



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Харківський національний технічний університет сільського
господарства імені Петра Василенка**

**Контрольні завдання
та методи їх розв'язання**

з курсу "Оптимізаційні методи та моделі"
для студентів спеціальностей
*051 «Економіка», 071 «Облік і
оподаткування», 073 «Менеджмент», 141
«Електроенергетика, електротехніка та
електромеханіка»,*
заочної форми навчання

Затверджено
на засіданні кафедри кібернетики
Протокол №6 от 24.01.2017 г.

Затверджено
на засіданні Методичної ради
ННІ Бізнесу і менеджменту
ХНТУСГ ім. Петра Василенка
Протокол №6 от 13.02.2017 г.

Харьков 2017

Мегель Ю.Є., Путятін В.П., Чалий І.В., Коваленко С.М.

Контрольні завдання та методи їх розв'язання з курсу "Оптимізаційні методи та моделі" для студентів спеціальностей 051 «Економіка», 071 «Облік і оподаткування», 073 «Менеджмент», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» заочної форми навчання. – Х.: ХНТУСГ, 2017. – 31 с.

Рецензенти:

Машталір В.П., доктор технічних наук, професор кафедри інформатики (Харківський національний університет радіоелектроніки)

Куценко О.С., доктор технічних наук, завідувач кафедри системного аналізу і інформаційно-аналітичних технологій (Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»)

Завдання призначені для виконання контрольної роботи з курсу "Оптимізаційні методи та моделі" для студентів спеціальностей "051 «Економіка», 071 «Облік і оподаткування», 073 «Менеджмент», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» заочної форми навчання. Надаються методи розв'язання завдань.

© Мегель Ю. Є., Путятін В. П.,
Чалий І. В., Коваленко С. М. 2017

© Харківських національний технічний
університет сільського господарства
імені Петра Василенка

Курс «Оптимізаційні методи і моделі» викладаються на кафедрі кібернетики ХНТУСГ вже більше 20 років. За цей час накопичено вагомий методичний доробок, величезний внесок в який зробили свого часу доц. Романов В. В. та доц. Руденко А. П. Один з засновників курсу та один з найвідоміших фахівців Харкова з оптимізації проф. Путятін В. П. викладає дану дисципліну для студентів ХНТУСГ і по цей час. Свій вклад в розвиток методичного забезпечення дисципліни внесли проф. Мегель Ю. Є., доц. Чалий І. В., доц. Коваленко С. М., доц. Левкін А. В.

На кафедрі кібернетики є також досвід викладання курсу англійською мовою для студентів-іноземців та студентів, що вибрали англійську мову основною мовою навчання.

За роки викладання на кафедрі кібернетики видано 3 підручники [1,2,3], 2 з яких – англійською мовою[2, 3], більше 20 методичних вказівок, розроблено презентації для викладання лекційного матеріалу, створено програмне забезпечення для тестування студентів.

Основою методичного доробку став курс лекцій з дисциплін «Оптимізаційні методи та моделі», «Математичне моделювання» та «Прикладна математика», що викладалися для студентів ННІ БМ спеціальностей «Облік і аудит» та «Економіка підприємництва» та студентів ННІ ЕКТ спеціальностей «Енергетика сільськогосподарського виробництва» та «Енергетичний менеджмент».

Вибір варіанту контрольного завдання розраховується за формулою: $V = N_{rb} - (30 \cdot n)$

де N_{rb} – номер залікової книжки;

n – ціла частина часті частки від ділення N_{rb} на 30.

Якщо результатом є 0, то необхідно вибрати 30 варіант!

Наприклад: номер залікової книжки 10045.
 $10045/30=334,833$, ціла частина – 334. $V=10045-(30 \cdot 334)=25$.

ЗАВДАННЯ 1. *Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом та перевірити отриманий розв'язок за допомогою сервісу «Пошук рішення» табличного процесору Microsoft Excel.*

Варіант 1

$$F = 5,3x_1 + 7,8x_2 \rightarrow \max (\min)$$

$$10,3x_1 - 8,4x_2 \geq 24$$

$$3,2x_1 + 15,4x_2 \geq 203$$

$$18,3x_1 - 3,2x_2 \leq 252$$

Варіант 2

$$F = 3,2x_1 - 7,2x_2 \rightarrow \max (\min)$$

$$4,2x_1 + 10x_2 \leq 136$$

$$-10,1x_1 + 13,8x_2 \leq 132$$

$$18,3x_1 - 7,6x_2 \geq 108$$

Варіант 3

$$F = 4,5x_1 - 7,7x_2 \rightarrow \max (\min)$$

$$6,2x_1 + 6,6x_2 \leq 83$$

$$-9,6x_1 + 13,8x_2 \geq 72$$

$$-13,2x_1 + 5,7x_2 \leq 305$$

Варіант 4

$$F = 4,1x_1 - 3,1x_2 \rightarrow \max (\min)$$

$$8,2x_1 + 7,9x_2 \geq 123$$

$$11,2x_1 + 16,3x_2 \leq 201$$

$$-16,3x_1 - 8,3x_2 \leq 169$$

Варіант 5

$$F = 5,1x_1 + 8,3x_2 \rightarrow \max (\min)$$

$$10,2x_1 - 3,2x_2 \geq 149$$

$$-5,8x_1 + 16x_2 \geq 83$$

$$10,3x_1 + 7,3x_2 \leq 234$$

Варіант 6

$$F = 7,2x_1 - 2,1x_2 \rightarrow \max (\min)$$

$$8,1x_1 + 8,5x_2 \geq 72$$

$$-3,2x_1 + 15,2x_2 \geq 42$$

$$10,2x_1 + 8,8x_2 \leq 205$$

Варіант 7

$$F = 3,2x_1 + 4,2x_2 \rightarrow \max (\min)$$

$$-10,3x_1 + 10,2x_2 \leq 70$$

$$4,7x_1 + 12,3x_2 \geq 173$$

$$13,2x_1 + 8,8x_2 \leq 282$$

Варіант 8

$$F = 2,3x_1 - 7,2x_2 \rightarrow \max (\min)$$

$$3,2x_1 + 8,8x_2 \geq 89$$

$$-14,2x_1 + 10,8x_2 \leq 125$$

$$20,3x_1 - 7,2x_2 \leq 142$$

Варіант 9

$$F = 4,8x_1 - 10,8x_2 \rightarrow \max (\min)$$

$$13,1x_1 + 9,2x_2 \geq 173$$

$$8,3x_1 + 21x_2 \leq 271$$

$$3,2x_1 - 8,3x_2 \leq 34$$

Варіант 10

$$F = 3,2x_1 + 5,3x_2 \rightarrow \max (\min)$$

$$8,3x_1 + 8,2x_2 \geq 134$$

$$-10,2x_1 + 15,2x_2 \leq 102$$

$$14,5x_1 - 7,3x_2 \leq 141$$

Варіант 11

$$\begin{aligned} F &= 6,2x_1 + 3,2x_2 \rightarrow \max (\min) \\ -10,2x_1 + 9,3x_2 &\geq 73 \\ 5,3x_1 + 15,8x_2 &\geq 173 \\ 17,2x_1 + 10,3x_2 &\leq 159 \end{aligned}$$

Варіант 12

$$\begin{aligned} F &= 2,1x_1 - 7,3x_2 \rightarrow \max (\min) \\ 3,2x_1 + 6,3x_2 &\geq 103 \\ -10,3x_1 + 13,3x_2 &\geq 93 \\ 15,3x_1 - 8,3x_2 &\leq 142 \end{aligned}$$

Варіант 13

$$\begin{aligned} F &= 3,2x_1 + 5,3x_2 \rightarrow \max (\min) \\ 8,3x_1 + 8,2x_2 &\geq 134 \\ -10,2x_1 + 15,2x_2 &\geq 102 \\ 14,5x_1 - 7,3x_2 &\leq 141 \end{aligned}$$

Варіант 14

$$\begin{aligned} F &= 3,2x_1 - 1,8x_2 \rightarrow \max (\min) \\ 14,2x_1 - 7,2x_2 &\geq 52 \\ 4,1x_1 + 12,3x_2 &\leq 70 \\ 8,5x_1 - 7,0x_2 &\geq 138 \end{aligned}$$

