

**В. П. ОЛЬШАНСКИЙ**, д-р физ.-мат. наук, профессор, ХНТУСХ,  
Харьков;

**С. В. ОЛЬШАНСКИЙ**, канд. физ.-мат. наук, доцент, НТУ «ХПИ»

## **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КВАЗИВЕРТИКАЛЬНОГО ПАДЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ**

Найдено решение системы нелинейных дифференциальных уравнений квазивертикального движения шара, радиус которого уменьшается по дробно-линейному закону. Первые интегралы выражено при помощи функций Бесселя, а для вторых интегралов предложены приближенные асимптотические формулы.

**Ключевые слова:** тело переменной массы, квазивертикальное движение, функции Бесселя.

**Актуальность темы и цель исследования.** Движение шара переменной массы и размеров рассматривают при изучении полета: горящих частиц топлив [1,2], капель диспергированных огнетушащих веществ, которые испаряются в высокотемпературной среде [3], мелкодисперсных химически активных отходов (выбросов) производств, падающих сгорающих метеоритов и пр. Поэтому исследование особенностей баллистики тел, у которых меняются размеры во времени, относится к актуальным научно-техническим задачам.

При движении тела переменного размера появляется ряд особенностей. Процесс движения становится нестационарным. Поэтому при падении тела переменной массы теряет смысл понятие «скорость витания», величину которой определил Н.Е. Жуковский [4]. Траектория тела убывающей массы может обрываться вследствие полного сгорания или испарения движущегося тела, что исключено при полете тела постоянной массы. Следует также упомянуть об эффекте отражения легкого тела встречным потоком [3], а также о существовании экстремума скорости [5, 6], характерного только при движении малой частицы переменной массы.

При моделировании движения шара используют различные законы изменения размера тела [7, 8], в том числе линейный, экспоненциальный и закон В. Срезневского. Известен также дробно-линейный закон, которому уделено меньше внимания. Его рассматривали В.А. Сапа и Н.Е. Сагитов [9] для линейного аэродинамического сопротивления движению. В отличие от [9] здесь рассматриваем случай квадратичного сопротивления газовой среды.

**Постановка задачи Коши.** Рассмотрим не строго вертикальное падение, а движение центра масс шара под небольшим углом к вертикальной оси. Такая задача возникает, например, при вертикальной подаче распыленной струи, факел которой имеет вид конуса, а траектория большинства частиц

отклоняется от вертикали. Моделирование такого движения нужна, для расчета размера области орошения горизонтальной плоскости, на которую направляют сверху распыленную струю.

Допускаем, что сила аэродинамического сопротивления  $F_c$  пропорциональна площади сечения сферического тела и квадрату скорости его центра масс.

Ориентируясь на скорость полета  $v > 5$  м/с, примем квадратичную зависимость сил аэродинамического сопротивления  $R_c$  от скорости

$$R_c = C_v S v^2, \quad (1)$$

Здесь  $C_v$  – коэффициент сопротивления;  $S$  – площадь поперечного сечения сферического тела.

Предполагаем, что изменение радиуса  $r$  падающего сферического тела описывается дробно-линейной функцией времени  $t$ :

$$r = \frac{r_0}{1 + \gamma t}, \quad (2)$$

где  $r_0 = r(0)$   $\gamma$  – параметр, характеризующий интенсивность убывания радиуса и массы однородного шара.

Процесс падения тела уменьшающего радиус по дробно-линейному закону (2), в соответствии с расчетной схемой на рис. 1 и зависимостью (1), описываем системой двух нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\ddot{z} + \frac{k\dot{z}}{r} (\dot{z}^2 + \dot{x}^2)^{\frac{1}{2}} = g; \quad \ddot{x} + \frac{k\dot{x}}{r} (\dot{z}^2 + \dot{x}^2)^{\frac{1}{2}} = 0, \quad (3)$$

где  $k = \frac{3 C_v}{4 \rho}$  – сведенный коэффициент аэродинамического сопротивления,

$\rho$  – плотность частицы.

