

On the basis of the embedding method the solution of the non-stationary heat conduction problem in a three-dimensional formulation for laminated plates of complex shape in the plane by heating the interlayer film heat source is received. Comparison with results of other authors obtained by using other methods is conducted. Calculation results of the thermal state of the five-layer plate of complex shape with the interlayer film heat source in different times are given.

Key words: thermal conductivity, multilayer plate, complex shape, heat source.

УДК 539.3

М. В. ЧЕРНОБРЫВКО, канд. техн. наук, ст. научн. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков;

К. В. АВРАМОВ, д-р техн. наук, профессор, ИПМаш НАН Украины, Харьков;

Т. Я. БАТУТИНА, вед. инж., ГП «КБ Южное», Днепропетровск;

Ю. В. МЕША, вед. инж., НПО «Хартрон-Аркос», Харьков

АЭРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ОБТЕКАТЕЛЕЙ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

Предложен метод анализа динамической устойчивости параболических оболочек в сверхзвуковом газовом потоке. Для описания динамики параболической оболочки применяется метод заданных форм. Колебания конструкции описываются линейной динамической системой с конечным числом степеней свободы. Для анализа устойчивости тривиального состояния равновесия рассчитываются характеристические показатели.

Ключевые слова: динамическая устойчивость, параболическая оболочка, сверхзвуковой газовый поток.

1 Введение и постановка задачи

В полете тонкостенные корпусные элементы ракет-носителей взаимодействуют с газовым потоком. Такое взаимодействие может привести к опасным динамическим явлениям. В первые секунды полета на динамическое напряженное состояние ракеты оказывают максимальное влияние ударно-акустической волны, генерируемые при запуске. Однако к 30 секунде полета причиной интенсивных колебаний корпусных элементов ракет-носителей являются аэродинамические нагрузки, которые могут привести к разрушению элементов конструкции и полезного груза [1-3]. Хорошо известно, что на сверхзвуковых скоростях полета ракеты при взаимодействии газового потока с тонкостенными корпусными элементами может наблюдаться флаттер [4, 5]. Для предсказания поведения тонкостенных конструкций в области

© М. В. Чернобрывко, К. В. Аврамов, Т. Я. Батутина, Ю. В. Меша, 2013

флаттера учитывается геометрическая нелинейность, которая ограничивает амплитуды колебаний конструкции в области флаттера [6]. Выбор оптимальных параметров корпусных элементов ракет-носителей с учетом их динамической неустойчивости, обусловленной действием сверхзвукового газового потока, позволяет избежать флаттера и тем самым уменьшить внешнее воздействие на полезный груз.

В практике проектирования и доводке ракет-носителей в КБ «Южное» наблюдаются интенсивные автоколебания обтекателей. Поэтому поставлена задача моделирования и гашения таких аэроупругих колебаний.

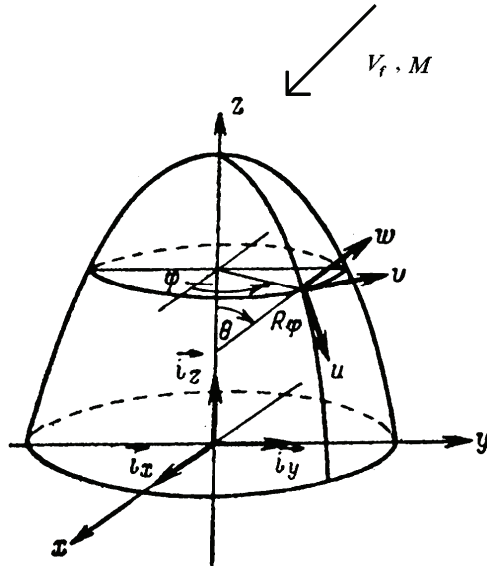


Рисунок 1 – Геометрия модели

Обтекатель представляет собой тонкую оболочку, которая защищает при выведении на орбиту полезный груз. Для широкого класса ракет-носителей обтекатель можно моделировать параболической оболочкой вращения [7]. Деформируемое состояние срединной поверхности параболоида опишем проекциями перемещений на направления касательных к координатным линиям [8]: $u(\theta, \varphi, t)$, $v(\theta, \varphi, t)$, $w(\theta, \varphi, t)$, где координаты θ , φ описывают положение точек на срединной поверхности (рис. 1). Радиусы кривизны координатных линий θ , φ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$R_\theta = \frac{R_0}{\cos^3 \theta}, \quad R_\varphi = \frac{R_0}{\cos \theta},$$

