

УДК 534.1

ФИЛИПКОВСКИЙ С.В., БЕЛОМЫТЦЕВ А.С.

## НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ РОТОРА НА РАДИАЛЬНО-УПОРНЫХ ШАРИКОПОДШИПНИКАХ

### Введение

Радиально-упорные шарикоподшипники используют в устройствах, ротор которых передаёт нагрузку в направлении оси вращения. В высокооборотных агрегатах с ротором, таких как турбохолодильники и приборы, важно предварительно выбрать зазоры в подшипниках, чтобы исключить удары. Для этого подшипники ставят с предварительным осевым поджатием. В соответствии с действующим в нашей стране стандартом, используют подшипники с разным углом между линией действия контактных сил и осью подшипника. Назовём этот угол  $\alpha$  углом контакта (рис. 1,б). В статье [1] исследованы свободные колебания ротора на радиально-упорных шарикоподшипниках с предварительным поджатием и получены скелетные кривые и нелинейные нормальные формы колебаний при разных углах контакта.

Целью работы является исследование влияния нелинейных контактных сил и угла контакта на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ), резонансные режимы и бифуркации колебаний ротора на радиально упорных шарикоподшипниках с предварительным поджатием.

### 1. Уравнения колебаний ротора

Схема ротора показана на рис. 1,а. Устройства с предварительно поджатыми радиально-упорными подшипниками имеют короткий вал, который можно считать недеформируемым.

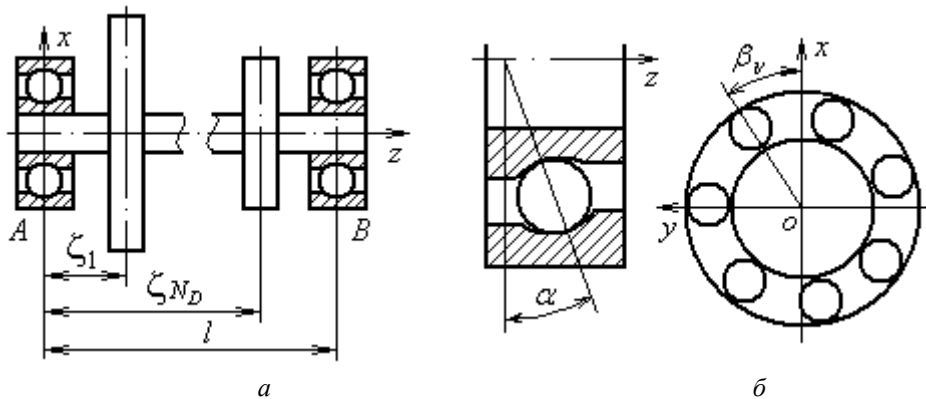


Рис. 1. Схемы ротора и шарикоподшипника

Используем уравнения колебаний ротора полученные в [1]:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [G]\{\dot{U}\} + [C]\{U\} + [K]\{U\} + [\bar{K}]\{U^2\} + [\hat{K}]\{UU_\lambda\} + [\check{K}]\{U^3\} + [\tilde{K}]\{U_\mu^2 U_\nu\} = \{Q(\omega, \tau)\}, \quad (1)$$

где  $[M]$  – матрица масс;  $[G]$  – гироскопическая матрица;  $[C]$  – матрица демпфирования;  $[K]$  – матрица жёсткости;  $[\bar{K}]$ ,  $[\hat{K}]$ ,  $[\check{K}]$  и  $[\tilde{K}]$  – матрицы коэффициентов нелинейной жёсткости;  $\{U\} = [x_A \ y_A \ x_B \ y_B \ z]^T$  – вектор безразмерных обобщённых координат,  $\omega$  и  $\tau$  – безразмерные угловая скорость и время. Компоненты векторов  $\{UU_\lambda\}$ ,  $\{U^2\}$ ,  $\{U_\mu^2 U_\nu\}$ ,  $\{U^3\}$  представляют собой произведения обобщённых координат второй и третьей степени.

