classification systems cooperating with fuzzy reasoning methods [Text] / *O. Cordon, M.J. del Jesus, F. Herrera* // International Journal of Intelligent Systems. – 1998. – Vol. 13. – P. 1025-1053. **4.** *Roubos, H.* Compact and transparent fuzzy models and classifiers through iterative complexity reduction [Text] / *H. Roubos, M. Setnes* // IEEE Trans. on Fuzzy Systems. – 2001. – Vol. 9– P. 516-524. **5.** *Simon, H.* The Structure of Ill-structured Problems [Text]/ *H. Simon* // Artificial Intelligence. – 1973. – Vol. 4.– P. 181 – 202. **6.** *Ishibuchi, H.* Fuzzy rule selection by multi-objective genetic local search algorithms and rule evaluation measures in data mining [Text] / *H. Ishibuchi, T. Yamamoto* // Fuzzy Sets and Systems. – 2004, January. – Vol. 141. – P. 59-88. **7.** *Нефёдов, Л. И.* Модели и методы синтеза офисов по управлению программами и проектами: монография [Текст] / *Л. И. Нефёдов, Ю. А. Петренко, Т. В. Плугина и др.* – Х.: ХНАДУ, 2010. – 344 с. **8.** *Саати, Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий [Текст] / *Т. Саати* – М.: Радио и связь, 1993. – 320 с. **9.** *Гудков, П. А.* Методы сравнительного анализа: учебное пособие [Текст] / *П. А. Гудков; под редакцией профессора А. М. Бершадского.* – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2008. – 81 с.

Поступила в редколлегию 20.01.2014

УДК 658.512

Модель выбора оборудования проектного офиса в условиях нечеткой информации / Нефёдов Л. И., Петренко Ю. А., Кононыхин А. С. // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Х: НТУ «ХПІ», – 2014. - № 7 (1050). – С.71-76 . – Бібліогр.: 9 назв. ISSN 2079-5459

У статті розроблена модель вибору обладнання проектного офісу, що дозволяє на основі аналізу вимог, пропонованих до оснащення офісу, підвищити продуктивність, ергономічність і безпеку праці співробітників з урахуванням кількісних і якісних критеріїв залежно від функціонального призначення робочих місць.

Ключові слова: нечіткі оцінки, функція приналежності, проектний офіс, офісне обладнання, метод аналізу ієрархій.

Model of selection of project office equipments in fuzzy information/ L. Nefedov, Yu. Petrenko, A. Kononykhin //Bulletin of NTU “KhPI”. Series: New desicions of modern technologies. – Kharkov: NTU “KhPI”, 2014.-№ 7 (1050).- P.71-76. Bibliogr.:9 . ISSN 2079-5459

In the article developed model of selection of project office equipments in fuzzy information which allows improving performance, ergonomics and safety of employees taking into account the quantitative and qualitative criteria depends on functional areas.

Keywords: fuzzy evaluation, membership function, project office, office equipments, analytic hierarchy process.

УДК: 517.53

І. П. КШАНОВСЬКИЙ, канд. фіз.-мат. наук, доц., НУ "Львівська політехніка";
Г. В. ІВАСИК, канд. фіз.-мат. наук, асис., НУ "Львівська політехніка"

ПРО МАЖОРАНТИ ЗРОСТАННЯ АНАЛІТИЧНИХ В ПРОКОЛЕНІЙ ПЛОЩИНІ ФУНКЦІЙ

Знайдено найкращі в певному сенсі мажоранти зростання двопараметричної характеристики аналітичної в проколеній площині функції з заданим обмеженням на кількість її нулів.

Ключові слова: аналітична функція, двозв’язна область, характеристика Неванлінни, функція зростання

Вступ. В 60-х роках минулого століття Л. Рубел та Б. Тейлор розвинули метод рядів Фур’є, який дозволив вивчати класи цілих та мероморфних функцій з обмеженнями на зростання, що задаються довільними додатними, неперервними, зростаючими, необмеженими функціями $\lambda(r)$. Такі функції $\lambda(r)$ називаються функціями зростання.

Функцію зростання $\lambda(r)$, яка для довільної послідовності Z з множини $S_\nu = \{Z : n(r,Z) \le \nu(r)\}$, де $n(r,Z)$ − кількість членів послідовності Z в крузі радіуса r, $\nu(r)$ − функція зростання, мажорує характеристику Неванлінни $T(r,f)$ принаймні однієї цілої функції f, множина нулів $Z(f)$ якої співпадає з Z, назвемо мажорантою зростання для класу цілих функцій $E_\nu = \{f : Z(f) \in S_\nu\}$. Виникає питання про знаходження найкращих у певному сенсі мажорант для E_ν, які відіграють важливу роль в дослідженнях властивостей цілих та мероморфних функцій. Найкращі мажоранти зростання неванліннової характеристики цілої функції з заданим обмеженням на кількість її нулів знайдено в [5].