где R_0 – радиус кривизны вершины параболоида. На стороне $\theta = \theta_2$ оболочка закреплена. Верхняя точка оболочки $\theta = 0$ является особой, поэтому около

этой точки вырежем отверстие с диаметром меньшим, чем толщина оболочки. Это маленькое отверстие слабо влияет на динамику конструкции [9]. Принимаем, в месте маленького выреза наверху $\theta = \theta_1$, что оболочка свободна.

2 Математическая модель аэроупругих колебаний

Для вывода уравнений аэроупругих колебаний в обобщенных координатах параболической оболочки в сверхзвуковом потоке газа воспользуемся принципом Гамильтона [10, 11]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - \Pi) dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0, \quad (1)$$

где T – кинетическая энергия, Π – потенциальная энергия упругой деформации, δA – работа аэродинамических сил на виртуальном перемещении конструкции.

Кинетическая энергия параболической оболочки толщины h с плотностью ρ имеет вид:

$$T = \frac{\rho h R_0^2}{2} \int_0^{\frac{2\pi\theta_2}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} d\theta d\varphi dz. \quad (2)$$

Потенциальную энергию параболической оболочки представим так [7]:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{R_0}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{\frac{2\pi\theta_2}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_{11}^2 + 2\nu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{12}^2 \right) \times \\ & \times \left(1 + \frac{z \cos^3 \theta}{R_0} \right) \left(1 + \frac{z \cos \theta}{R_0} \right) \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} d\theta d\varphi dz, \end{aligned} \quad (3)$$

где компоненты тензора деформаций ε_{11} , ε_{12} , ε_{22} связаны с перемещениями зависимостями [7]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = & \frac{\cos^3(\theta)}{R_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right) + z \left[\frac{\cos^6(\theta)}{R_0^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\cos^5(\theta) \sin(\theta)}{R_0^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + 3u \right) \right], \\ \varepsilon_{22} = & \frac{ctg(\theta)}{R_0} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \cdot \cos(\theta) + w \cdot \sin(\theta) \right) + \\ & + z \left[\frac{ctg(\theta) \cos(\theta)}{R_0^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{ctg^2(\theta)}{R_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{ctg(\theta) \cos^4(\theta)}{R_0^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right) \right], \\ \varepsilon_{12} = & \frac{\cos^2(\theta)}{R_0} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \cos(\theta) - v \cdot \sin(\theta) + w \cdot ctg(\theta) \cos(\theta) \right) + \frac{ctg(\theta)}{R_0} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \end{aligned} \quad (4)$$

$$+ z \left[\frac{ctg(\theta) \cos^2(\theta)}{R_0^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{ctg(\theta) \cos^3(\theta)}{R_0^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial \theta} + v \right) \right].$$

Виртуальную работу аэродинамических сил, действующих на оболочку, представим так:

$$\delta A = R_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \delta w \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} d\theta d\varphi, \quad (5)$$

где p – давление сверхзвукового потока; δw – виртуальное перемещение конструкции.

Для описания давления в сверхзвуковом потоке газа применяется квазистатическая аэродинамическая теория [12]. Согласно этой теории, давление, действующее на оболочку, описывается соотношениями:

$$p = -p_1 \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + p_2 \frac{\partial w}{\partial t} - p_3 w \right), \quad (6)$$

$$p_1 = \frac{\rho_f V_f^2}{\beta}; \quad p_2 = \frac{M^2 - 2}{V_f \beta^2}; \quad p_3 = \frac{1}{2r\beta},$$

где p_1 – модифицированное динамическое давление; V_f – скорость потока газа; M – число Маха; $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$; $r = R_0 tg(\theta)$ – текущий радиус оболочки.

