

In clause the decision of non-stationary nonlinear problems termoviscoelasticity is investigated at change of property of materials under influence of temperature or time and the approach is applied to reception of determining parities termoviscoelasticity from positions of thermodynamics of irreversible processes.

**Key words:** termoviscoelasticity, shear deform, polymethylmethacrylate.

УДК 531/534

**А. Е. БОЖКО**, д-р техн. наук, профессор, член-корр. НАН Украины, ИПМаш НАН Украины, Харьков;

**Е. М. ИВАНОВ**, канд. техн. наук, доцент, ХНАДУ «ХАДИ», Харьков;

**З. А. ИВАНОВА**, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Анализируется возможность предварительного определения устойчивости колебательных систем с  $n$ -степенями свободы на основе структурной теории, так как наличие положительных обратных связей в структурах могут приводить к неустойчивым режимам работы колебательных систем.

**Ключевые слова:** колебательная система, структура, устойчивость, степени свободы, передаточная функция.

**Введение.** В данной статье рассматриваются линейные и линеаризованные колебательные системы (КС) с  $n$ -степенями свободы. Анализ осуществляется для предварительного определения устойчивости КС на основе структурной теории [2, 3, 5]. В работах [3, 5] имеется некоторый анализ устойчивости КС, но на наш взгляд он может быть дополнен более доскональным применением теории автоматического управления [4]. Впервые построение структур КС с позиций теории автоматического управления было осуществлено в работе [1]. Однако до сих пор возникает вопрос об устойчивости КС с  $n$ -степенями свободы. Этот вопрос появляется из-за того, что в структурах КС с  $n$ -степенями свободы имеются положительные обратные связи, которые согласно теории автоматического регулирования [4] могут приводить к неустойчивым режимам работы систем. В связи с таким обоснованием попытаемся проанализировать КС с  $n$ -степенями свободы.

**Постановка проблемы.** Механическая система такой КС приведена на рис. 1, где  $m_k, c_k, b_k, x_k, k = \overline{1, n}$  – масса, коэффициенты жесткости, демпфи-

© А. Е. Божко, Е. М. Иванов, З. А. Иванова, 2013

вания, перемещения масс  $m_k$  соответственно;  $F_1$  – воздействие на массу  $m_1$ .

В общем случае в КС могут быть приложены воздействия  $F_k, k = \overline{1, n}$ .  
Уравнения движения КС с  $n$ -степенями свободы запишем в виде [3]

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (b_1 + b_2) \dot{x}_1 + (c_1 + c_2) x_1 &= b_2 \dot{x}_2 + c_2 x_2 + F_1; \\ m_2 \ddot{x}_2 + (b_2 + b_3) \dot{x}_2 + (c_2 + c_3) x_2 &= b_2 \dot{x}_1 + c_2 x_1 + b_3 \dot{x}_3 + c_3 x_3; \\ \dots & \dots \\ m_n \ddot{x}_n + b_n \dot{x}_n + c_n x_n &= b_n \dot{x}_{n-1} + c_n x_{n-1} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ;  $t$  – время.

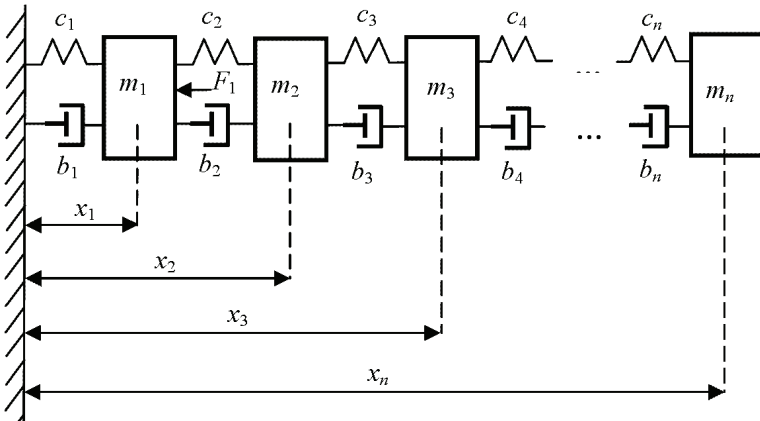


Рисунок 1 – КС с  $n$ -степенями свободы

Если обозначить  $\dot{x} = p$ , то система (1) может выглядеть так

$$\left. \begin{aligned} x_1 [m_1 p^2 + (b_1 + b_2) p + c_1 + c_2] &= F_1 + x_2 (b_2 p + c_2); \\ x_2 [m_2 p^2 + (b_2 + b_3) p + c_2 + c_3] &= x_1 (b_2 p + c_2) + x_3 (b_3 p + c_3); \\ \dots & \dots \\ x_n (m_n p^2 + b_n p + c_n) &= x_{n-1} (b_n p + c_n) \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Если считать входным воздействием  $F_{\text{вх}k}, k = \overline{1, n}$ , а выходным сигналом каждого звена КС с массой  $m_k, k = \overline{1, n}$  величину  $x_k, k = \overline{1, n}$ , то тогда передаточная функция каждого такого звена будет

