МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

по курсу

«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В РАСЧЕТАХ НА ЭВМ»

ХАРЬКОВ 2008

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

по курсу

«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В РАСЧЕТАХ НА ЭВМ»

для студентов заочной формы обучения специальностей
7.090510 «Теплоэнергетика» и 7.000008 «Энергетический менеджмент»

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета,
протокол №1 от 30.03.07

Харьков НТУ «ХПИ» 2008

Методические указания и контрольные задания по курсу «Математические методы и модели в расчетах на ЭВМ» для студентов заочной формы обучения специальностей 7.090510 «Теплоэнергетика» и 7.000008 «Энергетический менеджмент» /Сост. Т.Ф.Родионова, О.В.Круглякова. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2007. – 24 с.

Составители Т.Ф.Родионова, О.В.Круглякова

Рецензент Р.Г.Акмен

Кафедра теплотехники

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Цель изучения данной дисциплины – улучшение математической подготовки инженеров теплоэнергетиков в области приближенных вычислений с использованием ЭВМ. Задачи дисциплины – дать представление о наиболее важных способах приближенного и численного анализа на основе общего курса математики. У студентов должно сформироваться знание нескольких численных и приближенных методов, которые используются при исследовании температурных полей в различных теплотехнических устройствах и аппаратах, умение воспользоваться этими методами и оценить ошибки результатов.

Интегрирование уравнения теплопроводности классическими методами математической физики возможно в случае относительно простых начальных и граничных условий. При решении более сложных задач теплопроводности в элементах энергетических установок приходится обращаться к приближенным методам. В этом отношении метод сеток, основанный на замене производных, входящих в дифференциальное уравнение, разностными отношениями, весьма эффективен, позволяя найти приближенные решения сложных задач теплопроводности.

В данных методических указаниях рассматриваются два метода: метод прогонки и метод элементарных балансов.

Студенту заочного обучения, руководствуясь программой курса и методическими указаниями к ней, необходимо самостоятельно изучить материал учебного пособия, после чего выполнить письменные контрольные работы. Со всеми непонятными вопросами нужно обращаться за консультацией на кафедру теплотехники. В период экзаменационной сессии по наиболее сложным вопросам преподаватели читают лекции.

Для работы рекомендуются учебники [1–3, 8], практикум [4], научный журнал [7], в которых в доступной форме излагаются изучаемые методы приближенного решения краевых задач, а также приведено достаточное количество типовых задач, снабженных решениями, что в значительной степени облегчает самостоятельное изучение курса. В качестве основной литературы приведены также учебники по тепло- и массообмену [5, 6], пользуясь которыми, студент может уточнить постановку изучаемых краевых задач.

При изучении курса желательно реализовывать написанные программы на практике с использованием компьютера, поэтому в качестве дополнительной литературы предложены учебники и методические пособия по языку Турбо Паскаль [9 – 12].

В конце каждой темы приведены контрольные вопросы, по которым можно проверить степень усвоения материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные уравнения / Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. II. – М.: Гос. изд-во физ.-матем. л-ры, 1959. – 620 с.
3. Милн В.Э. Численное решение дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ,1955.
4. Положий Г.Н. Математический практикум. – М.: Физматгиз,1960.
5. Исаченко Г.Н., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. – М.: Энергия, 1969. – 439 с.
6. Михеев М.А. Основы теплопередачи. М.–Л.: Гос. энерг. изд-во, 1956. – 392с.
7. Ваничев А.П. Метод элементарных балансов//Известия Академии наук СССР, ОТН. – 1947. – №12.
8. Швец И.Г., Федоров В.И. Вопросы нестационарного теплообмена в роторах турбин. – К: Изд.-во Киев. ун-та, 1960. – 283 с.

Дополнительная

9. Турбо Паскаль 7.0. – К.: Изд. гр. BHV, 1999. – 448 с.

10. Фаронов В.В. Турбо Паскаль. Начальный курс: Учеб. пособ. – М.: Нолидж, 2000. – 575 с.

11. Зеленяк О.П. Практикум программирования на TurboPascal. Задачи, алгоритмы и решения. – К.: ДиаСофт, 2001. –320 с.

12. Акмен Р.Г., Круглякова О.В. Основы языка Паскаль. Лабораторный практикум по курсу "Основы информационных технологий". – Х.: НТУ «ХПИ», 2002. – 88 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ТЕМАМ КУРСА

ТЕМА 1. **Метод прогонки в применении к краевым задачам для линейных дифференциальных уравнений второго порядка**

Программа

Общая постановка краевой задачи. Краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений. Линейная краевая задача. Метод конечных разностей. Метод прогонки в применении к краевым задачам для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Определение стационарного температурного поля в треугольном и круглом ребрах при постоянных теплофизических свойствах, находящихся в среде с постоянной температурой.

Методические указания

Прежде всего, следует изучить поставленную краевую задачу. Проверить, является ли заданное дифференциальное уравнение линейным, как того требует метод прогонки. Далее необходимо выяснить, что представляют собой условия однозначности или краевые условия для решения поставленной задачи определения температурного поля в заданной области. Требуется разобраться с геометрией рассматриваемой области, выяснить, как протекает исследуемый процесс во времени, каковы условия протекания процесса на границе заданной области, изменяются ли теплофизические свойства объекта от температуры, в каком виде следует представить решение задачи.

