

**А. С. КАИРОВ**, д-р техн. наук, профессор, НУК им. адм. Макарова, Николаев;  
**С. А. МОРГУН**, аспирант, НУК им. адм. Макарова, Николаев

## **ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЕНЦА РАБОЧИХ ЛОПАТОК ТУРБОМАШИН С УЧЕТОМ ДЕМПФИРОВАНИЯ**

Изложена методика исследования вынужденных колебаний венцов рабочих лопаток турбомашин с учетом демпфирования. С использованием метода конечных элементов разработана уточненная математическая модель секции «сектор диска – лопатка с демпферными связями», учитывающая конструктивную неоднородность пера лопатки и диска. Приведены результаты расчета амплитуд вынужденных колебаний венца рабочих лопаток турбины, вызванных воздействием переменной газодинамической силы.

**Ключевые слова:** вынужденные колебания, демпфирование, газодинамическая сила, амплитуды колебаний, метод конечных элементов.

**Введение.** В современных условиях, учитывая общемировую тенденцию ограничения применения ядерной энергии из-за высоких экологических рисков, стоит задача увеличения выработки электроэнергии на украинских тепловых электростанциях для обеспечения энергетического баланса страны. Этот процесс сопровождается увеличением единичной мощности турбоагрегатов при обязательном условии повышения их экономичности и надежности. Проблема обеспечения надежности особенно важна для мощных турбомашин, причем ее важность с ростом единичной мощности турбин возрастает, так как выход из строя одного узла приводит к высоким капитальным затратам на ремонт всего двигателя и, как следствие, к большим экономическим потерям. Отсюда возникает необходимость изучения вибрационных процессов в наиболее нагруженных узлах турбин, особенно в лопаточном аппарате, который испытывает воздействие нестационарных газодинамических сил.

**Анализ последних исследований и литературы.** Основные вопросы расчета амплитуд и частот вынужденных колебаний рабочих колес компрессоров и турбин в рамках стержневой теории приведены в работах [1, 2, 5]. Лопатки рассматриваются как незакрученные жестко закрепленные в диске стержни, совершающие колебания в одной из главных плоскостей изгиба, а решения полученных уравнений находят методом Ритца. В работе [7] вынужденные колебания венца рабочих лопаток турбины, возникающие под действием внешней нагрузки, разложенной в тригонометрический ряд Фурье, исследуются с помощью метода начальных параметров. Однако, в [7] не ука-

© А. С. Каиров, С. А. МоргуН, 2013

зан метод вычисления амплитуд гармоник возмущающих газодинамических сил. В работах [1, 3] данная проблема решается с применением метода конечных элементов (МКЭ), однако, в [1] не учитывается демпфирование, а используемый в [3] метод статической конденсации не позволяет получать удовлетворительные результаты при решении задач динамики и описании сложных форм колебаний. Исследование частот и форм колебаний отдельных лопаток методом динамических суперэлементов приведено в работе [4], а экспериментальным путем – в работе [6].

**Цель исследования.** Целью данной работы является разработка уточненной математической модели вынужденных колебаний венцов рабочих лопаток турбомашин с учетом демпфирования, используя метод конечных элементов.

**Постановка задачи.** Разработка комплекса мероприятий по повышению вибрационной надежности турбомашин неосуществима без детального изучения колебательных процессов, протекающих в таком ответственном узле как лопаточный аппарат и вызванных воздействием на лопатки нестационарных газодинамических сил. Поэтому возникает необходимость разработки уточненной математической модели вынужденных колебаний венцов рабочих лопаток. В ней необходимо учитывать влияние на амплитуды колебаний как внутреннего, так и конструкционного демпфирования в месте соединения демпферных связей с пером лопатки.

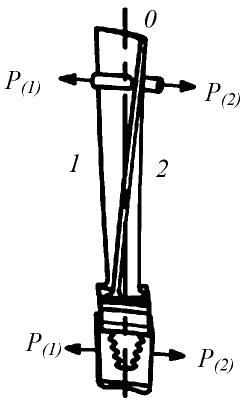


Рисунок 1 – Модель секции («сектор диска с лопаткой и участками связей») для расчетов вынужденных колебаний рабочих лопаток турбомашин

**Материалы исследований.** Циклически симметричную систему можно интерпретировать в виде совокупности  $\chi$  секций с одинаковыми геометрическими, инерционными и жесткостными свойствами. При этом  $\chi$  определяет порядок симметрии системы [3]. Венец, состоящий из  $z$  идентичных рабочих лопаток, также может рассматриваться в виде циклически симметричной системы с порядком симметрии  $z$ . Секция такой системы, которая в общем случае включает в себя сектор диска и укрепленную в нем лопатку с участками связей представлена на рис. 1.