Значна частина задач теорії розподілу значень потребує вивчення властивостей мероморфних функцій у двозв'язних областях. Відомо, що кожна двозв'язна область конформно еквівалентна деякому кільцю, проколеному кругові чи проколеній площині. При перенесенні теорії Неванлінни мероморфні функції в кільці, проколеній площині чи проколеному крузі найновішими є підходи А. Кондратюка, А. Христіянина та І. Кшановського. Зокрема, А. Кондратюк ввів двопараметричну характеристику $T(s,r,f)$ для функцій, мероморфних у вищезгаданих областях та вивчив її властивості. В даній роботі знайдено найкращі мажоранти двопараметричної характеристики аналітичної в проколеній площині функції з заданим обмеженням на кількість її нулів.

Означення та позначення. Нехай f – мероморфна функція в проколеній площині $A = \{z : 0 < |z| < +\infty\}$. Нехай $t_0 > 0$ – довільне фіксоване число, $\mu((\alpha,\beta]) = \sum_{\alpha < |b_j| \le \beta} 1$, $\{b_j\}$ – множина полюсів функції f з врахуванням їх кратностей. Визначимо функцію $n(t,f)$ наступним чином:

$$n(t,f) - n(t_0,f) = \mu((t_0,t]),\ t > t_0, \qquad n(t_0,f) - n(t,f) = \mu((t,t_0]),\ t < t_0,$$

де значення $n(t_0,f)$ вибрано довільно.

Нехай

$$N(s,r,f) = \frac{1}{\log r}\int_1^r \frac{n(t,f)}{t}dt + \frac{1}{\log s}\int_s^1 \frac{n(t,f)}{t}dt, \quad 0 < s < 1, 1 < r < +\infty.$$

Зауважимо, що зміна функції $n(t,f)$ на сталу не змінює значення функції $N(s,r,f)$. Тому не зменшуючи загальності можемо вважати, що $t_0 = 1,\ n(t_0,f) = 0$. Двопараметрична характеристика $T(s,r,f)$ визначається наступним чином

$$T(s,r,f) = \frac{1}{\log r}m(r,f) - \frac{1}{\log s}m(s,f) - \left(\frac{1}{\log r} - \frac{1}{\log s}\right)m(1,f) + N(s,r,f), \quad 0 < s < 1, 1 < r < +\infty,$$

де

$$m(t,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(te^{i\theta})|\,d\theta.$$

Позначимо

$$T^*(s,r,f) = \log(1/s)\, m(r,f) + \log r\, m(s,f) - \left(\log(1/s) + \log r\right) m(1,f) + N^*(s,r,f) \text{ де}$$

$$N^*(s,r,f) = \log(1/s)\int_1^r \frac{n(t,f)}{t}dt - \log r\int_s^1 \frac{n(t,f)}{t}dt, \quad 0 < s \le 1,\ 1 \le r < +\infty.$$

Зауважимо, $T^*(s,r,f) = \log(1/s)\log r\, T(s,r,f), \quad 0 < s < 1,\ r > 1.$

Доведено [1], що функція $T^*(s,r,f)$ – невід'ємна, зростаюча і опукла відносно логарифма змінної $r > 1$. Як функція змінної s, вона невід'ємна, зростаюча, коли s спадає в інтервалі $(0,1)$, опукла відносно $\log(1/s)$.

Зауважимо [6],

$$T(s,r,f)=T(s,r,1/f),\quad 0<s<1,\ 1<r<+\infty.$$

Означення 1. *Функцію двох змінних* $\lambda(\tau,t)$*, визначену на множині* $[1,+\infty)\times[1,+\infty)$*, будемо називати функцією зростання, якщо* $\lambda(\tau,t)$ *– невід'ємна, необмежена, неперервна, зростаюча функція кожної змінної.*

Через $c_k(r,f)$ позначатимемо коефіцієнти Фур'є функції $\log|f(re^{i\theta})|$,

$$c_k(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ik\theta}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta,\ k\in\mathbb{Z},\quad 0<r<+\infty.$$

Надалі розглядатимемо лише однозначні аналітичні функції.

