

**В. П. ОЛЬШАНСКИЙ**, д-р физ.-мат. наук, профессор, ХНТУСХ,  
Харьков;

**С. В. ОЛЬШАНСКИЙ**, канд. физ.-мат. наук, доцент, НТУ «ХПИ»

## **РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ**

С помощью ВБК – метода построены формулы для вычисления коэффициента динамичности при переходе через резонанс осциллятора линейно-переменной массы под действием возмущающей силы постоянной частоты и амплитуды. Проведены расчеты и проанализировано влияние различных факторов: скорости изменения массы, реактивной силы и силы вязкого сопротивления на амплитуду резонансных колебаний.

**Ключевые слова:** осциллятор, линейно-переменная масса, резонанс, ВБК – метод.

**Введение.** Специфической особенностью осциллятора переменной массы или жесткости является возможность попадания его в нестационарный резонанс под действием возмущающей силы постоянной частоты. На эту особенность колебательной системы монотонно (непериодически) переменных параметров уже давно обратили внимание в монографии [1], где с помощью аналоговой машины смоделировали прохождение резонанса. Актуальность исследования этого явления обоснована в [1] тем, что в технике систематически используют механизмы с переменной массой или жесткостью звеньев. Например, к таким относятся: механизмы экскаваторов и грейферов; машины шахтного подъема; вибрационные конвейеры; емкости и бункеры при загрузке жидкостью или сыпучим веществом; подрессоренные платформы транспортных средств, загруженные сыпучим грузом и пр. В отличие от публикации [1], здесь строится приближенное аналитическое решение задачи Коши в квадратурах. Построение решения проводится ВБК – методом, который эффективен при наличии большого параметра в уравнении колебаний [2], [3]. Обычно такой параметр возникает за счет малого изменения массы или жесткости осциллятора за один период его колебаний, но, в отличие от классических асимптотических методов исследования, в методе ВБК не используется понятие «медленного» времени.

Целью работы является построение аналитических зависимостей для расчета амплитуд колебаний при переходе через резонанс осциллятора линейно-переменной массы под действием возмущающей силы постоянной частоты и амплитуды.

Ставится задача анализа особенностей нестационарного резонанса, который невозможен в обычном линейном осцилляторе постоянных параметров.

**Постановка задачи и ее аналитическое решение.** Линейное перемещение осциллятора  $x = x(t)$  описываем дифференциальным уравнением:

$$m_0(1 + \gamma t)\ddot{x} + (m_0\gamma\varepsilon + \mu)\dot{x} + cx = F \sin(\omega t), \quad (1)$$

в котором  $m_0$  – начальная масса осциллятора;  $m_0\gamma$  – скорость изменения массы во времени  $t$ ;  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  – коэффициент реактивности, определяющий какая часть изменяющейся массы идет на образование реактивной силы;  $\mu$  – коэффициент вязкого линейного сопротивления;  $c$  – коэффициент жесткости пружины;  $F$ ,  $\omega$  – амплитуда и частота возмущающей силы; точкой над  $x$  обозначена производная по времени  $t$ .

Уравнение (1) решаем при нулевых начальных условиях:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

Отметим, что при  $F = 0$  однородное уравнение, соответствующее (1), решено в [4]. Аналитическое решение, при произвольных начальных условиях выражено в функциях Бесселя нецелого положительного и отрицательного индексов.

Введением новой переменной  $\xi = 1 + \gamma t$  уравнение (1) и начальные условия (2) преобразуем к форме:

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + \frac{\lambda}{\xi} \frac{dx}{d\xi} + \frac{\omega_0^2}{\gamma^2 \xi} x = f(\xi); \quad (3)$$

$$x|_{\xi=1} = \dot{x}|_{\xi=1} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\lambda = \varepsilon + \frac{\mu}{m_0\gamma}$ ;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_0}}$ ;  $f(\xi) = \frac{F}{m_0\gamma^2\xi} \sin\left(\frac{\omega}{\gamma}(\xi - 1)\right)$ . (5)

Как отмечали выше, фундаментальные решения  $x_1(\xi)$  и  $x_2(\xi)$  однородного уравнения

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + \frac{\lambda}{\xi} \frac{dx}{d\xi} + \frac{\omega_0^2}{\gamma^2 \xi} x = 0$$

выражается чрез функции Бесселя [4]. Но учитывая, что в технических расчетах обычно

$$(\omega_0 / \gamma)^2 \gg 1,$$

далее ограничимся приближенными выражениями  $x_1(\xi)$  и  $x_2(\xi)$ . Их построим ВБК методом [2]. С точностью до слагаемых высшего порядка малости, указанный метод приводит к фундаментальным решениям:

$$x_1(\xi) = \eta^\beta \cos \eta; \quad x_2(\xi) = \eta^\beta \sin \eta, \quad (6)$$

в которых  $\eta = \eta_0 \sqrt{\xi}$ ;  $\eta_0 = \frac{2}{|\gamma|} \omega_0$ ;  $\beta = \frac{1}{2} - \lambda$ .

