

**К. В. БЕЗРУЧКО**, д-р техн. наук, проф., гл. научн. сотр., Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт»;

**А. О. ДАВИДОВ**, канд. техн. наук, вед. научн. сотр., Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт»;

**С. В. СИНЧЕНКО**, старш. научн. сотр., Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт»;

**С. В. ШИРИНСКИЙ**, канд. техн. наук, старш. научн. сотр., Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт»

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СХЕМ ЗАМЕЩЕНИЯ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗРЯДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НИКЕЛЬ-КАДМИЕВЫХ АККУМУЛЯТОРОВ

Визначено структуру й розглянута послідовність операцій по побудові математичної моделі розрядної характеристики. Визначено структуру математичної моделі електрохімічного акумулятора. Розроблено математичну модель розрядної характеристики нікелево-кадмієвого акумулятора за запропонованою схемою заміщення. Наведено результати математичного моделювання відповідно до експериментальних розрядних характеристик нікелево-кадмієвого акумулятора.

Определена структура и рассмотрена последовательность операций по построению математической модели разрядной характеристики. Определена структура математической модели электрохимического аккумулятора. Разработана математическая модель разрядной характеристики никель-кадмиевого аккумулятора по предложенной схеме замещения. Приведены результаты математического моделирования в соответствии с экспериментальными разрядными характеристиками никель-кадмиевого аккумулятора.

The structure is defined and the sequence of operations on construction of mathematical model of the discharge characteristic is observed. The structure of mathematical model of the electrochemical accumulator is determined. The mathematical model of the discharge characteristic accumulator nickel-cadmium on the offered equivalent circuit is developed. Results of mathematical modelling according to experimental discharge characteristics accumulator nickel-cadmium are resulted.

**Введение.** На сегодняшний день эксплуатация электрохимических аккумуляторов (АК) никель-кадмиевой (НК) электрохимической системы занимает значительное место в области применения вторичных источников тока. Для определения параметров НК АК необходимо проведение зарядно-разрядных циклов и получение зарядно-разрядных характеристик.

Моделирование характеристик НК АК представляет собой актуальную задачу, о чем свидетельствует достаточно большое количество публикаций на данную тему. Использование математических моделей (ММ) характеристик НК АК происходит на разных этапах: при проектировании энергоустановки, в которую входит НК АК, при эксплуатации НК АК и при прогнозировании их ресурса.

**Постановка задачи.** В процессе проектирования новой или модернизации существующей технической системы решаются задачи расчета параметров и исследования процессов в этой системе. При проведении многовариантных расчетов реальную систему заменяют моделью [1, 2].

Целью математического моделирования является анализ реальных процессов (в природе или технике) математическими методами. Математическое моделирование для исследования характеристик систем можно разделить на: аналитическое, имитационное и комбинированное.

Математическая модель должна представлять собой упрощенное отображение реального объекта и в том числе должна обеспечивать соответственное отображение свойств, которые подлежат исследованию.

Разработка математической модели никель-кадмиевого аккумулятора может проводиться тремя способами: при помощи описания макрокинетики электрохимических процессов, при помощи описания данных полученных в результате эксперимента, при помощи описания процессов происходящих в электрохимическом аккумуляторе с помощью схемы замещения.

1. Описание макрокинетики электрохимических процессов. В аккумуляторе, на отдельных электродах, происходят нестационарные процессы, описание которых довольно сложное, так как необходимо учитывать влияние всех факторов, влияющих на работу НК АК, таких как зависимость тока обмена от температуры, зависимости теплопроводности от степени заряженности и др. Без учета того или иного фактора получаемые аналитические модели могут существенно отличаться от реальных характеристик.

2. Описание экспериментальных данных. Решение задачи данным методом наиболее точное, так как использование результатов реальных экспериментов дает возможность избежать некорректного аналитического отображения характеристик НК АК. Недостатком данного направления является узкая область применения полученной математической модели.

