличается от закона Фика, относящегося к условию беспрепятственного распространения обоих компонентов смеси при диффузии, сомножителем $(P/p_{г.с.г})$, который учитывает дополнительный конвективный перенос массы, возникающий около полупроницаемой поверхности. Приравнявая (11.15а) и (11.19), получим коэффициент массоотдачи, отнесенный к разности парциального давления в виде

$$b_p = -D_{п.п} \frac{P/p_{г.с.г}}{p_{п.с} - p_{п.о}} \left(\frac{dp_{п}}{dx} \right)_{ст}. \quad (11.20)$$

Уравнение (11.20) называют дифференциальным уравнением массоотдачи.

11.3. Тройная аналогия

Уравнение массообмена без учета термо и бародиффузии имеет вид

$$D\rho_i/d\tau = D\nabla^2 \rho_i. \quad (11.21)$$

Уравнение энергии без учета диффузионного переноса теплоты:

$$Dt/d\tau = a\nabla^2 t. \quad (11.22)$$

Уравнение движения для безнапорного течения при отсутствии массовых сил:

$$Dw/d\tau = \nu\nabla^2 w. \quad (11.23)$$

Эти уравнения по форме записи аналогичны и содержат три физических параметра: D – коэффициент диффузии; a – коэффициент температуропроводности; ν – коэффициент кинематической вязкости. Каждый из них характеризует соответствующий перенос: массы (D), энергии (a), количества движения (ν). Размерность их одинакова, и при $D = a = \nu$ поля концентрации, температуры и скорости подобны, если подобны условия однозначности (краевые условия).

По аналогии с критерием Прандтля $Pr = \nu/a$, полученным при анализе системы дифференциальных уравнений теплообмена и определяющим меру отношения гидродинамического и теплового пограничных слоев, соотношение $Le = D/a$ называют критерием Льюиса. Этот критерий представляет собою меру отношения поля концентрации и температуры в пограничном слое. Отношение $Pr_D = \nu/D$ называют диффузионным критерием Прандтля. Он определяет подобие гидродинамического и концентрационного пограничных слоев.

Для процесса теплообмена, не осложненного массообменом (чистый теплообмен) и без учета массовых сил, структура критериального уравнения для расчета теплообмена имеет вид

$$Nu = f(Re, Pr). \quad (11.24)$$

Если ввести понятие «диффузионный» критерий Нуссельта в виде $Nu_D = bL/D$, то, исходя из аналогии уравнений диффузии и теплообмена, можно предположить, что структура критериального уравнения для массообмена будет подобна структуре уравнения для теплообмена, т.е.

$$Nu_D = f(Re, Pr_D), \quad (11.24a)$$

причем вид функциональной зависимости сохранится без изменения.

Однако подобный прием может быть использован только для приближенных, оценочных расчетов, т.к. уравнение теплоотдачи существенно отличается от уравнения массоотдачи (сравните (11.20) и (3.5)), кроме того, отличаются и условия однозначности (наличие «стефанового потока» массы).

Л.Д. Берманом теоретически было получено уравнение для расчета теплоотдачи при испарении жидкости в парогазовую среду и конденсации пара из парогазовой среды в виде

$$Nu = f(Re, Pr, Ar, \Pi_w, c_{p,п}/c_{p,ж}), \quad (11.25)$$

где $\Pi_w = g_{п.ст}L/(\nu\rho')$ – критерий поперечного потока массы. В то же время, им же было получено уравнение для расчета массоотдачи в виде

$$Nu_D = f(Re, Pr_D, Ar, \Pi_D, \varepsilon_r, R_п/R_r), \quad (11.26)$$

где $\Pi_D = (p_{п.ст} - p_{п.о.})/P$ – критерий парциального давления пара; $\varepsilon_r = p_{г.о.}/P$ – относительное содержание неконденсирующегося компонента. Очевидно, что структура этих уравнений существенно различается.

11.4. Тепло- и массоотдача при конденсации пара из парогазовой смеси

Подобный процесс имеет широкое приложение, в частности, при расчете конденсационных устройств паросиловых установок. Наличие в паре неконденсирующихся газов приводит к уменьшению интенсивности конденсации из-за затруднения доступа пара к поверхности пленки конденсата. На рис.11.2 схематически показано распределение парциального давления и температуры у поверхности пленки конденсата, толщиной δ . Изменение парциального давления пара от $p_{п.о.}$ до $p_{п.ст}$ вызывает соответственно изменение температуры пара от $t_{п.о.}$ до $t_{п.пов.}$, т.е. появляется разность температуры пара, обусловленная диффузией Δt_d . Кроме того, у поверхности пленки возникает разность температуры, обусловленная фазовым переходом Δt_f , и имеется разность температуры по толщине пленки конденсата, определяемая ее

термическим сопротивлением $\Delta t_{\text{п}}$.

Плотность парового потока на поверхности пленки конденсата может быть записана

$$g_{\text{п.пов.}} = b_p (p_{\text{п.о.}} - p_{\text{п.пов.}}). \quad (11.27)$$

Плотность теплового потока от пара к стенке, складывается из конвективного потока теплоты и теплоты, перенесенной массообменом

$$q = \alpha (t_{\text{п.о.}} - t_{\text{п.пов.}}) + g_{\text{п.пов.}} i_{\text{п.пов.}},$$

где α – коэффициент теплоотдачи, зависящий от известных факторов. При конденсации пара на границе раздела фаз выделяется теплота фазового перехода r и вместе с конвективным тепловым потоком передается стенке через пленку конденсата. Пренебрегая теплотой переохлаждения конденсата в пленке, можно представить плотность теплового потока в виде

$$q_{\text{ст}} = \alpha (t_{\text{п.о.}} - t_{\text{ст}}) + r b_p (p_{\text{п.о.}} - p_{\text{п.пов.}}), \quad (11.28)$$

или, пользуясь суммарным коэффициентом теплоотдачи

$$q_{\text{ст}} = \alpha_{\Sigma} (t_{\text{п.о.}} - t_{\text{ст}}). \quad (11.30)$$

В последнем выражении коэффициент теплоотдачи отнесен к полной разности температуры.

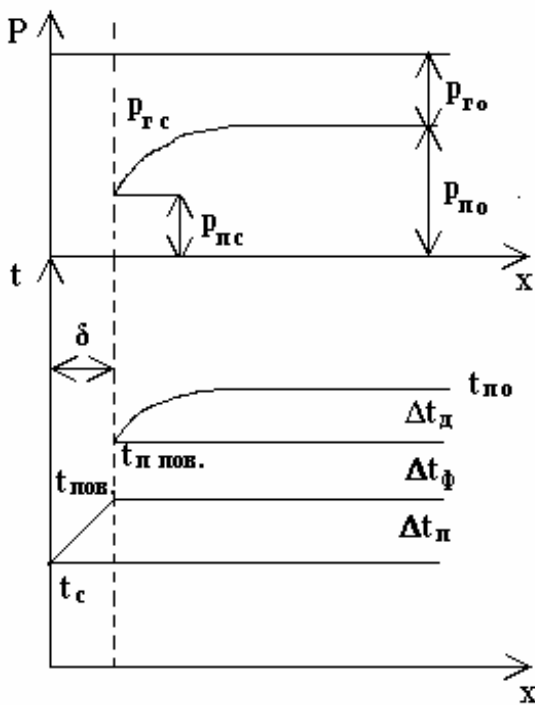


Рисунок 11.2 – Конденсация пара из парогазовой смеси.

Суммарное термическое сопротивление переносу теплоты можно представить как сумму термических сопротивлений пленки конденсата, фазового перехода и диффузионного переноса теплоты совместно с массой пара, т.е. $R_{\Sigma} = R_{\text{п}} + R_{\phi} + R_{\text{д}}$. Этим сопротивлениям соответствуют разности температуры, сумма которых равна полной разности температуры, т.е.

$$\Delta t = t_{\text{п.о.}} - t_{\text{ст}} = \Delta t_{\text{п}} + \Delta t_{\phi} + \Delta t_{\text{д}}. \quad (11.31)$$

В большинстве случаев термическим сопротивлением фазового перехода можно пренебречь, и определять температуру внешней поверхности пленки конденсата по температуре насыщения пара при давлении $p_{\text{п.с}}$, т.е. $t_{\text{пов}} = t_{\text{п.пов}}$. Тогда термические сопротивления пленки

конденсата и диффузионного переноса массы могут быть представлены в виде

$$R_{\text{п}} = 1/\alpha_{\text{к}}, \quad R_{\text{д}} = 1/[\alpha + b_p r (p_{\text{п.о.}} - p_{\text{п.с}})/(t_{\text{п.о.}} - t_{\text{пов}})] \quad (11.32)$$

где: $\alpha_{\text{к}}$ – коэффициент теплоотдачи при конденсации чистого пара, α – коэффициент теплоотдачи от паровоздушной смеси к пленке конденсата. Тогда суммарный коэффициент теплоотдачи может быть представлен в виде:

$$\alpha_{\Sigma} = \frac{1}{1/\alpha_{\text{к}} + 1/[\alpha + r b_p (p_{\text{п.о.}} - p_{\text{п.с}})/(t_{\text{п.о.}} - t_{\text{пов}})]}. \quad (11.33)$$

Исследования массоотдачи при конденсации пара из паровоздушной смеси на одиночных трубках и пучках труб, проведенные в МЭИ под руководством Л.Д. Бермана, позволили получить обобщенную зависимость для коэффициента массоотдачи в виде:

$$\text{Nu}_D = C \text{Re}^{0,8} \Pi_D^{-1/3} \varepsilon_r^{-0,6}, \quad (11.34)$$

где Π_D и ε_r оговорены выше. Постоянная в уравнении принимается: $C = 0,47$ – для одиночной трубки; $C = 0,53$ – для первого ряда пучка; $C = 0,82$ – для последующих рядов труб. Уравнение справедливо при $350 < \text{Re} < 4800$.