Варіант 15

$$\begin{aligned} F &= 4,2x_1 - 3,5x_2 \rightarrow \max (\min) \\ 7,2x_1 + 7,5x_2 &\geq 125 \\ 17,1x_1 - 8,3x_2 &\leq 143 \\ -8,5x_1 + 15,8x_2 &\leq 145 \end{aligned}$$

Варіант 16

$$\begin{aligned} F &= 4,5x_1 + 4,3x_2 \rightarrow \max (\min) \\ 10,8x_1 + 5,2x_2 &\geq 152 \\ 8,3x_1 + 12x_2 &\leq 302 \\ 3,2x_1 - 7,2x_2 &\leq 32 \end{aligned}$$

Варіант 17

$$\begin{aligned} F &= -7,3x_1 - 3,2x_2 \rightarrow \max (\min) \\ -10,3x_1 + 8,2x_2 &\leq 32 \\ 5,2x_1 + 15,2x_2 &\geq 152 \\ 15,6x_1 + 5,3x_2 &\leq 283 \end{aligned}$$

Варіант 18

$$\begin{aligned} F &= 4,3x_1 + 8,5x_2 \rightarrow \max (\min) \\ 12,8x_1 + 7,2x_2 &\geq 158 \\ 7,8x_1 + 14,3x_2 &\leq 302 \\ 4,8x_1 - 8,8x_2 &\leq 32 \end{aligned}$$

Варіант 19

$$\begin{aligned} F &= 4,8x_1 + 7,3x_2 \rightarrow \max (\min) \\ -7,8x_1 + 8,3x_2 &\geq 73 \\ 5,8x_1 + 14,3x_2 &\geq 169 \\ 16,3x_1 + 8,3x_2 &\leq 302 \end{aligned}$$

Варіант 20

$$\begin{aligned} F &= 2,5x_1 + 6,6x_2 \rightarrow \max (\min) \\ 10,8x_1 - 7,6x_2 &\leq 38 \\ 3,4x_1 + 10x_2 &\geq 102 \\ -8,8x_1 + 7,2x_2 &\leq 232 \end{aligned}$$

Варіант 21

$$\begin{aligned} F &= 3,2x_1 - 5,2x_2 \rightarrow \max (\min) \\ 13,2x_1 + 7,2x_2 &\geq 182 \\ 7,1x_1 + 13,2x_2 &\leq 286 \\ 3,2x_1 - 10,2x_2 &\leq 53 \end{aligned}$$

Варіант 22

$$\begin{aligned} F &= 10,3x_1 - 6,3x_2 \rightarrow \max (\min) \\ -10,8x_1 + 8,3x_2 &\geq 78 \\ 5,3x_1 + 12,8x_2 &\geq 205 \\ 17,3x_1 + 7,2x_2 &\leq 285 \end{aligned}$$

Варіант 23

$$\begin{aligned} F &= 4,3x_1 - 5,2x_2 \rightarrow \max (\min) \\ 13,8x_1 - 8,3x_2 &\geq 6 \\ -4,6x_1 + 15,8x_2 &\geq 93 \\ 7,2x_1 + 8,3x_2 &\leq 215 \end{aligned}$$

Варіант 24

$$\begin{aligned} F &= 3,8x_1 + 8,2x_2 \rightarrow \max (\min) \\ 5,2x_1 + 6,3x_2 &\geq 81 \\ -10,3x_1 + 13,8x_2 &\geq 34 \\ 8,3x_1 + 3,4x_2 &\leq 53 \end{aligned}$$

Варіант 25

$$\begin{aligned} F &= -3,5x_1 + 3,8x_2 \rightarrow \max (\min) \\ -10,2x_1 + 12,4x_2 &\leq 72 \\ 3,5x_1 + 15,1x_2 &\geq 75 \\ 14,8x_1 + 5,3x_2 &\leq 109 \end{aligned}$$

Варіант 26

$$\begin{aligned} F &= -5,2x_1 + 3,3x_2 \rightarrow \max (\min) \\ 13,4x_1 + 7,7x_2 &\leq 183 \\ -9,1x_1 + 15,8x_2 &\leq 236 \\ 5,1x_1 - 9,8x_2 &\geq 6 \end{aligned}$$

Варіант 27

$$F = 3,8 x_1 - 2,1 x_2 \rightarrow \max (\min)$$

$$13,9 x_1 + 8,1 x_2 \geq 183$$

$$9,1 x_1 + 16,3 x_2 \leq 289$$

$$4,9 x_1 - 7,2 x_2 \leq 42$$

Варіант 28

$$F = 4,4 x_1 + 3,3 x_2 \rightarrow \max (\min)$$

$$6,6 x_1 + 5,6 x_2 \geq 102$$

$$-10,3 x_1 + 10,8 x_2 \geq 117$$

$$15,3 x_1 - 8,7 x_2 \leq 108$$

Варіант 29

$$F = 4,3 x_1 + 12,1 x_2 \rightarrow \max (\min)$$

$$14,6 x_1 - 6,2 x_2 \geq 52$$

$$-2,1 x_1 + 13 x_2 \geq 48$$

$$10,5 x_1 + 6,6 x_2 \leq 207$$

Варіант 30

$$F = 3,3 x_1 - 5,2 x_2 \rightarrow \max (\min)$$

$$12,2 x_1 - 7,3 x_2 \geq 21$$

$$-4,2 x_1 + 13,9 x_2 \geq 91$$

$$8,8 x_1 + 6,3 x_2 \leq 189$$

ЗАВДАННЯ 2. Розв'язати задачу лінійного програмування симплекс-методом, потім графічним методом та перевірити розв'язок за допомогою сервісу «Пошук рішення»