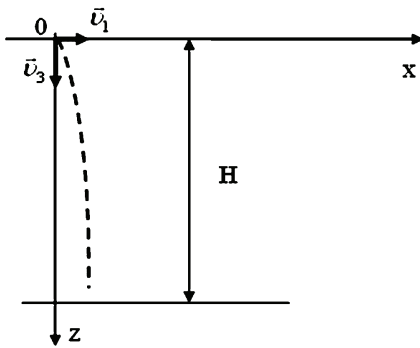


Рисунок 1 – Расчетная схема

Систему (3) дополняем начальными условиями

$$z(0) = x(0) = 0; \quad \dot{z}(0) = v_3;$$

$$\dot{x}(0) = v_1, \quad (4)$$

где  $v_1, v_3$  – проекции стартовой скорости центра масс соответственно в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Ограничиваясь вариантом квазивертикального (близкого к вертикальному) движения тела, в дальнейшем принимаем, что

$$\arctg(v_1 v_3^{-1}) \leq 20^\circ, \quad (5)$$

чем ограничиваем угол наклона траектории к оси  $oz$  или угол конусности, в случае распыленной струи.

Чтобы найти приближенные аналитические решения поставленной задачи Коши, которую в общем случае приходится решать численно, несколько упростим систему (3). В силу ограничения (5) имеем  $\dot{z} \gg \dot{x}$ . Поэтому принимаем

$$(\dot{z}^2 + \dot{x}^2)^{\frac{1}{2}} \approx \dot{z} \sqrt{1 + (v_1 v_3^{-1})^2}.$$

Таким образом, задача упрощенного расчета сводится к решению уравнений

$$\ddot{z} + \frac{\beta}{r} \dot{z}^2 = g; \quad \ddot{x} + \frac{\beta}{r} \dot{x} \dot{z} = 0, \quad (6)$$

где  $\beta = k \sqrt{1 + (v_1 v_3^{-1})^2}$ .

**Построение решения задачи Коши.** Решим первое уравнение системы (6). Учитывая (2), перейдем в нем к новой переменной:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dr} \frac{dr}{dt} = -\frac{\gamma}{r_0} r^2 \frac{d}{dr}.$$

Представляем его в форме:

$$\frac{dv}{dr} - \beta_0 \frac{v^2}{r^3} = -\frac{g_0}{r^2}, \quad (7)$$

где  $\beta_0 = \frac{\beta r_0}{\gamma}$ ;  $g_0 = \frac{g r_0}{\gamma}$ ;  $z'_r = v(r)$ .

Запишем далее уравнение (7) в виде

$$v'_r = f(r)v^2 + h(r), \quad (8)$$

где  $f(r) = \frac{\beta_0}{r^3}$ ;  $h(r) = -\frac{g_0}{r^2}$ .

Уравнение (8) является общим уравнением Риккати [10]. Используя преобразование

$$v = \exp\left(-\int f(r)u(r)dr\right), \quad (9)$$

переводим (7) в линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + 3r \frac{du}{dr} - \frac{\beta_0 g_0}{r^3} u = 0. \quad (10)$$

Дифференциальное уравнение (10), является уравнением типа Бесселя, общим решением которого является:

$$u(r) = \frac{1}{r} \left[ c_1 I_{2/3}(\xi) + c_2 K_{2/3}(\xi) \right]. \quad (11)$$

Здесь  $\xi = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\beta_0 g_0}{r^{3/2}}}$ ;  $c_1, c_2$  – произвольные постоянные;  $I_{2/3}(\xi), K_{2/3}(\xi)$

– соответственно модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда порядка  $2/3$ .

Обратное преобразование, для нахождения решения уравнения Риккати, имеет вид:

$$v = -\frac{u'_r}{uf(r)}. \quad (12)$$

Для дифференцирования используем формулы:

$$\frac{d}{d\xi} I_{2/3}(\xi) = I_{-1/3}(\xi) - \frac{2}{3\xi} I_{2/3}(\xi), \quad \frac{d}{d\xi} K_{2/3}(\xi) = -K_{1/3}(\xi) - \frac{2}{3\xi} K_{2/3}(\xi).$$

В итоге получаем первый интеграл первого уравнения системы (6)

$$v(t) = \dot{z}(t) = \sqrt{\frac{rg_0}{\beta_0}} \cdot \frac{cI_{-1/3}(\xi) - K_{1/3}(\xi)}{cI_{2/3}(\xi) + K_{2/3}(\xi)}. \quad (13)$$

Здесь  $c = c_1 c_2^{-1}$ ;  $I_{-1/3}(\xi), K_{1/3}(\xi)$  – соответственно модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда индекса  $-1/3$ .

Решение (13) удовлетворяет второму начальному условию в (4), при

$$c = \frac{bK_{2/3}(\xi_0) + K_{1/3}(\xi_0)}{I_{-1/3}(\xi_0) - bI_{2/3}(\xi_0)}, \quad (14)$$

где  $\xi_0 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\beta_0 g_0}{r_0^3}}$ ;  $b = v_3 \sqrt{\frac{\beta_0}{r_0 g_0}}$ .