Следующим этапом является изучение метода прогонки. Этот процесс включает в себя подготовку задачи к решению, что означает сведение задачи к системе конечно-разностных уравнений. Далее составляются формулы для прогоночных коэффициентов и на основании одного из граничных условий записываются формулы для определения их величины. С помощью второго граничного условия находится выражение для температуры на противоположной границе и становится возможным определение температуры во всех выбранных промежуточных точках.

Перед началом написания программы всегда нужно четко представлять последовательность действий. Для всех случаев рекомендуется составлять алгоритм решения задачи.

Вопросы для самопроверки

1. Каким условиям должно отвечать решение краевой задачи помимо удовлетворения этого решения дифференциальному уравнению?
2. Что включают в себя условия однозначности для рассматриваемой задачи ?
3. В чем заключается сущность метода конечных разностей?
4. При каких условиях можно применить метод прогонки?
5. По какой формуле находится значение искомой величины по методу прогонки?
6. Что такое «прямой ход» в методе прогонки? Что такое «обратный ход» в этом методе?
7. Какие теплофизические параметры используются в Вашей задаче, и в каких единицах они измеряются?
8. Опишите алгоритм вычисления искомого параметра в выполняемой задаче по методу прогонки.
9. Из каких разделов состоит программа, написанная на языке Турбо Паскаль?

Литература: [5, гл.1, 2; 2, гл.9.].

ЗАДАНИЕ 1

Определение температурного поля в круглом стержне (рис.1), находящемся в подвижной среде, при заданных значениях геометрических и теплофизических параметров по методу прогонки

Постановка задачи

Подготовить краевую задачу к решению численным методом. Получить формулы для вычисления прогоночных коэффициентов, а также для значений температуры в узлах полученной сетки. Написать программу для определения значений температуры при заданных величинах геометрических и теплофизических параметров. Распечатать текст программы и результаты расчета, снабдив распечатки соответствующими заголовками.

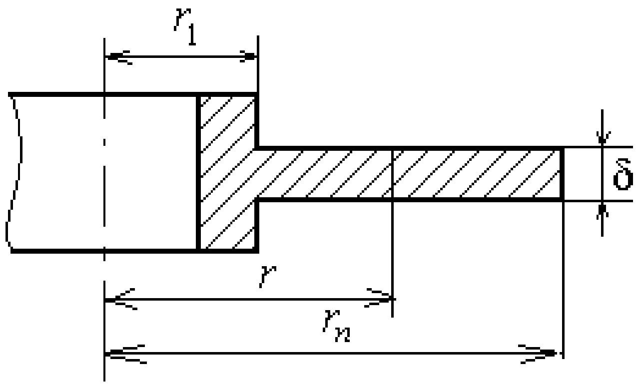

Рисунок 1 – Сечение круглого ребра

Таблица 1 - Варианты задания 1

№ п/п	r_1	r_2	α	λ	t_0	$t_ж$	δ	n
1	50	150	10	40	100	20	5	20
2	51	149	12	50	97	18	4	10
3	52	151	14	30	95	15	3	15
4	53	153	11	45	105	25	6	20
5	54	152	15	52	72	30	2,5	10
6	55	156	10	31	80	17	3	15
7	56	157	14	60	78	17	4,2	20
8	57	155	13	72	60	10	5,1	10
9	58	158	11	57	102	16	4,1	15
10	59	157	16	48	91	22	3,7	15
11	60	159	10	33	88	21	4	20
12	61	159	11	49	77	24	3,9	20
13	62	161	12	45	100	10	6	20
14	63	163	15	53	110	11	4,3	20

В табл. 1 приняты следующие обозначения: № – номер варианта; r_1 – внутренний радиус ребра, мм; r_2 – наружный радиус ребра, мм; α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м^2 К); λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м К); t_0 – температура горячего конца ребра, ^{o}С; $t_ж$ – температура окружающей среды, ^{o}С; δ – толщина ребра, мм; n – число участков разбиения.

Содержание отчета

1. Постановка задачи. Дифференциальное уравнение и граничные условия.

2. Выводы расчетных формул.

3. Алгоритм решения поставленной задачи.

4. Текст программы.

5. Протокол работы программы.

Методические указания к выполнению задания

Рассмотрим выполнение задания на примере определения температурного поля в прямом ребре треугольного сечения при тех же принятых допущениях, что и для круглого ребра.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим распространение тепла в прямом ребре треугольного сечения, схема которого представлена на рис. 2 а.