В граничных узлах секции приложены неизвестные силы  $P_1$  и  $P_2$ . Цифрой 1 обозначена левая граница секции, цифрой 0 – средняя часть, а цифрой 2 – правая граница. Известными являются возмущающие газодинамические силы  $F^0$ . Вследствие периодичности возмущающих сил каждую из них можно разложить в ряд Фурье и

выделить любую  $k$ -ую гармонику.

Вначале необходимо рассмотреть способ вычисления амплитуд колебаний отдельной лопатки без учета сектора диска и демпферных связей. Для этого, воспользовавшись методом конечных элементов (МКЭ) и принципом Лагранжа II рода, запишем уравнения вынужденных колебаний одной из лопаток рассматриваемого венца [5]:

$$M_{JJ} \ddot{y}_J + C_{JJ} \dot{y}_J + K_{JJ} y_J = F_J, \quad (I, J=1, \dots, n), \quad (1)$$

где  $C_{JJ}$  – матрица демпфирования ( $C_{JJ} = 2\theta M_{JJ}$ ) [3];  $\theta$  – коэффициент затухания;  $y_J$  – абсолютные перемещения узлов секции;  $n$  – число степеней свободы секции;  $F_J$  –  $k$ -ая гармоника возмущающей силы:

$$F_J = F_J^{(1)} \cos k\omega t + F_J^{(2)} \sin k\omega t;$$

$\omega$  – частота вынужденных колебаний секции.

Решение системы уравнений (1) представлено в виде:

$$y_J = a_J^{(1)} \cos k\omega t + a_J^{(2)} \sin k\omega t, \quad (J = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

где  $a_J^{(1)}$  и  $a_J^{(2)}$  – амплитуды колебаний узлов левой и правой границ секции соответственно.

Для того чтобы определить  $a_J^{(1)}$  и  $a_J^{(2)}$  необходимо решить систему уравнений, образуемую путем подстановки (2) в (1):

$$M_{JJ} \left( a_J^{(1)} \cos k\omega t + a_J^{(2)} \sin k\omega t \right)'' + C_{JJ} \left( a_J^{(1)} \cos k\omega t + a_J^{(2)} \sin k\omega t \right)' + K_{JJ} \left( a_J^{(1)} \cos k\omega t + a_J^{(2)} \sin k\omega t \right) = F_J^{(1)} \cos k\omega t + F_J^{(2)} \sin k\omega t \quad (3)$$

Для решения (3) используется метод расчета амплитуд резонансных колебаний на основе разложения по  $m$  главным формам свободных колебаний системы [5]. Искомые амплитуды  $a_J^{(1)}$  и  $a_J^{(2)}$  могут быть представлены в следующем виде:

$$a_J^{(1)} = \varphi_{Jl} q_l^{(1)}; \quad a_J^{(2)} = \varphi_{Jl} q_l^{(2)}. \quad (4)$$

$$(J = 1, \dots, n; l = 1, \dots, r)$$

где  $\varphi_{Jl}$  – компоненты форм свободных колебаний;  $q_l^{(1)}$  и  $q_l^{(2)}$  – новые обобщенные координаты.

После подстановки (4) в (3) и с учетом свойств главных форм колебаний, (3) преобразуется в (5):

$$\begin{aligned} \left[ (f_h)^2 - (k\omega)^2 \right] q_l^{(1)} + (2\theta k\omega) q_l^{(2)} &= F_l^{(1)} \varphi_{Jl}; \\ (-2\theta k\omega) q_l^{(1)} + \left[ (f_h)^2 - (k\omega)^2 \right] q_l^{(2)} &= F_l^{(2)} \varphi_{Jl}. \end{aligned} \quad (5)$$

$$(I, J = 1, \dots, n; l = 1, \dots, r; h = 1, \dots, m)$$

где  $f_h$  – частоты свободных колебаний секции.