Означення 2. *Нехай* $\lambda(\tau,t)$ *– функція зростання,* $f(z)$ *– аналітична функція в* A*. Скажемо, що* f *є функцією скінченного* λ*-типу, якщо*

$$T^*(s,r,f)\le B\lambda\left(\frac{C}{s},Dr\right)$$

для деяких сталих B,C,D та для всіх s,r таких, що $0<s<1,\ r>1$.

Позначимо $\Lambda_H(A)$ – клас аналітичних в A функцій скінченного λ-типу.

Нехай $\nu(\tau,t)$ – функція зростання. Позначимо через $S_\nu(A)$ множину послідовностей Z відмінних від нуля комплексних чисел без точок скупчення в A таких, що $n(s,r,Z)\le\nu(1/s,r),\ 0<s\le1,\ r\ge1,$ де $n(s,r,Z)$ – кількість членів послідовності Z в кільці $\{z:s<|z|\le r\}$, $0<s\le1,\ r\ge1$, $n(1,1,Z)=0$.

Якщо f − мероморфна у проколеній площині A функція, то через $Z(f)$, $W(f)$, позначимо послідовності нулів та полюсів функції f відповідно, де кожен нуль чи полюс враховується стільки разів, яка його кратність.

Клас аналітичних в A функцій f таких, що $Z(f)\in S_\nu(A)$ позначимо через $H_\nu(A)$.

Означення 3. *Функція зростання* λ *називається найкращою мажорантою зростання для* $H_\nu(A)$*, якщо:*

1) для довільної послідовності Z з $S_\nu(A)$ *існує аналітична в* A *функція* f *скінченного* λ*-типу така, що* $Z(f)=Z$*;*

2) існує послідовність Z *з* $S_\nu(A)$ *така, що для довільної аналітичної в* A *функції* f *такої, що* $Z(f)=Z$*, виконується* $\lambda(1/s,r)\le BT^*(s/C,Dr,f)$ *при деяких додатних* B,C,D *та всіх* s,r*,* $0<s<1,\ r>1$.

Допоміжні твердження та результати

Нам знадобляться результати, сформульовані у випадку проколеної площини.

Теорема А.([2, с.60]) *Нехай* f *– відмінна від тотожного нуля, мероморфна в* $\{z:0<|z|<+\infty\}$ *функція,* $Z(f)=\{a_\mu\}$*,* $W(f)=\{b_\nu\}$*. Нехай* $\{\alpha_k\}$ *визначаються з рівностей* $k\alpha_k=\beta_{k-1},\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$*, де* $\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta_k z^k+\sum_{|a_\mu|=1}\dfrac{1}{z-a_\mu}-\sum_{|b_\nu|=1}\dfrac{1}{z-b_\nu}$ *– розвинення логарифмічної похідної функції* f *в деякому околі одиничного кола. Тоді*

$$c_k(r,f)=\frac{1}{2}(\alpha_k r^k+\overline{\alpha}_{-k}r^{-k})+\frac{1}{2k}\sum_{1<|a_\mu|\le r}\left(\left(\frac{r}{a_\mu}\right)^k-\left(\frac{\overline{a}_\mu}{r}\right)^k\right)-\sum_{1<|b_\nu|\le r}\left(\left(\frac{r}{b_\nu}\right)^k-\left(\frac{\overline{b}_\nu}{r}\right)^k\right),$$

$$c_k(1/r,f)=\frac{1}{2}(\alpha_k r^{-k}+\overline{\alpha}_{-k}r^k)+\frac{1}{2k}\sum_{1/r\le|a_\mu|\le1}\left(\left(r\overline{a}_\mu\right)^k-\left(\frac{1}{ra_\mu}\right)^k\right)-\frac{1}{2k}\sum_{1/r\le|b_\nu|\le1}\left(\left(r\overline{b}_\nu\right)^k-\left(\frac{1}{rb_\nu}\right)^k\right),\qquad(1)$$

де $k \in \mathrm{Z}\setminus\{0\}$, $1 < r < +\infty$.

Теорема B.([6]) *Якщо* f *– мероморфна функція в* $A = \{z : 0 < |z| < +\infty\}$, *то*

$$\liminf_{\substack{s\to 0\\ r\to+\infty}} T(s,r,f) < +\infty$$

тоді і тільки тоді, коли f – раціональна.

Теорема C.([6]) *Нехай* $f(z)$ − *аналітична функція в* A. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) $f \in \Lambda_H(A)$;

2) $|c_k(r,f)|\log(1/s) + |c_k(s,f)|\log r \le B\lambda\left(\frac{C}{s}, Dr\right)$ для деяких сталих B, C, D та для всіх s, r таких, що $0 < s < 1$, $1 < r < +\infty$, $k \in \mathrm{Z}$.