3. Описание АК при помощи схемы замещения. Для каждого из процессов (электрохимических, физических) может быть составлена своя эквивалентная схема замещения, которую можно описать соответствующим математическим уравнением. Эквивалентная

электрическая схема замещения представляет собой определенным образом соединенные активные и реактивные элементы (сопротивления, емкости, индуктивности), каждый из которых имитирует определенный физико-химический параметр или конструктивный элемент исследуемого АК. Данное решение наиболее удобное для математического описания и упрощает решение задачи.

Таким образом, моделирование характеристик никель-кадмиевых аккумуляторов при помощи схемы замещения на сегодняшний день актуальная задача исследования, которая решается в данной работе.

**Обобщенная структура математических моделей электрохимических аккумуляторов.** Математические модели электрохимических АК разрабатывались на основе обобщенной структуры (см. рис. 1).

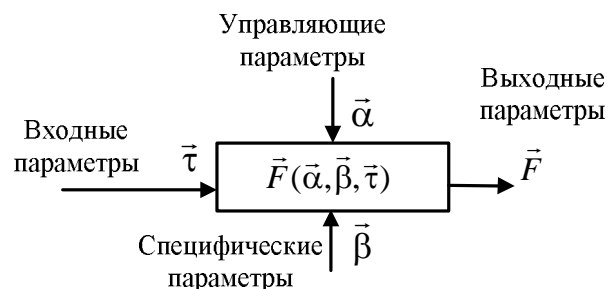


Рис. 1 – Схема обобщенной структуры математической модели электрохимического аккумулятора

Обобщенная структура математической модели электрохимического АК имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Характеристика аккумулятора:} \\ \text{Вектор специфических параметров:} \\ \text{Вектор управляющих параметров:} \\ \text{Вектор входных параметров:} \end{array} \right. \begin{array}{l} \vec{F} = \vec{F}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\tau}), \\ \vec{\beta} = \vec{\beta}(\vec{\tau}), \\ \vec{\alpha} \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}], \\ \vec{\tau} \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]. \end{array} \quad (1)$$

В данном случае  $\vec{\alpha}$  – вектор параметров, характеризующих режимы работы аккумуляторов;  $\vec{\beta}$  – вектор параметров, которые характеризуют

особенности конкретных АК, а вектор  $\vec{F}$  содержит характеристики АК, которые изменяются с изменением входных параметров  $\vec{\tau}$ .

Входных параметров в общем случае может быть несколько (время, число циклов заряда-разряда, число орбитальных витков космического аппарата и др.), и они составляют вектор  $\vec{\tau}$ . Для математической модели разрядной характеристики аккумулятора входным параметром является время.

Выходным параметром математической модели ( $\vec{F}$ ) в большинстве случаев является напряжение, поскольку именно характерные напряжения (НРЦ, минимальное напряжение цикла и др.) определяют качество электропитания нагрузки.

Вектор специфических параметров включает параметры, которые характеризуют окружающую среду, управление которыми не ведется, и характеристики начального состояния АК или БХ, например:

$$\vec{\beta} = (P, \mu, U_0, r_0, C_0, Q_0), \quad (2)$$

где  $P$  – давление среды в зоне размещения БХ,  $\mu$  – относительная влажность воздуха,  $U_0$  – начальное напряжение АК или БХ,  $r_0$  – начальное внутреннее сопротивление АК,  $C_0$  – начальная заряженность АК,  $Q_0$  – начальная емкость аккумулятора.

Вектор специфических параметров может иметь вид отличный от уравнения (2), если нужно учесть дополнительные неконтролируемые факторы. В общем случае неуправляемые параметры являются функцией входных параметров (обычно времени), поскольку изменяются с изменением величин входных параметров (со временем).

Вектор управляющих параметров содержит описание режимов работы АК, т.е. величин зарядно-разрядных токов ( $I$ ), температур ( $T$ ), предельных значений напряжений ( $U_{\min}, U_{\max}$ ), максимальную продолжительность работы АК ( $\tau_{\max}$ ) и другие, например:

$$\vec{\alpha} = (T, I, U_{\min}, U_{\max}, \tau_{\max}) \quad (3)$$

Управляющие параметры могут задаваться дискретно, как постоянные величины или как функции от входных параметров.

