УДК 651.326

М.А. БЕРЕЖНАЯ, канд. техн. наук, ХНУРЭ (г. Харьков)

СИНХРОНИЗИРУЮЩИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В КОНЕЧНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ АВТОМАТАХ

Проведено аналіз властивостей синхронізуючих послідовностей та методів їх синтезу по автоматним діаграмам об’єктів діагностування. Визначені необхідні і достатні умови існування в автоматі однорідній синхронізуючій послідовності. Знайдені верхні межі довжини однорідних і неоднорідних синхронізуючих послідовностей.

The problem of testing sequential machines consist of deriving an input sequences for the machine which takes it though all possible states. The properties of a synchronizing sequence which will always take the machine to a specified final state are analyzed and invisteged.

Введение. Теория экспериментов с автоматами является теоретической основой технической диагностики цифровых устройств и систем. Методы теории экспериментов с автоматами широко используются для построения и синтеза проверяющих тестов по автоматным моделям объекта диагностирования. Впервые диагностические задачи были сформулированы Э.Ф.Муром, а систематизация и обоснование различных подходов к построению диагностических экспериментов были выполнены в работах А.Гилла и ряда других исследователей [1-5].

Известно, что эксперимент с автоматами – это процесс приложения к автомату входных последовательностей, наблюдения соответствующих выходных последовательностей и вывода заключений, основанных на этом эксперименте. При этом предполагается, что в процессе эксперимента доступны для управления входные и для наблюдения – выходные каналы автомата.

Так как построение проверяющей последовательности основано на использовании автоматных диаграмм, то исключается необходимость анализа схемной реализации объекта диагностирования при построении диагностического эксперимента. Это расширяет класс обнаруживаемых неисправностей, который в структурно-аналитических методах генерации тестов ограничивается, как правило, множеством одиночных константных неисправностей. Использование автоматных моделей при построении проверяющих тестов позволяет обнаружить любую неисправность, которая изменяет автоматную диаграмму исправного устройства и не увеличивает числа состояний его элементов памяти.

В [6] предложено использовать ряд характерных последовательностей, позволяющих идентифицировать таблицу переходов-выходов (ТПВ) исправного автомата. Процедура, предложенная в [6], дает наилучшие результаты для класса минимальных сильносвязных автоматов, имеющих отличительные последовательности. В ней определены оценки верхней границы длины полной проверяющей последовательности для класса инициальных и неинициальных автоматов.

Развитие субмикронных электронных технологий и широкое использование программируемых интегральных схем типа *FPGA* и *CPLD* определяет интерес исследователей к созданию концептуальных и методологичных основ построения параллельных высокопроизводительных однородных структур клеточных автоматов [8,9].

В [3-12] показано, что использование методов теории экспериментов с автоматами позволяет эффективно решать задачу построения проверяющих тестов с применением отличительных, характеристических и синхронизирующих последовательностей автоматных моделей сети. Методы построения этих последовательностей по дереву-преемников автоматов представлены в ряде известных работ [5,6,7].

В настоящей статье анализируется сложность построения синхронизирующей последовательности (СП), уточняется верхняя граница длины СП и условия существования в автомате однородных синхронизирующих последовательностей.

Синтез синхронизирующих последовательностей. Математической моделью дискретных устройств и систем является конечный автомат Мили.

Определение 1. Конечный детерминированный автомат Мили A – это пятерка объектов $< X, Z, Y, d, l >$, где X и Y –соответственно входной и выходной алфавиты, Z – конечное множество состояний, а $d : X \times Z \to Z$ и $l : X \times Z \to Y$ – соответственно функции переходов и выходов.

Определение 2. Входная последовательность X_s автомата, которая устанавливает его в определенное конечное состояние независимо от состояния выхода и начального состояния, называется синхронизирующей последовательностью.

Если автомат $A < X, Z, Y, d, l >$ задан таблицей ТПВ, то из определения 2 следует, что автомат имеет синхронизирующую последовательность тогда и только тогда, когда существует входная последовательность X_s такая, что $d(z_i, X_S) = z_0$, $\forall z_i \in Z$, $z_0 \in Z$. Множество переходов $d(z_i, X_s) = z_0$, $\forall z_i \in Z$, автомата определяет отображение множества его состояний Z в некоторое определенное состояние z_0 при подаче на автомат входной последовательности X_s, то есть $z \xrightarrow{X_s} z_0$.