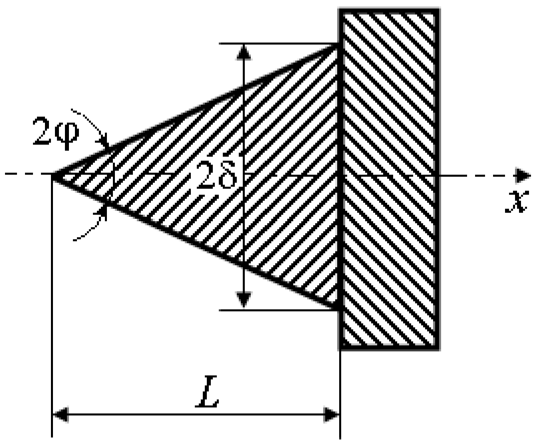

Рисунок 2 а – Сечение треугольного ребра

За начало координат примем вершину ребра, направив ось x вдоль оси симметрии ребра, при этом тепловой поток q будет направлен в сторону, противоположную направлению оси x. Температура изменяется только вдоль оси x. Ребро находится в среде с постоянной температурой $t_ж$, коэффициент теплоотдачи от поверхности стержня к окружающей среде α принят постоянным для всей поверхности. Постоянной является также коэффициент теплопроводности материала ребра λ. Для удобства расчета отсчет температуры ведется от $t_ж$. Отсчитанная таким образом избыточная температура равняется $\upsilon = t - t_ж$, где t –текущая температура ребра.

Дифференциальное уравнение при принятых допущениях выглядит следующим образом

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\vartheta}{dx}-\frac{1}{x}\frac{\alpha}{\lambda\sin\varphi}\vartheta=0\,. \qquad (1)$$

Граничные условия заключаются в отсутствии теплового потока с вершины ребра и в постоянстве температуры у основания ребра и записываются следующим образом

$x=0,\quad d\vartheta/dx=0$ (2) и $x=h,\quad \vartheta=\theta.$ (3)

2. Система алгебраических уравнений по методу прогонки.

Первым шагом численного метода является разбиение данной системы на соответствующее количество небольших объемов и присвоение номеров центральным точкам каждого из этих объемов.

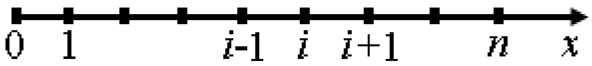

Рисунок 2 б – Схема разбивки

Предполагается, что термические свойства каждого такого объема сосредоточены в центральной узловой точке. Передача теплоты между узловыми точками осуществляется через условные теплопроводящие стержни.

Заменяя дифференциальное уравнение конечно-разностным оператором, сводим решение данной краевой задачи к решению системы алгебраических уравнений. Получим

$$(\vartheta_{i+1}-2\vartheta_i+\vartheta_{i-1})/\Delta x^2+(\vartheta_{i+1}-\vartheta_{i-1})/(x_i 2\Delta x)-\alpha\vartheta_i/(x_i\lambda\sin\varphi)=0\,. \quad (4)$$

Равенство (4) справедливо для внутренних точек $1<i<n$. Для наружных точек имеем $\vartheta_1=\vartheta_0$ **(5)** и $\vartheta_n=\theta$ **(6)**. В уравнении (4) линейный шаг вычисляется, как $\Delta x=h/n$.

Введем обозначения

$$p_i=1/x_i,$$
$$q_i=\alpha/(x_i\lambda\sin\varphi)=\alpha\Big/\left(x_i\lambda\frac{d}{\sqrt{L^2+d^2}}\right). \qquad (7)$$

Приведем уравнение (4) к следующему виду

$$\vartheta_{i+1}-m_i\vartheta_i+w_i\vartheta_{i-1}=0, \qquad (8)$$

где

$$m_i=2(2+q_i\Delta x^2)/(2+p_i\Delta x)\,,\; w_i=(2-p_i\Delta x)/(2+p_i\Delta x)\,. \qquad (9)$$

По методу прогонки значение функции в точке i записывается через неизвестные пока коэффициенты следующим образом

$$\vartheta_i = A_i + B_i \vartheta_{i+1}. \qquad (10)$$

По аналогии с выражением (10) запишем аналогичную формулу для точки i–1.

$$\vartheta_{i-1} = A_{i-1} + B_{i-1}\vartheta_i . \qquad (11)$$

Подставив выражение (11) в формулу (8), приведем ее к следующему виду

$$\vartheta_i = -w_i A_{i-1} / (-m_i + w_i B_i) - \vartheta_{i+1} / (-m_i + w_i B_{i-1}). \qquad (12)$$

Сопоставив формулы (12) и (10), запишем выражения для коэффициентов A_i, B_i.

$$A_i = -w_i A_{i-1} / (-m_i + w_i B_{i-1}), \qquad (13)$$

$$B_i = -1 / (-m_i + w_i B_{i-1}). \qquad (14)$$

Из выражений (13), (14) ясно, чтобы найти коэффициенты с индексом i надо знать коэффициенты с индексом $i-1$.

Согласно формуле (10) имеем $\vartheta_0 = A_0 + B_0 \vartheta_1$ **(15)**. С другой стороны граничное условие (5) требует следующего равенства $\vartheta_0 = \vartheta_1$ **(16)**. Из сопоставления этих выражений получим

$$A_0 = 0, \quad B_0 = 1. \qquad (17)$$

Далее по формулам (13) и (14) определяем коэффициенты с индексами от 1 до $n-1$. Вычисление коэффициентов в методе прогонки называется прямым ходом.