Слагаемое $p_3 w$ в соотношении (6) называют поправкой Крумхара. Как следует из [12], эта поправка является существенной.

Для вывода уравнений движения конструкции воспользуемся методом заданных форм [13]. Тогда перемещения $u(\theta, \varphi, t)$, $v(\theta, \varphi, t)$, $w(\theta, \varphi, t)$ разложим в ряд по формам собственных колебаний так:

$$\begin{aligned} u(\theta, \varphi, t) &= \sum_{n=1}^{N_u} q_n^{(u)}(t) U_n(\theta, \varphi); \\ v(\theta, \varphi, t) &= \sum_{n=1}^{N_v} q_n^{(v)}(t) V_n(\theta, \varphi); \\ w(\theta, \varphi, t) &= \sum_{n=1}^{N_w} q_n^{(w)}(t) W_n(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (7)$$

где $q^{(u)} = [q_1^{(u)}, \dots, q_{N_u}^{(u)}]$; $q^{(v)} = [q_1^{(v)}, \dots, q_{N_v}^{(v)}]$; $q^{(w)} = [q_1^{(w)}, \dots, q_{N_w}^{(w)}]$ – вектора обобщенных координат; $U_n(\theta, \varphi)$, $V_n(\theta, \varphi)$, $W_n(\theta, \varphi)$ – собственные формы свободных линейных колебаний, полученные методом Релея-Ритца [7]. Эти формы колебаний представляются так:

$$\begin{aligned}
 U_n(\theta, \varphi) &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} A_{ij}^{(n)} \psi_i^{(u)}(\theta) \cos j\varphi; \\
 V_n(\theta, \varphi) &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij}^{(n)} \psi_i^{(v)}(\theta) \sin j\varphi; \\
 W_n(\theta, \varphi) &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} C_{ij}^{(n)} \psi_i^{(w)}(\theta) \cos j\varphi,
 \end{aligned} \tag{8}$$

где $\psi_i^{(u)}(\theta), \psi_i^{(v)}(\theta), \psi_i^{(w)}(\theta)$ – базисные функции, которые принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \psi_i^{(u)}(\theta) &= \psi_i^{(v)}(\theta) = \cos \frac{(2i-1)\pi\theta}{2\theta_2}; \\
 \psi_i^{(w)}(\theta) &= \frac{1}{2} \left(\cosh \left[k_i \left(1 - \frac{\theta}{\theta_2} \right) \right] - \cos \left[k_i \left(1 - \frac{\theta}{\theta_2} \right) \right] \right) - \\
 &\quad - \frac{\sinh(k_i s) - \sin(k_i s)}{2(\cosh(k_i s) - \cos(k_i s))} \left(\sinh \left[k_i \left(1 - \frac{\theta}{\theta_2} \right) \right] - \sin \left[k_i \left(1 - \frac{\theta}{\theta_2} \right) \right] \right);
 \end{aligned}$$

A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} – коэффициенты, которые определяются из проблемы собственных значений.

Для упрощения дальнейшего изложения, все обобщенные координаты сгруппируем в один вектор $q = [q^{(u)}, q^{(v)}, q^{(w)}] = [q_1, \dots, q_{N_G}]$; $N_G = N_u + N_v + N_w$. Разложения (7) введем в кинетическую и потенциальную энергии (2, 3) и произведем необходимое интегрирование. Тогда кинетическую и потенциальную энергии представим в виде квадратичных форм обобщенных координат и их скоростей:

$$T = T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N_G}); \quad \Pi = \Pi(q_1, \dots, q_{N_G}).$$