Варіант 1

$$F = 3,5 x_1 + 2,5 x_2 \rightarrow \max$$

$$7,5 x_1 + 3,2 x_2 \leq 35$$

$$8,3 x_1 + 6,2 x_2 \leq 75$$

$$4,2 x_1 + 3,2 x_2 \leq 42$$

Варіант 2

$$F = 4,5 x_1 - 2,2 x_2 \rightarrow \max$$

$$3,2 x_1 + 4,5 x_2 \leq 25$$

$$4,2 x_1 + 7,1 x_2 \leq 75$$

$$6,8 x_1 + 3,4 x_2 \leq 38$$

Варіант 3

$$F = 6,3 x_1 - 2,5 x_2 \rightarrow \max$$

$$4,5 x_1 + 6,2 x_2 \leq 71$$

$$2,8 x_1 + 5,3 x_2 \leq 47$$

$$3,2 x_1 + 7,1 x_2 \leq 3$$

Варіант 4

$$F = -4,8 x_1 + 6,3 x_2 \rightarrow \max$$

$$6,6 x_1 + 5,9 x_2 \leq 68$$

$$4,8 x_1 - 3,2 x_2 \leq 82$$

$$2,7 x_1 + 9,3 x_2 \leq 95$$

Варіант 5

$$F = -3,8 x_1 + 6,3 x_2 \rightarrow \max$$

$$7,3 x_1 + 4,3 x_2 \leq 88$$

$$-4,8 x_1 + 7,2 x_2 \leq 57$$

$$6,3 x_1 - 7,8 x_2 \leq 85$$

Варіант 6

$$F = 4,7 x_1 + 5,3 x_2 \rightarrow \max$$

$$-9,6 x_1 + 4,5 x_2 \leq 120$$

$$6,7 x_1 + 2,9 x_2 \leq 67$$

$$-7,3 x_1 + 8,3 x_2 \leq 132$$

Варіант 7

$$F = -6,5 x_1 + 2,1 x_2 \rightarrow \max$$

$$6,7 x_1 - 4,8 x_2 \leq 84$$

$$8,4 x_1 + 6,4 x_2 \leq 95$$

$$5,8 x_1 + 7,3 x_2 \leq 68$$

Варіант 8

$$F = 5,6 x_1 - 4,5 x_2 \rightarrow \max$$

$$4,5 x_1 + 6,3 x_2 \leq 45$$

$$8,7 x_1 - 4,9 x_2 \leq 87$$

$$-6,3 x_1 + 4,5 x_2 \leq 38$$

Варіант 9

$$F = -4,9 x_1 + 8,3 x_2 \rightarrow \max$$

$$-4,7 x_1 + 7,3 x_2 \leq 65$$

$$5,6 x_1 - 5,9 x_2 \leq 46$$

$$7,3 x_1 + 3,7 x_2 \leq 76$$

Варіант 10

$$F = 4,4 x_1 - 6,8 x_2 \rightarrow \max$$

$$-5,3 x_1 + 3,5 x_2 \leq 73$$

$$4,8 x_1 + 5,2 x_2 \leq 54$$

$$5,8 x_1 + 4,8 x_2 \leq 82$$

Варіант 11

$$F = 1,6 x_1 + 5,3 x_2 \rightarrow \max$$

$$5,2 x_1 + 8,4 x_2 \leq 47$$

$$- 3,2 x_1 + 3,8 x_2 \leq 85$$

$$4,5 x_1 - 6,3 x_2 \leq 105$$

Варіант 12

$$F = 7,5 x_1 - 4,6 x_2 \rightarrow \max$$

$$- 5,7 x_1 + 2,8 x_2 \leq 65$$

$$4,7 x_1 + 7,3 x_2 \leq 39$$

$$5,7 x_1 - 3,7 x_2 \leq 35$$

Варіант 13

$$F = 13,1 x_1 + 4,5 x_2 \rightarrow \max$$

$$16,4 x_1 + 12,8 x_2 \leq 256$$

$$4,7 x_1 + 3,6 x_2 \leq 64$$

$$2,6 x_1 + 3,9 x_2 \leq 58$$

Варіант 14

$$F = 13,6 x_1 - 7,3 x_2 \rightarrow \max$$

$$10,4 x_1 - 5,9 x_2 \leq 95$$

$$- 6,7 x_1 + 4,7 x_2 \leq 37$$

$$2,5 x_1 + 3,8 x_2 \leq 34$$

Варіант 15

$$F = -4,7 x_1 + 15,3 x_2 \rightarrow \max$$

$$5,3 x_1 - 3,4 x_2 \leq 35$$

$$7,4 x_1 + 12,4 x_2 \leq 74$$

$$- 4,6 x_1 + 16,3 x_2 \leq 87$$

Варіант 16

$$F = 3,4 x_1 + 8,5 x_2 \rightarrow \max$$

$$3,7 x_1 + 6,3 x_2 \leq 54$$

$$4,5 x_1 + 9,5 x_2 \leq 152$$

$$4,5 x_1 - 2,5 x_2 \leq 5,3$$

Варіант 17

$$F = - 5,6 x_1 + 3,4 x_2 \rightarrow \max$$

$$8,3 x_1 + 2,5 x_2 \leq 56$$

$$3,4 x_1 + 8,9 x_2 \leq 49$$

$$3,2 x_1 + 4,3 x_2 \leq 58$$

Варіант 18

$$F = -14,2 x_1 + 15,7 x_2 \rightarrow \max$$

$$3,5 x_1 + 8,5 x_2 \leq 98$$

$$7,8 x_1 + 5,7 x_2 \leq 47$$

$$10,4 x_1 + 5,8 x_2 \leq 136$$

Варіант 19

$$F = -3,7 x_1 + 7,3 x_2 \rightarrow \max$$

$$5,2 x_1 + 2,9 x_2 \leq 67$$

$$6,3 x_1 + 7,3 x_2 \leq 83$$

$$3,2 x_1 + 6,2 x_2 \leq 79$$

Варіант 20

$$F = 45 x_1 + 64 x_2 \rightarrow \max$$

$$45 x_1 + 23 x_2 \leq 457$$

$$75 x_1 + 12 x_2 \leq 563$$

$$86 x_1 + 46 x_2 \leq 472$$

Варіант 21

$$F = 75 x_1 - 54 x_2 \rightarrow \max$$

$$54 x_1 + 23 x_2 \leq 756$$

$$98 x_1 + 29 x_2 \leq 730$$

$$-58 x_1 + 36 x_2 \leq 391$$

Варіант 22

$$F = 29 x_1 + 31 x_2 \rightarrow \max$$

$$83 x_1 + 56 x_2 \leq 839$$

$$-94 x_1 + 12 x_2 \leq 459$$

$$45 x_1 + 73 x_2 \leq 791$$

Варіант 23

$$F = 45 x_1 + 81 x_2 \rightarrow \max$$

$$167 x_1 + 92 x_2 \leq 495$$

$$45 x_1 - 73 x_2 \leq 194$$

$$65 x_1 + 34 x_2 \leq 812$$

Варіант 24

$$F = 2,6 x_1 + 1,8 x_2 \rightarrow \max$$

$$3,4 x_1 + 0,9 x_2 \leq 85$$

$$-0,8 x_1 + 2,6 x_2 \leq 72$$

$$1,2 x_1 - 2,6 x_2 \leq 103$$

Варіант 25

$$F = 0,7 x_1 + 3,8 x_2 \rightarrow \max$$

$$2,7 x_1 + 1,5 x_2 \leq 130$$

$$1,2 x_1 + 3,1 x_2 \leq 58$$

$$3,4 x_1 + 3,8 x_2 \leq 84$$

Варіант 26

$$F = 2,2 x_1 - 3,8 x_2 \rightarrow \max$$

$$2,8 x_1 + 1,6 x_2 \leq 68$$

$$\begin{aligned}-5,6 x_1 + 2,9 x_2 &\leq 85 \\ 3,5 x_1 + 2,9 x_2 &\leq 140\end{aligned}$$

Варіант 27

$$\begin{aligned}F &= -3,6 x_1 + 1,8 x_2 \rightarrow \max \\ 6,8 x_1 + 1,85 x_2 &\leq 54 \\ 5,4 x_1 + 3,7 x_2 &\leq 28 \\ 8,1 x_1 + 5,8 x_2 &\leq 54\end{aligned}$$

Варіант 28

$$\begin{aligned}F &= 7,2 x_1 - 5,9 x_2 \rightarrow \max \\ 1,8 x_1 + 4,2 x_2 &\leq 67 \\ 3,6 x_1 + 1,6 x_2 &\leq 58\end{aligned}$$

$$4,3 x_1 + 2,1 x_2 \leq 84$$

Варіант 29

$$\begin{aligned}F &= 6,4 x_1 - 2,8 x_2 \rightarrow \max \\ 2,8 x_1 + 3,2 x_2 &\leq 37 \\ 1,6 x_1 - 4,6 x_2 &\leq 85 \\ 3,5 x_1 + 3,6 x_2 &\leq 38\end{aligned}$$

Варіант 30

$$\begin{aligned}F &= -5,4 x_1 + 3,1 x_2 \rightarrow \max \\ 1,85 x_1 + 6,1 x_2 &\leq 49 \\ 8,1 x_1 + 5,9 x_2 &\leq 72 \\ 4,6 x_1 + 2,8 x_2 &\leq 84\end{aligned}$$

ЗАВДАННЯ 3. *Скласти математичну модель задачі, розв'язати її графічним та симплекс-методом. Перевірити рішення за допомогою програми «Поиск решения».*

Варіанти 1-30

Для виготовлення двох видів продукції P_1 і P_2 використовується три види сировини C_1 , C_2 і C_3 . Для виготовлення одиниці виробу P_1 витрачається c_{11} кг сировини C_1 , c_{21} кг сировини C_2 та c_{31} сировини C_3 . Для виготовлення одиниці виробу P_2 витрачається c_{12} кг сировини C_1 , c_{22} кг сировини C_2 та c_{32} сировини C_3 . Запаси сировини C_1 складають z_1 кг, сировини C_2 - z_2 та сировини C_3 - z_3 . Прибуток від реалізації одиниці виробу P_1 складає P_1 грн, а виробу P_2 - P_2 грн. Знайти такий план виготовлення продукції (кількість продукції обох видів, що необхідно виготовляти), щоб забезпечити отримання максимального прибутку.