Второе граничное условие (6) позволяет найти температуру во всех точках, начиная с точки с индексом $n-1$ до точки с индексом 0, пользуясь формулой (10). Определение искомой функции в методе прогонки называется обратным ходом.

3. Алгоритм решения поставленной задачи.

Ввод исходных данных.

Исходными данными при определении температурного поля в треугольном ребре по методу прогонки являются коэффициент теплопроводности материала ребра λ, размеры ребра половина толщины у основания ребра δ и длина ребра L, температура жидкости, окружающей ребро $t_ж$, температура в основании ребра t_n, коэффициент теплоотдачи α, число расчетных точек по длине ребра n.

Прямой ход – определение прогоночных коэффициентов. Определение прогоночных коэффициентов выполняется согласно формулам (13), (14), (17).

Обратный ход – определение температуры в узлах сетки. Для этого используются формулы (3), (10), (15).

В задаче были приняты следующие исходные данные: L = 0,025 м, $t_ж$ = 20 °C, t_n = 100 °C, n = 20, λ = 40 Вт/(м·К), α =25 Вт/(м²·К), δ=0,003 м.

4. Текст программы.

При написании программы приняты следующие обозначения для исходных данных: α - alf, λ - la, δ - d, $t_ж$ – tg, θ - *tn*, Δx – dx. Наименование остальных переменных выполнено в соответствии с формулами предыдущего раздела.

```
Program treug_re;
{ Определение температурного поля  в треугольном ребре
  методом прогонки}
uses crt;
type
  mas=array[0..50] of real;
var
           dx, alf, d, la, tn  :  real;
                          n, i  :  integer;
                         w, m  :  real;
           x, L, tn, tg, q, p  :  real;
                 a, b, te, t  :  mas;
                            f  :  text;
begin
 clrscr;
 assign(f, 'd:\student\rebro.txt');
 rewrite(f);   { Ввод исходных данных  }
 writeln('вв.alf,la,d,L,tg, tn,n');
 readln(alf,la,d,L,tg, tn,n);
                    { Вывод на экран исходных данных }
     write(' ':10,'L=',L:1:3,'','tg=',tg:1:3,' ');
     writeln('tn =', tn:1:3);
     write(' ':10,'alf=',alf:1:3,' ','la=',la:1:3,' ');
     writeln( 'd=',d:1:3,' ','n=',n);
                     { Вывод в файл исходных данных }
     write(f, ' ':10,'L=',L:1:3,'  ','tg=',tg:1:3,' ');
```

```
       writeln(f, 'tn =', tn:1:3);
       write(f,' ':10,'alf=',alf:1:3,' ','la=',la:1:3,' ');
       writeln(f, 'd=',d:1:3,' ','n=',n);
       dx:=L/n;  { шаг }
      { Прямой ход - определение прогоночных коэффициентов }
      b[0]:=1;
      for i:=1 to n-1 do begin
         p:=1/(dx*i);
         q:=alf*p/(la*d/sqrt(4*L*L+d*d));
         m:=2*(2+q*dx*dx)/(2+p*dx);
         w:=(2-p*dx)/(2+p*dx);
         b[i]:=-1/(-m+w*b[i-1]);  end;
    { Обратный ход - определение температуры в узлах сетки }
     te[n]:= tn -tg; t[n]:= tn;
     for i:=n-1 downto 1 do begin
        te[i]:=b[i]*te[i+1];
        t[i]:=te[i]+tg;     end;
     te[0]:=te[1]; t[0]:=te[0]+tg;
{Вывод на экран и в файл значений температуры в узлах сетки}
 writeln(' ':10,'i',' ':7,'x',' ':7,'te',' ':7,'t');
 writeln(f, ' ':10,'i',' ':7,'x',' ':7,'te',' ':7,'t');
 for i:=0 to n do begin
    x:= dx*i; { координата узла }
    write(' ':10,i:1,' ':3,x:1:3,' ':3,te[i]:1:3);
    writeln(' ':3 ,t[i]:1:3);
    write(f, ' ':10,i:1,' ':3,x:1:3,' ':3,te[i]:1:3);
    writeln(f, ' ':3 ,t[i]:1:3);
  end;
 writeln(' ':10,'Программу выполнил Иванов Петр');
 writeln('вариант - 11');
 writeln(f, ' ':10,'Программу выполнил Иванов Петр);
 writeln(f, 'вариант - 11');
 readkey;
 close(f);
End.
```

5. Протокол работы программы

L=0.025 tg=20.000 tn=100.000 n=20

alf=25.000 la=40.000 d=0.003 n=20

i	x	te	t
0	0.000	64.481	84.481
1	0.001	64.481	84.481
2	0.003	65.042	85.042
3	0.004	65.718	85.718
4	0.005	66.445	86.445
5	0.006	67.204	87.204
6	0.008	67.984	87.984
7	0.009	68.780	88.780
8	0.010	69.590	89.590
9	0.011	70.412	90.412
10	0.013	71.243	91.243
11	0.014	72.084	92.084
12	0.015	72.934	92.934
13	0.016	73.791	93.791
14	0.018	74.657	94.657
15	0.019	75.530	95.530
16	0.020	76.410	96.410
17	0.021	77.297	97.297
18	0.023	78.191	98.191
19	0.024	79.092	99.092
20	0.025	80.000	100.00

Программу выполнил Иванов Петр, вариант - 11

ЗАДАНИЕ 2

Применение метода элементарных балансов для определения температурного поля в твердых телах методом элементарных балансов

Постановка задачи

Вычислить температурное поле в бесконечной пластине (рис. 3) при заданных граничных условиях и значениях теплофизических параметров (табл.2).