**Последовательность построения математической модели электрохимического аккумулятора. Определение входных и выходных параметров ММ.** При эксплуатации в режиме зарядно-разрядного циклирования, аккумулятор на стадии разряда должен обеспечивать питание нагрузки с заданными параметрами по току и напряжению в течение заданного времени [1,3]. Аккумулятор может быть

подключен к нагрузке непосредственно или через устройство кондиционирования параметров (стабилизатор напряжения, стабилизатор тока, стабилизатор мощности и т.п.). В любом варианте подключения существует некоторое минимальное напряжение  $U_{\min}$  на выходе АК, при котором нагрузка или промежуточные устройства прекращают выполнять свои функции. Другим важным параметром питания нагрузки является продолжительность ее работы  $\tau_p$  и способность АК обеспечить эту продолжительность при питании нагрузки током  $I$  (см. рис. 2). Способность АК обеспечивать питание нагрузки током  $I$  в течение времени  $\tau$  характеризует такой комплексный параметр, как разрядная емкость АК  $Q_p$ :

$$Q_p = \int_0^{\tau_p} I(\tau) \cdot d\tau \quad (4)$$

Взаимосвязь напряжения разряда АК и продолжительности разряда (а значит и разрядной емкости) называется разрядной характеристикой АК. Именно эта характеристика будет результатом расчетов с помощью математической модели в данной работе.

Таким образом, выходным параметром ММ электрохимического АК или батареи, является напряжение разряда, а входным параметром – продолжительность разряда.

**Определение управляющих параметров ММ.** На разрядное напряжение АК, влияют в основном ток разряда и температура (факторы, связанные с нештатными режимами эксплуатации здесь не рассматриваются).

**Определение специфических параметров ММ.** К этим параметрам ММ в данном случае относятся параметры начального состояния АК (см. рис. 2): начальное напряжение  $U_0$ , внутреннее сопротивление  $r$ , начальная заряженность  $\theta_0$  и полная емкость  $Q$  АК, а также начальная температура  $T_0$ .

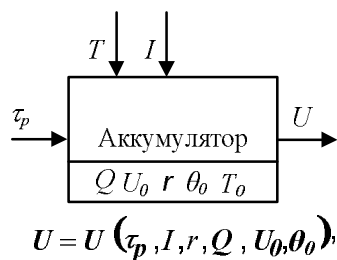


Рис. 2 – Структура математической модели аккумулятора в режиме разряда

**Разработка математической модели разрядной характеристики никель-кадмиевого АК.** Для определения соотношений, описывающих изменение основных характеристик и параметров АК, то есть для построения его математической модели используют схему замещения АК. Электрические схемы замещения описываются при помощи фундаментальных законов теории электрических цепей, таких как закон Ома, первый и второй законы Кирхгоффа и др. Проанализировав литературные источники [1, 3-8] для разработки математической модели, была выбрана схема замещения аккумулятора, описывающая разрядную характеристику НК АК (см. рис. 3):

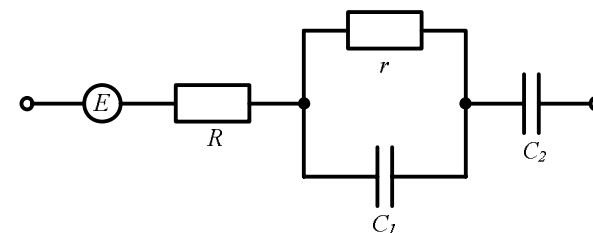


Рис.3 – Выбранная схема замещения АК:  $E$  – идеальный источник постоянной ЭДС;  $R$  – сопротивление электролита в межэлектродном пространстве;  $r, C_1$  – элементы релаксационного блока;  $C_2$  – основной конденсатор, соответствующий основной токообразующей электрохимической реакции

Для удобного анализа и аналитического представления выбранную схему замещения аккумулятора разобьём на четыре участка см. рис.4.