При $40 < \text{Re} < 350$ для глубинных рядов пучка можно использовать уравнение

$$\text{Nu}_D = 0,52 \text{Re}^{0,5} \Pi_D^{-1/3} \varepsilon_r^{-0,6}. \quad (11.35)$$

В этих уравнениях критерий Рейнольдса рассчитывается по скорости парогазового потока перед трубкой или рядом труб. Определяющий размер – диаметр трубки. Физические параметры смеси определяются по состоянию перед трубкой. В частности коэффициент динамической вязкости:

$$M_{\text{см}} = \frac{(1 - \varepsilon_r)M_{\text{п}} + 1,6\varepsilon_r M_{\text{г}}}{1 + 1,6\varepsilon_r}. \quad (11.36)$$

Аналогично можно определить и остальные теплофизические параметры смеси.

В практических расчетах конденсации пара из парогазовой смеси влиянием теплоотдачи от пара к пленке конденсата можно пренебречь, как и теплотой переохлаждения конденсата. Тогда, из (11.33) следует, что для расчета суммарного коэффициента теплоотдачи можно не учитывать α , но необходимо знать парциальное давление пара у поверхности пленки конденсата $p_{\text{п.с}}$. Последнее существенно зависит от интенсивности диффузии, скорости стефанового потока и т.д.

Кроме того, по этому давлению определяется и температура поверхности пленки конденсата. Найти это давление можно только последовательными приближениями теплового баланса в виде:

$$r b_p (p_{\text{п.о.}} - p_{\text{п.с}}) = \alpha_k (t_{\text{пов}} - t_{\text{ст}}). \quad (11.37)$$

Очевидно, что подобный расчет сложнее расчета конденсации чистого пара.

Вопросы для самопроверки

1. *Дайте определение процесса диффузии. Что является движущей силой этого процесса?*
2. *Сформулируйте и запишите гипотезу (закон) Фика.*
3. *Дайте определение коэффициента диффузии. Его свойства.*
4. *Каковы механизмы переноса массы в движущейся среде? Запишите плотность потока массы.*
5. *Что такое «массоотдача»? Запишите и поясните плотность потока массы в процессе массоотдачи.*
6. *Дайте определение коэффициента массоотдачи.*
7. *Каковы особенности массопереноса на полунепроницаемой поверхности?*
8. *Причины возникновения «стефанового» потока. Скорость*

«стефанового» потока.

9. Влияние «стефанового» потока массы на диффузионный перенос массы.

Корректировка закона Фика.

10. Уравнение массоотдачи, его отличие от уравнения теплоотдачи.

11. Принцип и следствия «тройной аналогии».

12. Принцип расчета теплообмена и массообмена при конденсации пара из парогазовой смеси. Особенности расчета.

12. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ТЕЛ ПРОСТЫХ ФОРМ

Задачи нестационарной теплопроводности – это исследование процессов нагревания и охлаждения тел, которые связаны с термоупругим состоянием, т.е. с термическими напряжениями, возникающими в теле при его нагревании или охлаждении. Поэтому современный инженер обязан владеть вопросами постановки и решения задач нестационарной теплопроводности.

Математическая постановка задачи нестационарной теплопроводности включает:

- дифференциальное уравнение теплопроводности (Фурье),
- условия однозначности решения для конкретной задачи.

Рассмотрим особенности процесса нагревания – охлаждения тел при граничных условиях третьего рода.

12.1. Термически тонкие тела

Запишем граничные условия третьего рода в виде

$$-\lambda(dt/dn)_n = \alpha(t_c - t_n). \quad (12.1)$$

Введем избыточную температуру $\vartheta_0 = t_c - t_n$, тогда $dt/dn = -d\vartheta/dn$, и граничные условия представятся в виде

$$\lambda(d\vartheta/dn)_n = \alpha\vartheta_0. \quad (12.2)$$

Воспользовавшись методами теории подобия, из (12.2) получим обобщенную переменную, называемую критерием Био

$$Bi = \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{L/\lambda}{1/\alpha}. \quad (12.3)$$

По физическому смыслу критерий Био представляет собою меру отношения термического сопротивления теплопроводности тела к термическому сопротивлению теплоотдачи с поверхности тела. Представив $N = n/L$, из (12.2) получим

$$(d\vartheta/dN)_{n=0} = Bi \vartheta_0. \quad (12.4)$$

Если $Bi \rightarrow 0$ (практически достаточно, чтобы $Bi < 0,1$), что имеет место при малых L , т.е. для тел малой толщины (размера), или при больших λ , т.е. для тел с высоким коэффициентом теплопроводности (чаще всего – металлы), то из (12.4) следует, что $d\vartheta/dN \rightarrow 0$, следовательно, градиент температуры по толщине тела пренебрежимо мал и им можно пренебречь. Тела, у которых градиентом температуры по толщине можно пренебречь, называются

термически тонкими телами.

Для термически тонкого тела (далее просто **тонкого тела**) изменение температуры при нагревании или охлаждении можно найти из уравнения теплового баланса. Пусть тонкое тело нагревается внутренними источниками теплоты с объемной плотностью тепловыделения q_v и находится в среде с постоянной температурой. Полагаем коэффициент теплоотдачи с поверхности тела в среду также постоянным. Объем тела V , его поверхность F . Тогда уравнение теплового баланса можно представить в виде

$$c\rho V \frac{dt}{d\tau} = q_v V - \alpha F(t - t_c), \quad (12.5)$$

где c, ρ - соответственно теплоемкость и плотность. По смыслу левый член уравнения (12.5) представляет собою изменение внутренней энергии тела. Первое слагаемое правой части – теплота, выделенная внутренними источниками в объеме тела, второе – теплота, отданная с поверхности тела в среду.

В стационарном состоянии изменение внутренней энергии не происходит, и из (12.5) получим стационарную температуру тела в конце процесса нагревания

$$q_v V = \alpha F(t_{уст} - t_c). \quad (12.6)$$

Подставим (12.6) в (12.5) и разделим обе части равенства на $(t_{уст} - t_c)$. Обозначим

$$\Theta = (t_{уст} - t) / (t_{уст} - t_c). \quad (12.7)$$

Уравнение (12.5) с учетом (12.7) представится в виде

$$-\frac{d\Theta}{d\tau} = \frac{\alpha F}{c\rho V} \Theta, \quad (12.8)$$

где $m = \frac{\alpha F}{c\rho V}$ называют темпом нагревания (охлаждения) тела. При постоянных

теплофизических характеристиках тела и постоянном коэффициенте теплоотдачи темп нагревания также является постоянным. Разделив переменные в (12.8) и интегрируя, получим при постоянном темпе нагрева

$$\Theta = e^{-m\tau}. \quad (12.9)$$

Таким образом, при нагревании тонкого тела внутренними источниками теплоты в среде с постоянной температурой при постоянном темпе нагрева относительная избыточная температура изменяется по экспоненте.

Прологарифмировав (12.9), получим

$$\ln(\Theta) = -m\tau, \quad (12.10)$$

откуда следует, что в полулогарифмических координатах график нагрева тонкого тела представляется прямой линией с тангенсом угла наклона к оси τ равным темпу нагрева.

Тепловой баланс тонкого тела при охлаждении от некоторой температуры $t_{уст}$ в среде с постоянной температурой можно записать в виде

$$-c\rho V \frac{dt}{d\tau} = \alpha F(t - t_c), \quad (12.11)$$

т.е. уменьшение внутренней энергии тела равно тепловому потоку, отданному с поверхности тела в среду. При относительной избыточной температуре тела в виде

$$\Theta = (t - t_c)/(t_{уст} - t_c), \quad (12.12)$$

уравнение (12.11) преобразуется в (12.8). Следовательно, решение уравнения (12.11) совпадает с решением уравнения (12.8), и все, сказанное выше для процесса нагрева, справедливо для процесса охлаждения тонкого тела.

Если в процессе нагревания или охлаждения тонкого тела коэффициент теплоотдачи оказывается переменным, то график изменения $\ln(\Theta) - \tau$ оказывается не линейной зависимостью. Тогда, проведя касательную к графику в определенной точке (при τ_1), можно определить локальный темп нагревания (охлаждения) как тангенс угла наклона касательной к оси τ .

Метод нагревания – охлаждения тонкого тела в среде с постоянной температурой эффективно используется для определения коэффициента теплоотдачи тел различных форм.

11.2. Нагревание и охлаждение термически толстых тел

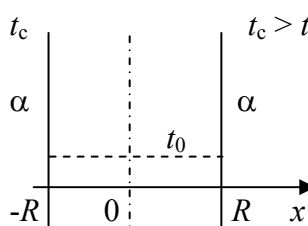
11.2.1. Неограниченная пластина

Напомним, что неограниченной пластиной называется тело, у которого один размер конечен, а два других – бесконечно велики. Рассмотрим задачу определения температурного поля и количества аккумулированной теплоты при нагреве пластины от начальной температуры t_0 в среде с постоянной температурой $t_c > t_0$ при постоянном коэффициенте теплоотдачи и постоянных теплофизических характеристиках материала.

Пусть толщина пластины равна $2R$, а нагревание симметрично, т.е. температура среды и интенсивность теплообмена с обеих сторон пластины одинаковы. Расположим начало координат в центре пластины (рис.12.1), а ось x направим нормально к поверхности пластины.

В этом случае математическую формулировку задачи можно представить следующим образом.