Содержание отчета

1. Постановка задачи. Чертеж исследуемой области.
2. Вывод расчетных формул.
3. Порядок выполнения расчетных действий.

4. Распечатка программы.

5. Результаты счета.

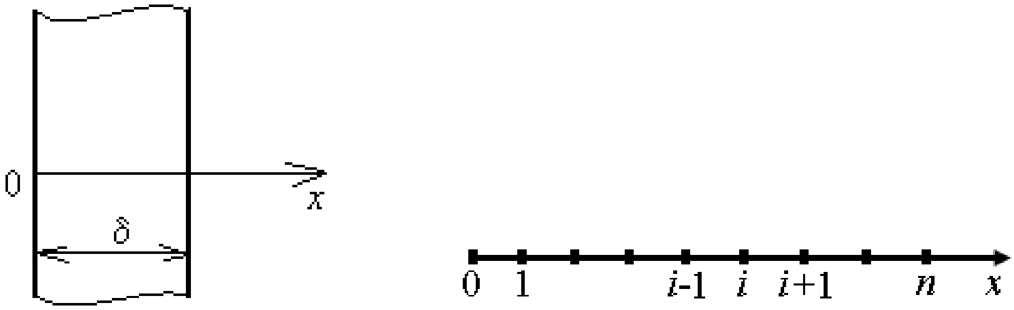

Рисунок 3 – Бесконечная пластина

Таблица 2 – Варианты задания 2

№	δ	λ	α	c	θ	t_g	t_0	V	n	m
1	10	0,175	65	1750	1200	15	140	10	10	5
2	9	0,176	60	1700	1150	16	150	15	15	6
3	8	0,177	55	1800	1210	10	145	20	10	7
4	7	0,180	50	1850	1190	17	149	25	15	8
5	6	0,190	60	1650	1220	18	147	30	10	10
6	5	0,185	65	1600	1230	20	139	27	15	9
7	11	0,192	45	1700	1180	21	137	18	10	6
8	12	0,200	50	1750	1170	22	160	19	15	7
9	13	0,198	55	1650	1240	14	155	30	10	10
10	14	0,174	65	1800	1250	13	152	21	15	8
11	15	0,173	47	1850	1160	12	120	12	10	7
12	16	0,172	40	1700	1175	11	125	35	15	6
13	17	0,170	70	1750	1190	23	129	20	10	5
14	18	0,175	65 ^0C	1800	1180	19	130	10	15	5

В табл. 2 приняты следующие обозначения: № – номер варианта; δ – полутолщина пластины, мм; λ – коэффициент теплопроводности материала пластины, Вт/(м·К); α – коэффициент теплоотдачи на поверхности пластины, Вт/(м^{2}К); c – теплоемкость материала пластины, Дж/(кг·К); ρ – плотность материала пластины; t_g – температура жидкости, окружающей пластину, °С; t_0 –начальная температура пластины; V – заданное время охлаждения; n – число расчетных точек; m – число временных шагов между выводом результатов на экран и в файл.

Методические указания к выполнению задания

Рассмотрим выполнение задания на примере определения температурного поля в бесконечном цилиндре при граничных условиях на его поверхности 3-го рода. Определение температурного поля бесконечной пластины осуществляется при тех же допущениях и граничных условиях, что и для бесконечного цилиндра. Интегрирование уравнений теплопроводности классическими методами математической физики возможно в случае относительно простых начальных и граничных условий. При решении более сложных задач теплопроводности в телах сложной формы приходится обращаться к приближенным методам. Рассмотрим метод конечных разностей для решения задач теплопроводности в таком виде, в каком он описан Ваничевым А.П. под названием метода элементарных балансов [7].

Заданными являются следующие величины:

1) размеры изделия;

2) численные значения теплоемкости, плотности, теплопроводности, температуропроводности материалов, из которых состоит рассматриваемое изделие;

3) начальное распределение температуры;

4) закон изменения температуры окружающей среды;

5) закон изменения коэффициента теплоотдачи от окружающей среды к поверхности тела.

Сущность метода заключается в следующем. Тело разбивается на ряд элементарных геометрических форм, в пределах которых закон изменения температуры принят линейным. В полярной системе координат такой элементарной формой является цилиндрический слой с радиусом r и r+dr. Расчетными точками в данном случае будут места пересечения линий разбивки.

Для определения температуры тела методом элементарных балансов используются гипотезы Фурье и Ньютона, на основании которых удельный тепловой поток в твердом теле и через поверхность раздела определяется соответственно уравнениями

$$q = -\lambda grad(t); \; q_1 = \alpha(t - t_g),$$

где t_g – температура окружающей среды.