Определитель  $\Delta$  системы (5) может быть найден из формулы (6):

$$\Delta = \left[ (f_h)^2 - (k\omega)^2 \right] - F_k^{(2)} \varphi_{Jl} (2\theta k\omega)^2 \quad (6)$$

Тогда решение системы (6) будет представлено в следующем виде:

$$q_l^{(1)} = \frac{F_k^{(1)} \varphi_{Jl} [(f_h)^2 - (k\omega)^2] - F_l \varphi_{Jl} (2\theta k\omega)}{\Delta};$$

$$q_l^{(2)} = \frac{F_k^{(2)} \varphi_{Jl} [(f_h)^2 - (k\omega)^2] + F_l \varphi_{Jl} (2\theta k\omega)}{\Delta}.$$
(7)

Подставив (7) в (4) возможно определить амплитуды  $a^{(1)}_J$  и  $a^{(2)}_J$ , входящие в решение (2) системы уравнений (1).

На основе представленного выше способа вычисления амплитуд вынужденных колебаний рабочих лопаток турбомашин осуществляется переход к рассмотрению секции лопаточного венца «сектор диска – лопатка с демпферными связями». Уравнения вынужденных колебаний такой секции во многом аналогичны уравнениям (1) и будут иметь вид:

$$M_{IJ} \ddot{y}_J + C_{IJ} \dot{y}_J + K_{IJ} y_J = F_I + P_R,$$

$$(I, J = 1, \dots, n, R = 1, \dots, g),$$
(8)

где  $P_R$  – неизвестные нагрузки в граничных узлах секции;  $g$  – число граничных узлов секции.

Решение (8) отыскивается с использованием (2) и (3). В результате получаем следующую систему для коэффициентов при  $\cos k\omega t$ :

$$\Lambda_{11} a_1^{(1)} + \Lambda_{10} a_0^{(1)} + \Lambda_{12} a_2^{(1)} + \Psi_{11} a_1^{(2)} + \Psi_{10} a_0^{(2)} + \Psi_{12} a_2^{(2)} = F_1^{(1)} + P_1^{(1)};$$

$$\Lambda_{01} a_1^{(1)} + \Lambda_{00} a_0^{(1)} + \Lambda_{02} a_2^{(1)} + \Psi_{01} a_1^{(2)} + \Psi_{00} a_0^{(2)} + \Psi_{02} a_2^{(2)} = F_0^{(1)};$$

$$\Lambda_{21} a_1^{(1)} + \Lambda_{20} a_0^{(1)} + \Lambda_{22} a_2^{(1)} + \Psi_{21} a_1^{(2)} + \Psi_{20} a_0^{(2)} + \Psi_{22} a_2^{(2)} = F_2^{(1)} + P_2^{(1)}.$$
(9)

где  $\Psi_{IJ} = 2\theta k\omega M_{IJ}$ , а  $\Lambda_{IJ} = K_{IJ} - (k\omega)^2 M_{IJ}$ ;  $\Lambda_{11}$ ,  $\Lambda_{01}$ ,  $\Lambda_{21}$ , и. т. д. – блоки динамической матрицы жесткости, соответствующей степеням свободы левой границы (индекс 1), средней части (индекс 0) и правой границы (индекс 2) секции. Аналогично и для динамической матрицы демпфирования  $\Psi$ ;  $a_1^{(1)}$ ,  $a_0^{(1)}$ ,  $a_2^{(1)}$  и т. д. – амплитуды вынужденных колебаний левой границы, средней части и правой границы секции (индексы 1, 0, 2) соответственно, возбуждаемых силой  $F^{(1)}$ . Индексы в скобках обозначают: (1) – амплитуды при  $\cos k\omega t$ , а (2) – при  $\sin k\omega t$ .