Таблиця 1

Варіант	c_{11}	c_{21}	c_{31}	c_{12}	c_{22}	c_{23}	z_1	z_2	z_3	P_1	P_2
1	9	2	7	3	5	9	638	1239	1077	2	5
2	15	13	12	13	4	8	1633	1016	996	8	4
3	4	13	11	13	9	7	1513	962	1083	9	8
4	3	8	8	10	2	5	782	536	1614	7	3
5	4	7	9	15	14	15	814	1170	1889	4	4
6	6	5	4	5	14	14	461	943	1396	4	2
7	11	10	15	4	7	8	1412	951	441	5	7
8	13	7	8	7	15	4	979	1545	755	4	3
9	2	12	3	10	11	5	1644	1643	880	5	4
10	6	13	13	3	6	14	1334	1540	444	7	2
11	5	3	14	9	11	14	1259	763	460	5	4
12	7	10	11	11	6	9	1643	1238	684	5	8
13	14	10	4	5	2	11	483	1774	858	9	6
14	2	15	8	10	8	14	715	446	1744	4	2
15	6	12	8	7	12	2	1282	1876	1293	6	9
16	7	2	14	2	11	4	1360	479	731	4	7
17	14	8	15	12	10	6	681	453	556	7	5
18	5	13	5	7	11	11	1563	1471	1783	6	7
19	3	12	8	7	5	2	494	775	1351	3	7
20	11	11	14	3	2	13	512	742	1462	4	4
21	6	2	4	3	8	13	946	1849	1041	4	6
22	8	9	8	11	13	14	1221	1508	874	4	8
23	4	10	8	6	5	12	1673	1228	1060	4	9
24	3	13	12	11	11	4	501	776	681	5	4
25	2	10	6	5	13	9	1521	1709	405	7	9
26	5	10	14	4	5	6	1440	1027	1727	2	8
27	6	11	12	13	9	8	974	1455	1482	3	4
28	2	5	14	10	8	15	780	977	1406	4	7
29	9	5	5	2	5	12	622	1138	1667	2	5
30	7	10	14	6	14	15	1161	1402	1810	2	4

ЗАВДАННЯ 4. Розв'язати транспортну задачу. Спочатку знайти перше опорне рішення методом північно-західного кута та мінімального тарифу. Потім знайти оптимальне рішення методом потенціалів, взявши в якості опорного план, отриманий методом мінімального тарифу

Варіант	Постачальники	Споживачі					a_i	Варіант	Постачальники	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5				1	2	3	4	5	
1	1	6	13	6	17	6	24	2	1	12	22	4	14	12	34
	2	4	22	18	23	4	35		2	15	19	16	24	15	12
	3	23	16	4	19	23	40		3	9	12	9	11	9	26
	4	19	22	9	10	19	23		4	24	19	11	15	24	17
	v_j	25	22	25	25	25	122		v_j	12	15	34	13	15	89

Варіант	Постачальники	Споживачі					a_i	Варіант	Постачальники	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5				1	2	3	4	5	
3	1	4	9	14	2	4	23	4	1	13	15	13	4	13	16
	2	20	14	16	18	20	17		2	24	19	20	17	24	24
	3	4	11	3	5	4	18		3	20	3	15	25	20	23
	4	21	22	18	17	21	26		4	13	13	19	17	13	35
	v_j	14	12	35	10	13	84		v_j	16	10	37	15	20	98

Варіант	Постачальники	Споживачі					a_i	Варіант	Постачальники	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5				1	2	3	4	5	
5	1	11	4	20	14	11	24	6	1	22	2	11	16	22	27
	2	6	12	21	7	6	15		2	20	2	11	14	20	16
	3	15	14	23	4	15	18		3	22	24	18	3	22	14
	4	20	9	15	9	20	26		4	5	20	4	10	5	23
	v_j	2	17	29	15	20	83		v_j	25	13	23	13	6	80

Варіант	Постачальники	Споживачі					a_i	Варіант	Постачальники	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5				1	2	3	4	5	
7	1	5	12	7	21	5	32	8	1	22	5	7	19	22	43
	2	12	17	2	8	12	12		2	14	18	5	24	14	19
	3	25	8	23	22	25	17		3	16	12	24	10	16	21
	4	9	15	15	10	9	21		4	13	12	10	25	13	15
	v_j	24	12	23	14	9	82		v_j	29	6	23	21	19	98

В а р і а н т 9	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	24	11	8	22	24	21
	2	14	3	2	19	14	32
	3	5	22	21	21	5	25
	4	4	15	11	7	4	15
	v_j	17	18	23	26	9	93

В а р і а н т 10	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	4	11	16	25	4	24
	2	4	7	17	16	4	34
	3	6	3	23	8	6	20
	4	6	10	17	17	6	21
	v_j	16	20	21	23	19	99

В а р і а н т 11	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	12	21	15	17	20	32
	2	4	21	3	13	4	21
	3	20	2	3	12	20	15
	4	23	16	8	6	17	30
	v_j	16	24	16	16	26	98

В а р і а н т 12	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	18	16	12	4	18	20
	2	7	14	22	5	17	17
	3	3	2	23	4	4	24
	4	7	13	12	12	7	32
	v_j	13	21	20	16	23	93

В а р і а н т 13	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	7	20	22	23	7	20
	2	19	12	11	18	19	32
	3	13	25	13	13	13	16
	4	12	12	19	22	12	30
	v_j	15	23	21	31	8	98

В а р і а н т 14	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	4	17	18	24	4	31
	2	19	16	6	11	19	10
	3	3	13	19	16	3	22
	4	4	4	8	12	4	16
	v_j	12	14	18	27	8	79

В а р і а н т 15	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	1	2	3	4	5	20
	2	6	13	6	17	6	23
	3	4	22	18	23	4	16
	4	23	16	4	19	23	24
	v_j	14	25	16	20	8	83

В а р і а н т 16	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	12	22	4	14	12	24
	2	15	19	16	24	15	20
	3	9	12	9	11	9	17
	4	24	19	11	15	24	30
	v_j	18	23	20	22	8	91

В а р і а н т 17	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	5	18	14	4	5	22
	2	23	9	11	18	23	21
	3	5	11	10	19	5	25
	4	10	10	23	5	10	23
	v_j	20	20	23	20	8	91

В а р і а н т 18	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	12	2	25	12	12	28
	2	15	7	8	7	15	22
	3	23	9	22	9	23	25
	4	18	12	21	3	18	25
	v_j	23	20	31	18	8	100

В а р і а н т 19	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	15	5	17	8	15	32
	2	25	19	15	9	25	20
	3	14	19	17	16	14	21
	4	20	7	5	24	20	19
	v_j	17	18	31	18	8	92

В а р і а н т 20	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	13	10	18	11	13	33
	2	13	12	22	7	13	18
	3	21	3	4	16	21	12
	4	2	5	21	3	2	29
	v_j	17	20	29	15	11	92

В а р і а н т 21	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	20	21	6	17	20	32
	2	4	21	3	13	4	21
	3	20	3	3	16	20	15
	4	23	16	8	6	23	31
	v_j	16	23	18	16	26	99

В а р і а н т 22	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	18	6	3	4	18	24
	2	7	14	22	20	7	17
	3	7	10	23	4	7	23
	4	7	13	12	21	7	32
	v_j	16	21	17	16	26	96

В а р і а н т 23	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	6	9	4	16	6	22
	2	18	21	18	2	18	31
	3	9	2	3	9	9	23
	4	11	25	20	2	11	27
	v_j	19	17	19	21	27	103

В а р і а н т 24	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	14	11	25	18	14	34
	2	22	25	18	9	22	16
	3	16	3	17	25	16	22
	4	16	14	5	16	16	31
	v_j	18	15	22	24	24	103

В а р і а н т 25	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	23	15	23	5	23	22
	2	23	6	2	20	23	21
	3	15	22	16	11	15	22
	4	6	21	3	21	6	31
	v_j	14	13	23	20	26	96

В а р і а н т 26	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	22	5	20	22	22	32
	2	13	11	21	16	13	22
	3	7	23	11	12	7	15
	4	24	10	14	12	24	13
	v_j	16	15	17	15	19	82

В а р і а н т 27	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	5	18	14	4	5	29
	2	23	9	11	18	23	28
	3	5	11	10	19	5	14
	4	10	10	23	5	10	16
	v_j	17	21	17	15	17	87

В а р і а н т 28	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	12	2	25	12	12	43
	2	15	7	8	7	15	19
	3	23	9	22	9	23	21
	4	18	12	21	3	18	15
	v_j	29	6	23	21	19	98

В а р і а н т 29	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	12	22	3	22	12	32
	2	18	18	8	8	18	12
	3	5	25	3	3	5	17
	4	5	22	15	9	5	21
	v_j	24	12	23	14	9	82

В а р і а н т 30	Поста чальни ки	Споживачі					a_i
		1	2	3	4	5	
	1	9	22	19	19	9	34
	2	20	14	7	8	20	22
	3	24	5	22	6	24	17
	4	15	20	17	12	15	33
	v_j	23	25	26	13	19	106

Приклади розв'язання задач.