1. Постановка задачи.

Определить температурное поле бесконечного цилиндра радиуса *r* спустя заданное время *V* в заданном количестве расчетных точек n.

2. Вывод расчетных формул.

В данной работе использован метод конечных разностей для решения задач теплопроводности в таком виде, в каком он применялся Ваничевым под названием метода элементарных балансов. Поскольку рассматривается вал, являющийся телом вращения, целесообразно использовать цилиндрическую сетку.

Заданными являются следующие величины: радиус цилиндра *R*, численные значения теплоемкости c, плотности ρ, теплопроводности λ, начальное распределение температуры, закон изменения температуры окружающей среды, закон изменения коэффициента теплоотдачи от окружающей среды к поверхности тела.

В бесконечном цилиндре температура изменяется только в направлении радиуса. Линии постоянной температуры – это концентрические окружности.

В начальный момент $\tau = 0$ температура во всех точках цилиндра постоянна и равна t0.

Сущность метода элементарных балансов заключается в следующем. Тело разбивается на ряд элементарных геометрических форм, в пределах которых закон изменения исследуемой величины – температуры – принимается линейным. В полярной системе координат такой элементарной геометрической формой является цилиндрический слой с радиусом r и $r+dr$. Поскольку температура в данном случае изменяется только по радиусу, расчетные значения температуры находятся на выбранных радиусах. Температура в центре цилиндра имеет индекс 0. На наружном радиусе индекс температуры n.
Теплофизические свойства материала цилиндра, как-то теплопроводность λ, теплоемкость c, плотность ρ, а также коэффициент теплоотдачи α приняты постоянными.

Для определения температуры рассматриваемым методом используются гипотезы Фурье и Ньютона, на основании которых удельный тепловой поток в твердом теле и на наружной поверхности, которая находится в подвижной среде, определяется соответственно уравнениями

$$q = -\lambda grad(t),$$

$$q_n = \alpha(t_n - t_ж).$$

Воспользовавшись этими уравнениями, составим расчетные формулы для определения в выбранных точках температуры в последующие моменты времени. Запишем искомые формулы для наружного радиуса, имеющего индекс n, для внутреннего радиуса с индексом i, который изменяется в следующих пределах 1<=i<=n–1. Центр круглого сечения имеет индекс 0.

На наружном радиусе расчетная линия находится на границе раздела газообразной и твердой среды. Тепловой баланс в этом случае записывается следующим образом

$$q_{n1} - q_{2n} = \Delta u_n,$$

где

входящий тепловой поток $q_{n1} = \alpha 2\pi r_n (t_ж - t_n)$;

уходящий тепловой поток $q_{n2} = \lambda(t_n - t_{n-1})2\pi(r_n - \Delta r)0.5 / \Delta r$;

изменение внутренней энергии $\Delta u_n = (t_n^* - t_n)c\rho\pi(r_n^2 - (r_n - 0.5\Delta r)^2) / \Delta\tau.$

Вводя следующие обозначения, получим формулу для температуры на наружном радиусе в последующий момент времени

$$t_n^* = t_n - A_1 t_n - A_2 t_n + A_1 t_ж + A_2 t_{n-1},$$

в которой коэффициенты A_1, A_2 находим с помощью следующих формул

$$A_1 = 8\Delta\tau\,\alpha\, n / (c\,\rho\,\Delta r(4n-1)),$$

$$A_2 = 4\Delta\tau\lambda(2n-1) / (c\rho\Delta r^2(4n-1)).$$

Определение температуры в последующий момент времени для внутренних точек производится с помощью следующих формул.

Уравнение теплового баланса для точек 1<=i<=n–1

$$q_{i1} - q_{2i} = \Delta u_i,$$

где

$$q_{1i} = \lambda(t_{i+1} - t_i)2\pi(r_i + 0.5\Delta r) / \Delta r,$$

$$q_{1i} = \lambda(t_i - t_{i-1})2\pi(r_i - 0.5\Delta r) / \Delta r,$$

$$\Delta u_i = (t_i^* - t_i)\pi\rho c 2 r_i \Delta r / \Delta\tau.$$

Из приведенного выше уравнения теплового баланса получим формулу для температуры в последующий момент времени на радиусе с индексом i.

$$t_i^* = t_i(1 - A_3) + t_{i+1}A_4 + t_{i-1}A_5,$$

где

$$A_3 = 2\lambda\Delta\tau / (\rho c\Delta r^2),$$

$$A_4 = \lambda(2i+1)\Delta\tau / (2n\rho c\Delta r^2),$$

$$A_5 = \lambda(2i-1)\Delta\tau / (2n\rho c\Delta r^2).$$

Поскольку в центре цилиндра благодаря симметрии тепловой поток отсутствует, справедливо следующее равенство $t_0^* = t_1^*$.