Аналогичная (9) система уравнений записывается и для коэффициентов при  $\sin k\omega t$ :

$$-\Psi_{11} a_1^{(1)} - \Psi_{10} a_0^{(1)} - \Psi_{12} a_1^{(2)} + \Lambda_{11} a_1^{(2)} + \Lambda_{10} a_0^{(2)} + \Lambda_{12} a_2^{(2)} = F_1^{(2)} + P_1^{(2)};$$

$$-\Psi_{01} a_1^{(1)} - \Psi_{00} a_0^{(1)} - \Psi_{02} a_1^{(2)} + \Lambda_{01} a_1^{(2)} + \Lambda_{00} a_0^{(2)} + \Lambda_{02} a_2^{(2)} = F_0^{(2)};$$

$$-\Psi_{21} a_1^{(1)} - \Psi_{20} a_0^{(1)} - \Psi_{22} a_1^{(2)} + \Lambda_{21} a_1^{(2)} + \Lambda_{20} a_0^{(2)} + \Lambda_{22} a_2^{(2)} = F_2^{(2)} + P_2^{(2)}.$$
(10)

На основе свойств циклической симметрии рассматриваемой системы (венца лопаток) можно записать:

$$a_2^{(1)} = a_1^{(1)} \cos \alpha + a_1^{(2)} \sin \alpha; \quad P_2^{(1)} = P_1^{(1)} \cos \alpha + P_1^{(2)} \sin \alpha;$$

$$a_2^{(2)} = -a_1^{(1)} \sin \alpha + a_1^{(2)} \cos \alpha; \quad P_2^{(2)} = -P_1^{(1)} \sin \alpha + P_1^{(2)} \cos \alpha.$$
(11)

где  $\alpha = 2\pi k/z$ ;  $k$  – номер гармоники периодической возмущающей силы;  $z$  – количество лопаток в венце.

Учитывая соотношения (11), а также систему уравнений (9) и аналогичную ей систему для коэффициентов при  $\sin k\omega t$  (10), получаем систему (12):

$$[S] \cdot \begin{bmatrix} a_1^{(1)} \\ a_0^{(1)} \\ P_1^{(1)} \\ a_1^{(2)} \\ a_0^{(2)} \\ P_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_0^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_1^{(2)} \\ F_0^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Матрица  $[S]$  имеет следующую структуру:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix}$$

где  $S_{11} = S_{44} = \Lambda_{11} + \Lambda_{12} \cos \alpha - \Psi_{12} \sin \alpha$ ;  $S_{12} = S_{45} = \Lambda_{10}$ ;  $S_{13} = S_{43} = -E$ ;  $S_{14} = -S_{41} = \Psi_{11} + \Psi_{12} \cos \alpha + \Lambda_{12} \sin \alpha$ ;  $S_{15} = -S_{42} = \Psi_{10}$ ;  $S_{16} = S_{23} = S_{26} = S_{46} = S_{53} = S_{56} = 0$ ;  $S_{21} = S_{54} = \Lambda_{01} + \Lambda_{02} \cos \alpha - \Psi_{02} \sin \alpha$ ;  $S_{22} = S_{55} = \Lambda_{00}$ ;  $S_{24} = S_{51} = \Psi_{01} + \Psi_{02} \cos \alpha + \Lambda_{02} \sin \alpha$ ;  $S_{25} = S_{52} = \Psi_{00}$ ;  $S_{31} = S_{64} = \Lambda_{21} + \Lambda_{22} \cos \alpha - \Psi_{22} \sin \alpha$ ;  $S_{32} = S_{65} = \Lambda_{20}$ ;  $S_{33} = -S_{66} = -E \cos \alpha$ ;  $S_{34} = -S_{61} = \Psi_{21} + \Psi_{22} \cos \alpha + \Lambda_{22} \sin \alpha$ ;  $S_{35} = -S_{62} = \Psi_{20}$ ;  $S_{36} = -S_{63} = -E \sin \alpha$ ;  $E$  – единичная матрица.

Решая систему (12) относительно неизвестных  $a$  и  $P$ , возможно определить амплитуды вынужденных колебаний узлов левой границы и средней части, а с помощью выражений (10) – и правой границы рассматриваемой секции.

Учитывая то обстоятельство, что венец рабочих лопаток рассматривается как циклически симметричная система, можно предположить, что все секции, из которых он состоит, находятся в одинаковых условиях. Это, в свою очередь, позволяет сделать вывод, о том, что достаточно рассмотреть всего одну секцию и обобщить полученные результаты для всей исследуемой системы.

**Результаты исследований.** С целью изучения практической пригодности разработанной математической модели проведены расчеты амплитуд вынужденных колебаний венца рабочих лопаток третьей ступени турбины, возмущаемых нестационарной газодинамической силой. Неоднородность сопловой решетки задавалась отклонением угла установки сопловых лопаток от номинальной величины. Также учитывалась неравномерность угла закрутки по высоте рассматриваемых рабочих лопаток. Демпфирование колебаний рассматривалось в предположении неполного проскальзывания с жестким закреплением середин зон контакта пера лопатки и демпфера.