Общее решение неоднородного уравнения (3) ищем в виде:

$$x(\xi) = c_1(\xi)x_1(\xi) + c_2(\xi)x_2(\xi), \quad (7)$$

где  $c_1(\xi)$ ,  $c_2(\xi)$  – неизвестные функции.

Используя метод вариации произвольных постоянных, подстановкой (7) в (3), получаем квадратуры:

$$c_1(\xi) = -\int \frac{x_2(\xi)f(\xi)}{\Delta(\xi)}d\xi; \quad c_2(\xi) = \int \frac{x_1(\xi)f(\xi)}{\Delta(\xi)}d\xi. \quad (8)$$

Здесь  $\Delta(\xi)$  – определитель Вронского.

Поскольку

$$\frac{dx_1}{d\xi} = \frac{\eta_0^2 \eta^\beta}{2\eta} \left( \frac{\beta}{\eta} \cos \eta - \sin \eta \right); \quad \frac{dx_2}{d\xi} = \frac{\eta_0^2 \eta^\beta}{2\eta} \left( \frac{\beta}{\eta} \sin \eta + \cos \eta \right),$$

то

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \frac{dx_1}{d\xi} & \frac{dx_2}{d\xi} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \eta_0^2 \eta^{2\beta-1}. \quad (9)$$

Учитывая начальные условия (4), выражения (5), (6), (8), (9) и соотношение  $d\xi = \frac{2\eta}{\eta_0^2} d\eta$ , находим, что:

$$c_1(\xi) = -\frac{F}{c} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\sin \eta}{\eta^\beta} \sin \left[ \frac{\omega}{\gamma} \left( \frac{\eta^2}{\eta_0^2} - 1 \right) \right] d\eta; \quad (10)$$

$$c_2(\xi) = \frac{F}{c} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\cos \eta}{\eta^\beta} \sin \left[ \frac{\omega}{\gamma} \left( \frac{\eta^2}{\eta_0^2} - 1 \right) \right] d\eta.$$

Согласно (6) и (7), амплитуды колебаний осциллятора определяются выражением:

$$am(x) = \eta^\beta \sqrt{c_1^2(\xi) + c_2^2(\xi)}.$$

Тогда, вычисление коэффициента динамичности сводится к применению формулы:

$$K_\sigma = \frac{c}{F} am(x) = \eta^\beta \sqrt{a_1^2(\eta) + a_2^2(\eta)}, \quad (11)$$

в которой

$$a_1 = \eta_0^{1-\beta} \int_1^{\eta/\eta_0} \frac{\sin(\eta_0 y)}{y^\beta} \sin \left[ \frac{\omega}{\gamma} (y^2 - 1) \right] dy;$$

$$a_2 = \eta_0^{1-\beta} \int_1^{\eta/\eta_0} \frac{\cos(\eta_0 y)}{y^\beta} \sin \left[ \frac{\omega}{\gamma} (y^2 - 1) \right] dy. \quad (12)$$

Интегралы (12) не выражаются через известные затабулированные функции и их приходится вычислять на компьютере.

Итак, расчет коэффициента динамичности в нестационарном резонансе сводится к применению формул (11) и (12).

**Результаты моделирования.** Расчет колебаний осциллятора возрастающей массы проводим, используя следующие числовые данные:  $m_0 = 2$  кг;  $c = 5000$  Н/м;  $\frac{\omega}{\omega_0} = 0,5$ . На рис. 1 представлены зависимости, полученные при  $\gamma = 0,2$  с<sup>-1</sup>;  $\varepsilon = 0$ . Цифрам 1,2,3 соответствуют значения коэффициента динамичности, полученные при  $\mu = 1,3,5$  Нс/м. Расчет показывает, что значения  $K_d$  существенно зависят от значения  $\mu$ . Максимумы амплитуды резонансных колебаний достигают не при  $\eta/\eta_0 = 2$ , а при больших отношениях  $\eta/\eta_0$ . Происходит смещение области резонанса вправо.

Смещение увеличивается с увеличением  $\gamma$ , что подтверждается графиками на рис. 2, которые получены при  $\gamma = 0,8$  с<sup>-1</sup>. Здесь коэффициенты динамичности меньше, чем на рис. 1 ибо убыстряется прохождение резонанса, то есть осциллятор совершает резонансные колебания на более коротком промежутке времени.