Отыскивается решение уравнения теплопроводности



$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (12.13)$$

в области $0 \leq x \leq R, \tau > 0$, граничные условия:

$$\text{при } x = 0 \quad \partial t / \partial x = 0, \quad (12.14)$$

$$\text{при } x = R \quad \lambda(\partial t / \partial x) = \alpha(t_c - t), \quad (12.15)$$

начальное условие:

$$\text{при } \tau = 0 \quad t = t_0. \quad (12.16)$$

Рисунок 12.1 – Симметричный нагревание пластины при ГУ 3-го рода

Перейдем от температуры t к избыточной температуре $\vartheta = t_c - t$. Легко показать, что

уравнение (12.13) преобразуется в

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \quad (12.17)$$

а начальное условие и граничные условия представятся в виде

$$\tau = 0 \quad \vartheta = \vartheta_0 = t_c - t_0, \quad (12.18)$$

$$x = 0 \quad \partial \vartheta / \partial x = 0, \quad (12.19)$$

$$x = R \quad -\lambda(\partial \vartheta / \partial x) = \alpha \vartheta. \quad (12.20)$$

Для решения (12.17) используем метод разделения переменных (метод Фурье), для чего представим избыточную температуру в виде

$$\vartheta(x, \tau) = \vartheta_1(\tau) \cdot \vartheta_2(x). \quad (12.21)$$

Тогда уравнение (12.17) представится в виде

$$\vartheta_1'(\tau) / \vartheta_1(\tau) = a \vartheta_2''(x) / \vartheta_2(x) = -a \cdot k^2. \quad (12.22)$$

Таким образом, из (12.17) получаем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\vartheta_1'(\tau) = -a \cdot k^2, \quad (a) \quad \vartheta_2''(x) = -k^2 \vartheta_2(x). \quad (b)$$

Общее решение уравнения (a) имеет вид

$$\vartheta_1(\tau) = C \cdot e^{-ak^2\tau}, \quad (12.23)$$

где C – постоянная интегрирования.

Уравнению (b) удовлетворяют тригонометрические синус и косинус, тогда общее решение может быть представлено, как сумма этих функций, т.е.

$$\vartheta_2(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx). \quad (12.24)$$

Таким образом, общее решение (12.17) на основании (12.21) представляется в виде

$$\vartheta(x, \tau) = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] \cdot e^{-ak^2\tau}, \quad (12.25)$$

где A , B и k – неизвестные постоянные, которые должны быть определены на основании краевых условий задачи (12.18) – (12.20).

Из (12.19) следует, что в (12.25) $B \equiv 0$. Тогда (12.25) преобразуется в

$$\vartheta(x, \tau) = A \cos(kx) \cdot e^{-ak^2\tau}. \quad (12.26)$$

Для определения постоянной интегрирования k воспользуемся условием (12.20), предварительно продифференцировав (12.26). Получим

$$\lambda A k \sin(kR) \cdot e^{-ak^2\tau} = \alpha A \cos(kR) \cdot e^{-ak^2\tau}. \quad (12.27)$$

Сократив подобные члены в (12.27), и обозначив $\mu = kR$ и $Bi = \alpha R / \lambda$, после несложных преобразований получим уравнение для определения постоянной интегрирования k или μ

$$\operatorname{ctg}(\mu) = \mu / Bi. \quad (12.28)$$

Для решения (12.28) обозначим левую часть уравнения y_1 , правую – y_2 . Построим зависимость y_1 и y_2 от μ (рис.12.2). Первое уравнение представляет собою котангенсоиду, второе – прямую, с углом наклона к оси μ пропорциональным $1/Bi$. Точки пересечения графиков y_1 и y_2 дадут значения корней уравнения (12.28). Из периодичности котангенса следует, что уравнение

(12.28) имеет бесконечное количество корней, удовлетворяющих соотношению

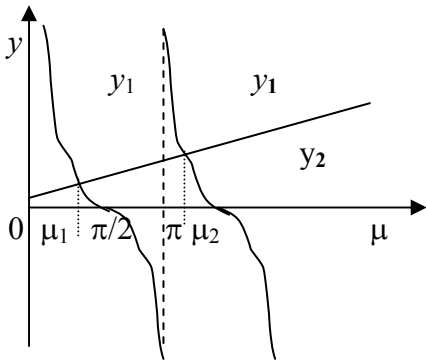
$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots \quad (12.29)$$


Рисунок 12.2 – Схема решения уравнения (12.28)

Очевидно, в силу (12.29), имеется бесконечное количество частных решений вида (12.26), а общее решение уравнения (12.17) должно быть записано как сумма частных решений. Получим

$$\vartheta(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (12.30)$$

где $Fo = \frac{a\tau}{R^2}$ – критерий Фурье (критерий временного подобия).

Для определения постоянных A_n воспользуемся начальным условием (12.18). Откуда

следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) = \vartheta_0. \quad (12.31)$$

Умножим обе части (12.31) на $\cos\left(\mu_m \frac{x}{R}\right) dx$ и проинтегрируем по x от 0 до R (в силу симметрии задачи). Учитывая очевидное соотношение

$$\cos(a)\cos(b) = 0,5[\cos(a-b) + \cos(a+b)], \quad (12.32)$$

при $\mu_n \neq \mu_m$ интеграл, стоящий в левой части (12.31) представляется в виде

$$I = \int_0^R \cos(\mu_n x/R) \cos(\mu_m x/R) dx,$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{R}{\mu_n - \mu_m} \sin(\mu_n - \mu_m) + \frac{R}{\mu_n + \mu_m} \sin(\mu_n + \mu_m) \right],$$

или после несложных преобразований, учитывая (12.28)

$$I = \frac{R}{\mu_n^2 - \mu_m^2} [\mu_n \sin(\mu_n) \cos(\mu_m) - \mu_m \sin(\mu_m) \cos(\mu_n)].$$

Очевидно, что на основании (12.28) все интегралы, стоящие под знаком суммирования равны 0, за исключением одного, когда $\mu_n = \mu_m$. Последний интеграл легко вычисляется

$$A_n \int_0^R \cos^2\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) dx = A_n \frac{R}{2\mu_n} [\mu_n + \sin(\mu_n) \cos(\mu_n)]. \quad (12.33)$$

Интеграл, стоящий в правой части (12.31) после умножения ее на $\cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) dx$ достаточно тривиален

$$\vartheta_0 \int_0^R \cos\left(\mu_m \frac{x}{R}\right) dx = \vartheta_0 \frac{R}{\mu_n} \sin(\mu_n). \quad (12.34)$$

Тогда

$$A_n = \vartheta_0 \frac{2\sin(\mu_n)}{\mu_n + \sin(\mu_n)\cos(\mu_n)}. \quad (12.35)$$

Обозначив $\Theta = \frac{t - t_0}{t_c - t_0}$, подставив (12.35) в (12.30), после простых преобразований получим окончательное решение поставленной задачи

$$\Theta = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) e^{-\mu_n^2 Fo}. \quad (12.36)$$

В (12.36) A_n называют «**начальные тепловые амплитуды**», величина которых зависит от критерия Bi и порядкового номера.

$$A_n = \frac{2\sin(\mu_n)}{\mu_n + \sin(\mu_n)\cos(\mu_n)}. \quad (12.37)$$

Следует отметить, что разница между двумя корнями уравнения (12.28) при увеличении номера корня стремиться к $\pi/2$. Поэтому A_n являются знакопеременными, и $A_1 > 0$.

Проведем некоторый анализ уравнения (12.36).

1. Пусть $Bi \rightarrow \infty$ (практически достаточно, чтобы $Bi > 100$). Тогда из уравнения (12.28) следует, что его корнями являются корни косинуса, т.е.

$$\mu_n = (2n - 1)\pi / 2, \quad (12.38)$$

а начальные тепловые амплитуды знакопеременны и не зависят от Bi

$$A_n = (-1)^{n-1} \frac{4}{(2n - 1)\pi}. \quad (12.39)$$

В этом случае скорость нагревания пластины

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{a}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4}{(2n - 1)\pi} \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) e^{-\mu_n^2 Fo} \quad (12.40)$$

пропорциональна коэффициенту температуропроводности и обратно пропорциональна квадрату размера пластины.

2. Пусть $Bi \rightarrow 0$ (практически достаточно, чтобы $Bi < 0,1$). Тогда из уравнения (12.28) следует, что $\mu_1 \rightarrow 0$, а остальные корни $\mu_n \rightarrow (n - 1)\pi$. Из (12.35) следует, что $A_1 \rightarrow 1$, а остальные начальные тепловые амплитуды $A_n \rightarrow 0$. Из (12.28) следует, что при малых Bi с достаточной точностью $\mu_1^2 \approx Bi$. Тогда уравнение (12.36) преобразуется в

$$\Theta = 1 - e^{-Bi Fo}, \quad (12.41)$$

т.е. нагревание пластины подчиняется закономерности нагревания «**тонкого тела**» с темпом нагревания

$$m = Bi \cdot Fo = \frac{\alpha}{c\rho R}. \quad (12.42)$$

Для определения количества теплоты, аккумулированной пластиной при ее нагревании, воспользуемся очевидным соотношением

$$Q = c\rho V(\bar{t} - t_0), \quad (12.43)$$

где V - объем пластины (при поверхности пластины $F = 1 \text{ м}^2$ $V = 2R$), \bar{t} –

средняя температура пластины в данный момент времени. Обозначим

$$\bar{\Theta} = (\bar{t} - t_0)/(t_c - t_0). \quad (12.44)$$

Тогда (12.43) может быть записано в виде

$$Q = 2c\rho R\bar{\Theta}(t_c - t_0), \quad (12.45)$$

где

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{R} \int_0^R \Theta(x) dx. \quad (12.46)$$

Используя (12.36), вычислим интеграл (12.46). Получим после простых преобразований

$$\bar{\Theta} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (12.47)$$

где

$$B_n = \frac{A_n \sin(\mu_n)}{\mu_n}, \quad (12.48)$$

а A_n определены выше.