Синхронизирующая последовательность для заданного автомата может быть найдена из синхронизирующего дерева, которое является деревом преемником, построенным по определенным правилам [5].

Так как синхронизирующая последовательность не связана с анализом выходной последовательности автомата, то функции выходов автомата не рассматриваются при построении синхронизирующего дерева. Вершины синхронизирующего дерева отмечаются s -множествами, которые являются x_i -преемниками $(\forall x_i \in X)$ состояний входящих в s -множества предшествующих вершин. Вершина ранга j синхронизирующего дерева является висячей, если:

1) вершина отмечена группой s -множеств, которая соответствует группе s -множеств какой-либо вершины ранга меньше j;

2) вершина j-го ранга отмечена одним простым s -множеством.

Путь в синхронизирующем дереве, корнем которого является начальное s -множество, включающее все состояния автомата, и завершающийся висячей вершиной, отмеченной единственным простым s -множеством, соответствует синхронизирующей последовательности автомата.

Рассмотрим автомат $A1$, заданный ТПВ (табл. 1). Из синхронизирующего дерева рис. 1 определяем синхронизирующую последовательность $X_S = (01010)$, которая устанавливает $A1$ в состояние z_4 независимо от начального состояния.

Таблица 1–Автомат $A1$

$z(t+1),\ l(t)$

$z(t)$	$x=0$	$x=1$
z_1	$z_3,1$	$z_2,0$
z_2	$z_4,1$	$z_3,0$
z_3	$z_1,0$	$z_4,0$
z_4	$z_2,0$	$z_1,0$

Верхняя граница длины синхронизирующей последовательности определена Кохави в теореме 13.2, которая приведена ниже [7].

Теорема 1. Если существует синхронизирующая последовательность для автомата Мили с n состояниями, то ее длина не превышает $\dfrac{n(n-1)^2}{2}$.

В отличие от приведенной выше оценки ниже обоснована и получена верхняя граница длины синхронизирующей последовательности в следующем виде.

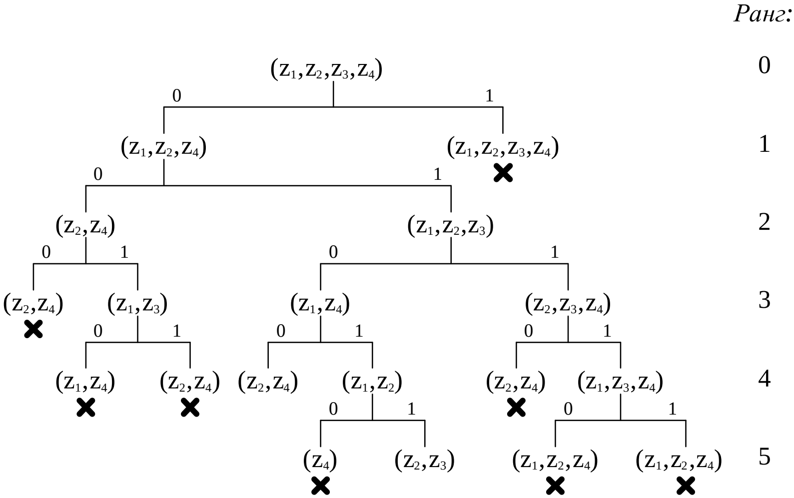

Рис. 1. Синхронизирующее дерево автомата *A*1

Теорема 2. Если существует синхронизирующая последовательность для автомата Мили с n состояниями, то ее длина не превышает $[2^n - (n+1)]$.

Доказательство. Как видно из синхронизирующего дерева рис.1, путь от корня дерева к висячей вершине, отмеченной одним состоянием, сопровождается постоянным уменьшением мощности s -множеств. На первом шаге построения синхронизирующего дерева должен быть по меньшей мере один входной символ x_i, для которого $d(z_j, x_i) = z_a$, $\forall z_a \in Z$, $z_a \in Z'$, а мощность множества состояний Z' равна $(n-1)$, то есть $|Z'| = n-1$. Этот входной символ x_i является первым элементом последовательности X_s. В противном случае построение синхронизирующего дерева завершилось бы на первом шаге в соответствии с правилом 1 усечения дерева-преемников. Последующее уменьшение мощности s -множеств до $(n-2)$ элементов может произойти в худшем случае через C_n^{n-1} комбинаций s -множеств из $(n-1)$ состояний. Следовательно, длина синхронизирующей последовательности на этом этапе $\le C_n^{n-1}$. Аналогично, s -множество из $(n-2)$ элементов может иметь не более C_n^{n-2} преемников, прежде чем произойдет следующее уменьшение мощности s -множеств. Этот процесс может продолжаться пока не будет достигнута вершина, отмеченная одним состоянием и в соответствии с правилом 2 усечения дерева-преемников построение синхронизирующего дереза завершается. Таким образом, длина синхронизирующей последовательности не превышает суммы вида: $C_n^{n-1} + C_n^{n-2} + \ldots + C_n^2 = \sum_{k=2}^{n-1} C_n^k$.