На рис. 3 представлены  $K_d$ , вычисленные, без учета силы вязкого сопротивления при разных  $\varepsilon$ . Цифрам 1, 2, 3 соответствуют значения  $\varepsilon = 0; 0,5; 1$ . Реактивная сила несколько уменьшает коэффициент динамичности в осцилляторе возрастающей массы, но в целом ее влияние незначительно.

Расчет колебаний осциллятора убывающей массы проводили, используя следующие числовые данные:  $m_0 = 2$  кг;  $c = 5000$  Н/м;  $\omega/\omega_0 = 0,5$ . На рис. 4 представлены зависимости, полученные при  $\gamma = -0,2$  с<sup>-1</sup>;  $\varepsilon = 0$ . Цифры 1,2,3 соответствуют значениям коэффициента вязкого сопротивления  $\mu = 1,3,5$  Нс/м. Коэффициент динамичности существенно зависит от  $\mu$ .

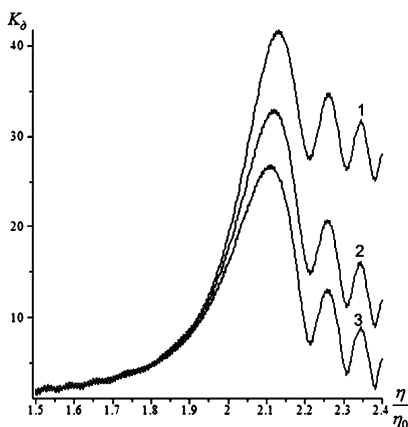


Рисунок 1 – Зависимость коэффициента динамичности  $K_d$  от  $\eta/\eta_0$  при  $\varepsilon = 0$ ;  $\gamma = 0,2$  с<sup>-1</sup>

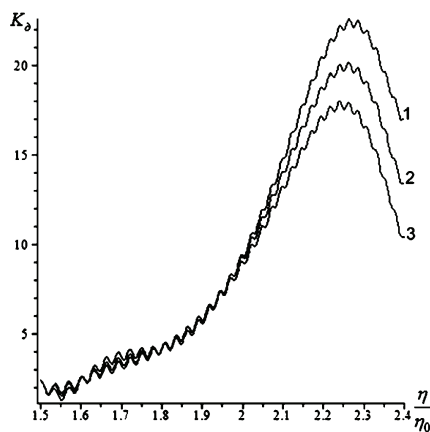


Рисунок 2 – Зависимость коэффициента динамичности  $K_d$  от  $\eta/\eta_0$  при  $\varepsilon = 0$ ;  $\gamma = 0,8$  с<sup>-1</sup>

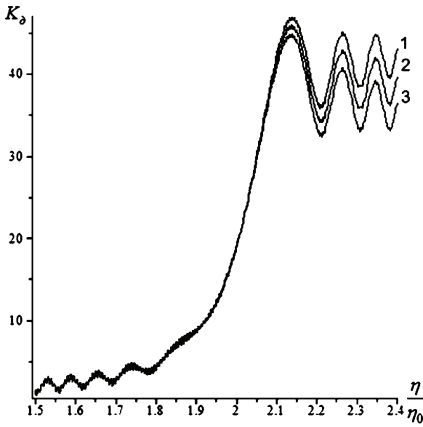


Рисунок 3 – Зависимость коэффициента динамичности  $K_d$  от  $\eta/\eta_0$  при  $\mu = 0$ ;  $\gamma = 0,2 \text{ c}^{-1}$

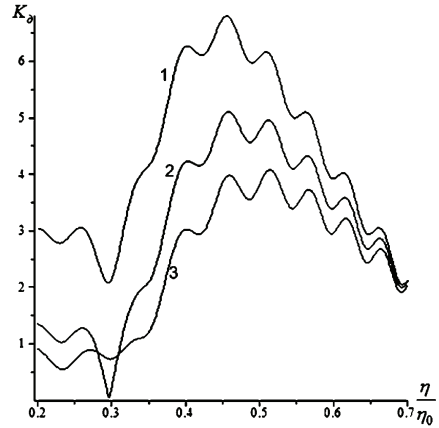


Рисунок 4 – Зависимость коэффициента динамичности  $K_d$  от  $\eta/\eta_0$  при  $\varepsilon = 0$ ;  $\gamma = 0,2 \text{ c}^{-1}$

Эта зависимость несколько ослабевает с увеличением  $|\gamma|$ , что подтверждается графиками на рис. 5, которые получены при  $\gamma = -0,8 \text{ c}^{-1}$ .