12.3. Нагревание неограниченного сплошного цилиндра

Рассмотрим процесс нагревания неограниченного сплошного цилиндра наружного радиуса R от начальной температуры t_0 в среде постоянной температуры $t_c > t_0$ при постоянном коэффициенте теплоотдачи с боковой поверхности цилиндра, как по периметру, так и по высоте цилиндра. Введя в рассмотрение, как это было сделано ранее, избыточную температуру

$$\vartheta(r, \tau) = t_c - t(r, \tau), \quad (12.49)$$

математическую формулировку задачи можно представить в следующем виде.

Отыскивается решение уравнения

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right), \quad (12.50)$$

в области $0 \leq r \leq R, \tau > 0$, при начальном условии

$$\tau = 0 \quad \vartheta = \vartheta_0 = t_c - t_0, \quad (12.51)$$

и граничных условиях:

$$r = 0, \quad \partial \vartheta / \partial r = 0, \quad (12.52)$$

$$r = R, \quad -\lambda(\partial \vartheta / \partial r) = \alpha \vartheta. \quad (12.53)$$

Используем, как и в предыдущем случае, метод Фурье (разделения переменных). Будем считать, что

$$\vartheta(r, \tau) = \vartheta_1(\tau) \cdot \vartheta_2(r). \quad (12.54)$$

Тогда уравнение (12.50) может быть представлено в виде

$$\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} = a \frac{\vartheta_2'' + (1/r)\vartheta_2'}{\vartheta_2} = -a \cdot k^2. \quad (12.55)$$

Как и в случае для пластины, из (12.55) получается два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\vartheta_1' + ak^2\vartheta_1 = 0, \quad (12.56)$$

$$\vartheta_2'' + \frac{1}{r}\vartheta_2' + k^2\vartheta_2 = 0. \quad (12.57)$$

Общее решение уравнения (12.56) известно из предыдущего.

$$\vartheta_1(\tau) = Ae^{-ak^2\tau}. \quad (12.58)$$

Уравнение (12.57) является уравнением Бесселя нулевого порядка. Его общее решение имеет вид

$$\vartheta_2(r) = AJ_0(kr) + BY_0(kr), \quad (12.59)$$

где $J_0(kr)$, $Y_0(kr)$ – функции Бесселя соответственно первого и второго рода нулевого порядка. Общее решение поставленной задачи на основании (12.54) запишется в виде

$$\vartheta(r, \tau) = [AJ_0(kr) + BY_0(kr)]e^{-ak^2\tau}. \quad (12.60)$$

Постоянные интегрирования A , B , k определяются из краевых условий. Из условия (12.52), учитывая, что $J_0'(kr) = -kJ_1(kr)$, $Y_0'(kr) = -kY_1(kr)$, и при $r \rightarrow 0$ $Y_1 \rightarrow -\infty$, а $J_1 \rightarrow 0$ следует, что $B \equiv 0$. Тогда (12.60) преобразуется в

$$\vartheta(r, \tau) = AJ_0(kr)e^{-ak^2\tau}. \quad (12.61)$$

Используем условие (12.53). Получим, учитывая производную от Бесселевой функции первого рода нулевого порядка

$$\lambda AkJ_1(kR)e^{-ak^2\tau} = \alpha AJ_0(kR)e^{-ak^2\tau},$$

или, сократив полученное уравнение и обозначив $kR = \mu$, а $Bi = \alpha R/\lambda$ (как и ранее),

$$\frac{\mu}{Bi} = \frac{J_1(\mu)}{J_0(\mu)}. \quad (12.62)$$

Полученное уравнение аналогично уравнению для неограниченной пластины, только вместо котангенса стоит отношение функций Бесселя первого рода первого и нулевого порядков. Эти функции могут быть представлены в виде ряда

$$J_0(\mu) = 1 - \frac{\mu^2}{2^2} + \frac{\mu^4}{2^2 4^2} - \frac{\mu^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots,$$

$$J_1(\mu) = \frac{\mu}{2} - \frac{\mu^3}{2^2 4} + \frac{\mu^5}{2^2 4^2 6} - \dots,$$

откуда следует, что функция Бесселя первого рода нулевого порядка аналогична косинусу (но с переменным периодом и уменьшающейся амплитудой), а та же функция первого порядка аналогична синусу. Т.е. график функции, стоящей в правой части уравнения (12.62) подобен графику котангенса. Очевидно, что решение (12.62) подобно решению аналогичного характеристического уравнения неограниченной пластины и имеет бесконечное множество корней, удовлетворяющих соотношению

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots. \quad (12.63)$$

Таким образом, уравнение (12.50) имеет бесконечное множество частных

решений вида (12.61) и общее решение будет:

$$\vartheta(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (12.64)$$

где постоянные интегрирования A_n подлежат определению.

Учитывая ортогональность функций Бесселя с весом r , запишем начальное условие (12.51) для решения (12.64), умножим обе части равенства на $r J_0\left(\mu_m \frac{r}{R}\right) dr$ и проинтегрируем от 0 до R .

Получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^R r A_n J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) J_0\left(\mu_m \frac{r}{R}\right) dr = \int_0^R \vartheta_0 r J_0\left(\mu_m \frac{r}{R}\right) dr. \quad (12.65)$$

При $\mu_m \neq \mu_n$ интеграл, стоящий в левой части (12.65), равен нулю (по ортогональности функций Бесселя и (12.62)). Тогда после интегрирования при $\mu_m = \mu_n$ получим

$$A_n = \vartheta_0 \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_0(\mu_n)^2 + J_1(\mu_n)^2]} = \vartheta_0 \frac{2Bi}{J_0(\mu_n)(\mu_n^2 + Bi^2)}. \quad (12.66)$$

Подставив полученное значение A_n в (12.64) и обозначив

$$\Theta = \frac{t(r, \tau) - t_0}{t_c - t_0}, \quad (12.67)$$

получим

$$\Theta = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (12.68)$$

где начальные тепловые амплитуды

$$A_n = \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_0(\mu_n)^2 + J_1(\mu_n)^2]} = \frac{2Bi}{J_0(\mu_n)(\mu_n^2 + Bi^2)}. \quad (12.69)$$

Проведем некоторый анализ уравнения (12.69).

Пусть $Bi \rightarrow \infty$ (практически достаточно, чтобы $Bi > 100$). Тогда из уравнения (12.62) следует, что его корнями являются корни $J_0(\mu)$ и не зависят от Bi . Скорость нагревания цилиндра в этом случае, как и при нагревании пластины, пропорциональна коэффициенту температуропроводности и обратно пропорциональна квадрату радиуса цилиндра.

Пусть $Bi \rightarrow 0$ (практически достаточно, чтобы $Bi < 0,1$). Тогда из (12.62), учитывая разложение в ряд Бесселевых функций, получается, что $\mu_1 \approx \sqrt{2Bi}$, а остальные корни (12.62) совпадают с корнями $J_1(\mu)$. Начальные тепловые амплитуды $A_1 = 1, A_2 = A_3 = \dots = 0$. Решение (12.68), учитывая, что при малом μ_1 $J_0(\mu_1 r/R) = 1$, преобразуется в

$$\Theta = 1 - e^{-2 Bi Fo}, \quad (12.70)$$

что соответствует нагреванию «тонкого тела», а темп нагревания цилиндра при тех же условиях в два раза выше, чем пластины.

Для определения количества теплоты, аккумулированной единицей

длины цилиндра, воспользуемся очевидным соотношением

$$Q = c\rho\pi R^2(\bar{t} - t_0) = c\rho\pi R^2\bar{\Theta}(t_c - t_0). \quad (12.71)$$

Среднюю относительную температуру цилиндра найдем как

$$\bar{\Theta} = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \Theta(r) dr. \quad (12.72)$$

После интегрирования получим:

$$\bar{\Theta} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (12.73)$$

где

$$B_n = \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n} A_n = \frac{4Bi^2}{\mu_n^2(\mu_n^2 + Bi^2)}. \quad (12.74)$$

Задачи к разделам 12.1-12.3

1. Стальная ($\lambda=45$ Вт/(мК); $c=550$ Дж/(кгК); $\rho=7800$ кг/м³) труба $d_1/d_2 = 110/100$ мм нагретая до $t_0 = 400^\circ\text{C}$ охлаждается в помещении $t_b = 20^\circ\text{C}$. Определить время охлаждения трубы до $t = 200^\circ\text{C}$, если степень черноты поверхности трубы $\varepsilon = 0,7$.

Комментарий к задаче. Для определения режима охлаждения (тонкое тело или нет) следует найти критерий Bi . Вычислим коэффициент теплоотдачи в начале α_1 и в конце α_2 процесса охлаждения по (7.17) при $\Delta t_1 = t_0 - t_b$ и $\Delta t_2 = t - t_b$. В расчет примем $\bar{\alpha} = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$. Учет лучистого теплообмена проведем с помощью приведенного коэффициента теплоотдачи излучением, определяемого как $\alpha_{\text{л}} = q_{\text{л}}/\Delta t$. Плотность теплового потока излучением найдем по (10.67) в начале и в конце процесса охлаждения и, соответственно, $\alpha_{\text{л}}$ также в начале и конце процесса. В расчет примем среднее значение. Суммарный коэффициент теплоотдачи $\alpha_{\Sigma} = \bar{\alpha} + \bar{\alpha}_{\text{л}}$. Критерий $Bi = \bar{\alpha}_{\Sigma}\delta/\lambda$, где δ – толщина стенки трубы. Если $Bi < 0,1$, то труба охлаждается как тонкое тело. Из (12.41) получаем (пренебрегая кривизной стенки трубы) $\Theta = \Delta t_2 / \Delta t_1 = e^{-BiFo}$, откуда находим $Fo = a\tau/\delta^2$ и время охлаждения.

