МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

# Вища математика в прикладах і задачах

**Том II**

# Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння та ряди

**За редакцією проф. Курпи Л.В.**

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів*

Харків НТУ «ХПІ» 2009

ББК 22.1я7
К 93
УДК 517.2; 517.3

*Рецензенти*: *О.М. Литвин*, д-р фіз.-мат. наук, проф., Українська інженерно-педагогічна академія;
*М.С. Синєкоп,* д-р техн. наук, проф., Харківський державний університет харчування та торгівлі;
*В.С. Проценко,* д-р техн. наук, проф., Національний аерокосмічний університет «ХАІ»

*Автори*: Л.В. Курпа, Н.О. Кириллова, Г.Б. Лінник, І.О. Морачковська, О.В. Одинцова Г.В. Руднєва, Т.В. Столбова, А.В. Чистиліна, Т.Є. Шербініна, В.Ф. Васильченко

Гриф надано Міністерством освіти і науки України, лист № 1.4/18 – Г – 130 від 10.01.09

**Курпа Л.В.**

К 93 Вища математика в прикладах і задачах. У 2-х томах. Т. 2: Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння та ряди: навчальн. посіб. в 2-х томах. Курпа .Л.В., Кириллова Н.О., Лінник А.Б.; за ред. проф. Л.В. Курпи – Х.: НТУ "ХПІ", 2009. – 432 с.

ISBN
ISBN

Навчальний посібник містить теоретичний довідковий матеріал з таких розділів вищої математики як диференціальне числення функцій багатьох змінних, кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли, звичайні диференціальні рівняння, системи диференціальних рівнянь, числові та функціональні ряди, ряди та інтеграл Фур'є, а також зразки розв'язання типових задач, тестові питання та задачі, індивідуальні варіанти типових розрахунків.

Призначено для студентів технічних спеціальностей.

Іл. . табл. 1. Бібліогр.: 20 назв.

ББК 22.1я7

ISBN
ISBN

# ВСТУП

Навчальний посібник “Вища математика в прикладах і задачах” призначено для студентів технічних університетів денної та заочної форми навчання. Матеріали посібника подано у двох томах та охоплюють всі розділи вищої математики, які необхідні для технічної освіти.

*Перший том* посібника присвячено аналітичній геометрії, лінійній алгебрі та диференціальному і інтегральному численню функцій однієї змінної.

*Другий том* посібника містить у собі такі розділи: диференціальне числення функцій кількох змінних, кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли, а також диференціальні рівняння першого та вищих порядків, системи диференціальних рівнянь; числові та функціональні ряди, ряди та інтеграл Фур’є.

У даному навчальному посібнику збережено структуру попереднього видання (2006 р.) “Высшая математика” російською та англійською мовами у чотирьох томах, але доповнено деякі розділи, як розв’язанними прикладами, так і додатковими завданнями. Кожний з розділів містить лише основні систематизовані відомості з теорії, та велику кількість розв’язаних задач. З кожної теми надані завдання (30 варіантів), а також тестові питання та приклади. До тестових та індивідуальних завдань додані відповіді, що допоможе студентам перевірити свої розв’язки.

У *другому томі* особливої уваги надано найбільш складним для засвоювання розділам вищої математики: кратним та поверхневим інтегралам, теорії поля, методам розв’язання диференціальних рівнянь та їх систем, моделюванню деяких задач за допомогою диференціальних рівнянь і т.д.

Даний навчальний посібник відповідає сучасним вимогам вищої освіти та не має аналогів, завдяки включенню до його складу лабораторних робіт, які виконуються за допомогою відомого пакету “Maple” для персональних комп’ютерів. Саме це дозволяє студентам широко застосовувати сучасні комп’ютерні технології для проведення інженерних та наукових досліджень.

Автори сподіваються , що навчальний посібник буде корисним як викладачам вищої математики вищих технічних закладів в їх підготовці та проведенні занять, контролі рівня знань студентів, так і студентам в їх самостійній роботі.

Завідуюча кафедрою прикладної математики
НТУ”ХПІ”, д.т.н., проф. *Л.Курпа*

## Глава 9. Функції багатьох змінних

У цій главі основні поняття й методи диференціального числення узагальнено на випадок функції двох, трьох і більше незалежних змінних.

### 9.1. Основні поняття

**Означення.** Змінна величина $u$ називається функцією незалежних змінних $x_1,\ x_2,\ ...,x_n$, якщо кожній упорядкованій сукупності значень $\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)$ цих змінних з даної області їхньої зміни $D$ за деяким правилом або законом поставлено у відповідність одне або кілька значень величини $u$, тобто на множині $D$ задана функція $f: R^n \rightarrow R$ $n$ змінних $x_1,\ x_2,\ ...,x_n$.