Характерно, что в осцилляторе убывающей массы максимальные амплитуды колебаний достигаются не при  $\eta/\eta_0 = 0,625$ , а при меньших отношениях  $\eta/\eta_0$ . Происходит смещение резонансной области влево.

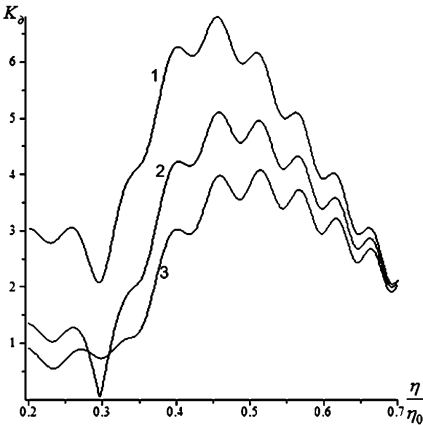


Рисунок 5 – Зависимость коэффициента динамичности  $K_d$  от  $\eta/\eta_0$  при  $\varepsilon = 0$ ;  $\gamma = -0,8 \text{ c}^{-1}$

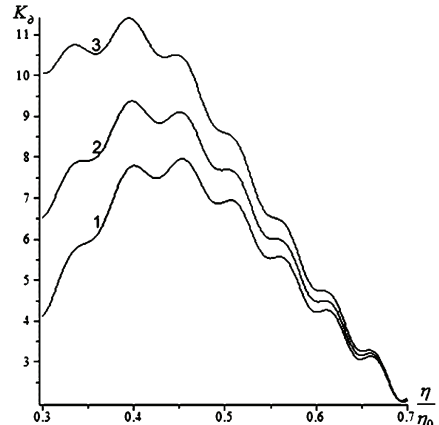


Рисунок 6 – Зависимость коэффициента динамичности  $K_d$  от  $\eta/\eta_0$  при  $\mu = 0$ ;  $\gamma = -0,8 \text{ c}^{-1}$

На рис. 6 показана зависимость  $K_d$  от  $\varepsilon$ . Графики, отмеченные цифрами 1,2,3, соответствуют значениям  $\varepsilon = 0; 0,5; 1$ . Коэффициент динамичности воз-

растает с увеличением реактивной силы в осцилляторе убывающей массы, причем влияние  $K_\delta$  от  $\varepsilon$  более существенно, чем на рис. 3.

**Выводы.** Амплитуды колебаний осциллятора в нестационарном резонансе существенно зависят от силы вязкого сопротивления. Максимум коэффициента динамичности достигается не при равенстве частот возмущающей силы и мгновенной собственной частоты осциллятора, а при некотором смещении отношения частот вправо при возрастании массы и влево – при ее убывании. Реактивная сила уменьшает амплитуды колебаний в осцилляторе возрастающей массы, а при убывании массы – увеличивает их. С увеличением модуля скорости изменения массы осциллятора, происходит уменьшение максимальных амплитуд колебаний в нестационарном резонансе.

**Список литературы:** 1. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев / А.П. Бессонов. – М.: Наука, 1967. – 267 с. 2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с. 3. Образцов И.Ф. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций / И.Ф. Образцов, Б.В. Нерубайло, И.В. Андрианов. – М.: Машиностроение, 1991. – 416 с. 4. Cveticanin L. Dynamics of Machines with Variable Mass. / L. Cveticanin. – Taylor & Francis Ltd, 1998. – 300 p.

*Поступила в редколлегию 25.06.2013*

УДК 534.1

**Резонансные колебания осциллятора линейно-переменной массы / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 157-162. – Бібліогр.: 4 назв.**

За допомогою ВБК – методу побудовано формули для обчислення коефіцієнта динамічності при переході через резонанс осцилятора лінійно-змінної маси під дією збуджуючої сили сталої частоти та амплітуди. Проведено розрахунки та проаналізовано вплив різних факторів: швидкості зміни маси, реактивної сили та сили в'язкого опору на амплітуди резонансних коливань.

**Ключові слова:** осцилятор, лінійно-змінна маса, резонанс, ВБК – метод.

With WBK method the formula to calculate the dynamics in the transition through the resonance oscillator linearly variable mass under the influence of the disturbing force of constant frequency and amplitude are constructed. The calculations and analyzes the influence of different factors: the rate of change in mass of reactive forces and viscous drag on the amplitude of resonant vibrations are performed.

**Key words:** an oscillator, linearly variable mass, resonance, WBK - method.