2. Стальная заготовка ($c = 400$ Дж/(кгК), $\rho = 7800$ кг/м³, $\lambda = 40$ Вт/(мК)) диаметром 40мм помещена в поперечный поток топочных газов ($p_{\text{CO}_2} = 0,12$; $p_{\text{H}_2\text{O}} = 0,14$ бар) $t_r = 300^\circ\text{C}$, $w = 10$ м/с. Начальная температура заготовки $t_0 = 20^\circ\text{C}$, ее степень черноты $\varepsilon = 0,8$. Определить время нагревания заготовки до 200°C . Принять $l_{\text{эфф}} = 0,4$ м.

Комментарий к задаче. Используйте комментарий к предыдущей задаче. Коэффициент теплоотдачи – по (6.1), полагая $\varepsilon_r = 1$. Плотность лучистого теплового потока – по (10.89) для начала и конца процесса нагревания, средний тепловой поток и, соответственно, средний коэффициент теплоотдачи излучением. По $\bar{\alpha}_{\Sigma}$ находим $Bi = \bar{\alpha}_{\Sigma}R/\lambda$ и режим нагревания (тонкое тело или нет). Если тело тонкое – из (12.70) при $\Theta = (t - t_0)/(t_r - t_0)$ находим Fo и время нагревания.

3. Керамическая плита ($\lambda = 1$ Вт/(мК); $c = 1$ кДж/(кгК); $\rho = 2500$ кг /м³) толщиной $2\delta = 80$ мм нагревается в печи ($t_{\text{п}} = 600^\circ\text{C}$) от температуры $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Степень черноты поверхности плиты $\varepsilon = 0,7$. Считая печное пространство

абсолютно черным, определить температуру поверхности и центра плиты через 0,6 часа от начала нагревания.

Комментарий к задаче. Т.к. в печном пространстве имеет место только лучистый перенос теплоты, по (10.67) найдем плотность теплового потока и коэффициент теплоотдачи излучением (см. задачу 1). Определим критерий Bi и тип процесса нагревания. Если $Bi > 0,1$, то для расчета распределения температуры по плите (считая ее бесконечной пластиной) используем (12.36). Для оценки количества членов ряда в (12.36), которые необходимо удерживать при вычислениях, рассчитаем критерий $Fo = a\tau/\delta^2$. При $Fo > 0,4$ достаточно удерживать только 1 член ряда. Первый корень характеристического уравнения (12.28) найдем в [3] по значению Bi , либо приближенным (численным) решением этого уравнения. Из (12.36), полагая $R = \delta$, при $x = \delta$ найдем температуру поверхности плиты в конце нагревания $t(\delta, \tau) = t_0 + \Theta(t_n - t_0)$. По найденной температуре рассчитаем плотность лучистого потока и коэффициент теплоотдачи излучением в конце процесса нагревания (см. выше). По среднему за период нагревания коэффициенту теплоотдачи пересчитаем критерий Bi и повторим вычисления температуры поверхности и центра плиты (см. выше).

12.4. Нагревание цилиндра конечной длины

Рассмотрим нагревание цилиндра радиуса R высотой $2H$ от начальной температуры t_0 в среде с температурой t_c при постоянной интенсивности теплообмена на всех поверхностях. Расположим начало координат в центре цилиндра. Ось r направим нормально к боковой поверхности цилиндра, ось z совместим с осью цилиндра. Математическая формулировка задачи для избыточной температуры $\vartheta = t_c - t$ может быть представлена в виде.

Отыскивается решение уравнения:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right]. \quad (12.75)$$

в области $0 \leq r \leq R$, $0 \leq z \leq H$, $\tau > 0$ при начальном условии

$$\vartheta(r, z, 0) = \vartheta_0 = t_c - t_0, \quad (12.76)$$

и граничных условиях:

$$\frac{\partial \vartheta(0, z, \tau)}{\partial r} = 0, \text{ (симметрия по } r) \quad (12.77)$$

$$\frac{\partial \vartheta(r, 0, \tau)}{\partial z} = 0, \text{ (симметрия по } z) \quad (12.78)$$

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta(R, z, \tau)}{\partial r} = \alpha \vartheta(R, z, \tau), \quad (12.79)$$

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta(r, H, \tau)}{\partial z} = \alpha \vartheta(r, H, \tau). \quad (12.80)$$

Докажем, что решение поставленной задачи может быть найдено как произведение решений для неограниченного цилиндра и для неограниченной пластины. Т.е.

$$\vartheta(r, z, \tau) = t_c - t(r, z, \tau) = \vartheta_1(r, \tau) \vartheta_2(z, \tau), \quad (12.81)$$

где $\vartheta_1(r, \tau) = t_c - t(r, \tau)$, $\vartheta_2(z, \tau) = t_c - t(z, \tau)$

Подставив (12.81) в (12.75) и учитывая, что $\vartheta_1(r, \tau)$ есть решение для неограниченного цилиндра, а $\vartheta_2(z, \tau)$ есть решение для неограниченной пластины, после дифференцирования получим:

$$\left[\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \dots \tau} - a \left(\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial r} \right) \right] \vartheta_2 + \left[\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial z^2} \right] \vartheta_1 = 0 . \quad (12.82)$$

Выражения, стоящие в квадратных скобках, равны нулю, т.к. они представляют, соответственно, дифференциальные уравнения для неограниченного цилиндра и пластины. Следовательно, выражение (12.81) представляет собою решение исходного уравнения

Рассмотрим, как (12.81) удовлетворяет граничные условия. Для этого подставим (12.81) в (12.77). Получим

$$(\partial \vartheta_1(0, \tau) / \partial r) \vartheta_2(z, \tau) = 0 . \quad (12.83)$$

Для удовлетворения условия (12.83) при любом значении z , необходимо, чтобы

$$\partial \vartheta_1(0, \tau) / \partial r = 0 . \quad (12.84)$$

Последнее представляет собою условие симметрии для неограниченного цилиндра.

Подставим (12.81) в (12.77). Получим:

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta_1(R, \tau)}{\partial r} \vartheta_2(z, \tau) = \alpha \vartheta_1(R, \tau) \vartheta_2(z, \tau) , \quad (12.85)$$

а, сократив на $\vartheta_2(z, \tau) \neq 0$, получим граничное условие для неограниченного цилиндра.

Поступив подобным образом с условиями (12.78) и (12.80), получим, что $\vartheta_2(z, \tau)$ удовлетворяет граничным условиям для неограниченной пластины.

Таким образом, (12.81) является решением для цилиндра конечной длины. Перейдя к относительной безразмерной температуре, получим в развернутом виде:

$$\Theta(r, z, \tau) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) e^{-\mu_n^2 \text{Fo}_R} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\left(\mu_m \frac{z}{H}\right) e^{-\mu_m^2 \text{Fo}_H} ,$$

где $\text{Fo}_R = a\tau/R^2$, $\text{Fo}_H = a\tau/H^2$. Иначе полученное решение можно записать

$$\Theta(r, z, \tau) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_n A_m J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cos\left(\mu_m \frac{z}{H}\right) e^{-\left(\mu_n^2 + \mu_m^2 \frac{R^2}{H^2}\right) \text{Fo}_R} . \quad (12.86)$$

13.5. Анализ обобщенного решения. Регулярный режим

Сопоставляя решения задачи нестационарной теплопроводности пластины и цилиндра, можно заметить, что общая структура решения в относительных температурах одинакова и отличается только выражением для начальных тепловых амплитуд и базовыми функциями, используемыми в решении (косинус – для пластины, функция Бесселя – для цилиндра). Поэтому

в общем виде решение задачи нестационарной теплопроводности можно представить как

$$\Theta(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Phi\left(\mu_n \frac{\xi}{R}\right) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (12.87)$$

где A_n – начальные тепловые амплитуды, $\Phi\left(\mu_n \frac{\xi}{R}\right)$ – базовая функция задачи, определяющая распределение температуры по координате ξ , R – характерный размер тела, μ_n – корни соответствующего характеристического уравнения, подчиняющиеся неравенству

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots \quad (12.88)$$

В силу неравенства (12.88), каждый последующий член уравнения (12.87) с ростом времени нагревания (критерия Fo) будет существенно меньше предыдущего. Поэтому, начиная с некоторого момента времени (значения критерия Fo_1), в (12.87) можно ограничиться только первым членом ряда и представить решение как

$$\Theta(\xi, \tau) = A_1 \Phi\left(\mu_1 \frac{\xi}{R}\right) e^{-\mu_1^2 Fo}. \quad (12.89)$$

Логарифмируя (12.89), получим

$$\ln[\Theta(\xi, \tau)] = \ln\left[A_1 \Phi\left(\mu_1 \frac{\xi}{R}\right)\right] - \mu_1^2 \frac{a\tau}{R^2}. \quad (12.90)$$

Из (12.90) следует, что зависимость логарифма избыточной температуры от времени при $Fo > Fo_1$ представляется прямой линией с углом наклона не зависящим от координаты тела. Следовательно, весь процесс нагревания (охлаждения) тела можно разделить на три стадии. Первая стадия ($Fo < Fo_1$) – неупорядоченный режим, характерен тем, что в этой стадии температурное поле тела существенно зависит от начального распределения температуры в теле. Всякая неравномерность в начальном распределении температуры отражается на температурном поле тела. Вторая стадия (при $Fo > Fo_1$) характеризуется тем, что зависимость относительной, избыточной температуры от времени описывается простой экспонентой. Эту стадию по предложению Кондратьева называют **«регулярным режимом»**. Распределение температуры в теле описывается базовой функцией и не зависит от начального распределения температуры. Третья стадия – стационарный режим, при котором температура тела равна температуре среды.