### 2. Построение АЧХ методом продолжения по параметру

Под АЧХ понимаем зависимость полуразмаха колебаний от частоты. Уравнение (1) можно записать в виде [2]:

$$\{\ddot{U}\} = \{f(\{U\}, \{\dot{U}\}, \tau)\}, \quad (2)$$

где  $\{f\}$  –  $n$ -мерная вектор-функция. Обозначив  $\{V\} = \{\dot{U}\}$ , перепишем (2) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\{\dot{Y}\} = \{\Phi(\{Y\}, \tau)\}, \quad (3)$$

где  $\{\Phi\}$  –  $2n$ -мерная вектор-функция,  $\{Y\} = \{U\}^T \quad \{V\}^T$ . Условие периодичности решений уравнения (3) можно записать в виде:

$$\{Y(0)\} = \{Y(T)\}, \quad (4)$$

где  $T$  – период. Если ввести в рассмотрение векторы  $\{Y\}_0 = \{Y(0)\}$  и  $\{Y\}_T = \{Y(T)\}$ , определяющие состояние системы (3) в моменты времени  $\tau = 0$  и  $\tau = T$ , то задачу Коши (3) с краевыми условиями (4) можно свести к решению неявного уравнения

$$\{Y(\{Y\}_0)\}_T = \{Y\}_0. \quad (5)$$

Поскольку функцию  $\{Y(\{Y\}_0)\}_T$  не удаётся описать аналитически, для её определения интегрируем систему (3) численным методом Рунге-Кутты. Вблизи резонансной частоты АЧХ может быть неоднозначной. Для построения первого приближения начальной точки АЧХ решаем уравнение (5) линеаризованной системы в стороне от основного резонанса. Далее уточняем решение итерационным методом. Вторую точку АЧХ находим, выполняя заранее назначенный шаг по параметру продолжения  $\omega$  в сторону резонансной области. В качестве начального приближения для итерационного определения второй точки АЧХ берём вектор  $\{Y_0\}$ , построенный для первой точки. Начальные приближения для последующих точек определяем линейной экстраполяцией результатов, полученных для двух предыдущих точек. Шаг по параметру продолжения определяется следующим соотношением

$$h_\omega = (\omega_j - \omega_{j-1}) N_{opt} / N_j, \quad (6)$$

где  $j > 1$  – номер последней построенной точки АЧХ,  $N_j$  – количество выполненных при построении этой точки итераций,  $N_{opt} = 3$  – оптимальное количество итераций.

Вблизи резонанса на АЧХ могут появиться особые точки, в которых касательная к кривой перпендикулярна оси абсцисс. При подходе к этой точке надо менять параметр продолжения с частоты на одну из фазовых координат. Такую задачу построения точек АЧХ называют инвертированной [2]. Условие перехода к инвертированной задаче – выполнение хотя бы для одной из фазовых координат неравенства

$$|(Y_{k,j} - Y_{k,j-1}) / (\omega_j - \omega_{j-1})| > 1, \quad k = \overline{1, 2n}, \quad (7)$$

где  $Y_k$  – размах фазовой координаты с номером  $k$ ,  $j$  – номер точки. Для успешного прохождения особых точек на каждом шаге построения АЧХ в качестве параметра продолжения выбирается та фазовая координата, для которой соотношение (7) максимальное. Управление длиной шага инвертированной задачи также осуществляется по формуле (6).

Уточнение решений как прямой, так и инвертированной задачи осуществляется методом Ньютона. Несмотря на то, что итерационный метод Ньютона широко используется в последние годы для анализа нелинейных систем, в известных авторам публикациях на русском языке описана только его реализация с конечно-разностным вычислением производных. В настоящей работе использована реализация метода Ньютона с вычислением производных одновременным интегрированием вариаций, которая приведена ниже. Уравнения итерационного метода Ньютона для решения прямой задачи (5) записываются так [2]:

$$\begin{cases} [J(\{Y\}_0) - E] \{h_Y\}^k = \{Y(\{Y\}_0)\}_T^k - \{Y\}_0^k, \\ \{Y\}_0^{k+1} = \{Y\}_0^k - \{h_Y\}^k, \end{cases} \quad (8)$$

где  $[J(\{Y\}_0)] = [\partial\{Y\}_T / \partial Y_{0,1} \quad \dots \quad \partial\{Y\}_T / \partial Y_{0,2n}]$  – матрица Якоби,  $[E]$  – единичная матрица,  $\{h_Y\}^k$  – вектор шага итерации,  $k$  – номер итерации. Столбцы матрицы Якоби вычисляем следующим образом.