Для определения горизонтальной проекции скорости падения  $\dot{x}(t)$  обратимся ко второму уравнению системы (6). Учитывая (12), его представим в виде

$$\int \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\int \frac{du}{u}.$$

Откуда следует, что

$$\dot{x} = c_3 u^{-1}(t),$$

где  $c_3$  – произвольная постоянная.

Ее находим из начального условия (4). Учитывая (12), получаем

$$\dot{x}(t) = \frac{v_1 r}{r_0} \frac{cI_{2/3}(\xi_0) + K_{2/3}(\xi_0)}{cI_{2/3}(\xi) + K_{2/3}(\xi)}, \quad (15)$$

причем константу  $c$  определяем выражением (14).

Таким образом, вычисление проекций скорости падения центра масс шара  $\dot{z}(t)$  и  $\dot{x}(t)$  можно проводить с помощью функций Бесселя.

Для определения перемещения центра масс шара необходимо вычислить интегралы:

$$z(t) = \int_0^t \dot{z}(t) dt \quad \text{и} \quad x(t) = \int_0^t \dot{x}(t) dt,$$

которые не выражаются при помощи затабулированных или элементарных функций.

Для построения приближенных формул для расчета перемещений, введем асимптотику, которую находим интегрированием уравнения (6) при  $g = 0$ :

$$\dot{z}(t) \xrightarrow{g \rightarrow 0} \dot{z}_a(t) = \frac{r_0}{\beta t(1 + 0,5\gamma t) + r_0 / \nu_3}; \quad \dot{x}(t) \xrightarrow{g \rightarrow 0} \dot{x}_a(t) = \frac{\nu_1}{\nu_3} \dot{z}_a(t). \quad (16)$$

Интегралы от  $\dot{z}_a(t)$  и  $\dot{x}_a(t)$  выражаются в замкнутом виде через элементарные функции

$$z_a(t) = \int_0^t \dot{z}_a(t) dt = \frac{r_0}{\gamma \beta a} \ln \frac{\left| t + \frac{1}{\gamma} - a \right| \left| \frac{1}{\gamma} + a \right|}{\left| t + \frac{1}{\gamma} + a \right| \left| \frac{1}{\gamma} - a \right|},$$

$$x_a(t) = \frac{\nu_1}{\nu_3} z_a(t), \quad a = \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 - \frac{2r_0\gamma}{\beta\nu_3}}.$$

Невязки

$$\Phi_3(t) = \int_0^t [\dot{z}(t) - \dot{z}_a(t)] dt \quad \text{и} \quad \Phi_1(t) = \int_0^t [\dot{x}_a(t) - \dot{x}(t)] dt$$

положительны и удовлетворяют неравенствам:

$$\Phi_3(t) < t [\dot{z}(t) - \dot{z}_a(t)]; \quad \Phi_1(t) < t [\dot{x}_a(t) - \dot{x}(t)].$$

Для приближенного вычисления их при малых  $t$  можно использовать формулу трапеций. Тогда:

$$\Phi_3(t) \approx \frac{1}{2} t [\dot{z}(t) - \dot{z}_a(t)]; \quad \Phi_1(t) \approx \frac{1}{2} t [\dot{x}_a(t) - \dot{x}(t)].$$

В результате приближенный расчет перемещений центра масс сферического тела сводится к формулам:

$$z(t) \approx z_a(t) + \Phi_3(t); \quad x(t) \approx \frac{\nu_1}{\nu_3} z_a(t) - \Phi_1(t). \quad (17)$$

**Результаты расчетов и их анализ.** Для проверки предложенных приближенных аналитических решений проведем расчеты при  $r_0 = 10^{-4}$  м;  $k = 10^{-5}$ ;  $\gamma = 3$  с $^{-1}$ ;  $\nu_3 = 80$  м/с;  $\nu_1 = 20$  м/с.

В табл. 1 указаны, рассчитанные двумя способами, значения проекций скорости падения. В числителе записано значения  $\dot{z}(t)$  и  $\dot{x}(t)$ , полученные путем численного интегрирования системы (3). В знаменатели помещены значения проекций скорости, к которым приводят аналитические решения (13) и (15). На значительном промежутке времени наблюдается хорошее соответствие результатов, полученных разными методами, что подтверждает возможность перехода от (3) к более простой системе (6).