3) $|c_k(r,f)|\log(1/s) + |c_k(s,f)|\log r \le \dfrac{B\lambda\left(\frac{C}{s}, Dr\right)}{|k|+1}$ для деяких сталих B, C, D та для всіх s, r таких, що $0 < s < 1$, $1 < r < +\infty$, $k \in \mathrm{Z}$.. (2)

Основні результати

Теорема. *Нехай* $\nu(\rho, r)$ *– функція зростання,* $\nu(\rho,1)$, $\nu(1,r)$ *– функції скінченних порядків. Тоді функція зростання*

$$\lambda(\rho,r) = \log\rho\cdot\left(r^{q_1-1}\int_1^r \frac{\nu(1,t)}{t^{q_1}}dt + r^{q_1}\int_r^{+\infty}\frac{\nu(1,t)}{t^{q_1+1}}dt\right) +$$

$$+\log r\cdot\left(\rho^{q_2-1}\int_1^{\rho}\frac{\nu(t,1)}{t^{q_2}}dt + \rho^{q_2}\int_{\rho}^{+\infty}\frac{\nu(t,1)}{t^{q_2+1}}dt\right),$$

де q_1 *та* q_2 *– найменші натуральні числа такі, що*

$$\int_1^{+\infty}\frac{\nu(1,t)}{t^{q_1+1}}dt < +\infty, \quad \int_1^{+\infty}\frac{\nu(t,1)}{t^{q_2+1}}dt < +\infty,$$

є найкращою мажорантою для $H_\nu(A)$.

Доведення. Нехай Z – довільна послідовність з $S_\nu(A)$. Розглянемо послідовності

$$Z_1 = \{z_{1.j} :\ z_{1.j} = z_j,\ z_j \in Z,\ |z_j| > 1\},$$
$$Z_2 = \{z_{2.j} :\ z_{2.j} = 1/z_j,\ z_j \in Z,\ |z_j| \le 1\}.$$

Тоді

$$n(r, Z_1) \le n(1, r, Z) \le \nu(1,r), \quad r > 1,$$

$$n(r, Z_2) \le n\left(\frac{1}{r}, 1, Z\right) \le \nu(r,1), \quad r > 1,$$

де $n(t, Z_j)$ − кількість членів послідовності Z_j в крузі $|z| < t$, $j = 1,2$.

Оскільки інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\nu(1,t)}{t^{q_1+1}}dt$ збіжний, то добуток Вейєрштраса $f_1(z) := \prod_{z_{1.j}\in Z_1} E(z/z_{1.j}, q_1 - 1)$ збігається до цілої функції. Знайдемо її характеристику

$$T(s,r,f_1) = \frac{1}{\log r}T(r,f_1) - \frac{1}{\log s}T(s,f_1) - \left(\frac{1}{\log r} - \frac{1}{\log s}\right)T(1,f),$$

де $T(t,f_1)$ – класична характеристика Неванлінни. Оскільки $T(t,f_1)$ – неспадна, то $T(s,f_1)\le T(1,f_1),\ s<1$. Звідси

$$T(s,r,f_1)\le \frac{1}{\log r}(T(r,f_1)-T(1,f_1)),\quad r>1\cdot$$

Розглянемо добуток

$$g(z)=\prod_{z_{2.j}\in Z_2}E(z/z_{2.j},q_2-1)=\prod_{|z_j|\le 1}E(zz_j,q_2-1)\cdot$$

Нехай $f_2(z)=g(1/z)$. Характеристика

$$T(s,r,f_2)=\frac{1}{\log r}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|g\left(\frac{1}{r}e^{-i\theta}\right)\right|d\theta-\frac{1}{\log s}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|g\left(\frac{1}{s}e^{-i\theta}\right)\right|d\theta-$$

$$-\left(\frac{1}{\log r}-\frac{1}{\log s}\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|g\left(e^{-i\theta}\right)\right|d\theta=-\frac{1}{\log(1/r)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|g\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right)\right|d\theta+$$

$$+\frac{1}{\log(1/s)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|g\left(\frac{1}{s}e^{i\theta}\right)\right|d\theta-\left(\frac{1}{\log(1/s)}-\frac{1}{\log(1/r)}\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|g\left(e^{i\theta}\right)\right|d\theta=$$

$$=T(1/r,1/s,g)\le\frac{1}{\log(1/s)}(T(1/s,g)-T(1,g)),\qquad s<1,\quad r>1.$$

Функція $f(z)=f_1(z)\cdot f_2(z)$ – аналітична в A, множина нулів функції f співпадає з Z. Характеристика функції f

$$T(s,r,f)\le T(s,r,f_1)+T(s,r,f_2)+O\left(\frac{1}{\log r}-\frac{1}{\log s}\right).$$