Теперь составим выражения для обобщенных сил. Обобщенные силы $Q^{(u)}, Q^{(v)}$, соответствующие обобщенным координатам $q^{(u)}, q^{(v)}$, нулевые $Q^{(u)} \equiv 0; Q^{(v)} \equiv 0$. Для получения обобщенных сил $Q^{(w)}$ воспользуемся соотношениями (5, 6). Тогда в результате получим:

$$Q_n^{(w)} = -p_1 R_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + p_2 \frac{\partial w}{\partial t} - p_3 w \right) W_n(\theta, \varphi) \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} d\theta d\varphi dz; \tag{9}$$

$$n = 1, \dots, N_w.$$

В (9) введем разложение (7). Тогда вектор обобщенных сил представим в следующем матричном виде:

$$Q^{(w)} = \bar{K}^{(w)} q^{(w)} + \bar{C}^{(w)} \dot{q}^{(w)}, \quad (10)$$

где $\bar{C}^{(w)}$ – матрица аэродинамического демпфирования; $\bar{K}^{(w)}$ – матрица аэродинамической жесткости.

Для вывода уравнений движения обтекателя воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода. Тогда движение обтекателя опишем следующей системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$M \ddot{q} + K q + K^{(w)} q + C^{(w)} \dot{q} = 0, \quad (11)$$

где $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_{N_G})$ – матрица масс, входящая в кинетическую энергию системы; K – матрица жесткости, входящая в потенциальную энергию системы; $K^{(w)}$ – матрица аэродинамической жесткости; $C^{(w)}$ – матрица аэродинамического демпфирования.

Итак, анализ динамической устойчивости обтекателя в газовом потоке сведен к исследованию устойчивости тривиального состояния равновесия динамической системы (11). Для этого анализа устойчивости рассчитываются характеристические показатели [6]. Динамическую систему (11) представим в фазовом пространстве $y = [q, \dot{q}] = [q, v]$. Она примет следующий вид:

$$\dot{y} = G y, \quad (12)$$

где матрица G имеет следующую блочную структуру

$$G = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -M^{-1}(K + K^{(w)}) & -M^{-1}C^{(w)} \end{bmatrix}.$$

Решение системы (12) представим так: $y = Y \exp(\lambda t)$, где λ – характеристические показатели. Последние определяются из следующей проблемы собственных значений:

$$|G - \lambda E| = 0.$$

Выводы об устойчивости тривиального состояния равновесия системы (11) делаются по характеристическим показателям.

3 Численный анализ аэроупругих колебаний

Для определения физических характеристик потока газа проводилось моделирование полета ракеты-носителя как твердого тела. Проводились расчеты траекторий движения ракеты с различными начальными условиями. Были выбраны две характерные траектории. Дальнейшие численные исследования проводились для двух выбранных траекторий полета.

Для первой траектории на 30÷50 секундах полета, высота находилась в диапазоне 1051÷4379 м. Для второй траектории на этих секундах полета, высота находилась в диапазоне 1021÷4290 м над уровнем моря. При этом усредненный вектор скоростей в геоцентрической гринвичской системе координат имел координаты (471 м/с; 102 м/с; 33 м/с) для 30-ой секунды полета и (545 м/с; 232 м/с; 33 м/с) для 50-ой секунды полета. Таким образом, суммар-

ная скорость полета менялась от 483 м/с до 593 м/с. Значения суммарной скорости подтверждают, что рассматриваемый временной интервал является зоной сверхзвукового полета ракеты-носителя.

Теперь определим физические характеристики атмосферы в полете ракеты. В частности, плотность атмосферы существенно зависит от температуры. В работе [12] показано, что нагревание атмосферы Солнцем может приводить к изменению ее плотности в 5,3 раза для одной и той же высоты. При совместном учете еще и изменений высоты орбиты максимальные значения плотности атмосферы могут превосходить минимальные в 12 раз. Изменения плотности атмосферы может приводить к существенным изменениям аэродинамического давления. В данном исследовании использовались усредненные результаты. Плотность атмосферы на исследуемом участке полета меняется в промежутке $1,11 \div 0,8 \text{ кг/м}^3$; температура атмосферы меняется в интервале $8 \div -12$. Постоянная составляющая давления составляет $89,8 \div 59 \text{ кПа}$.