Временной шаг должен удовлетворять условиям устойчивости. В нашем случае он должен быть меньше или равен наименьшему временному шагу, найденному из следующих равенств

$$1 - A_1 - A_2 <= 0 .$$

$$1 - A_3 <= 0.$$

Подставив в приведенные выше формулы соответствующие выражения для коэффициентов A_1, A_2, A_3, получим необходимые условия для обеспечения устойчивости находимого решения.

$$\tau_1 <= c\rho\Delta r^2 (4n-1)0.25/(2\alpha r[n] + \lambda(2n-1)).$$

$$\tau_2 <= \Delta r^2 \rho c 0.5/\lambda .$$

Выбираемый временной шаг должен отвечать следующему условию

$$\tau <= \tau_1 \text{ и } \tau <= \tau_2$$

3. Алгоритм решения поставленной задачи.

а) Ввод исходных данных.

Исходными данными для определения нестационарного температурного поля в бесконечном цилиндре являются следующие параметры:

Распределение температуры в цилиндре в начальный момент времени $\tau = 0$. (В нашем случае температура во всех точках по сечению цилиндра принималась постоянной и равной t_0). Наружный радиус цилиндра r_n. Коэффициенты теплопроводности λ, теплоотдачи α, теплоемкость c, плотность ρ, заданное время V_z, число расчетных точек n, температура жидкости t_g.

б) Следующим действием следует найти временной шаг, отвечающий условию устойчивости.

в) Определив коэффициенты A_1, A_2, A_3, находим температуру в последующий момент во всех расчетных точках спустя расчетный временной шаг.

г) Выводим результаты расчета температурного поля в цилиндре через каждый выбранный временной интервал вплоть до исчерпывания расчетного времени.

4. Текст программы.

```
Program Cylindr;
 { Определение нестационарного температурного поля
```

```
 в бесконечном цилиндре при граничных условиях 3 рода.
 Применяется метод элементарных балансов  }
 uses crt;
 type mas = array [0..50] of double;
 var
                          r,t,tp  :  mas;
      v,vz,d,la,alf,c,ro,dr  :  double;
        4,a5,tau,t0,a1,a2  :  double;
           rn,tau2,tg,tau1  :  double;
                   i,j,n,m,k  :  word;
                               f  :  text;
{t-температура в предыдущий момент времени,
tp - в последующий }
{ v-текущее время, vz- заданное время }
{ r-радиус цилиндра, la-теплопроводность }
{ alf-теплоотдача, c-теплоемкость, ro-плотность }
{ dr-линейный шаг, t0-начальная температура }
{ tau- временной шаг, a1,a2-коэффициенты }
{ n-число линейных шагов, m-число временных шагов }
{ k- число временных шагов между печатью }
{ tau1,tau2 - минимальные временные шаги из условий
устойчивости}
{ tg - температура жидкости, rn - наружный радиус }
begin
clrscr;
assign(f,'e:\rod\dat\cylindr.dat');
rewrite(f);
writeln('вв.la,ro,c,alf,vz,rn,t0,tg,n');
readln(la,ro,c,alf,vz,rn,t0,tg,n);
dr:=rn/n;
r[0]:=0;
writeln(' ':5,'Радиусы, на которых ищем температуру');
writeln(f,' ':5,'Радиусы, на которых ищем температуру');
for i:=1 to n do
  r[i]:=dr*i;
```

```
for i:=0 to n do
begin
  write(' ':4,r[i]:1:3);     write(f,' ':4,r[i]:1:3);
  if ((i>0) and( i mod 5 =0)) then
  begin writeln ;  writeln(f) end
end;
readkey;
tau1:=c*ro*dr*dr*0.125*(4*n-1);
tau1:=tau1/(2*alf*rn+la*(2*n-1));
tau2:=dr*dr*ro*c*0.5/la;
write('вв.временной шаг tau<=',tau1:1:7);
writeln(' и <= ', tau2:1:7);
readln(tau);
a1:=8*alf*tau*n/(c*ro*dr*(4*n-1));
a2:=8*la*tau*(2*n-1)/(c*ro*dr*dr*(4*n-1));
a3:=2*la*tau/(dr*dr*ro*c);
a4:=la*(2*n+1)*tau/(2*n*ro*c*dr*dr);
a5:=la*(2*n-1)*tau/(2*n*ro*c*dr*dr);
write(' ':9,'a1=',a1:1:3,' a2=',a2:1:3,' a3=',a3:1:3);
writeln(' a4=',a4:1:3,' a5=',a5:1:3);
write(f,' ':9,'a1=',a1:1:3,' a2=',a2:1:3,' a3=',a3:1:3);
writeln(' a4=',a4:1:3,' a5=',a5:1:3);
writeln(' ':9, 'la=', la:1:3, 'ro=', ro:1:3, 'c=', c:1:3, 'alf=', alf:1:3);
writeln(f,' ':9,'la=',la:1:3,' ro=',ro:1:3,' c=',c:1:3,' alf=',alf:1:3);
writeln(' ':9,' vz=',vz:1:3,' d=',d:1:5,' t0=',t0:1:3,' tg=',tg:1:3);
writeln(f,' ':9,' vz=',vz:1:3,' d=',d:1:5,' t0=',t0:1:3,' tg=',tg:1:3);
writeln(' ':9,'n=',n:1,' dr=',dr:1:5,' tau=',tau:1:5,' a1=',a1:1:5,'
a2=',a2:1:5);
writeln(f,' ':9,'n=',n:1,' dr=',dr:1:5,' tau=',tau:1:5,' a1=',a1:1:5,'
a2=',a2:1:5);
readkey;
m:=round(vz/tau);
writeln(' ':9,' число временных шагов m= ',m:1);
writeln(f,' ':9,' число временных шагов m= ',m:1);
writeln('вв.  число временных шагов между печатью k');
```

```
readln(k);
writeln(' ':9,'число временных шагов между печатью', k;
writeln(f,'':9,'число временных шагов между печатью', k);
  v:=0;
  for i:=0 to n do
     t[i]:= t0;
writeln(' ':9,'Температурное поле в начальный момент времени');
writeln(f,' ':9,'Температурное поле в начальный момент времени');
  for i:=0 to n do
  begin
     write(' ':6,t[i]:1:3);     write(f,' ':6,t[i]:1:3);
   if ((i>0) and( i mod 5 =0)) then
   begin writeln ;  writeln(f) end
   end;
readln;
j:=0;
repeat
v:=v+tau;  j:=j+1;
for i:=1 to n-1 do
begin
  a4:=la*(2*i+1)*tau/(2*i*ro*c*dr*dr);
 a5:=la*(2*i-1)*tau/(2*i*ro*c*dr*dr);
 tp[i]:=t[i]*(1-a3)+a4*t[i+1]+t[i-1]*a5;
end;
 tp[0]:=tp[1];
 tp[n]:=t[n]*(1-a1-a2)+a2*t[n-1]+a1*tg;
    t:=tp;
   if j mod k =0 then
   {1} begin
       writeln(' ':5,'Время v = ',v:1:3);
       writeln(f,' ':5,'Время v = ',v:1:3);
       for i:=0 to n do
   {2}  begin
         write(' ':6,tp[i]:1:3);
                   write(f,' ':6,tp[i]:1:3);
```

```
        if ((i>0) and (i mod 5=0)) then
          begin writeln ;writeln(f); end;
   {2}  end;
      readln;
   {1} end;
 until abs(vz-v) <0.01;
 writeln(' ':5,'Время v = ',v:1:3);
 writeln(f,' ':5,'Время v = ',v:1:3);
 for i:=0 to n do
 begin
   write(' ':6,tp[i]:1:3);
    write(f,' ':6,tp[i]:1:3);
   if ((i>0) and (i mod 5=0)) then
     begin writeln ;writeln(f); end;
 end;
 readln;
 close(f);
 readkey;
end.
```