В стадии регулярного режима, продифференцировав (12.90) по времени, получим

$$\frac{d[\ln(\Theta)]}{d\tau} = -\frac{\mu_1^2 a}{R^2} = -m, \quad (12.91)$$

где m – темп нагревания (охлаждения) тела. Для тел простых форм темп нагревания (охлаждения) пропорционален первому корню характеристического уравнения (зависит от критерия Bi) и коэффициенту температуропроводности, обратно пропорционален квадрату характерного размера тела.

А.Г. Темкин показал, что задачу нагревания (охлаждения) тела сложной формы можно свести к эквивалентной задаче для тела простой формы (пластина, цилиндр, шар) путем введения критерия приближенного подобия.

Пусть $\bar{\vartheta}_V = t_c - \bar{t}_V$, $\bar{\vartheta}_n = t_c - \bar{t}_n$ – средняя, избыточная температура по объему и поверхности тела соответственно. На основании (12.91) и уравнения теплового баланса на стадии регулярного режима можно записать:

$$-c\rho V \frac{d\bar{\vartheta}_V}{d\tau} = \alpha F \bar{\vartheta}_n = c\rho V m \bar{\vartheta}_V. \quad (12.92)$$

Из (12.92), обозначив $R = V/F$, получим

$$m = \frac{\alpha}{c\rho R} \frac{\bar{\vartheta}_n}{\bar{\vartheta}_V} = \frac{\alpha}{c\rho R} \Psi = \frac{\alpha a}{\lambda R} \Psi = \frac{a}{R^2} \text{Kn}, \quad (12.93)$$

где параметрический критерий $\Psi = \bar{\vartheta}_n / \bar{\vartheta}_V$, $\text{Kn} = \Psi \text{Bi}$ – критерий Кондратьева.

Если критерий Био мал (достаточно, чтобы $\text{Bi} < 0,1$), то $\bar{\vartheta}_n \approx \bar{\vartheta}_V$, $\Psi \approx 1$ и $\text{Kn}_0 = \text{Bi}$. В этом случае $m = \alpha / (c\rho R)$, как для тонкого тела.

Если критерий $\text{Bi} \rightarrow \infty$ (достаточно $\text{Bi} > 100$), то, сопоставляя (12.93) и (12.91), получим, что для тел простых форм $\text{Kn}_\infty = \mu_1^2$, т.е. критерий Кондратьева стремится к некоторой постоянной величине, зависящей от формы тела. Тогда темп нагревания (охлаждения) для тела любой формы

$$m = \frac{a}{R^2} \text{Kn}_\infty. \quad (12.94)$$

Последнее соотношение позволило Кондратьеву с учениками разработать методы определения теплофизических характеристик различных материалов.

13. ОСНОВЫ РАСЧЕТА ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ

13.1. Классификация теплообменных аппаратов

Теплообменные аппараты – это устройства, в которых происходит нагревание одного теплоносителя за счет теплоты, отобранной от второго теплоносителя. По принципу действия эти аппараты разделяются на: рекуперативные, регенеративные, смесительные и аппараты с тепловыделяющими элементами (ТВЭЛ).

Рекуперативные – это аппараты, в которых горячий и холодный теплоносители одновременно протекают через аппарат, а их потоки разделяются твердой стенкой. Подобные аппараты широко распространены в технике и быту, а их примером является батарея отопительной системы.

Регенеративные – это аппараты, в которых одна и та же поверхность теплообмена попеременно омывается то горячим, то холодным теплоносителем. При этом вначале поверхность аппарата аккумулирует теплоту горячего теплоносителя и нагревается, а затем отдает теплоту холодному теплоносителю и охлаждается. Примером подобных устройств являются воздушонагреватели доменных печей.

Смесительные – это аппараты, в которых происходит смешение горячего

и холодного теплоносителей. Примером такого аппарата является деаэратор системы регенеративного подогрева питательной воды турбоустановок, в котором смешиваются холодная питательная вода и водяной пар. Последний конденсируется, отдает теплоту фазового перехода и нагревает воду.

Аппараты с ТВЭЛ – это устройства, в которых теплоноситель охлаждает поверхность элемента, в котором происходит тепловыделение. Простейшим примером такого аппарата является электрочайник. В энергетике – это ядерные реакторы.

13.2. Основные положения и уравнения теплового расчета

Различают **конструктивный** и **поверочный** расчеты теплообменных аппаратов.

Целью конструктивного расчета является определение необходимой поверхности переноса теплоты при заданном тепловом потоке и параметрах теплоносителей на входе в аппарат.

При поверочном расчете известна поверхность переноса теплоты и ее компоновка, а целью расчета является определение передаваемого теплового потока при заданных расходах теплоносителей и их начальных параметрах.

Вне зависимости от конструкции теплообменного аппарата и типа расчета, в основе теплового расчета лежат одни и те же уравнения. Это уравнение теплового баланса и уравнение теплопередачи.

13.2.1. Уравнение теплового баланса

Полное изменение энтальпии теплоносителя при постоянном расходе, вызванное теплообменом определяется в виде

$$Q = G(i'' - i'), \quad (13.1)$$

где i' и i'' энтальпия теплоносителя на входе и выходе из аппарата. Обозначив энтальпию горячего теплоносителя i_1 , а i_2 – холодного, запишем при отсутствии потерь теплоты уравнение теплового баланса

$$Q = G_1(i_1' - i_1'') = G_2(i_2'' - i_2'). \quad (13.2)$$

Если в процессе теплообмена не происходит изменения агрегатного состояния теплоносителей, то уравнение (13.2) можно представить в виде

$$Q = G_1 c_{p1} (t_1' - t_1'') = G_2 c_{p2} (t_2'' - t_2'), \quad (13.3)$$

где c_{p1} , c_{p2} изобарные теплоемкости теплоносителей средние в рассматриваемом интервале температур.

В (13.3) произведение расхода теплоносителя на его теплоемкость называют расходной теплоемкостью. Обозначив $C_1 = G_1 c_{p1}$, $C_2 = G_2 c_{p2}$, получим

$$C_1 (t_1' - t_1'') = C_2 (t_2'' - t_2'), \quad (13.4)$$

или в безразмерном виде

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{(t_2'' - t_2')}{(t_1' - t_1'')} = \frac{\delta t_2}{\delta t_1}. \quad (13.5)$$

Последнее показывает, что отношение расходных теплоемкостей обратно пропорционально отношению разности температуры теплоносителя. Это отношение справедливо как для конечной разности температуры, так и для бесконечно малой, т.е.

$$C_1/C_2 = dt_2/dt_1. \quad (13.5a)$$

13.2.2. Уравнение теплопередачи

Уравнение теплопередачи связывает передаваемый тепловой поток с поверхностью переноса теплоты и для элемента поверхности теплообменника может быть записано в виде

$$dQ = k(t_1 - t_2)df, \quad (13.6)$$

где k – коэффициент теплопередачи на элементарной поверхности df , $(t_1 - t_2)$ – разность температуры теплоносителей на этой поверхности (текущая разность температуры). Полный тепловой поток можно получить, проинтегрировав (13.6) по всей поверхности теплообменника

$$Q = \int_0^F k(t_1 - t_2)df. \quad (13.7)$$

Определение теплового потока по (13.7) требует задания закона изменения по поверхности коэффициента теплопередачи и температурного напора. Чаще всего в расчет вводится некоторый средний по поверхности коэффициент теплопередачи, определяемый как

$$\bar{k} = \frac{k_1 F_1 + \dots + k_n F_n}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad (13.8)$$

где k_i – коэффициент теплопередачи на поверхности F_i , представляющей собою часть F .

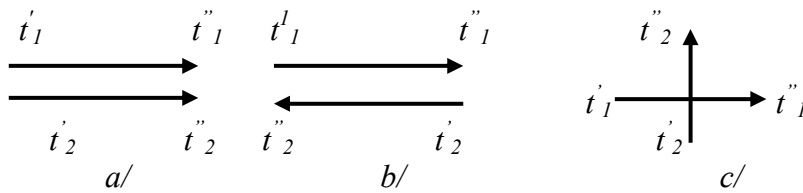


Рисунок 13.1 – Основные схемы взаимного течения теплоносителей

a – прямоток; b – противоток; c – перекрестный ток.

Заменяя в (13.7) текущее значение k на среднее значение и используя теорему о среднем, получим

$$Q = \bar{k} \left(\frac{1}{F} \int_0^F (t_1 - t_2) df \right) F, \quad (13.9)$$

или

$$Q = \bar{k} \bar{\Delta t} F, \quad (13.9a)$$

где средний температурный напор

$$\bar{\Delta t} = \frac{1}{F} \int_0^F (t_1 - t_2) df. \quad (13.10)$$

13.3. Средний температурный напор и его вычисление

Для определения среднего температурного напора по (13.10) нужно иметь распределение температуры теплоносителей вдоль поверхности теплообмена.