Полученные усредненные значения параметров атмосферы использовались при определении аэродинамического давления (6). Потом определяются коэффициенты динамической системы (11). Для анализа устойчивости рассчитывались характеристические показатели. Результаты расчета приводятся на рис. 2. Здесь показывается первые десять действительных частей характеристических показателей $\delta_i = \text{Re}(\lambda_i)$. Результаты расчетов для фиксированного числа Маха соединяются сплошной линией. На рис. 2 действительные части характеристических показателей для следующих значений чисел Маха 1.79, 1.6 и 1.46 показываются кривыми с номерами 1, 2, 3, соответственно.

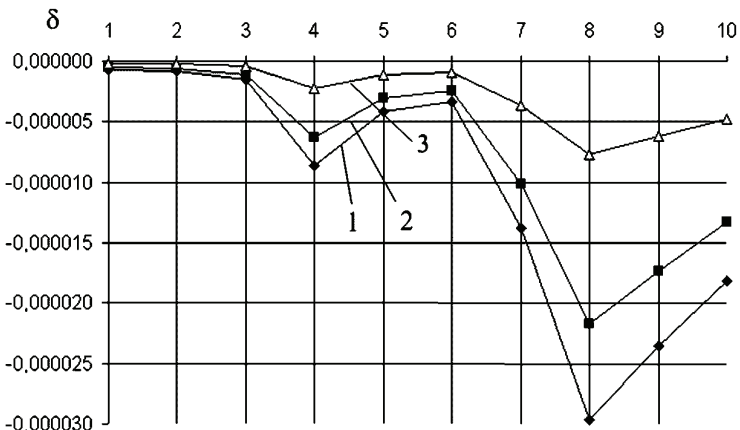


Рисунок 2 – Характеристические показатели как функция числа Маха

Итак, результаты расчетов свидетельствуют, что при выбранных значениях чисел Маха параболическая оболочка устойчива в сверхзвуковом газовом потоке.

4 Выводы

В статье предложен метод анализа динамической неустойчивости обтекателей ракет-носителей в сверхзвуковом газовом потоке. Для вывода уравнений движения обтекателя используется метод заданных форм. Давление сверхзвукового газового течения описывается квазистатической аэродинамической теорией. Для анализа динамической неустойчивости находятся характеристические показатели.

Работа выполнена при поддержке Целевой комплексной программы НАН Украины по космическим исследованиям на 2012-2016 гг. Авторы статьи благодарят проф. В.И. Гуляева и проф. О.К. Морачковского за обсуждение материала, представленного в статье.

Список литературы: 1. *Афраймович Э. Л.* Ударно-акустические волны, генерируемые при запусках ракет и землетрясениях / Э. Л. Афраймович, Е. А. Косогозов, А. В. Плотников // Космические исследования. – 2002. – Т. 40, № 3. – С. 1-15. 2. *Аврамов К.В.* Нестационарные изгибно-изгибно-продольные колебания ракетносителя с космическим аппаратом / К.В. Аврамов, В.А. Пирог, В.М. Федоров, Т.М. Пересадько, Н. В. Ширяева // Проблемы машиностроения. – 2011. – №5. – С. 38-43. 3. *Шевцов Е.И.* Проектно конструкторские аспекты обеспечения безопасности на этапе разработки ракеты-носителя / Е.И. Шевцов // Космические технологии: настоящее и будущее. – Днепропетровск. – 2013. – С. 25. 4. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи упругой устойчивости. – М., Физматгиз, 1961. 5. *Dowell E.H.* Aeroelasticity of plates and shells. – Leyden, Noordhoff International Publishing, 1975. – 213 p. 6. *Аврамов К. В.* Нелинейная динамика упругих систем / К. В. Аврамов, Ю. В. Михлин. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 704 с. 7. *Чернобрышко М.В.* Собственные колебания обтекателей ракет-носителей / М.В. Чернобрышко, К.В. Аврамов, В.Н. Романенко, А.М. Тонконоженко, Т.Я. Батутина // Вісник СевНТУ. – 2013. – Вип. 137: Механіка, енергетика, екологія. – С. 15-18. 8. *Биргер И.А.* Прочность. Устойчивость. Колебания. – Том 1 / И.А. Биргер, Я.Г. Пановко. – М.: Машиноведение, 1968. – 728 с. 9. *Валишвили Н.В.* Методы расчета оболочек вращения на ЦЭВМ. – М.: Машиностроение, 1976. – 282 с. 10. *Бочкарев С.А.* Об одном методе исследования аэроупругой устойчивости оболочек вращения / С.А.Бочкарев, В.П. Матвеевко // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия. – 2007. – № 4 (54). – С. 387-399. 11. *Алгазин С. Д.* Флаттер пластин и оболочек / С. Д. Алгазин, И. А. Куйко : Ин-т проблем механики РАН. – М.: Наука, 2006 . – С. 247. 12. *Маслова А. И.* Изменения плотности атмосферы при движении космических аппаратов на низких околоземных орбитах / А. И. Маслова, А. В. Пироженко // Космічна наука і технологія. – 2009. – Т. 15, № 1. – С. 13–18. 13. *L. Meirovitch* Elements of vibration analysis. – McGraw-Hill Publishing Company, 1986. – 534 p.