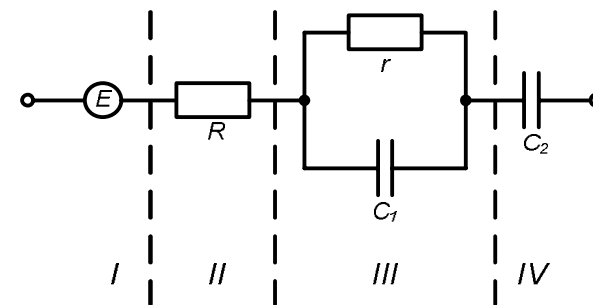


Рис. 4 – Разбиение схемы замещения АК на участки

Первый участок состоит из элемента, представляющего собой источник идеальной ЭДС, напряжение которого равно  $U_1 = E$ . Второй участок представлен резистором  $R$ , который описывает активационно-омическую часть в работе АК. Падение напряжения на этом элементе:

$$U_2 = R \cdot I ; \quad (5)$$

где  $I$  – постоянный внешний ток.

Третий участок схемы замещения АК представляет собой конденсатор  $C_1$  с утечкой электроэнергии на резисторе  $r$ . Этот участок описывает переходные процессы, протекающие в аккумуляторе при его включении на разряд [7]. При пропускании через схему замещения постоянного разрядного тока уравнение, описывающее процесс на участке, имеет вид:

$$-I = \frac{U_3}{r} + C_1 \cdot \frac{dU_3}{dt} . \quad (6)$$

При решении этого дифференциального уравнения используем начальное условие:

$$U_3|_{t=0} = 0 \quad (7)$$

Решение уравнения (6) имеет вид:

$$U_3 = -I \cdot r \cdot \left( 1 - \exp\left(-\frac{q}{C_1 \cdot I \cdot r}\right) \right), \quad (8)$$

где  $q$  – количество электроэнергии, отданное АК за время  $t$  при непрерывном разряде током  $I$ , постоянным по величине [7]:

$$q = I \cdot t . \quad (9)$$

Необходимо учесть, что сопротивление  $r$  не является постоянным, а меняется в течение разряда и подчиняется уравнению Тафеля (уравнение Тафеля связывает перенапряжение электродного процесса с плотностью тока, протекающего через границу электрод – раствор) [8]:

$$U_3 = a + b \cdot \ln(I), \quad (10)$$

и тогда  $r$  можно считать равным дифференциальному сопротивлению для падения напряжения:

$$r = \frac{dU_3}{dI} = \frac{b}{I} . \quad (11)$$

Подставляя зависимость (11) в уравнение (8), имеем:

$$U_3 = -b \cdot \left( 1 - \exp\left(-\frac{q}{C_1 \cdot b}\right) \right) . \quad (12)$$

Подставляя также уравнение (9) в (12), получаем зависимость изменения напряжения на выходе схемы замещения АК (участок III) от тока и времени:

$$U_3 = -b \cdot \left( 1 - \exp\left(-\frac{I \cdot t}{C_1 \cdot b}\right) \right) . \quad (13)$$

Последний четвёртый участок схемы замещения представлен псевдоконденсатором  $C_2$ , который соответствует основной токообразующей электрохимической реакции [8]. При прохождении через псевдоконденсатор  $C_2$  постоянного разрядного тока на этом участке цепи возникает процесс, который можно описать дифференциальным уравнением (14):

$$-I = C_2(t) \cdot \frac{dU_4}{dt} . \quad (14)$$

Так как электротехнические характеристики аккумулятора и конденсатора одинаковы, в течение, разряда ёмкость конденсатора  $C_2$  уменьшается по следующему закону:

$$C_2(t) = C_2^0 \cdot \left( 1 - \frac{q}{Q} \right) = C_2^0 \cdot \left( 1 - \frac{I \cdot t}{Q} \right), \quad (15)$$

где  $C_2^0$  – коэффициент, соответствующий начальной ёмкости конденсатора  $C_2$ ;  $Q$  – ёмкость аккумулятора, которую он способен отдать при разряде в А·с.