Оскільки (див.напр. [7, стор.53])

$$T(r,f_1)\le C(q_1)\left(r^{q_1-1}\int_1^r\frac{n(t,Z_1)}{t^{q_1}}dt+r^{q_1}\int_r^{+\infty}\frac{n(t,Z_1)}{t^{q_1+1}}dt\right),\quad r>1,$$

$$T(1/s,g)\le C(q_2)\left((1/s)^{q_2-1}\int_1^{1/s}\frac{n(t,Z_2)}{t^{q_2}}dt+(1/s)^{q_2}\int_{1/s}^{+\infty}\frac{n(t,Z_2)}{t^{q_2+1}}dt\right),\quad s<1,$$

то звідси, з огляду на попередні викладки, а також, враховуючи те, що

$$\lambda(e\rho,\,e^2r)\ge\log(e\rho)e^{2q_1-2}r^{q_1-1}\int_1^{e^2r}\frac{\nu(1,t)}{t^{q_1}}dt\ge\log(e\rho)\int_e^{e^2r}\frac{\nu(1,t)}{t}\cdot\left(\frac{e^2r}{t}\right)^{q_1-1}dt\ge$$

$$\ge\log(e\rho)\nu(1,e)\log(er)\ge\nu(1,e)(\log\rho+\log r),$$

негайно отримаємо, що функція $f(z)$ є скінченного λ-типу.

Нехай k_0 − найменше натуральне число таке, що $\nu^{-1}(1,k_0)>1$. Розглянемо послідовність $Z_3=\{a_k\}$, де $a_k=\nu^{-1}(1,k_0+k-1),\ k\in\mathbb{N}$. Тоді $\nu(1,a_k)=k_0+k-1$. Зауважимо, що $a_k>1, a_k\uparrow+\infty,\ n(1,a_k,Z_3)=k$. Нехай $r>a_1$. Тоді існує $k\in\mathbb{N}$ таке, що $a_k<r\le a_{k+1}$. Оскільки

$$k\le n(1,r,Z_3)\le k+1,\quad k_0+k-1\le\nu(1,r)\le k_0+k,$$

то

$$\nu(1,r)-k_0\le n(1,r,Z_3)\le\nu(1,r)-k_0+2,\quad r>a_1.\qquad(3)$$

Нехай k_1 − найменше натуральне число таке, що $\nu^{-1}(k_1,1)>1$. Розглянемо послідовність $Z_4=\{d_k\},\ d_k=1/b_k$, де $b_k=\nu^{-1}(k_1+k-1,1),k\in\mathbb{N}$. Очевидно, що $d_k<1,\ d_k\downarrow 0,\ \nu(b_k,1)=k_1+k-1,\ n(d_k,1,Z_4)=k-1$. Нехай $s<d_1$. Тоді існує $k\in\mathbb{N}$, що $d_{k+1}<s\le d_k$. Оскільки $k-1\le n(s,1,Z_4)\le k,\ k_1+k-1\le\nu(1/s,1)\le k_1+k$,

то

$$\nu(1/s,1)-k_1-1\le n(s,1,Z_4)\le \nu(1/s,1)-k_1+1,\quad s<d_1.$$

Нехай $f(z)$ – деяка аналітична в A функція множина нулів якої співпадає з $Z_3\cup Z_4$. Розглянемо її коефіцієнти Фур'є $c_k(t,f)$. З (1) маємо

$$2c_k(r,f)=\alpha_k r^k+\overline{\alpha}_{-k}r^{-k}+\frac{1}{k}\sum_{1<|a_\mu|\le r}\left(\left(\frac{r}{a_\mu}\right)^k-\left(\frac{\overline{a}_\mu}{r}\right)^k\right),\quad r>1.$$

Оскільки $a_\mu>0$, то для $k\in\mathbb{N}$

$$2c_k(r,f)=\alpha_k r^k+\overline{\alpha}_{-k}r^{-k}+\frac{r^k}{k}\int_1^r\frac{dn(1,t,Z_3)}{t^k}dt-\frac{1}{kr^k}\int_1^r t^k dn(1,t,Z_3)dt=$$

$$=\alpha_k r^k+\overline{\alpha}_{-k}r^{-k}+r^k\int_1^r\frac{n(1,t,Z_3)}{t^{k+1}}dt+r^{-k}\int_1^r t^{k-1}n(1,t,Z_3)dt.$$