Так как $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 1 + n + \sum_{k=2}^{n-1} C_n^k$, то следовательно, самый длинный путь в синхронизирующем дереве, который может завершиться в соответствии с правилом 1, состоит из $2^n - (n+1)$ входных символов □.

На практике все цифровые устройства, элементы памяти которых имеют сигнал сброса, могут устанавливаться в начальное состояние синхронизирующей последовательностью минимальной длины, т.е. длиной в один символ.

Сравнительная оценка двух верхних границ синхронизирующей последовательности автомата, определяемых теоремами 1 и 2, приведена в табл. 2 для числа состояний автомата $n \le 9$.

Таблица 2 – Сравнительные оценки двух границ для $1 \le n \le 9$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2^n - (n+1)$	0	1	4	11	26	57	120	247	502
$\frac{n(n-1)^2}{2}$	0	1	6	18	40	75	126	196	288

Необходимые условия, которым должен удовлетворять автомат, обладающий синхронизирующей последовательностью, определяются следующими условиями.

Теорема 3. Автомат имеет синхронизирующую последовательность, если существует по крайней мере один входной символ, $x_k \in X$ такой, что $d(z_i, x_k) = d(z_j, x_k)$, где $i \ne j, 1 \le i,\ n \ge 2$.

Доказательство. Если условие теоремы не выполняется, то множество состояний z автомата будет отображаться в то же множество для всех входных символов и на первом шаге построение синхронизирующего дерева завершится в соответствии с правилом 1 □.

В [7] существование для заданного автомата синхронизирующей последовательности определяется с помощью тестового графа. Множество из n состояний автомата можно разбить на $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ различных пар $(z_i, z_j), j \ne i$. Каждая пара состояний (z_i, z_j) отображается в другую пару состояний (z_a, z_b) для входного символа x_k, если $d(z_i, x_k) = z_a, d(z_j, x_k) = z_b$.

Если пара состояний имеет своим x_k-преемником одно и тоже состояние, то такую пару называют d -совместимой. Наличие по меньшей мере одной d -совместимой пары состояний является необходимым условием существования для заданного автомата синхронизирующей последовательности.

В [7] определены достаточные условия существования для данного автомата синхронизирующей последовательности.

Теорема 4 [7]. Автомат имеет синхронизирующую последовательность, если в тестовом графе автомата существует путь от каждой вершины к вершине пары d -совместимых состояний.

Недостатком предлагаемого в [7] алгоритма анализа автомата с помощью тестового графа является сложность нахождения синхронизирующей последовательности по полученному графу. Предлагаемый алгоритм анализа, определяющий только существование синхронизирующей последовательности, выполняется в худшем случае для автомата с n состояниями за время $O(n^2)$ [7].

В ряде работ показано, что использование однородных автоматных последовательностей, состоящих из повторяющихся входных символов позволяет сократить длину проверяющей последовательности и сложность ее генерации. С этой точки зрения представляет интерес исследование свойств однородной синхронизирующей последовательности и автоматов, для которых существуют такие последовательности. В качестве примера рассмотрим автомат *A*2 (таблица 3).

Синхронизирующие деревья, построенные для повторяющихся входных символов $x = 0$ и $x = 1$, приведены на рис. 2. Автомат *A*2 имеет две однородные синхронизирующие последовательности $X_{S_1} = 000$ и $X_{S_2} = 111$. Анализ синхронизирующих деревьев рис. 2 показывает, что установление автомата в определенное конечное состояние достигается путем пошагового уменьшения мощности начального s множества, то есть $d(s_0, x) = s_1$ и $s_1 \subset s_0$, $x = \{0,1\}$, $d(s_1, x) = s_2$ и $s_2 \subset s_1, d(s_2, x) = s_3$ и, где s_0-начальное s -множество, $s_i - s$ -множество i-го ранга синхронизирующего дерева.