Подставляя уравнение (15) в (14), получаем:

$$-I = C_2^0 \cdot \left( 1 - \frac{I \cdot t}{Q} \right) \cdot \frac{dU_4}{dt} . \quad (16)$$

Решение уравнения (16) при начальном условии:

$$U_4|_{t=0} = 0, \quad (17)$$

имеет вид:

$$U_4 = \frac{Q}{C_2^0} \cdot (\ln(-Q + I \cdot t) - \ln(-Q)) . \quad (18)$$

Так как все элементы схемы замещения соединены последовательно, то напряжение на выходе схемы замещения будет определяться алгебраической суммой падений напряжений на отдельных участках:

$$U_{AK} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 . \quad (19)$$

Для определения разрядных характеристик и таких параметров АК как ёмкость и внутреннее сопротивление решение уравнений описывающих схему замещения должно быть представлено в виде  $U(I,t)$ .

С учётом этого, искомая зависимость напряжения от времени и тока имеет следующий вид:

$$U = E - R \cdot I + b \cdot \left( \exp \left( - \frac{I \cdot t}{C_1 \cdot b} \right) - 1 \right) + \frac{Q}{C_2^0} \cdot (\ln(-Q + I \cdot t) - \ln(-Q)) \quad (20)$$

Так как аккумулятор до момента начала тестирования уже мог отдать некоторую долю ёмкости  $q^0$ , зависимость (20), после преобразований, представлена в виде:

$$U(I, t) = E - R \cdot I - b \cdot \left( 1 - \exp \left( - \frac{q^0 + I \cdot t}{C_1 \cdot b} \right) \right) + \frac{Q}{C_2^0} \cdot \left( \ln \left( 1 - \frac{q^0 + I \cdot t}{Q} \right) \right) \quad (21)$$

Таким образом, искомая зависимость  $U(I, t)$  определена. Разработанная математическая модель отражает основные процессы в работе аккумулятора, т.е. в представленной зависимости второе слагаемое отвечает за активационно-омическую часть работы АК, третье слагаемое отвечает за поляризацию разряда, а четвертое слагаемое отвечает за релаксационную поляризацию в АК.

**Результаты моделирования по схеме замещения НК АК.** Для корректного решения задачи необходимо определить недостающие коэффициенты, которые зависят от типоразмера АК. Коэффициенты  $b, C_1, C_2^0$  необходимо предварительно определить экспериментально для разных режимов разряда, а также для различных типов и типоразмеров АК. Для этого необходимо воспользоваться экспериментально полученными ранее разрядными характеристиками различных АК, произвести численный подбор значений коэффициентов и занести полученные данные в таблицу.

Таблица – Коэффициенты математической модели для аккумуляторов типа НКП-90 и НКГ-160.

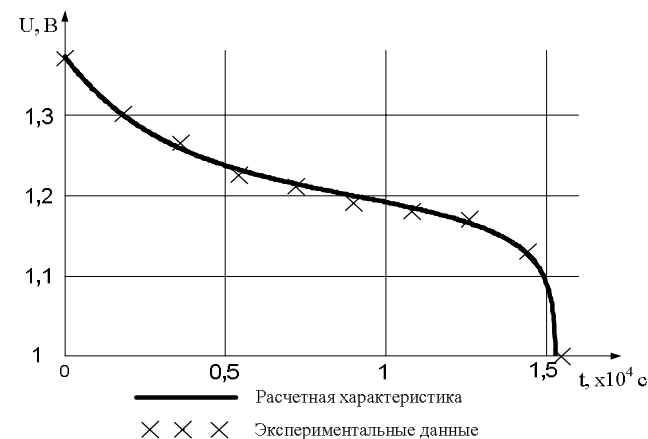
Тип АК	Коэффициенты модели			
	$Q, A \cdot c$	$b, B$	$C_1, \frac{A \cdot c}{B}$	$C_2^0, \frac{A \cdot c}{B}$
НКП-90	$3,578 \cdot 10^5$	0,135	$1,526 \cdot 10^5$	$1,15 \cdot 10^7$
НКГ-160	$6,12 \cdot 10^5$	0,15	$8 \cdot 10^5$	$1,8 \cdot 10^7$