$$W_k(p) = \frac{x_k(p)}{F_{\text{вх}k}(p)}. \quad (3)$$

Учитывая (2), (3), представим на рис. 2 структуру КС с  $n$ -степенями сво-

боды, где

$$\left. \begin{aligned} W_k = W_k(p) &= \frac{1}{m_k p^2 + (b_k + b_{k+1})p + c_k + c_{k+1}}; \\ W_{kl} = W_{kl}(p) &= b_{lp} + c_l, l = 2, n; \\ W_n = W_n(p) &= \frac{1}{m_n p^2 + b_n p + c_n} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

являются передаточными функциями звеньев.

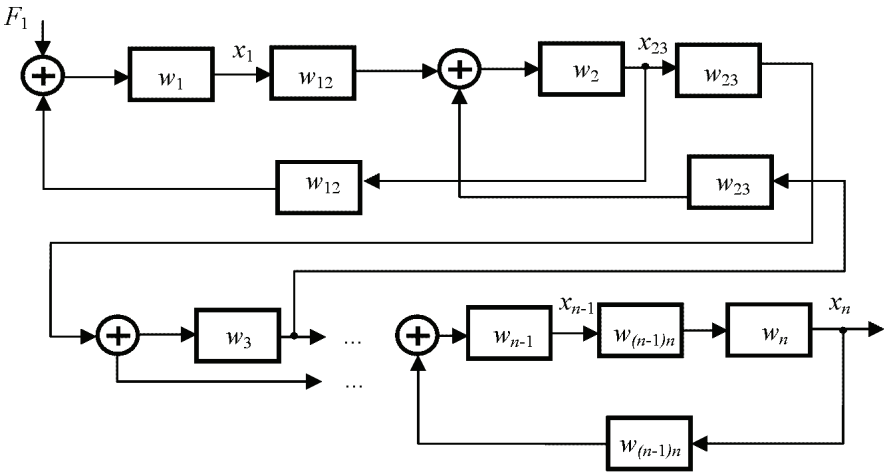


Рисунок 2 – Структура КС с  $n$ -степенями свободы

Как видно из рис. 2 в структуре КС с  $n$ -степенями свободы присутствует  $(n-1)$  положительных обратных связей с передаточной функцией  $W_{kl}(p)$ , что может обусловить неустойчивость КС. Более детально замечаем, что каждая КС с двумя степенями свободы, входящая в общую КС с  $n$ -степенями свободы, охвачена положительной обратной связью. Поэтому напрашивается вопрос, а что, если рассмотреть отдельно КС с двумя степенями свободы на устойчивость, а затем, учитывая структуру КС с  $n$ -степенями свободы, сделать вывод, может и предварительный, об устойчивости всей КС. Такой подход к исследованию, на наш взгляд, менее громоздкий.

Итак, проанализируем КС с двумя степенями свободы и распространим результат анализа на другие КС с двумя степенями свободы, входящие в КС с  $n$ -степенями свободы. При этом будем считать, что в данной КС имеется одно входное воздействие. Поэтому передаточная функция  $W_{kl}(p) = W$  такой КС имеет вид (берется последняя КС с двумя степенями свободы)

$$W_{kc} = \frac{W_{n-1} W_{(n-1)n} W_n}{1 - W_{n-1} W_{(n-1)n}^2 W_n} \quad (5)$$

Передаточные функции  $W_{n-1}$  и  $W_n$  можно представить в следующем виде

$$\left. \begin{aligned} W_{n-1} &= \frac{1}{m_{n-1}p^2 + (b_{n-1} + b_n)p + c_{n-1} + c_n} = \frac{1}{m_{n-1}p^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(b_{n-1} + b_n)p + c_{n-1} + c_n}{m_{n-1}p^2}}; \\ W_n &= \frac{1}{m_n p^2 + b_n p + c_n} = \frac{1}{m_n p^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{b_n p + c_n}{m_n p^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В соответствии с (6) структурные схемы этих КС будут такими, как изображено на рис. 3.