Таблица 3 – Автомат *A*2

$z(t+1),\ l(t)$

$z(t)$	$x=0$	$x=1$
z_1	$z_5,1$	$z_2,1$
z_2	$z_3,0$	$z_2,1$
z_3	$z_4,0$	$z_1,0$
z_4	$z_5,1$	$z_1,0$
z_5	$z_5,0$	$z_4,1$

$\{z_1,z_2,z_3,z_4,z_5\}s_0$

$|0$

$\{z_3,z_4,z_5\}s_1$

$|0$

$\{z_4,z_5\}s_2$

$|0$

$\{z_5\}s_3$

$\{z_1,z_2,z_3,z_4,z_5\}s_0$

$|1$

$\{z_1,z_2,z_4\}s_1$

$|1$

$\{z_1,z_2\}s_2$

$|1$

$\{z_2\}s_3$

Рис. 2. Синхронизирующие деревья *A*8

Если на i-ом шаге $d(s_{i-1},x)=s_i$ и $d(s_i,x)=s_{i-1}$, то в соответствии с правилом А. усечения синхронизирующего дерева процедура построения его прекращается. Этот факт свидетельствует о том, что автомат не имеет однородной синхронизирующей последовательности. Все это позволяет определить верхнюю границу длины однородной синхронизирующей последовательности.

Теорема 5. Если для автомата с n состояниями существует однородная синхронизирующая последовательность X_s из повторяющегося входного символа x_i, то $l(X_s)\le(n-1)$.

Доказательство. Если X_s - однородная синхронизирующая последовательность, то X_s-преемник начального s_0 -множества $(z_1,z_2,...,z_n)$ является простым s -множеством, состоящим из одного элемента, то есть $d(s_0,X_s)=z_i$. Начиная с s_0-множества, мощность которого n , подача входного символа x_i на каждом шаге уменьшает мощность s -множества x_i-преемника автомата. Длина однородной синхронизирующей последовательности максимальна, если на каждом шаге подачи входного символа x_i мощность s -множества уменьшается на I. В этом случае s -множество, состоящее из одного элемента, будет получено за (n-1) шагов. В противном случае однородной синхронизирующей последовательности для автомата не существует.

Следствие 1. Пусть автомат имеет однородную синхронизирующую последовательность $X_s=x_a^*/k$ и $d(s_0,X_s)=z_a$. Тогда последовательность x_a^* любой длины больше k, является также однородной синхронизирующей последовательностью автомата.

Доказательство. Начальное s -множество включает в себя состояние z_a . Значит, находясь в начальном состоянии z_a , автомат, имеющий однородную синхронизирующую последовательность длиной в “k” символов x_a , должен перейти в состояние z_a Отсюда следует, что $d(z_a, x_a) = z_a$. Выполнение этого условия гарантирует, что независимо от начального состояния автомата, любая последовательность из повторяющегося входного символа x_a длиной k является синхронизирующей, так как $d(z_a, x^*{}_a) = z_a$.

В нижеследующей теореме определены необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять автомат, имеющий однородную синхронизирующую последовательность.

Теорема 6. Автомат $A =< X, Z, Y, d, l >$ с n состояниями имеет однородную синхронизирующую последовательность $X_s = x_a^* / k$, $k \le (n-1)$, тогда и только тогда, когда в столбце таблицы переходов автомата, отмеченном входным символом x_a , существует пара состояний (z_i, z_j) таких, что $d(z_i, x_a) = d(z_j, x_a) = z_a$ и в графе пар состояний автомата существует путь от каждой пары к паре (z_i, z_j) .

Доказательство. Необходимость. Пусть в столбце x_a автомата существует пара совместимых состояний (z_i, z_j) и в графе пар состояний существует путь от каждой пары состояний к паре (z_i, z_j) . Тогда на основании теоремы 3 и 4 автомат имеет синхронизирующую последовательность. Так как эти условия выполняются для одного столбца таблицы переходов x_a , то последовательность однородная.