Коэффициент  $Q$  примерно соответствует номинальной ёмкости АК в А·с. Для аккумуляторов типа НКП-90 и НКГ-160 и режима разряда стационарным током коэффициенты  $b, C_1, C_2^0$  были найдены при помощи процедуры оптимизации Левенберга – Маркардта, с использованием экспериментальных разрядных характеристик. Коэффициенты имеют следующие значения (см. таблицу).

Таким образом, подставив недостающие коэффициенты в зависимость напряжения от времени, полученную выше, получим следующие результаты математического моделирования см. рис. 5 и 6.

При известных коэффициентах можно построить разрядные кривые для различных токов и определить параметры АК, а также сравнить с экспериментальными характеристиками ранее проведенного независимого эксперимента (см. рис 7, 8).

Для оценки адекватности модели был проведен независимый эксперимент, в результате которого было установлено, что максимальное расхождение расчетных разрядных и экспериментальных разрядных характеристик не превышает 2,5%. Таким образом, математическая модель адекватна и может быть использована для дальнейших исследований.



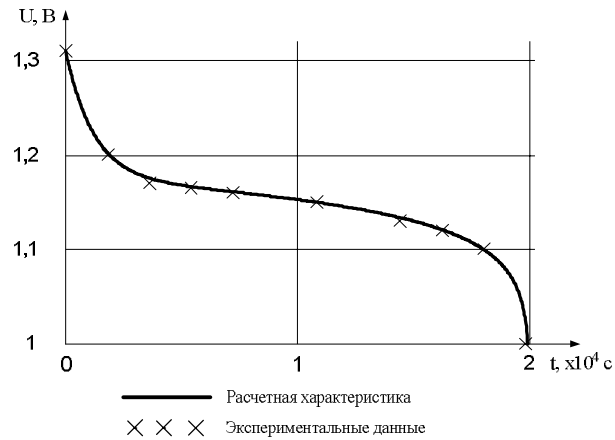


Рис. 6 – Экспериментальные данные для построения модели и расчетная разрядная характеристика АК НКП-90 при разряде током 18 А

**Заключение.** В работе разработана структура модели и последовательность моделирования разрядной характеристики щелочного аккумулятора при помощи схемы замещения никель-кадмиевого аккумулятора.

Применение схемы замещения для моделирования разрядных характеристик упрощает математическое описание происходящих процессов в АК и наглядно иллюстрирует какой элемент схемы несет основную нагрузку в процессе разряда аккумулятора.

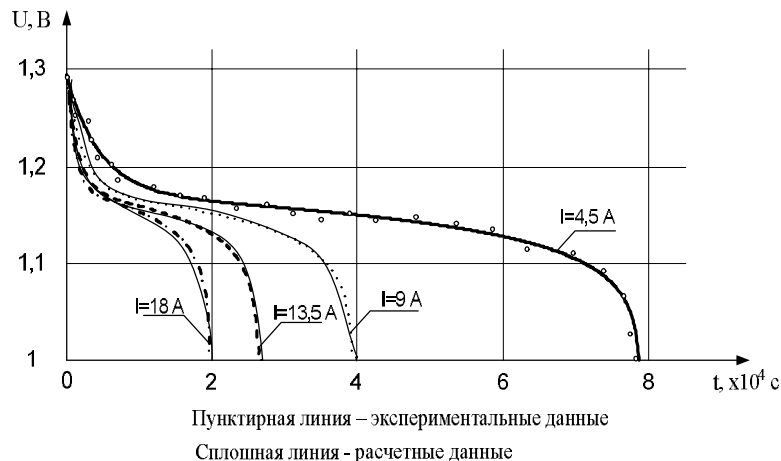


Рис. 7 – Расчетные и экспериментальные разрядные характеристики АК НКП-90 при разряде токами 4,5; 9; 13,5 и 18 А