Таблица 1 – Значения  $\dot{z}(t)$  и  $\dot{x}(t)$ , рассчитанные двумя методами

$t, c$	$\dot{z}(t), м/с$	$\dot{x}(t), м/с$	$t, c$	$\dot{z}(t), м/с$	$\dot{x}(t), м/с$
0,25	21,87	5,10	1,25	5,11	0,34
	21,84	5,10		5,04	0,33
0,50	11,27	2,23	1,50	4,58	0,18
	11,22	2,22		4,51	0,18
0,75	7,61	1,15	1,75	4,21	0,10
	7,55	1,14		4,14	0,09
1,00	5,98	0,63	2,00	3,93	0,05
	5,91	0,61		3,87	0,05

Таблица 2 – Значения  $z(t)$  и  $x(t)$ , рассчитанные двумя методами

$t, c$	$z(t), м$	$x(t), м$	$t, c$	$z(t), м$	$x(t), м$
0,25	10,24	2,51	1,25	19,46	4,10
	10,21	2,51		18,94	4,16
0,50	14,12	3,36	1,50	20,67	4,16
	14,02	3,36		19,91	4,27
0,75	16,41	3,76	1,75	21,77	4,19
	16,21	3,77		20,71	4,36
1,00	18,09	3,98	2,00	22,78	4,21
	17,75	4,00		21,42	4,43

В табл. 2 записаны, полученные двумя способами, значения  $z(t)$  и  $x(t)$ . Числители – результат численного интегрирования неупрощенной системы (3), а знаменатели – перемещения к которым приводят формулы (17). Сравнение чисел подтверждает состоятельность предложенных упрощений и достаточно высокую точность приближенного аналитического решения.

**Выводы.** Проведенное исследование подтверждает возможность упрощения нелинейной системы уравнений квазивертикального падения шара путем сведения к уравнениям, решения которых выражаются через функции Бесселя. Полученные приближенные формулы пригодны для расчета параметров траектории квазивертикального падения шара, радиус которого уменьшается во времени по дробно-линейному закону.

**Список литературы:** 1. *Воинов А.Н.* Сгорание в быстроходных поршневых двигателях. – М.: 1977. – 277 с. 2 *Абрамчук Ф.И.* Современные дизели: повышение топливной экономичности и длительной прочности / *Ф.И. Абрамчук, А.П. Марченко* и др. – К.: 1992. – 272 с. 3. *Кучеренко С.И.* Баллистика капель, які випаровуються при польоті / *С.И. Кучеренко, В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський, Л.М. Тищенко.* – Х.: ХНТУСГ, 2007. – 304 с. 4. *Жуковский Н.Е.* Сочинения. Т. 3. – М.: ОНТИ–НКТП, 1936. – 380 с. 5. *Ольшанский В.П.* Об условиях экстремума скорости падения сферического тела переменного радиуса / *В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский* // Вестник НТУ «ХПИ». Тем. вып. «Системный анализ, управление и информационные технологии». – Вып. 26. – Х.: НТУ «ХПИ», 2008. – С. 67-78. 6. *Ольшанский В.П.* О максимуме скорости падения сферического тела убывающей массы / *В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский* // Механика и машиностроение. – 2007. – № 1. – С. 25-29. 7. *Ольшанский В.П.* Аналитические решения уравнения Мещерского, описывающие вертикальное движение шара убывающей массы / *В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский* // Техническая механика. – 2009. – № 4. – С. 36-42. 8. *Ольшанский В.П.* Замкнутые решения уравнения Мещерского при различных законах уменьшения радиуса летящего шара / *В.П. Ольшанский, К.В. Аврамов, С.В. Ольшанский* // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 207-214. 9. *Сагитов М.Н.* Некоторые случаи движения вращающегося шара переменной массы, ось которого горизонтальна / *М.Н. Сагитов* // Из-тия АН Казахской ССР. Серия физ.-мат. наук. Математика и механика. – 1963. – Вып. 15. – С. 88-99. 10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

*Поступила в редколлегию 25.01.2013*

УДК 531.395

**Решение задачи квазивертикального падения сферического тела переменной массы / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 150-156. – Бібліогр.: 10 назв.

Знайдено розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь квазивертикального руху шару, радіус якого зменшується за дробово-лінійним законом. Перші інтеграли виражено за допомогою функцій Бесселя, а для обчислення других запропоновано наближені асимптотичні формули.

**Ключові слова:** тіло змінної маси, квазивертикальний рух, функції Бесселя.

The solution of the system of nonlinear differential equations of quasi-vertical motion of the sphere, the radius of which varies according to a fractional-linear law was found. First integrals are found with Bessel functions, for the second integrals an approximate asymptotic formula.

**Key words:** body of variable mass, quasi-vertical motion, Bessel functions.