Достаточность. Пусть А имеет однородную синхронизирующую последовательность $X_s = x_a^* / k$. Из этого следует, что X_s-преемник начального s -множества s_0 равен некоторому состоянию $x_i \in Z$, то есть $d(s_0, X_s) = z_i$. Предположим, что в столбце таблицы переходов *А* нет ни одной совместимой пары состояний. Это означает, что столбец x_a представляет собой перестановку столбца начальных состояний *А* и $d(s_0, x_a) = s_0$, то есть автомат не имеет синхронизирующей последовательности. Поэтому в столбце x_a должна быть пара совместимых состояний (z_i, z_j) таких, чтобы $d(z_i, x_a) = d(z_j, x_a) = z_a$. При доказательстве следствия 1 было показано, что состояние z_a должно быть поглощающим. Поэтому $z_a \in \{z_i, z_j\}$. Однако выполнение этого условия гарантирует только выполнение первого шага получения синхронизирующей последовательности $d(z_0, x_a) = s_1$ и $s_1 \subset s_0$.

Так как синхронизирующая последовательность существует, то существует цепочка s -множеств: $s_0 \supset s_1 \supset s_2 \supset .... \supset s_{k-1} = \{z_a\}$. Пусть $z_a = z_i$. Тогда существует по меньшей мере одно состояние z_j такое, что $d(z_j, x_a) = z_i$. Поэтому $s_{k-2} = \{z_i, z_j\} \supset s_{k-1} = z_i$. Аналогично $d_{k-3} = \{z_p, z_i, z_j\} \supset d_{k-2} = \{z_i, z_j\}$ и так далее. Уменьшение мощности s -множеств произойдет, если пары состояний (z_p, x_i), (z_p, x_j) с приложением x_a будут отображаться в пару (z_i, z_j). Рассуждая аналогично, приходим к заключению, что все пары состояний автомата должны иметь путь к паре $(z_i, x_j, ...)$. В противном случае для автомата не существовало бы однородной синхронизирующей последовательности.

Выводы. Анализируются свойства синхронизирующих последовательностей и методов их синтеза по ТВП автоматных моделей объектов диагностирования. Определены необходимые и достаточные условия существования в автомате однородной синхронизирующей последовательности, которая повышает эффективность построения диагностического эксперимента в однородных сетях клеточных автоматов. Получены верхние границы длины однородной и неоднородной синхронизирующих последовательностей, проведен сравнительный анализ этих оценок с полученными ранее.

Список литературы: 1. *Мур Е.Ф.* Умственные эксперименты с последовательными машинами. // Автомат.ы: Пер. с англ.–М.: -Физматгиз, 1955, с. 179-213. **2.** *Гилл Н.* Введение в теорию конечных автоматов.–IV1. : Паука, 1966.–272 с. **3.** *Богомолов А.М., Барашко А.С, Грунский И.О.* Эксперименты с автоматами. -К.: Наукова думка, 1973.–144 с. **4.** *Богомолов А.М., Грунский И.О., Сперанский Д.В.* Контроль и преоиразование дискретных автоматов.–К.: Жукова думка, 1975.–174 с. **5.** *Тоценко В.Г.* Алгоритмы технического диагностирования дискретных устройств. – М.: Радио и связь. – 1985. –240с. *6. Hennie E.G.* Fault detection experiments for sequential circuits.- Proceeding of Fifth Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design, 1964, p.95-110. **7.** ***Kohavi Z.*** Switching and finite automata theory.- New York, Morgan Hill, 1970,- 592P. **8.** *Тоффоли Т., Марголус Н.* Машины клеточных автоматов. -М: Мир,–1991.–280с. **9.** *Евреинов Э.В., Прангишвили И.В.* Цифровые автоматы с настраиваемой структурой. -М.: Энергия, -1974. -240с. **10.** *Дербунович Л.В., Бережная М.А., Королева Я.Ю., Рыжикова М.Г.* Тестовое диагностирование одномерных однородных структур // Вестник НТУ ХПИ «Автоматика и приборостроение». – Харьков.: НТУ «ХПИ». – 2008.–№3. – с.49-57. **11.** *Дербунович Л.В., Бережная М.А., Королева Я.Ю., Рыжикова М.Г.* Синтез тестов для однородных структур // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте, Харьков. – 2008.–№4. – с.29-33. **12.** *Богомолов А.М., Твердохлебов В.А.* К синтезу конечного детерминированного автомата // Автоматика и телемеханика. – 1978. – №10. – с.200-202.

Поступила в редколлегию 10.11. 2008 г.