Якщо $k=q_1-1>0,$ то позначивши $I_1(r):=\int_1^r\frac{n(1,t,Z_3)}{t^{q_1}}dt,$ легко отримати рівність

$$2c_{q_1-1}(r,f)=r^{q_1-1}I_1(r)\left(1+\frac{\alpha_{q_1-1}}{I_1(r)}+\frac{\overline{\alpha}_{-q_1+1}}{r^{2q_1-2}I_1(r)}+\frac{\int_1^r t^{q_1-2}n(1,t,Z_3)dt}{r^{2q_1-2}I_1(r)}\right).$$

За означенням числа q_1 та з огляду на (3) інтеграл $I_1(r)$ розбігається. Тому

$$\frac{\alpha_{q_1-1}}{I_1(r)}+\frac{\overline{\alpha}_{-q_1+1}}{r^{2q_1-2}I_1(r)}\to 0,\quad r\to+\infty.$$

Звідси

$$|c_{q_1-1}(r,f)|\ge B_0^* r^{q_1-1}I_1(r),$$

для деякого $B_0^*>0$ та досить великих r. Далі

$$I_1(r)=\int_{a_1}^r\frac{n(1,t,Z_3)}{t^{q_1}}dt\ge\int_{a_1}^r\frac{\nu(1,t)-k_0}{t^{q_1}}dt=\int_1^r\frac{\nu(1,t)}{t^{q_1}}dt\cdot(1+o(1)),\quad r\to\infty.$$

Отже,

$$|c_{q_1-1}(r,f)|\ge B_1^* r^{q_1-1}\int_1^r\frac{\nu(1,t)}{t^{q_1}}dt,\tag{4}$$

для деякого $B_1^*>0$ та досить великих r. У випадку, коли $q_1=1$, з огляду на [4, c. 63] , маємо

$$c_{q_1-1}(r,f)=c_0(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta=\int_1^r\frac{n(1,t,Z_3)}{t}dt+O(\log r)=$$

$$=\int_1^r\frac{n(1,t,Z_3)}{t}dt\cdot(1+o(1)),\ r\to+\infty,$$

оскільки

$$\frac{(\log r)'}{\left(\int_1^r\frac{n(1,t,Z_3)}{t}dt\right)'}=\frac{1}{n(1,r,Z_1)}\to 0,\quad r\to+\infty.$$

Звідси, беручи до уваги (3), матимемо

$$|c_0(r,f)|=\int_1^r \frac{\nu(1,t)}{t}dt\cdot(1+o(1)),\quad r\to+\infty. \tag{5}$$

Розглянемо

$$2c_{q_1}(r,f)=\left(\alpha_{q_1}+\int_1^r \frac{n(1,t,Z_3)}{t^{q_1+1}}dt\right)r^{q_1}+\overline{\alpha}_{-q_1}r^{-q_1}+r^{-q_1}\int_1^r t^{q_1-1}n(1,t,Z_3)dt.$$

За побудовою множини Z_3 та означенням числа q_1 інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{n(1,t,Z_3)}{t^{q_1+1}}dt$ збігається, тому попередню рівність можна записати у наступному вигляді

$$2c_{q_1}(r,f)=r^{q_1}\left(\alpha_{q_1}+\int_1^{+\infty}\frac{n(1,t,Z_3)}{t^{q_1+1}}dt-\int_r^{+\infty}\frac{n(1,t,Z_3)}{t^{q_1+1}}dt+J(r)\right),$$

де
$$J(r)=\overline{\alpha}_{-q_1}r^{-2q_1}+r^{-2q_1}\int_1^r t^{q_1-1}n(1,t,Z_3)dt.$$

Оскільки

$$\frac{\left(\int_1^r t^{q_1-1}n(1,t,Z_3)dt\right)'}{(r^{2q_1})'}=\frac{n(1,r,Z_3)}{2q_1r^{q_1}}\le\frac{\nu(1,r)+2}{2q_1r^{q_1}}\to 0,\quad r\to+\infty,$$