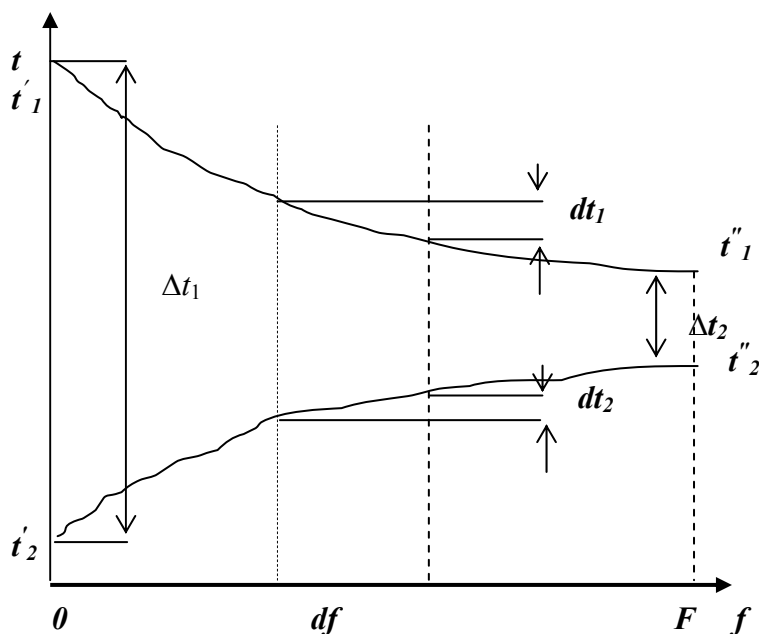


Рисунок 13.2 – Изменение температуры и температурного напора вдоль поверхности теплообмена при проточке

Это распределение зависит от схемы течения теплоносителей.

Существует три простейшие схемы течения, условно представленные на рис.13.1. Комбинируя эти схемы произвольным образом, можно получить достаточно сложные схемы течения.

Рассмотрим определение средней разности температуры на примере проточного течения теплоносителей.

Допустим, что распределение температуры теплоносителей по поверхности теплообмена соответствует данным, приведенным на рис.13.2.

Выделим элементарную поверхность переноса теплоты df , и из (13.4) определим изменение температуры каждого теплоносителя на этой поверхности.

$$dt_1 = -dQ/C_1, \quad (13.11)$$

$$dt_2 = dQ/C_2. \quad (13.12)$$

Полное изменение температурного напора на поверхности df можно определить как $d\Delta t = dt_1 - dt_2$, или $d\Delta t = -dQ(1/C_1 + 1/C_2)$.

Обозначив величину, находящуюся внутри скобок, как m , получим, учитывая (13.6),

$$d\Delta t = -k \Delta t m df. \quad (13.13)$$

Разделив в (13.13) переменные, проинтегрируем по Δt от Δt_1 до текущего значения, и по f от 0 также до текущего значения. Получим, учитывая, что k и m величины постоянные

$$\ln(\Delta t/\Delta t_1) = -k m f. \quad (13.14)$$

Потенцируя полученное выражение, получим изменение температурного напора вдоль поверхности теплообмена

$$\Delta t = \Delta t_1 e^{-m k f}. \quad (13.15)$$

Таким образом, вдоль поверхности теплообмена температурный напор изменяется по экспоненциальной зависимости. При проточке, учитывая, что

$$m = (1/C_1 + 1/C_2) \quad (13.16)$$

величина положительная, температурный напор уменьшается вдоль поверхности теплообмена. Имея распределение температурного напора по поверхности теплообмена (13.15), определим средний температурный напор по (13.10). Для этого подставим (13.15) в (13.10) и учтем, что в конце поверхности теплообмена (т.е. при $f = F$) $\Delta t = \Delta t_2$. Получим

$$\bar{\Delta t} = \frac{\Delta t_1}{F} \int_0^F e^{-mkf} df = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\ln(\Delta t_1/\Delta t_2)}. \quad (13.17)$$

Таким образом, средний температурный напор в теплообменнике определяется как средне логарифмический между напорами на входе и выходе аппарата.

Для противотока выражения (13.11) и (13.12), учитывая, что по поверхности аппарата температура, как горячего, так и холодного теплоносителей уменьшается, запишутся в виде

$$dt_1 = -dQ/C_1, \quad dt_2 = -dQ/C_2, \quad (13.18)$$

очевидно, что

$$m = (1/C_1 - 1/C_2) \quad (13.19)$$

может быть как положительной величиной (при $C_1 < C_2$), так и отрицательной в противном случае, так и равной нулю (при $C_1 = C_2$). Распределение температурного напора при этом подчиняется зависимости (13.15), но, при отрицательном m температурный напор увеличивается вдоль поверхности теплообмена, а при $m = 0$ остается постоянным. Средний температурный напор определяется также выражением (13.17), где под Δt_1 и Δt_2 понимается больший и меньший из температурных напоров на входе или выходе из аппарата.

Таким же образом средний температурный напор определяется и для перекрестной схемы течения теплоносителей.

Для более сложных схем течения теплоносителей вначале определяется средний температурный напор для наиболее характерной простой схемы течения (прямоток или противоток), а затем с помощью номограмм, имеющих в справочной литературе, находится поправка ψ на конструктивные особенности данной схемы. Окончательно расчетный средний температурный напор определяется, как

$$\bar{\Delta t}_{\text{сх}} = \psi \bar{\Delta t}_{\text{прост}}. \quad (13.20)$$

13.4. Особенности поверочного теплового расчета теплообменных аппаратов

Конструктивный расчет теплообменных аппаратов выходит за рамки данного курса, и будет рассматриваться в курсе «Тепло-массообменные аппараты и установки».

Остановимся на анализе особенностей поверочного расчета. Как указывалось выше, при поверочном расчете теплообменного аппарата известна компоновка поверхности теплообмена, расходы теплоносителей и их параметры на входе в аппарат. Подлежат определению передаваемый тепловой поток и параметры теплоносителей на выходе из аппарата. Таким образом,

имеется система двух уравнений (теплового баланса и теплопередачи) с тремя неизвестными. Решение подобной задачи может проводиться только методом последовательного приближения.

На основе анализа работы аналогичных аппаратов принимается температура на выходе одного из теплоносителей, по уравнению теплового баланса определяется температура на выходе второго теплоносителя, рассчитывается теплообмен в аппарате по средним температурам теплоносителей и по уравнению теплопередачи определяется тепловой поток, который может быть передан при данных условиях через заданную поверхность теплопередачи. При несовпадении теплового потока, определенного по уравнению теплового баланса (для принятой температуры на выходе одного из теплоносителей) и определенного по уравнению теплопередачи, необходимо принять новое значение температуры на выходе теплоносителя и повторить расчет. При этом может понадобиться несколько приближений расчета для достижения требуемой точности.

Имеется возможность существенно уменьшить затраты времени на последовательные приближения при поворочном расчете. Допустим, что температурный напор в аппарате изменяется незначительно, (по крайней мере $\Delta t_1/\Delta t_2 \leq 2$), что чаще всего имеет место для аппаратов с противоточной схемой течения теплоносителей. Тогда можно записать

$$\bar{\Delta t} = \bar{t}_1 - \bar{t}_2 = \frac{t'_1 + t''_1}{2} - \frac{t'_2 + t''_2}{2} \quad (13.21)$$

Из уравнения теплового баланса следует

$$t''_1 = t'_1 - Q/C_1, \quad t''_2 = t'_2 + Q/C_2. \quad (13.22)$$

Тогда (13.21) можно записать в виде

$$\bar{\Delta t} = t'_1 - t'_2 - Q(1/2C_1 + 1/2C_2). \quad (13.23)$$

Из уравнения теплопередачи $\bar{\Delta t} = Q/kF$. Подставим последнее в (13.23) и решим его относительно Q . Получим

$$Q = \frac{t'_1 - t'_2}{1/kF + 1/2C_1 + 1/2C_2}. \quad (13.24)$$

Использовать полученное соотношение можно следующим образом. По параметрам теплоносителей на входе в аппарат рассчитывается теплообмен в аппарате и находится коэффициент теплопередачи. Из (13.24) определяется передаваемый тепловой поток, а из теплового баланса находятся температуры теплоносителей на выходе. Определяются средние температуры теплоносителей и, при необходимости, уточняется коэффициент теплопередачи, находится средний температурный напор и уточняется передаваемый тепловой поток. Таким образом, в этом случае требуется не более одного приближения.

Вопросы для самопроверки

1. Назовите основные типы теплообменных аппаратов. Их особенности.
2. Основные типы взаимного течения теплоносителей в теплообменных аппаратах.

3. *Уравнение теплового баланса для теплообменного аппарата. Его особенности.*
4. *Уравнение теплопередачи. Его особенности при расчете теплообменных аппаратов.*
5. *Средний температурный напор и его изменение вдоль поверхности теплообмена.*
6. *Основные виды теплового расчета теплообменного аппарата.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Исаченко В.П. и др. Теплопередача. – М.: Энергия.1981.
2. Шнейдер Г. Инженерные проблемы теплопроводности. – М.: ИЛ, 1960.
3. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967.
4. Кутателадзе С.С. Основы теория теплообмена. – Новосибирск: Наука, 1970.
5. Эккерт Э., Дрейк Р. Теория тепло и массообмена. – М.: ГЭИ,1961.
6. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи.–М.: Энергия 1977.