На основании (3)  $i$ -й столбец матрицы Якоби запишем так:

$$\frac{\partial \{Y\}_T}{\partial Y_{0,i}} = \frac{\partial}{\partial Y_{0,i}} \int_0^T \{\varphi(\{Y\}, \tau)\} d\tau = \int_0^T \left\{ \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \{\varphi\}}{\partial Y_k} \frac{\partial Y_k}{\partial Y_{0,i}} \right\} d\tau. \quad (9)$$

В (9) производные  $\partial\{\varphi\}/\partial Y_k$  можем определить аналитически, так как известны уравнения колебаний, а производные  $\partial Y_k/\partial Y_{0,i} = \delta_{k,i}$  – новые переменные. Таким образом, вычисление  $i$ -го столбца матрицы Якоби сводится к интегрированию следующей системы с новыми переменными  $\{\delta_{k,i}\}$ :

$$\frac{\partial \{Y\}_T}{\partial Y_{0,i}} = \int_0^T \left\{ \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \{\varphi\}}{\partial Y_k} \delta_{k,i} \right\} d\tau \quad (10)$$

Начальные условия этих переменных:  $\delta_{k,i} = 0$ , если  $k \neq i$ , и  $\delta_{k,i} = 1$ , если  $k = i$ . Чтобы знать в процессе интегрирования значения компонентов вектора  $\{Y\}$ , входящего в выражения производных  $\partial\{\varphi\}/\partial Y_k$ , совместно интегрируются  $2n \times 2n$  уравнений (10) и  $2n$  уравнений (3).

В матрице Якоби инвертированной задачи (8) столбец производных  $\partial\{Y\}_T/\partial Y_{0,j}$ , соответствующий новому параметру продолжения  $Y_j$ , заменяется столбцом  $\partial\{Y\}_T/\partial \omega$ ; в матрице  $[E]$  элемент, соответствующий  $j$ -й координате заменяется нулём, в векторе  $\{h_Y\}^k$  на  $j$ -й позиции будет стоять шаг по частоте  $\Delta \omega^k$ . При вычислении этого столбца интегрирование производится при переменном верхнем пределе  $T = 2\pi/\omega$  и приводит к выражению [3]:

$$\frac{\partial \{Y\}_T}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \int_0^T \{\varphi(\{Y\}, \omega, \tau)\} d\tau = \int_0^T \left\{ \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \{\varphi\}}{\partial Y_k} \frac{\partial Y_k}{\partial \omega} + \frac{\partial \{\varphi\}}{\partial \omega} \right\} d\tau + \frac{\partial T}{\partial \omega} \cdot \{\varphi(\{Y\}_T, \omega, T)\}, \quad (18)$$

При вычислении этого столбца появляются новые переменные  $\partial Y_k/\partial \omega = \delta_{k,j}$ , начальные условия всех переменных  $\delta_{k,j} = 0$ ,  $j$  – номер столбца параметра продолжения инвертированной задачи. Таким образом, вычисление  $j$ -го столбца матрицы Якоби сводится к интегрированию следующей системы с новыми переменными  $\{\delta_{k,j}\}$ :

$$\frac{\partial \{Y\}_T}{\partial \omega} = \int_0^{2\pi/\omega} \left\{ \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \{\varphi\}}{\partial Y_k} \delta_{k,j} + \frac{\partial \{\varphi\}}{\partial \omega} \right\} d\tau - \frac{2\pi}{\omega^2} \left\{ \varphi \left( \{Y\}_T, \omega, \frac{2\pi}{\omega} \right) \right\}. \quad (19)$$

Итерации прекращаются, когда выполняется условие  $\sum_{i=1}^{2n} |(Y_{0,i} - Y_{T,i})/Y_{0,i}| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon = 10^{-4}$  – погрешность итераций. Следует отметить, что для сходимости итераций погрешность численного интегрирования  $\varepsilon_{RK}$  должна быть мала по сравнению с погрешностью итераций. В наших расчётах принято  $\varepsilon_{RK} = 10^{-8}$ . После окончания итераций ещё раз выполняем интегрирование по алгоритму (17). Полученная матрица будет матрицей монодромии, её мультипликаторы  $\lambda = \xi \pm i\psi$  определяют устойчивость и характер бифуркаций рассматриваемой точки АЧХ [4].

### 3. Результаты численных исследований

Рассмотрены колебания недеформируемого ротора с одним диском  $l = 0,5$  м,  $\zeta_1 = 0,125$  м, диаметр вала  $d = 0,025$  м,  $m_0 = 10$  кг,  $I_1 = 0,1$  кг·м<sup>2</sup>,  $I_0 = 0,2$  кг·м<sup>2</sup>, который вращается на радиально-упорных подшипниках средней серии по ГОСТ 831-75. АЧХ перемещения  $u_B$  представлены на рис. 2,а, где номера линий соответствуют углам  $\alpha$  равным 12°, 15°, 26°, 36° и 40°. Неустойчивые режимы показаны штриховыми линиями. Кривизна канавок качения в шарикоподшипнике переменная и минимальна на дне канавок. При движении точки контакта шарика от дна к боковой поверхности кривизна поверхности увеличивается и, соответственно, жёсткость зоны контакта уменьшается. Чем больше амплитуда, тем значительнее изменение жёсткости зоны контакта за цикл колебаний, поэтому характеристика системы мягкая.