то
$$J(r)\to 0,\ r\to+\infty.$$

Позначимо $\gamma_{q_1}=\alpha_{q_1}+\int_1^{+\infty}\frac{n(1,t,Z_3)}{t^{q_1+1}}dt.$ Якщо $\gamma_{q_1}\ne 0,$ то із збіжності інтеграла $\int_1^{+\infty}\frac{n(1,t,Z_3)}{t^{q_1+1}}dt$ випливає, що для досить великих r виконується

$$\int_r^{+\infty}\frac{n(1,t,Z_3)}{t^{q_1+1}}dt<\frac{|\gamma_{q_1}|}{3}.$$

Оскільки
$$J(r)\to 0,\ r\to+\infty,$$

то $J(r)<\frac{|\gamma_{q_1}|}{3}$ для великих r. Тоді

$$2|c_{q_1}(r,f)|\ge r^{q_1}\left(|\gamma_{q_1}|-\int_r^{+\infty}\frac{n(1,t,Z_3)}{t^{q_1+1}}dt-|J(r)|\right)\ge r^{q_1}(|\gamma_{q_1}|/3)\ge r^{q_1}\int_r^{+\infty}\frac{n(1,t,Z_3)}{t^{q_1+1}}dt. \tag{6}$$

Якщо $\gamma_{q_1}=0,$ то

$$r^{q_1}\int_r^{+\infty}\frac{n(1,t,Z_3)}{t^{q_1+1}}dt\le 2|c_{q_1}(r,f)|+|\overline{\alpha}_{-q_1}|r^{-q_1}+r^{-q_1}\int_1^r t^{q_1-1}n(1,t,Z_3)dt\le$$

$$\le 2|c_{q_1}(r,f)|+|\overline{\alpha}_{-q_1}|r^{-q_1}+\frac{r^{q_1}-1}{q_1r^{q_1}}n(1,r,Z_3)\le 2|c_{q_1}(r,f)|+\int_r^{er}\frac{n(1,t,Z_3)}{t}dt\le$$

$$\le 2|c_{q_1}(r,f)|+\int_1^{er}\frac{n(t,1/f)}{t}dt \tag{7}$$

для досить великих r. Далі, враховуючи (4), (5), (6), (7) та нерівність $|a|+|b|\le\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$ при певному $c_1>0$, матимемо

$$\log(1/s)\left(r^{q_1-1}\int_1^r\frac{\nu(1,t)}{t^{q_1}}dt+r^{q_1}\int_r^{+\infty}\frac{\nu(1,t)}{t^{q_1+1}}dt\right)\le$$
$$\le c_1\log(1/s)\left(|c_{q_1-1}(r,f)|+|c_{q_1}(r,f)|+\int_1^{er}\frac{n(t,1/f)}{t}dt\right)\le$$
$$\le\sqrt{2}\,c_1\log(1/s)\left(\sum_{k\in Z}|c_k(r,f)|^2\right)^{1/2}+c_1\log(1/s)\int_1^{er}\frac{n(t,1/f)}{t}dt, \qquad (8)$$

починаючи з деякого $\tilde{r}>1$.

Цілком аналогічно, оцінюючи коефіцієнти $c_k(s,f)=c_k(1/\tau,f), s=1/\tau,\quad 0<s<1$, знайдемо

$$\log r\left((1/s)^{q_2-1}\int_1^{1/s}\frac{\nu(t,1)}{t^{q_2}}dt+(1/s)^{q_2}\int_{1/s}^{+\infty}\frac{\nu(t,1)}{t^{q_2+1}}dt\right)\le$$
$$\le\sqrt{2}\,c_2\log r\left(\sum_{k\in Z}|c_k(s,f)|^2\right)^{1/2}+c_2\log r\int_{s/e}^{1}\frac{-n(t,1/f)}{t}dt, \qquad (9)$$

для s, що не перевищують $\tilde{s}<1$.

Зауважимо, що відповідно до означення 2 кожна аналітична в A функція f є функцією скінченного λ-типу, де $\lambda(\tau,r)$ еквівалентна функції $T^*(1/\tau,r,f), \tau\to+\infty, r\to+\infty$. Тому за теоремою C

$$\log(1/s)\left(\sum_{k\in Z}|c_k(r,f)|^2\right)^{1/2}+\log r\left(\sum_{k\in Z}|c_k(s,f)|^2\right)^{1/2}\le b_3T^*(s/c_3,d_3r,f).$$

Додавши рівності (8) та (9), отримаємо

$$\lambda(1/s,r)\le b_4T^*(s/c_4,d_4r,f)+c^*N^*(er,s/e,1/f)\le b_5T^*(s/c_5,d_5r,f)+O\left(\log\frac{1}{s}+\log r\right),$$

для $s<\tilde{s},\ r>\tilde{r}$. Звідси, з огляду на твердження теореми B та на те, що у випадку, коли $f(z)$ – раціональна функція, то

$$T^*(s,r,f)=\log(1/s)T(r,f)+(T(s,f)-T(1,f))\log r-\log(1/s)T(1,f)=$$
$$=q\log r\log(1/s)+O(\log r+\log(1/s)),\ s\to0, r\to\infty,\quad (q>0),$$

маємо

$$\lambda(1/s,r)\le b_6T^*(s/c_6,d_6r,f),\qquad s<\tilde{s},\quad r>\tilde{r}.$$

Але сталі b,c,d можна підібрати таким чином, що ця нерівність буде виконуватись для всіх $s\le1, r\ge1$. Отже, виконується умова 2 означення 3. Теорема доведена.