Приложение

Таблица П.1 – Теплофизические характеристики воздуха

t , °C	C_p , кДж/(кг·К)	$\lambda \cdot 10^2$, Вт/(м·К)	$\mu \cdot 10^6$, Па·с	$\nu \cdot 10^6$, м ² /с	Pr
10	1,005	2,51	17,6	14,16	0,705
20	1,005	2,59	18,1	15,06	0,703
30	1,005	2,67	18,6	16,00	0,701
40	1,005	2,76	19,1	16,96	0,699
50	1,005	2,83	19,6	17,95	0,698
60	1,005	2,90	20,1	18,97	0,696
70	1,009	2,96	20,6	20,02	0,694
80	1,009	3,05	21,1	21,09	0,692
90	1,009	3,13	21,5	22,10	0,690
100	1,009	3,21	21,9	23,13	0,688
120	1,009	3,34	22,8	25,45	0,686
140	1,013	3,49	23,7	27,8	0,684
160	1,017	3,64	24,5	30,09	0,682
180	1,022	3,78	25,3	32,49	0,681
200	1,026	3,93	26,0	34,85	0,680
300	1,047	4,60	29,7	48,33	0,674
350	1,059	4,91	31,4	55,46	0,676
400	1,068	5,21	33,0	63,09	0,678
600	1,114	6,22	39,1	96,9	0,700
800	1,156	7,18	44,3	134,8	0,706
1000	1,185	8,07	49,0	177,1	0,719
1200	1,210	9,15	53,5	233,7	0,724

Таблица П.2 – Теплофизические характеристики трансформаторного масла

t , °C	ρ , Кг/м ³	C_p , кДж/(кг·К)	$\lambda \cdot 10^2$, Вт/(м·К)	$\mu \cdot 10^6$, Па·с	$\nu \cdot 10^6$, м ² /с	$\beta \cdot 10^4$, 1/К	Pr
20	880,3	1,666	11,06	198,2	22,5	6,9	298
30	874,2	1,729	10,98	128,5	14,7	6,95	202
40	868,2	1,788	10,90	89,4	10,3	7,00	146
50	862,1	1,846	10,82	65,3	7,58	7,05	111
60	856,0	1,905	10,72	49,5	5,78	7,10	87,8
70	850,0	1,964	10,64	38,6	4,54	7,15	71,3
80	843,9	2,026	10,56	30,8	3,66	7,20	59,3
90	837,8	2,085	10,47	25,4	3,03	7,25	50,5

Таблица П.3 – Теплофизические характеристики масла МК

t , °C	ρ , Кг/м ³	C_p , кДж/(кг·К)	$\lambda \cdot 10^2$, Вт/(м·К)	$\mu \cdot 10^6$, Па·с	$\nu \cdot 10^6$, м ² /с	$\beta \cdot 10^4$, 1/К	Pr
20	903,0	1,712	14,85	185,6	1514	8,64	15800
30	894,5	1,758	14,61	61,8	691,2	8,71	7450
40	887,5	1,804	14,37	30,3	342,0	8,79	3810
50	879,0	1,851	14,13	16,4	186,2	8,86	2140
60	871,5	1,897	13,89	9,61	110,6	8,95	1320
70	864,0	1,943	13,63	6,03	69,3	9,03	858
80	865,0	1,989	13,40	4,00	46,6	9,12	591
90	848,2	2,035	13,14	2,74	32,3	9,20	424

Таблица П.4 – Теплофизические характеристики воды

t , °C	ρ , кг/м ³	C_p , кДж/(кг·К)	r , кДж/кг	$\lambda \cdot 10^2$, Вт/(м·К)	$\mu \cdot 10^6$, Па·с	$\nu \cdot 10^6$, м ² /с	$\beta \cdot 10^4$, 1/К	$\sigma \cdot 10^4$, Н/м	Pr
10	999,7	4,191	2477	57,4	1306	1,306	0,7	741,6	9,52
20	998,2	4,183	2454	59,9	1004	1,006	1,82	726,9	7,02
30	995,7	4,174	2430	61,8	801,5	0,805	3,21	712,2	5,42
40	992,2	4,174	2406	63,5	653,3	0,659	3,87	696,5	4,31
50	988,1	4,174	2383	64,8	549,4	0,556	4,49	676,9	3,54
60	983,2	4,179	2358	65,9	469,9	0,478	5,11	662,2	2,98
70	977,8	4,187	2333	66,8	406,1	0,415	5,70	643,5	2,55
80	971,8	4,195	2308	67,4	355,1	0,365	6,32	625,9	2,21
90	965,3	4,208	2282	68,0	314,9	0,326	6,95	607,2	1,95
100	958,4	4,220	2257	68,3	282,5	0,295	7,52	588,6	1,75
120	943,1	4,250	2202	68,6	237,4	0,252	8,64	548,4	1,47
140	926,1	4,287	2145	68,5	201,1	0,217	9,72	507,2	1,26
160	907,4	4,346	2082	68,3	173,6	0,191	10,7	466,0	1,10
180	886,9	4,417	2015	67,2	153,0	0,173	11,9	422,8	1,03
200	863,0	4,505	1941	65,8	136,4	0,158	13,3	367,7	0,93
220	840,3	4,614	1858	64,0	124,6	0,148	14,8	331,6	0,90
240	813,6	4,760	1766	61,7	114,8	0,141	16,8	285,5	0,88
260	784,0	4,980	1661	59,3	105,9	0,135	19,7	237,4	0,892
280	750,7	5,300	1543	56,5	98,1	0,129	26,2	191,3	0,944
300	712,5	5,760	1404	53,2	91,2	0,128	29,2	144,2	0,986
320	667,1	6,570	1238	49,4	85,3	0,128	38,2	98,1	1,14

Таблица П.5 – Теплофизические характеристики водяного пара

t , °C	P бар	ρ'' , кг/м ³	i'' , кДж/кг	$\lambda \cdot 10^2$, Вт/(м·К)	$\mu \cdot 10^6$, Па·с	$\nu \cdot 10^6$, м ² /с	Pr
100	1,013	0,598	2676	2,372	11,97	20,02	1,08
110	1,43	0,826	2691	2,489	12,46	15,07	1,09
120	1,98	1,121	2707	2,593	12,85	11,46	1,09
130	2,70	1,496	2721	2,686	13,24	8,85	1,11
140	3,61	1,966	2734	2,791	13,54	6,89	1,12
150	4,76	2,547	2746	2,884	13,93	5,47	1,16
160	6,18	3,258	2758	3,012	14,32	4,39	1,18
170	7,92	4,122	2769	3,128	14,72	3,57	1,21
180	10,03	5,177	2779	3,286	15,11	2,93	1,25
190	12,55	6,397	2786	3,419	15,60	2,44	1,30
200	15,55	7,862	2793	3,547	15,99	2,03	1,36
220	23,2	11,62	2802	3,896	16,87	1,45	1,47
240	33,48	16,76	2803	4,290	17,75	1,06	1,61
260	46,94	23,72	2796	4,800	18,83	0,794	1,75
280	64,19	33,19	2780	5,940	19,91	0,600	1,90
300	85,92	46,21	2749	6,840	21,97	0,403	2,29
320	112,9	64,72	2700	7,510	22,85	0,353	2,50
340	146,1	92,76	2622	9,30	25,2	0,272	3,35
360	186,7	144	2481	12,79	29,13	0,202	5,23

Таблица П.6 – Значения комплексов $A = \left(\frac{g}{v^2}\right)^{1/3} \frac{\lambda}{r\rho'v}$, $B = \frac{4}{r\rho'v}$

при конденсации водяного пара

t , °C	A , 1/(м·К)	$B \cdot 10^3$, м/Вт	t , °C	A , 1/(м·К)	$B \cdot 10^3$, м/Вт
20	5,16	1,61	160	122	11,09
30	7,88	2,06	170	136	12,04
40	11,4	2,55	180	150	12,9
50	15,6	3,06	190	167	14,02
60	20,9	3,62	200	182	15,05
70	27,1	4,22	210	197	16,08
80	34,5	4,88	220	218	17,63
90	42,7	5,57	230	227	21,4
100	51,5	6,28	240	246	23,0
110	60,7	7,57	250	264	24,8
120	70,3	7,65	260	278	26,4
130	82	8,47	270	296	28,4
140	94,0	9,28	280	312	30,6
150	107	10,15	290	336	33,4

Таблица П.7 – Значения отдельных комплексов для расчета теплообмена при кипении воды

t , °C	$l \cdot 10^6$, м	$l/r\rho''v \cdot 10^6$, м ² /Вт	$\lambda/r\rho''v \cdot 10^2$, 1/К	t , °C	$l \cdot 10^6$, м	$l/r\rho''v \cdot 10^6$, м ² /Вт	$\lambda/r\rho''v \cdot 10^2$, 1/К
30	16 450	276 870	1 040	180	0,715	0,391	37,5
40	5 950	73 350	782	190	0,45	0,216	32,2
50	2 305	20 900	587	200	0,296	0,123	27,5
60	960	6 540	450	210	0,200	0,0718	23,5
70	423	2 200	347	220	0,136	0,0426	20,2
80	197	797	273	230	0,0938	0,0255	17,3
90	96	304	216	240	0,0646	0,0155	15,1
100	48,7	122	172	250	0,0451	0,0115	13,6
110	25,9	51,8	138	260	0,0318	0,0069	11,4
120	14,2	22,8	110	270	0,0224	0,00434	9,80
130	8,05	107	96	280	0,0158	0,00283	8,80
140	4,7	5,13	75	290	0,0114	0,00178	7,47
150	2,82	2,58	60,5	300	0,0080	0,00106	6,16
160	1,73	1,33	52,6	310	0,00565	0,000708	5,64
170	1,08	0,71	44,5	320	0,00398	0,000451	4,93

Навчальне видання

АКМЕН Роберт Генріхович

ЛЕКЦІЇ ТА ЗАДАЧІ З КУРСУ
ТЕПЛО- І МАСООБМІН

для студентів фахів 7.095010 „Теплоенергетика”,
7.000008 „Енергетичний менеджмент”

Російською мовою

Відповідальний за випуск
Роботу до видання рекомендував

В авторській редакції

План 2007р., поз.

Підп. до друку _____ Формат 60x84 1/16. Папір офсетн. Друк – ризографія.
Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. _____ Обл.-вид.арк _____ Тираж _____ прим.
Зам. _____ . Ціна договірна

Видавничий центр НТУ „ХПІ” 61002, Харків-2, вул. Фрунзе, 21
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №116 від 10.07.2000р.

Друкарня НТУ „ХПІ”, 61002, м. Харків, вул. Фрунзе, 21