Завдання 1. Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом

$$F = -5,1x_1 - 11,6x_2 \rightarrow \max$$

$$17,1x_1 + 3,8x_2 \leq 86$$

$$-4,2x_1 + 13,5x_2 \geq 34$$

$$11x_1 + 12,1x_2 \leq 130$$

I. В обмеженнях задачі замініть знаки нерівностей на знаки рівнянь та побудуйте відповідні прямі.

Зручніше за все шукати точки, що лежать на осях координат.

Для першого рівняння (на рис. 1 позначена (1)) $17,1 x_1 + 3,8 x_2 = 86$ такими точками будуть $\{0; 22,6\}$ та $\{5,02; 0\}$;

для рівняння $-4,2 x_1 + 13,5 x_2 = 34$ (на рис. 1 – (2)) - точки $\{0; 2,52\}$ та $\{-8; 0\}$,

для рівняння $11 x_1 + 12,1 x_2 \leq 130$ (на рис. 1 – (3)) - точки $\{0; 10,74\}$ та $\{11,82; 0\}$

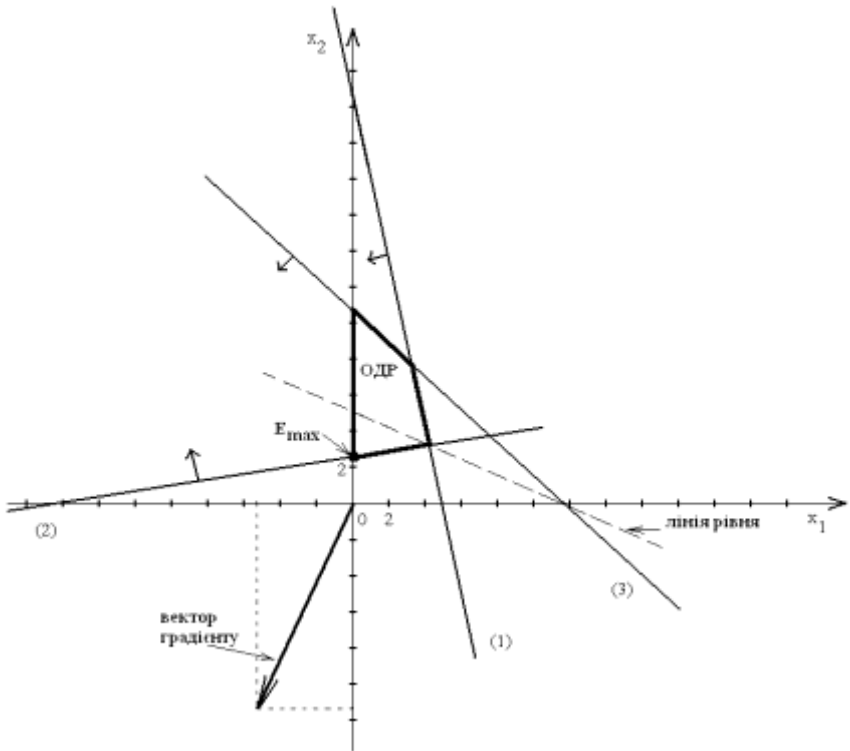


Рис.1 Розв'язання задачі лінійного програмування графічним методом

II. Знайдіть і відмітьте напівплощини, що відповідають кожному з обмежень-нерівностей задачі. Для цього підставте в конкретну нерівність координати будь-якої точки [наприклад $(0;0)$], і перевірте істинність отриманої нерівності.

Якщо нерівність істинна,

то треба відмітити напівплощину, що містить дану точку;

інакше (нерівність помилкова) треба відмітити напівплощину, що не містить дану точку.

Оскільки x_1 і x_2 повинні бути невід'ємними, то їх допустимі значення завжди знаходяться вище за вісь x_1 і правіше за вісь x_2 , тобто в I-м квадранті.

Обмеження-рівності дозволяють тільки ті точки, що лежать на відповідній прямій, тому виділите на графіку такі прямі.

III. Визначите ОДР як частину площини, що належить одночасно всім виділеним областям, і відмітьте її. За відсутності ОДР задача **не має рішень**, про що необхідно зробити відповідний висновок.

IV. Якщо ОДР – не порожня множина, то побудуйте цільову пряму, тобто будь-яку з ліній рівня $-5,1x_1 - 11,6x_2 = L$, де L – довільне число, наприклад $-59,16$ тому, що воно кратне $-5,1$ та $11,6$, тобто зручне для проведення розрахунків. Спосіб побудови аналогічний побудові прямих обмежень.

V. Побудуйте вектор градієнта $\vec{C} = (-5,1; -11,6)$, який починається в точці $(0;0)$, закінчується в точці $(-5,1; -11,6)$. Якщо лінія рівня і вектор $\vec{C}$ побудовані вірно, то вони будуть **перпендикулярні**.

VI. При пошуку *max* функції мети пересувайте лінію рівня **у напрямі вектора $\vec{C}$** , при пошуку *min* функції мети – **проти напрямку** вектора $\vec{C}$. **Остання** за ходом руху вершина ОДР буде точкою *max* або *min* функції мети. Якщо такої точки (точок) не існує, то зробіть висновок про **необмеженість функції мети на множині рішень** зверху (при пошуку *max*) або знизу (при пошуку *min*).

VII. Визначте координати точки *max* або *min* функції мети $X^* = (x_1^*; x_2^*)$ і обчисліть значення $F(X^*)$. Для обчислення координат оптимальної точки X^* розв'яжіть систему рівнянь прямих, на перетині яких знаходиться X^* .

У нашому випадку для визначення координат точки максимуму необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 = 0; \\ -4,2x_1 + 13,5x_2 = 34 \end{cases}$$

тому що точка максимуму знаходиться на перетині вісі OX_2 та другого обмеження системи. Координати точки максимуму функції мети $E_{\max} = \{0; 2,519\}$. Максимальне значення функції мети дорівнює $F = -5,1 \cdot 0 - 11,6 \cdot 2,529 = -29,215$

Завдання 2. Скласти математичну модель задачі, розв'язати її за допомогою сервісу «Поиск решения» табличного процесора Microsoft Excel.

Змістовна постановка задачі. Для виготовлення 4 видів продукції Π_1, Π_2, Π_3 і Π_4 використовують 5 видів ресурсів P_1, P_2, P_3, P_4 і P_5 , запаси ресурсів, їх витрати на одиницю продукції та прибутки, які отримаємо від реалізації одиниці продукції кожного виду, наведені в таблиці 2. Необхідно визначити скільки продукції x_j кожного виду ($j=1, \dots, 4$) потрібно виготовити із заданих запасів кожного з 5 видів ресурсів, щоб отримати максимальний загальний прибуток від реалізації всіх видів продукції в цілому.

Таблиця 2

Види ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції, т/одиницю				Запаси ресурсів, т
	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	
P_1	1,5	3,2	2	1	100
P_2	0,9	1,2	3	2,5	80
P_3	0,9	1,3	0,7	0	80
P_4	2	5	3	4	250
P_5	1,9	2,1	2	2,6	100
Прибуток, тис. грн./од	25	30	22	19	
Невідомі	x_1	x_2	x_2	x_2	

I) Невідомими являються x_1, x_2, x_3, x_4 , які визначають кількість виготовленої продукції кожного виду.