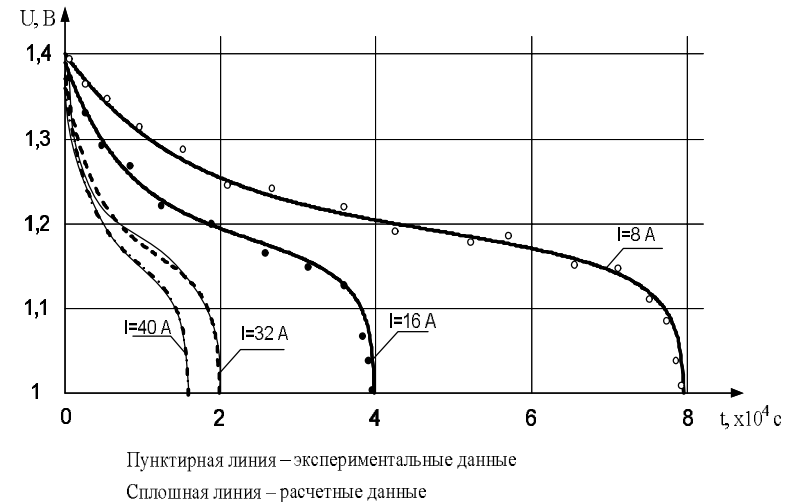


Рис. 8 – Расчетные и экспериментальные разрядные характеристики АК НКГ-160 при разряде токами 8; 16; 32 и 40 А

В результате применения предложенного метода моделирования была получена математическая модель, применимая для широкого спектра типоразмеров НК АК с учетом особенностей их разрядных характеристик. Возможность применения математической модели в широком диапазоне основана на достаточно высокой адаптивности нелинейных составляющих модели для описания характеристик большинства существующих типоразмеров щелочных АК. Полученная расчетная зависимость учитывает и отражает переходные процессы в работе АК, как в начале, так и в конце разряда.

**Список литературы:** 1. Солнечные энергосистемы космических аппаратов. Физическое и математическое моделирование / К. В. Безручко, Н. В. Белан, Д. Г. Белов и др. / Под ред. акад. НАН Украины С. Н. Конюхова. – Харьков: Гос. аэрокосмический ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2000. – 515 с. 2. Васильев К. К. Математическое моделирование систем связи: учебное пособие / К. К. Васильев, М. Н. Служивый. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – 170 с. 3. Романов В. В. Химические источники тока / В. В. Романов, Ю. М. Хашев – 2-изд., перераб. и доп. – М.: Сов. Радио, 1978. – 264 с. 4. Розениток Б. Я. Динамическая модель аккумуляторного источника питания как объекта автоматического управления / Б. Я. Розениток, Е. В. Пугачев, Л. В. Козелков // Электротехника. – 1989. – №9. – С. 13-18. 5. Electronic-network modelling of rechargeable NiCd cells and its application to the design of battery management system / H.J. Bergveld, W.S. Kruijt, P.H.L. Notten // Journal of Power Sources-77, – 1999, – P. 143-158. 6. Туркин И. Б. Метод параметрической идентификации схемы замещения химических источников тока / И. Б. Туркин // Авиационно-космична техніка і технологія. – 2000. – Вип.15. – С. 136-140. 7. Галушкина Н. Н. Структурная модель щелочного аккумулятора. Релаксационная поляризация / Н. Н. Галушкина, Д. Н. Галушкин // Электрохимическая энергетика. – 2005. – Т.6, №1. – С. 41-45. 8. Галушкин Н. Е. Анализ эмпирических зависимостей, описывающих разряд щелочных аккумуляторов / Н. Е. Галушкин, Н. Н. Галушкина // Электрохимическая энергетика. – 2005. – Т.5, № 1. – С. 43-50.

Поступила в редколлегию 10.04.2012.