Исследуемый лопаточный венец состоял из 80 рабочих лопаток переменного поперечного сечения с замкнутыми на круг связями. Высота лопатки  $l = 135$  мм; материал лопаток – жаропрочная сталь СМ88У – ВИ (плотность материала  $\rho = 8100$  кг/м<sup>3</sup>, модуль Юнга  $E = 1,79 \cdot 10^6$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ). Диаметр диска  $D = 450$  мм. Лопатки имеют хвостовики елочного типа с торцевой заводкой в диск. Угол выхода потока из сопловых каналов  $\alpha_1$  изменялся от  $16^\circ 30'$  (кривая 1) до  $18^\circ 30'$  (кривая 2); угол выхода потока из лопаточного венца  $\alpha_2 = 73^\circ$ .

Конечно-элементная модель пера лопатки строилась на основе суперпараметрического криволинейного элемента, состояла из 20 конечных элементов и имела 385 степеней свободы. Демпферные связи лопаток в колесе моделировались при помощи стержневого конечного элемента. Модель хвостовика лопатки состояла из 189 изопараметрических призматических элементов первого порядка с 960 степенями свободы. Модель сектора диска включала в себя 230 призматических конечных элементов первого порядка, имеющих 1254 степеней свободы.

На рис. 2 представлена амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний венца рабочих лопаток третьей ступени турбины.

Анализируя представленные на рис. 2 графические зависимости можно сделать вывод о том, что амплитуда вынужденных колебаний плавно возрастает с увеличением частоты колебаний. Затем при достижении резонансной частоты происходит резкое возрастание, а после прохождения состояния резонанса – резкое падение и в дальнейшем плавное уменьшение величины амплитуды. Как известно, резонанс наступает при совпадении частоты вынужденных колебаний лопаточного венца с частотой вращения ротора турбомашин. Поэтому знание частот вынужденных колебаний позволяет провести так называемую отстройку от резонансного режима, то есть исключить возникновение резонанса в диапазоне рабочих частот, переведя его в быстропроходящие режимы запуска и остановки двигателя. Достигнуть недопущения совпадения частоты вращения ротора турбины с частотой вынужденных колебаний венца лопаток можно также при помощи изменения параметров газового потока, а именно, снижения перепада давления газа перед и за рассматриваемой турбинной ступенью. Это, в свою очередь, позволит уменьшить переменную составляющую газодинамической силы, которая возникает

из-за неравномерности течения газового потока и является основным возбудителем колебаний лопаточного венца. Еще одним способом улучшения равномерности течения потока, как показано на рис. 2, является существенное снижение конструктивной неоднородности сопловой решетки, то есть уменьшения отклонения угла установки сопловых лопаток от номинальной величины.

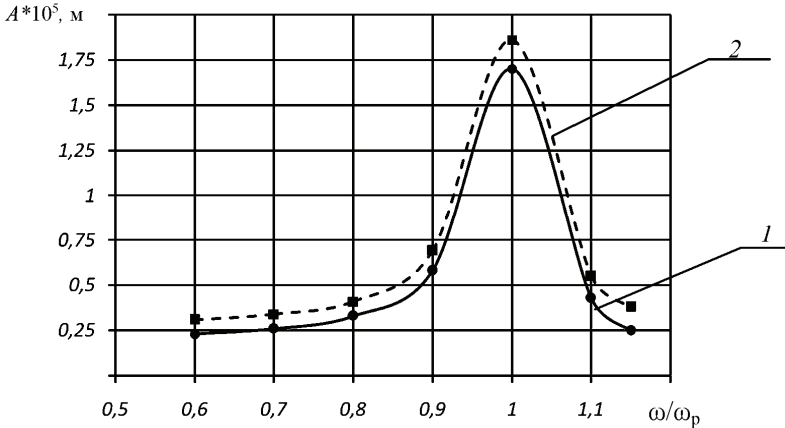


Рисунок 2 – Амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний венца рабочих лопаток турбомашин с учетом демпфирования:  $A$  – амплитуда колебаний;  $\omega$  – частота колебаний, Гц;  $\omega_p = 1325$  Гц – резонансная частота колебаний. Кривая 1 – угол выхода потока из сопловых каналов  $\alpha_l = 16^\circ 30'$ ; кривая 2 – угол выхода потока из сопловых каналов  $\alpha_l = 18^\circ 30'$