II) Функцією мети є вираз для обчислення загального прибутку від реалізації усієї виготовленої продукції.

$$F(x) = 25x_1 + 30x_2 + 22x_3 + 19x_4 \rightarrow \max$$

III) Система обмежень складається з 5 нерівностей.

$$\begin{cases} 1,5x_1 + 3,2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 100 \\ 0,9x_1 + 1,2x_2 + 3x_3 + 2,5x_4 \leq 80 \\ 0,9x_1 + 1,3x_2 + 0,7x_3 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 250 \\ 1,9x_1 + 2,1x_2 + 2x_3 + 2,6x_4 \leq 100 \end{cases}$$

IV) Приводимо систему обмежень до канонічного виду шляхом додавання нової змінної в ліву частину кожної нерівності.

$$\begin{cases} 1,5x_1 + 3,2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 100 \\ 0,9x_1 + 1,2x_2 + 3x_3 + 2,5x_4 + x_6 \leq 80 \\ 0,9x_1 + 1,3x_2 + 0,7x_3 + x_7 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_8 \leq 250 \\ 1,9x_1 + 2,1x_2 + 2x_3 + 2,6x_4 + x_9 \leq 100 \end{cases}$$

Ці додаткові змінні визначають залишки сировини для будь-яких допустимих планів.

V) Знаходимо оптимальний план задачі за допомогою табличного процесору Microsoft Excel.

1. Вводимо початкові дані, як показано на рис. 2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	Лабораторная работа №1										
2	Вариант №38										
3		x1		x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9
4		0		0	0	0	0	0	0	0	0
5											
6		матрица затрат сырья							запа		
7		виды продукции							с		
8	вид сырья	1 (1)		2(2)	3(7)	4(8)		сырь			
9	1(2)	1,5		3,2	2	1		100			
10	2(3)	0,9		1,2	3	2,5		80			
11	3(6)	0,9		1,3	0,7	0		80			
12	4(8)	2		5	3	4		250			
13	5(11)	1,9		2,1	2	2,6		180			
14	прибыль	25		30	22	19					
15											
16	функция цели										
17	L(x)	=СУММПРОИЗВ(B4:E4;B14:E14)									
18	Ограничения										
19	1)	=СУММПРОИЗВ(B4:E4;B9:E9)+F4									
20	2)	=СУММПРОИЗВ(B4:E4;B10:E10)+G4									
21	3)	=СУММПРОИЗВ(B4:E4;B11:E11)+H4									
22	2)	=СУММПРОИЗВ(B4:E4;B12:E12)+I4									
23	5)	=СУММПРОИЗВ(B4:E4;B13:E13)+J4									

Рис.2 Введения початкових даних

при цьому в чарунках листа повинні відображатися значення, які представлено на рис.3:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Лабораторная работа №1									
2	Вариант №38									
3		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9
4		0	0	0	0	0	0	0	0	0
5										
6		матрица затрат сырья							запас сырья	
7	вид сырья	1 (1)	2(2)	3(7)	4(8)					
9	1(2)	1,5	3,2	2	1				100	
10	2(3)	0,9	1,2	3	2,5				80	
11	3(6)	0,9	1,3	0,7	0				80	
12	4(8)	2	5	3	4				250	
13	5(11)	1,9	2,1	2	2,6				180	
14	прибыль	25	30	22	19					
15										
16	функция цели									
17	L(x)	0								
18	Ограничения									
19	1)	0								
20	2)	0								
21	3)	0								
22	4)	0								
23	5)	0								
24										

Рис. 3. Вигляд аркуша Excel після введення початкових даних

2. Запустити додаток **Поиск решения** (**Данные > Поиск решения**). В цьому вікні потрібно ввести за допомогою миші наступні дані у відповідні поля: в полі **Установить целевую функцию** мишею вказати на чарунку **B17**, в полі **Равной** вказати на **максимальному значению**, в полі **Изменяя ячейки** вказати масив чарунок **B4:J4**, в полі **Ограничения** за допомогою миші задати рівняння лівих частин обмежень правим (рис. 4).

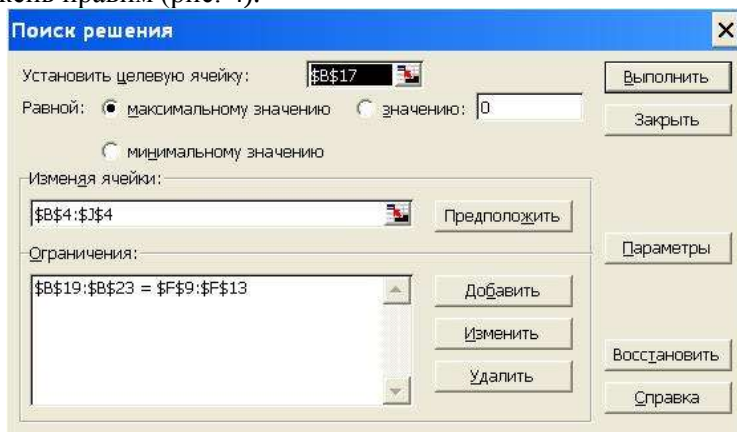


Рис.4 Введення параметрів пошуку оптимального рішення

Після вводу всіх обмежень кнопкою **Параметры** відкриваємо діалогове вікно **Параметры поиска решения**, в якому треба задати **Неотрицательные значения**, **Линейная модель**, після чого закрити це вікно кнопкою **Ок** (рис. 5), повернутись у вікно **Поиск решения**, в якому вказати на кнопку **Выполнить**.

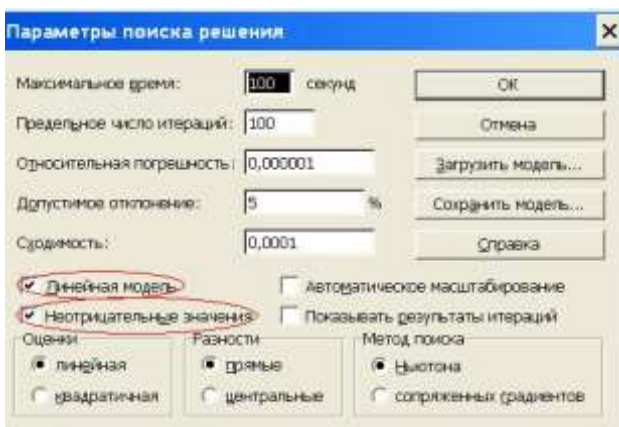


Рис. 5. Введення додаткових параметрів пошуку оптимального рішення

Після цього в масиві **B4:J4** отримуємо оптимальні значення невідомих, в масиві загальні втрати ресурсів, а в чарунці **B17** – максимально-можливе значення функції мети (рис. 6).

В нашому випадку необхідно виготовляти продукцію першого та четвертого виду у кількості 59,64 та 10,53 одиниці відповідно. Виготовляти продукцію другого та третього виду не доцільно. При такому плані виробництва отримаємо прибуток у розмірі 1691,29 тис. грн. При цьому ресурс 1-го та 2-го виду повністю використовується (тобто являються дефіцитним). Ресурси 3-го, 4-го та 5-го виду не являються дефіцитними – їх залишки складають 26,316; 88,596; 39,3 тони.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Лабораторная работа №1										
2	Вариант №38										
3		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	
4		59,64912	0	0	10,52632	0	0	26,31579	88,59649	39,29826	
5											
6	матрица затрат сырья										
7	вид	виды продукции				запас					
8	сырья	1(1)	2(2)	3(7)	4(8)	сырья					
9	1(2)	1,5	3,2	2	1	100					
10	2(3)	0,9	1,2	3	2,5	80					
11	3(8)	0,9	1,3	0,7	0	80					
12	4(8)	2	5	3	4	250					
13	5(11)	1,9	2,1	2	2,8	180					
14	прибыль	25	30	22	19						
15											
16	функция цели										
17	L(x)	1691,226									
18	Ограничения										
19	1)	100									
20	2)	80									
21	3)	80									
22	4)	250									
23	5)	180									

наилучший оптимальный план

значения дополнительных параметров

максимальное значение функции цели

Рис. 6. Отримане рішення

Завдання 3. Скласти математичну модель задачі, розв'язати її симплекс-методом.