Поступила в редколлегию 15.10.2013.

УДК 539.3

Аэроупругие колебания обтекателей ракет-носителей в сверхзвуковом газовом потоке / М. В. Чернобрышко, К. В. Аврамов, Т. Я. Батутина, Ю. В. Меша // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 63 (1036). – С. 131-139. – Бібліогр.: 13 назв.

Запропонований метод аналізу динамічної стійкості параболічних оболонок в надзвуковому газовому потоці. Для опису динаміки параболічної оболонки застосовується метод заданих форм. Коливання конструкції описуються лінійною динамічною системою із скінченною кількістю степенів свободи. Для аналізу стійкості тривіального стану рівноваги розраховуються характеристичні показники.

Ключові слова: динамічна стійкість, параболічні оболонки, надзвуковий газовий потік.

The approach for analysis of dynamic stability of parabolic shells in supersonic stream is suggested. The assumed mode method is used to analyze the dynamics of parabolic shells. The structure vibrations are described by finite DOF dynamical system. The characteristic exponents are calculated to analyze stability of trivial equilibrium.

Key words: dynamic stability, parabolic shell, supersonic stream.

УДК 539.3

А. Н. ШУПИКОВ, д-р техн. наук, профессор, ИПМаш НАН Украины, Харьков

С. Ю. МИСЮРА, аспирант, ИПМаш НАН Украины, Харьков

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ ЦИКЛИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Разработана методика расчета пространственных циклически симметричных конструкций с радиальными ребрами. Проверена работоспособность предлагаемого подхода и подтверждена достоверность результатов получаемых на его основе. Относительные величины деформаций и прогибов оробренной пластины, полученные экспериментально, близки к величинам, найденным аналитически и на основе предлагаемого подхода. На основе представленной методики проведен анализ напряженно-деформированного состояния крышки поворотной-лопастной гидротурбины.

Ключевые слова: циклически симметричная конструкция, напряженно-деформированное состояние.

Введение. Пространственные циклически симметричные конструкции с радиальными ребрами находят широкое применение в машиностроении. Они являются элементами конструкций гидротурбин, прокатных станов, шахтных подъемников и т.д. [1].

Характерной особенностью таких конструкций является тот факт, что их можно представить в виде n одинаковых секторов, геометрические и механические параметры которых сохраняют свою инвариантность во время вращения на угол $2\pi/N$ [2, 3].

При проектировании новых турбоагрегатов очень важно наличие надежной методики расчета прочностных характеристик элементов и узлов. Для решения таких задач во многих работах широко используется метод конечных элементов (МКЭ) [4, 5], что позволяет обеспечить достаточную точность и простоту создания расчетной модели [6, 7].

В настоящей работе предлагается один из возможных подходов к расчету НДС циклической симметричной пространственной конструкции, состоящей из тонкостенных элементов, – крышки гидротурбины.

© А. Н. Шупиков, С. Ю. Мисюра, 2013