5. Протокол работы программы.

```
   Радиусы, на которых ищем температуру
  0.000    0.006    0.012    0.018    0.024    0.030
  0.036    0.042    0.048    0.054    0.060
      a1=0.050 a2=0.661 a3=0.339 a4=0.178 a5=0.161
      la=20.934 ro=7448.200 c=460.000 alf=502.320
       vz=3060.000 d=0.00000 t0=20.000 tg=820.000
      n=10 dr=0.00600 tau=1.00000 a1=0.05012 a2=0.66148
       число временных шагов m= 3060
        число временных шагов между печатью 600
      Температурное поле в начальный момент времени
    20.000      20.000      20.000      20.000      20.000      20.000
    20.000      20.000      20.000      20.000      20.000
   Время v = 600.000
    564.724     564.724     566.864     570.695     576.118     583.062
    591.452     601.204     612.224     624.407     637.637
```

Время v = 1200.000

749.159	749.159	749.753	750.816	752.321	754.248
756.577	759.283	762.341	765.722	769.393	

Время v = 1800.000

800.341	800.341	800.506	800.801	801.219	801.754
802.400	803.151	803.999	804.937	805.956	

Время v = 2400.000

814.545	814.545	814.590	814.672	814.788	814.936
815.116	815.324	815.560	815.820	816.103	

Время v = 3000.000

818.486	818.486	818.499	818.522	818.554	818.595
818.645	818.702	818.768	818.840	818.919	

Время v = 3060.000

818.668	818.668	818.679	818.699	818.728	818.764
818.808	818.859	818.916	818.980	819.049	

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ
з курсу
«МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ В РОЗРАХУНКАХ НА ЕОМ»

для студентів заочної форми навчання спеціальностей
7.095010 “Теплоенергетика” та 7.000008 “Енергетичний менеджмент”
Російською мовою

Укладачі: РОДІОНОВА Тетяна Федорівна
КРУГЛЯКОВА Ольга Володимирівна

Відповідальний за випуск В.М.Кошельник
Роботу до видання рекомендував В.В.Бородаєвський

В авторській редакції

План 2007 р., поз. 63/

Підп.до друку 08. Формат 60x84 1/16. Папір офсет. Друк – ризографія. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 1,0. Обл.-вид.арк. 1,3. Наклад 100 прим. Зам.______________. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ „ХПІ” 61002, Харків-2, вул. Фрунзе, 21.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №116 від 10.07.2000 р.

Друкарня НТУ „ХПІ”, 61002, м. Харків, вул. Фрунзе, 21