Алгоритм симплекс-метода (для випадку, коли всі знаки в обмеженнях задачі «≤»):

Для розв'язання задачі ЛП симплекс-методом необхідно привести задачу, записану в стандартному вигляді

$$L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases}$$

до канонічного вигляду

Для цього необхідно ввести в обмеження додаткові змінні

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$$

Система обмежень перетвориться в систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases}$$

1. Прийемо змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ в якості базисних, а змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$ – в якості вільних. Положимо небазисні змінні рівними нулю, а базисні прирівнюємо вільним членам: $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots, x_n = 0$, $x_{n+1} = b_1$, $x_{n+2} = b_2, \dots, x_{n+m} = b_m$. В останньому рядку (F -рядку) стоїть коефіцієнт з протилежним знаком при j -й змінній в функції мети $F(x) - c_j$. Заповнюємо першу симплекс-таблицю.

i	Базис	Вільні члени b_i	Коефіцієнти a_{ij} при змінних											Θ_i
			x_1	x_2	...	x_j	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+i}	...	x_n + m	
1	x_{m+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	1	...	0	...	0	
2	x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	0	...	0	...	0	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
i	x_{n+i}	b_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}	0	...	1	...	0	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
m	x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	0	...	0	...	1	
$m+1$	F	0	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_j$	...	$-c_n$	0	...	0	...	0	

2. Отримуємо *перше опорне рішення*, ($x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots, x_n = 0$, $x_{n+1} = b_1$, $x_{n+2} = b_2, \dots, x_{n+m} = b_m$), яке є допустимим і якому відповідає значення $F(x)=0$.

3. Перевіряємо рішення на оптимальність. Для **перевірки рішення на оптимальність** переглядаємо останній F -рядок. Якщо коефіцієнти, що стоять при вільних змінних невід'ємні, то отримане рішення оптимальне. Отримане рішення єдине, якщо всі ці коефіцієнти позитивні. Якщо серед невід'ємні коефіцієнтів зустрічається хоч б один нульовий, то задача має нескінченну безліч рішень. Якщо в останньому рядку є хоч б один негативний коефіцієнт, а у відповідному цьому коефіцієнту стовпці немає жодного позитивного елементу, то функція мети F необмежена на області допустимих рішень. Якщо хоч б один з коефіцієнтів, що стоять при вільних змінних, негативний і у відповідному йому стовпці є хоч би позитивний елемент, то отримане рішення може бути покращене.

4. Відшукуємо змінну x_k , у якої в F -рядку найбільший за модулем від'ємний коефіцієнт.
5. Переводимо цю змінну в базисну. k стовпчик буде **розв'язуючим стовпчиком**. Потім відшукуємо відношення елементів стовпчика вільних членів до елементів розв'язуючого стовпчика і вибираємо **мінімальне невід'ємне** значення. Елементи рядка l , в якому дане відношення буде мінімальним невід'ємним являють собою **розв'язуючий рядок**, а коефіцієнт a_{lm} , що стоїть на перетині розв'язуючого рядка та розв'язуючого стовпчика – розв'язуючим коефіцієнтом.
6. Заповнюємо нову симплекс-таблицю. У новій таблиці замінюємо базисну змінну в рядку l на змінну x_k , всі коефіцієнти старої симплекс-таблиці на місці розв'язуючого рядка ділимо на a_{lm} , решту всіх коефіцієнтів на місці розв'язуючого стовпчика прирівнюємо 0. Всі інші коефіцієнти нової симплекс-таблиці розраховується **за правилом прямокутника** з коефіцієнтів старої симплекс-таблиці.

Для обчислення якого-небудь нового елементу необхідно побудувати замкнутий прямокутний контур, в протилежних вершинах якого знаходяться розв'язуючий коефіцієнт і відповідний коефіцієнт старої таблиці. Далі розрахунок проводиться таким чином: коефіцієнт нової симплекс-таблиці дорівнює коефіцієнту старої симплекс-таблиці мінус добуток коефіцієнтів, що стоять на протилежній діагоналі прямокутного контуру, ділений на розв'язуючий коефіцієнт.

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{im}a_{kj} / a_{lm}$$

Таким же чином розраховуються вільні члени і коефіцієнти цільової функції.

7. *Наступне опорне рішення* отримуємо, прирівнюючи базисні змінні отриманої таблиці відповідним вільним членам. У чарунці F_0 отримуємо значення функції мети.
8. *Перевіряємо рішення на оптимальність*. Якщо в F -рядку немає негативних коефіцієнтів, то оптимальне рішення знайдене, інакше повертаємося в пункт 4.

Приклад.

Для виготовлення двох видів продукції P_1 і P_2 використовується три види сировини C_1 , C_2 і C_3 . Для виготовлення одиниці виробу P_1

витрачається c_{11} кг сировини, c_{21} кг сировини C_2 та c_{31} кг сировини C_3 . Для виготовлення одиниці виробу Π_2 витрачається c_{12} кг сировини C_1 , c_{22} кг сировини C_2 та c_{32} кг сировини C_3 . Запаси сировини C_1 складають z_1 кг, сировини C_2 - z_2 кг, а сировини C_3 - z_3 кг. Прибуток від реалізації одиниці виробу Π_1 складає P_1 грн, а виробу Π_2 - P_2 грн. Знайти такий план виготовлення продукції (кількість продукції обох видів, що необхідно виготовляти), щоб забезпечити отримання максимального прибутку.

Представимо початкові дані задачі у вигляді таблиці

Вид сировини	Витрати сировини на виробництво одиниці продукції		Запас сировини
	Π_1	Π_2	
C_1	7	5	745
C_2	3	4	942
C_3	3	7	784
Прибуток від реалізації продукції	2	4	

Складемо математичну модель задачі.

I) Змінні задачі

x_1 – кількість виготовленої продукції Π_1

x_2 – кількість виготовленої продукції Π_2

II) Функція мети

$$F(x) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

III) Обмеження задачі

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \leq 745 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 942 \\ 3x_1 + 7x_2 \leq 784 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

IV) Приведення до канонічного виду задачі

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + x_3 = 745 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 942 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_5 = 784 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

V) Економічна сутність додаткових змінних x_3, x_4, x_5 .

Розглянемо перше обмеження

$$7x_1 + 5x_2 + x_3 = 745$$

Складові, що обведені, показують скільки сировини C_1 витрачено на виробництво продукції обох видів. У правій частині обмеження задана величина запасів сировини C_1 . Відповідно, x_3 – залишки невикористаної сировини C_1 .

Розмірковуючи аналогічно, з'ясуємо, що x_4 – залишки сировини C_2 , а x_5 – залишки сировини C_3 .

Приймемо додаткові змінні x_3, x_4, x_5 в якості базисних, а змінні x_1, x_2 – в якості вільних (небазисних) та заповнимо першу симплекс-таблицю

i	Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Θ_i
1	x_3	745	7	5	1	0	0	
2	x_4	942	3	4	0	1	0	
3	x_5	784	3	7	0	0	1	
4	$f(x)$	0	-2	-4	0	0	0	

Для отримання першого базисного рішення, прирівнюємо небазисні змінні 0, а базисні – вільним членам (відповідним коефіцієнтам із стовпчика b_i). Маємо $X_1 = (0, 0, 745, 942, 784)$; $f(X_1) = 0$.

В нашому випадку у f -рядку є від'ємні коефіцієнти за присутності у відповідних їм стовпчиків позитивних коефіцієнтів, тобто *отримане рішення неоптимальне, але воно може бути покращене*.

Для отримання другого опорного розв'язку відшукуємо найбільший за модулем від'ємний коефіцієнт у f -рядку. В нашому випадку це -4, це означає, що **стовпчик**, в якому знаходиться цей коефіцієнт являється **розв'язуючим**, а змінну x_2 , що стоїть у цьому стовпчику необхідно ввести у базис.

i	Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Θ_i
1	x_3	745	7	5	1	0	0	
2	x_4	942	3	4	0	1	0	
3	x_5	784	3	7	0	0	1	
4	$f(x)$	0	-2	-4	0	0	0	

Розраховуємо коефіцієнти Θ_i як відношення коефіцієнтів стовпчика вільних членів b_i до елементів розв'язуючого стовпчика і

вибираємо **мінімальний невід’ємний** коефіцієнт серед Θ_i . Рядок, в якому стоїть мінімальний невід’ємний коефіцієнт серед Θ_i , називається **розв’язуючим рядком**. В нашому випадку розв’язуючим рядком являється третій рядок симплекс таблиці. Коефіцієнт $a_{32}=7$, що стоїть на перетині розв’язуючого стовпчика та розв’язуючого рядка, називається **розв’язуючим коефіцієнтом**.