Список літератури: **1.** Kondratyuk, A. Subharmonic functions on annuli. A two-parameter approach [Text] / A. Kondratyuk, O. Stashyshyn // *Математичний вісник НТШ*. – 2010. – № 7. − С. 352-365. **2.** Kondratyuk, A. Meromorphic functions in multiply connected domains [Text] / A. Kondratyuk, I. Laine // *Joensuu-L'viv*. – 2006. – 116 P. **3.** Гольдберг, А. А. Распределение значений мероморфных функций [Текст] / А.А. Голбдберг, И.В. Островский − *М:Наука,* 1970. − 591с. 4. Кшановський, І. Властивості мероморфних функцій у двозв'язних областях [Текст] : *дис. на здобуття наук. ступ. канд. фіз-мат. наук : спец. 01.01.01 "Математичний аналіз"//* – Львів, 2008. – 138 С. **5.** Васильків, Я. Про мажоранти зростання цілих функцій [Текст] / Я. Васильків, О. Лизун // *Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична.* − 2001. − Вип. 59. − С. 51-56. **6.** Кшановський, І. П.

Критерій скінченності λ-типу аналітичних в проколеній площині функцій [Текст] / І.П. Кшановський // *Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія: нові рішення в сучасних технологіях.* − 2013. − № 4(978). − С. 164-171. **7.** Хейман, У. К. Мероморфные функции [Текст] / У.К. Хейман – М: Мир, 1966. – 287 С.

УДК: 517.53

Про мажоранти зростання аналітичних в проколеній площині функцій/ І. П. Кшановський, Г. В. Івасик // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Х: НТУ «ХПІ», – 2014. - № 7 (1050). – С.76-84 . – Бібліогр.: 7 назв. ISSN 2079-5459

Найдены лучшие в некотором смысле мажоранты роста двопараметрической характеристики аналитической в проколотой плоскости функции с заданым ограничением на количество ее нулей.

Ключевые слова: аналитическая функция, двусвязная область, характеристика Неванлинны, функция роста.

On the growth majorant of analytic functions in a punctured plane/ I. Kshanovskyy, G. Ivasyk //Bulletin of NTU "KhPI". Series: New desicions of modern technologies. – Kharkov: NTU "KhPI", 2014.- № 7 (1050).- P.76-84. Bibliogr.:7. ISSN 2079-5459

We find the best in a certain sense growth majorant of two-parametric characteristic of analytic functions with given constraints on the number of its zeros in the punctured plane.

Keywords: analytic function, doubly connected domain, Nevanlinna characteristic, growth function.

УДК 65.011.56

Е. П. ПАВЛЕНКО, канд. техн. наук, доц., ХНУРЭ, Харьков;
И. А. КРИВОРОТЕНКО, студент, ХНУРЭ, Харьков;
В. А. АЙВАЗОВ, ст. препод., ХНУРЭ, Харьков

ВЫБОР МЕТОДОЛОГИИ РАЗРАБОТКИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ

Рассмотрена проблема выбора методологии разработки программного обеспечения информационных систем. Были исследованы и проанализированы проблемы классических методологий разработки. Также была рассмотрена гибкая методология разработки как альтернатива классическому подходу.

Ключевые слова: методология разработки, Спиральная модель, Каскадная модель, Agile методологии.

Введение. Повсеместно во многих организациях созданы и эффективно действуют информационные системы (ИС), обслуживающие процесс подготовки и принятия управленческих решений и решающие следующие задачи: обработка данных, обработка информации, реализация интеллектуальной деятельности.

Информационная система предприятия представляет собой совокупность информационных процессов, выполняющихся для удовлетворения потребности в информации на разных уровнях принятия решений. Информационная система состоит из компонентов обработки информации, различных задач и подсистем. Информационные системы реализуют принципы единства информационногопроцесса, информации и организации путем применения технических средств процессов сбора, накопления, обработки и передачи информации.

Программное обеспечение (ПО) – важнейший вид обеспечения информационной системы, обеспечивающий практическую реализацию процессов обработки информации.

На разработку программного обеспечения затрачивается большая часть средств,