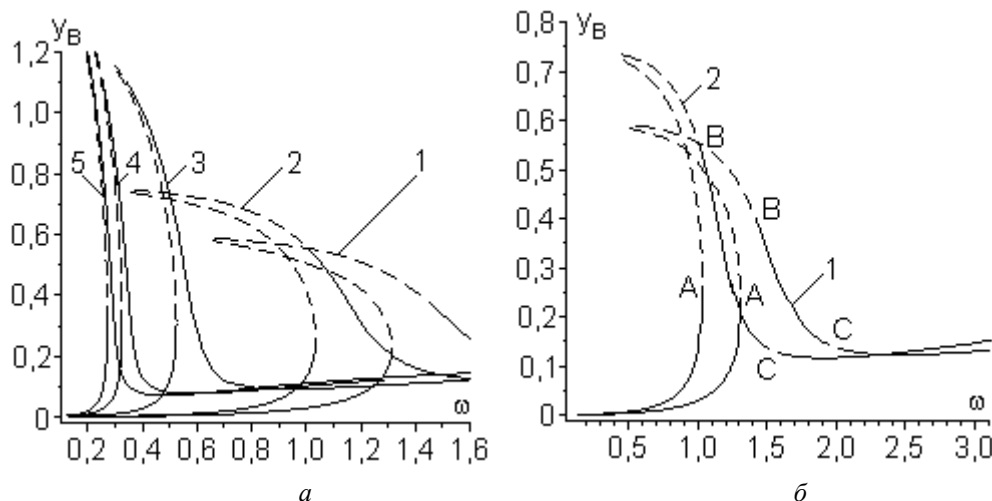


Рис.2. АЧХ координаты  $y_B$  для углов  $\alpha$  равных  $12^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $26^\circ$ ,  $36^\circ$  и  $40^\circ$

Чем больше угол контакта, тем больше кривизна поверхности канавок качения в зоне контакта, тем меньше жёсткость зоны контакта и, соответственно, меньше частота колебаний, поэтому АЧХ роторов с большими углами  $\alpha$  на рис. 2 расположены левее. При любых углах  $\alpha$  есть точки потери устойчивости, которые отмечены на рис. 2,б. В точках А наибольший мультипликатор матрицы монодромии становится действительным числом  $\lambda_1 = 1$  и далее при движении вверх по АЧХ возрастает, это седло-узловая бифуркация [4]. В точках В модули наибольших комплексно-сопряжённых мультипликаторов возрастают до  $|\lambda_{1,2}| = \sqrt{\xi_{1,2}^2 + \psi_{1,2}^2} = 1$ , а далее  $|\xi_{1,2}|$  и  $|\psi_{1,2}|$  растут совместно; это бифуркация рождения двумерного тора [4]. Такие же бифуркации наблюдаются на коротких участках АЧХ в окрестностях точек С.

### Заключение

Разработаны модель и методика исследования вынужденных нелинейных колебаний роторов на шарикоподшипниках с предварительным осевым поджатием. Анализ АЧХ при вибрации, вызванной дисбалансом, показал, что все характеристики мягкие. На всех ветвях АЧХ есть точки бифуркаций. При малых углах контакта на АЧХ есть диапазоны частот, в которых нет устойчивых периодических режимов колебаний.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Филипковский С.В., Аврамов К.В. Свободные нелинейные колебания многодисковых роторов на шарикоподшипниках // Проблемы прочности. – 2013. – № 3. – С. 86–96.
2. Беломытцев А.С., Карабан В.Н. Алгоритм решения нелинейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений в области многозначности // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1986. – № 7. – С. 1099–1102.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: Наука, 1970. – 800 с.
4. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. – М.: Наука, 1990. – 312 с.

**ФИЛИПКОВСКИЙ Сергей Владимирович** – к.т.н., с.н.с., доцент кафедры теоретической механики и гидравлики Харьковского национального автомобильно-дорожного университета.

Научные интересы:

– нелинейная динамика, переходные колебательные процессы.

**БЕЛОМЫТЦЕВ Андрей Сергеевич** – к.т.н., доцент, доцент кафедры теоретической механики Национального технического университета «Харьковский политехнический институт»

Научные интересы:

– нелинейная динамика.