i	Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Θ_i
1	x_3	745	7	5	1	0	0	$745/5=149$
2	x_4	942	3	4	0	1	0	$942/4=235,5$
3	x_5	784	3	7	0	0	1	$782/7=112$
4	$f(x)$	0	-2	-4	0	0	0	

Заповнюємо нову симплекс таблицю. Спочатку вводимо до базису змінну x_2 замість змінної x_5

i	Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Θ_i
1	x_3							
2	x_4							
3	x_2							
4	$f(x)$							

Всі коефіцієнти, що стоять на місці розв’язуючого рядка старої симплекс таблиці ділимо на 7 – розв’язуючий коефіцієнт і записуємо на відповідне місце у нову симплекс-таблицю. Всі коефіцієнти розв’язуючого стовпчика, крім того, що стоїть на місці розв’язуючого коефіцієнта (крім 1), заповнюємо нулями.

i	Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Θ_i
1	x_3			0				
2	x_4			0				
3	x_2	112	0,429	1	0	0	0,143	
4	$f(x)$			0				

Решта коефіцієнтів нової симплекс-таблиці розраховуються за правилом прямокутника з коефіцієнтів старої симплекс-таблиці. Для обчислення якого нового елемента необхідно побудувати замкнутий прямокутний контур, в протилежних вершинах якого знаходяться

розв'язуючий коефіцієнт і відповідний елемент старої таблиці. Далі розрахунок проводиться таким чином: коефіцієнт нової симплекс-таблиці дорівнює коефіцієнту старої симплекс-таблиці мінус добуток коефіцієнтів, що стоять на протилежній діагоналі прямокутного контуру, поділене на розв'язуючий коефіцієнт.

Наприклад розрахуємо коефіцієнт a_{11}

Для цього в старій симплекс-таблиці будемо прямокутний контур.

i	Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Θ_i
1	x_3	745	7	5	1	0	0	$745/5=149$
2	x_4	942	3	4	0	1	0	$942/4=235,5$
3	x_5	784	3	7	0	0	1	$782/7=112$
4	$f(x)$	0	-2	-4	0	0	0	

Коефіцієнти a_{11} та a_{32} знаходяться на головній діагоналі контуру, а a_{12} та a_{31} відповідно на протилежній. Тому $a'_{11} = a_{11} - a_{12} \cdot a_{31} / a_{32} = 7 - 5 \cdot 3 / 7 = 4,857$

Прямокутний контур для коефіцієнта a_{21} має вигляд.

i	Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Θ_i
1	x_3	745	7	5	1	0	0	$745/5=149$
2	x_4	942	3	4	0	1	0	$942/4=235,5$
3	x_5	784	3	7	0	0	1	$782/7=112$
4	$f(x)$	0	-2	-4	0	0	0	

Тому $a'_{21} = a_{21} - a_{22} \cdot a_{31} / a_{32} = 3 - 4 \cdot 3 / 7 = 1,286$

В загальному випадку, якщо a_{lm} – розв'язуючий коефіцієнт

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{im} a_{lj} / a_{lm}$$

Таким чином розраховуються вільні члени і коефіцієнти f -ряду. Отримуємо нову симплекс таблицю.

i	Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Θ_i
1	x_3	185	4,857	0	1	0	0,714	
2	x_4	494	1,286	0	0	1	-0,571	
3	x_2	112	0,429	1	0	0	0,143	
4	$f(x)$	448	-0,286	0	0	0	0,571	

Формуємо друге базисне рішення, прирівнюючи небазисні змінні 0, а базисні – вільним членам. Маємо $X_2 = (0, 112, 185, 494, 0)$; $f(X_2) = 448$.

Це означає, що якщо почати випускати продукцію Π_2 у розмірі 112 одиниць, то прибуток складе 448 грошових одиниць.

Перевіряємо рішення на оптимальність: у f -рядку є від'ємний коефіцієнт у стовпчику при x_1 . Тобто отримане рішення не є оптимальним, але воно може бути покращене.

Для покращення рішення також необхідно визначити розв'язуючі стовпчик, рядок та коефіцієнт.

В якості розв'язуючого стовпчика приймаємо стовпчик при x_1 (змінну x_1 будемо виводити з базису). Для визначення розв'язуючого рядка розраховуємо Θ_i

i	Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Θ_i
1	x_3	185	4,857	0	1	0	0,714	$185/4,857=38,089$
2	x_4	494	1,286	0	0	1	- 0,571	$494/1,286=384,136$
3	x_2	112	0,429	1	0	0	0,143	$112/0,429=261,072$
4	$f(x)$	448	- 0,286	0	0	0	0,571	

Мінімальне невід'ємне серед $\Theta_i = 38,089$

Тобто, перший рядок – розв'язуючий, а $a_{11} = 4,857$ – розв'язуючий коефіцієнт.

Аналогічно попередньому будемо симплекс-таблицю для третього кроку алгоритму.

i	Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Θ_i
1	x_1	38,088	1	0	0,206	0	- 0,147	
2	x_4	445,029	0	0	- 0,265	1	- 0,382	
3	x_2	95,676	0	1	- 0,088	0	0,206	
4	$f(x)$	458,882	0	0	0,059	0	0,529	

Отримуємо третє опорне рішення $X_3 = (38,088, 95,676, 0, 445,029, 0)$; $f(X_3) = 458,882$.

Перевіряємо ознаку оптимальності отриманого рішення. Так як у f -рядку нема від'ємних коефіцієнтів, то отримане рішення оптимальне і єдине.

Тобто $X^* = X_3$, $f(X^*) = f(X_3)$.

Таким чином максимальний прибуток $f(X_3)=458,882$ може бути отриманий при виробництві 38,088 одиниць продукції P_1 та 95,676 одиниць продукції P_2 . При цьому залишки сировини C_2 складуть 445,029 кг, а сировина C_1 та C_3 витрачається повністю (тобто є дефіцитною).

Список літератури

1. Megel Y. E. Operations Research / Y. E Megel, A. P. Rudenko, S. M. Kovalenko, I. V. Danilko, O. D. Mikhnova. – Kharkiv, "Miskdruk", 2016. – 386 p.
2. Мегель Ю. Є. Математичні моделі функціонування економіко-виробничих і технічних систем та методи їх дослідження / Ю. Є. Мегель, А. П. Руденко, С. М. Коваленко, І. В. Данілко. – Харків, "Міськдрук", 2013. – 389 с.
3. Мегель Ю. Е. Решение транспортных задач в среде Microsoft Excel. Методические рекомендации / Ю. Е. Мегель, И. В. Чалый, В. П. Путятин, С. Н. Коваленко. – Харьков, ХНТУСХ, 2014. – 52 с.
4. Транспортна задача і методи її розв'язання. Методичні вказівки. Частина 1. / Мегель Ю.Є., Руденко А.П., Коваленко С.М., Данілко І.В. – Х.: ХНТУСГ, 2011. – 38 с.
5. Транспортна задача і методи її розв'язання. Методичні вказівки. Частина 2. / Мегель Ю.Є., Руденко А.П., Коваленко С.М., Данілко І.В. – Х.: ХНТУСГ, 2011. – 47 с.
6. Акулич И.Л. Экономико-математические методы и модели. Компьютерные технологии и решения. – Минск: БГЭУ, 2003.
7. Петров Э.Г., Новожилова М.В., Гребенник И.В., Соколова Н.А.. Методы и средства принятия решений в социально-экономических и технических системах. – Херсон, 2003.
8. Наконечний С. І. Математичне програмування: Навч. посіб / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – К.: КНЕУ. – 2003. – 452 с.

9. Лунгу К. Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач. Учебное пособие – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 132 с.
10. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. — М.: Издательский дом "Вильямс", 2005. — 912 с: ил.

Навчальне видання

**Контрольні завдання
та методи їх розв'язання**

з курсу «Оптимізаційні методи та моделі»
для студентів спеціальностей
*"Менеджмент організацій і адміністрування", "Економіка
підприємства", "Облік і аудит"*

заочної форми навчання

Кафедра кібернетики

Відповідальний за випуск: І.В. Чалий

Комп'ютерний набір і верстка: С.М. Коваленко

Подп. к печати 17.05.17

Формат бумаги 60x84 1/16 Уч. - печ. листов. 1,0
Тираж 100

ХНТУСГ , 61002, м. Харків, вул. Артема 44, кім 317