**Выводы.** С использованием метода конечных элементов (МКЭ) решена задача расчета амплитуд и частот вынужденных колебаний венца рабочих лопаток турбомашин с учетом демпфирования. Для решения данной задачи разработана уточненная математическая модель секции «сектор диска – лопатка с демпферными связями», позволяющая в достаточно полной мере учитывать особенности конструкции пера и хвостовика лопатки, демпферных связей, диска. Определение амплитуд и частот колебаний лопаточного венца с замкнутыми на круг демпферными связями может быть представлено в виде расчета амплитуд и частот колебаний совокупности таких секций, вызванных воздействием нестационарной газодинамической силы. Анализ полученных результатов подтверждает адекватность данной модели и указывает на то, что для недопущения возникновения резонанса частот вынужденных колебаний венца лопаток с частотой вращения ротора, необходимо уменьшить неравномерность течения газового потока, являющуюся основной причиной возникновения переменной газодинамической силы, возмущающей колебания лопаточного венца. Разработанная математическая модель может быть использована для исследования колебаний венцов лопаток турбомашин в

предположении отсутствия циклической симметрии, а также рабочих колес турбин, лопатки которых имеют бандажные полки.

**Список литературы:** 1. *Воробьев Ю. С.* Динамика авиационных газотурбинных двигателей / Ю. С. Воробьев. – К.: Наукова думка, 1988. – 224 с. 2. *Жирицкий Г. С.* Конструкция и расчет на прочность деталей паровых и газовых турбин / Г. С. Жирицкий, В. А. Стрункин. – М.: Машиностроение, 1973. – 520 с. 3. *Иноземцев А. А.* Основы конструирования авиационных двигателей и энергетических установок / А. А. Иноземцев, М. А. Нихамкин, В. Л. Сандрацкий. – М.: Машиностроение, 2007. – 232 с. 4. *Каиров А. С.* Исследование собственных колебаний лопаток газотурбинного двигателя методом динамических суперэлементов / А. С. Каиров, С. А. Моргун // Проблемы обчислительной механики и прочности конструкций. Сборник научных работ. – Днепропетровск: Ліра, 2012. – Вип. 20. – С. 176–182. 5. *Костюк А. Г.* Динамика и прочность турбомашин / А. Г. Костюк. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007. – 476 с. 6. *Моргун С. А.* Экспериментальное исследование свободных колебаний лопаток газотурбинного двигателя / С. А. Моргун, А. С. Каиров // Методи розв'язання прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. Збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2011. – Вип. 12. – С. 224–229. 7. *Троценко В. Т.* Несущая способность лопаток ГТД при вибрационных нагружениях / В. Т. Троценко, В. В. Матвеев, Б. А. Грязнов. – К.: Наукова думка, 1981. – 316 с.

*Поступила в редколлегию 25.03.2013*

УДК 539.3

**Вынужденные колебания венца рабочих лопаток турбомашин с учетом демпфирования** / А. С. Каиров, С. А. Моргун // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 80-87. – Бібліогр.: 7 назв.

Викладено методику досліджень вимушених коливань вінців робочих лопаток турбомашин з урахуванням демпфування. З використанням методу кінцевих елементів розроблено уточнену математичну модель секції «сектор диску – лопатка з демпферними зв'язками», яка враховує конструктивну неоднорідність пера лопатки та диску. Наведено результати розрахунку амплітуд вимушених коливань вінця робочих лопаток турбіни, вимушених дією змінної газодинамічної сили.

**Ключові слова:** вимушені коливання, демпфування, газодинамічна сила, амплітуди коливань, метод кінцевих елементів.

The problem of turbine engines bladed disks forced vibration has been studied; the internal and constructional damping has also been considered. The new mathematical model that gives an opportunity to take blade's structural inhomogeneity into consideration has been developed by means of finite elements method. The results of the turbine bladed disk vibration amplitudes, forced by variable aerodynamic force are attached.

**Key words:** forced vibration, damping, aerodynamic force, vibration amplitudes, finite elements method.