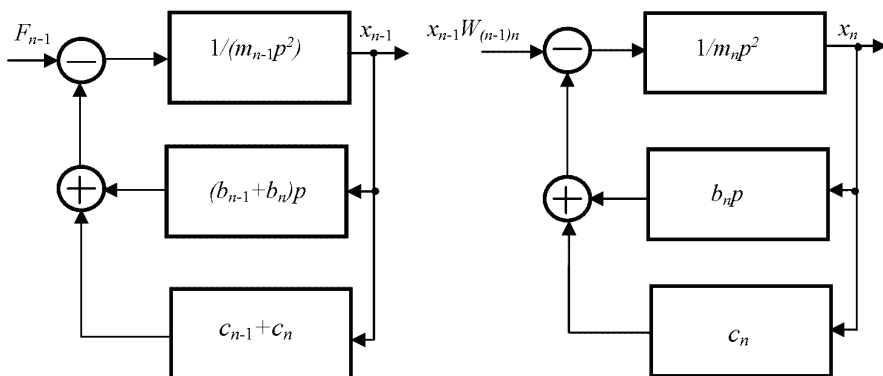


Рисунок 3 – Структурные схемы КС

Из этого рисунка видно, что КС с одной степенью свободы состоит из двойного интегратора  $1/(m_{n-1}p^2)$  или  $1/m_n p^2$ , охваченного двумя отрицательными обратными связями  $(b_{n-1} + b_n)p$ ,  $(c_{n-1} + c_n)$  или  $b_n p$ ,  $c_n$  соответственно. Наличие отрицательных обратных связей в КС должно компенсировать положительную обратную связь и этим самым обеспечивать устойчивость КС. Для убеждения в этом были рассмотрены возможные случаи с определенными значениями коэффициентов демпфирования и жесткости  $(b_{n-1}, b_n, c_{n-1}, c_n)$  в КС. В каждом случае были определены передаточная функция КС с двумя степенями свободы, а затем характеристическое уравнение, на основании которого с учетом критерия Гурвица [4] оценивалась принадлежность данной КС к устойчивой или неустойчивой системе.

Во всех случаях характеристические уравнения имели коэффициенты больше нуля, что убеждает о доминировании четырех внутренних отрицательных обратных связей в каждой КС с двумя степенями свободы над данной положительной обратной связью, являющейся внешним контуром. Поэтому определенно можно сказать об устойчивости каждой КС с двумя сте-

пенями свободы, входящей в КС с  $n$ -степенями свободы, а это, в свою очередь, дает право отметить устойчивость всей КС. Если же в какую-то отдельную КС с двумя степенями свободы включен нелинейный элемент, то вопрос об устойчивости следует рассматривать отдельно для этой КС с двумя степенями свободы и не исследовать другие линейные КС с двумя степенями свободы, входящие в КС с  $n$ -степенями свободы. Такой анализ по частям экономичен и во времени и в средствах.

**Вывод.** Процедура определения устойчивости КС с  $n$ -степенями свободы должна заключаться в построении ее структуры, подобной схеме, изображенной на рис. 2, выявлении нелинейных элементов в КС с двумя степенями свободы и в дальнейшем определении устойчивости последней системы.

**Список литературы:** 1. Божко А. Е. Воспроизведение вибраций. – К.: Наукова думка, 1975. – 191 с. 2. Божко А. Е. Оптимальное управление в системах воспроизведения вибраций. – К.: Наукова думка, 1977. – 219 с. 3. Божко А.Е. Синтез оптимального управления колебательными системами. – К.: Наукова думка, 1990. – 164 с. 4. Гузенко А.И. Основы теории автоматического регулирования. – М.: Высшая школа, 1967. – 406 с. 5. Елисеев С.В. Структурная теория виброзащитных систем. – Новосибирск: Наука, 1978. – 222 с.

*Поступила в редколлегию 30.10.2013*

УДК 531/534

**Определение устойчивости колебательных механических систем / А. Е. Божко, Е. М. Иванов, З. А. Иванова // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2013. – № 63 (1036). – С. 24-28. – Бібліогр.: 5 назв.**

Аналізується можливість попереднього визначення стійкості коливальних систем з  $n$ -степенями свободи на основі структурної теорії, так як наявність позитивних зворотних зв'язків в структурах можуть призводити до нестійких режимів роботи коливальних систем.

**Ключові слова:** коливальна система, структура, стійкість, ступені свободи, передатна функція.

Considering the preliminary determination of the stability of oscillatory systems with  $n$  degrees of freedom on the basis of the structural theory, since the presence of positive feedbacks in the structures can lead to unstable operation modes of oscillatory systems.

**Key words:** oscillatory system, structure, stability, degree of freedom, transfers function.