Позначення: $u=f\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)$ або $u=u\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)$. У випадку функції трьох змінних пишуть $u=f\left(x,\ y,\ z\right)$, а у випадку функції двох змінних – $u=f\left(x,\ y\right)$ або $z=f\left(x,\ y\right),\ z=z\left(x,\ y\right)$.

Змінні $x_1,\ x_2,\ ...,x_n$ або $x, y, z$ називаються аргументами функції $u$.

Упорядковану сукупність $n$ чисел $x_1,\ x_2,\ ...,x_n$ називають “точкою” $n$-вимірного арифметичного простору $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і говорять про значення функції $u$ у цій точці. Множина D називається областю визначення функції $u=f(P)$. Якщо функція задана аналітичним виразом (формулою) без яких-небудь додаткових умов, то під її областю визначення розуміють область існування її аналітичного виразу, тобто сукупність усіх тих точок, у яких даний аналітичний вираз визначений і набуває тільки дійсних і скінчених значень.

Наприклад, областю визначення функції трьох змінних є деяка просторова область, зокрема, деякий об'єм. Областю визначення функції двох змінних є частина площини або вся площина.

**Приклад 1.** Знайти область визначення функції $z=\ln\left(4+4x-y^2\right)$.

**Розв’язання**. Логарифм визначений тільки при додатних значеннях його аргументу, тому $4+4x-y^2>0$ або $4+4x>y^2$. Ніяких інших обмежень на аргументи $x$ і $y$ не накладається.

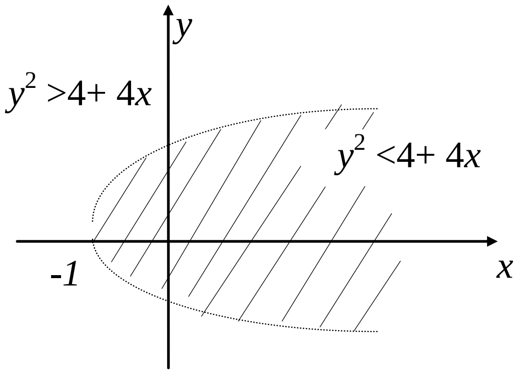


Рис. 9.1

Щоб зобразити геометрично область *D*, знайдемо спочатку її границю $4+4x=y^2$ або $y^2=4(x+1)$. Отримане рівняння описує параболу (рис. 9.1). Парабола ділить всю площину на дві частини – внутрішню та зовнішню відносно параболи. Для точок однієї з її частин виконується нерівність $y^2<4+4x$, а для точок з іншої частини $y^2>4+4x$ (на самій параболі $y^2=4+4x$). Щоб встановити, яка з цих двох частин є областю визначення даної функції, тобто задовольняє умову $y^2<4+4x$, досить перевірити цю умову для будь-якої однієї точки, що не лежить на параболі. Наприклад, початок координат $O(0, 0)$ лежить усередині параболи й задовольняє потрібну умову $0<4+4\cdot 0$. Отже, розглянута область *D* складається із точок, розташованих усередині параболи. Оскільки сама парабола в область *D* не входить, границю області – параболу – на рисунку позначимо пунктиром (рис.9.1).

**Приклад 2.** Знайти область визначення функції трьох змінних

$$u=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}.$$

**Розв’язання**. Шукана просторова область *V* визначається умовою

$$1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\ge 0 \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1.$$

Її границя $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ є поверхнею еліпсоїда з півосями *a, b, c*. Щоб визначити, яка частина простору відносно еліпсоїда є шуканою, візьмемо для перевірки точку $O(0;0;0)$. Оскільки початок координат, що лежить усередині еліпсоїда, задовольняє зазначеній вище нерівності, то й уся область *V* складається із внутрішніх точок еліпсоїда та граничних.

**Визначення.** Число *A* називається *границею* функції $u=f(P)$ в точці $P_0(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, якщо $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ таке, що $\forall P\in D$, які задовольняють умову $0<\rho(P,P_0)<\delta$, виконується нерівність $|f(P)-A|<\varepsilon$. При цьому пишуть:

$$A=\lim_{P\to P_0} f(P)=\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \ldots\\ x_n\to a_n}} f(P)=\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}).$$

Тут $\rho(P,P_0)$ є відстань між точками $P$ та $P_0$, яка визначається за формулою

$$\rho(P,P_0)=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2}.$$

**Визначення.** Функція $u=f(P)$ називається *неперервною* в точці $P_0$, якщо виконуються такі умови:

а) функція $f(P)$ визначена в точці $P_0$;

б) функція $f(P)$ має границю в точці $P_0$, тобто $\exists \lim\limits_{P\to P_0} f(P)$;

в) значення цієї границі дорівнює значенню функції в точці $P_0$, тобто

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0).$$

Якщо в точці $P_0$ хоча б одна з умов (а–в) порушується, то ця точка називається точкою розриву функції $f(P)$. Точки розриву для функцій кількох змінних мають більш складний характер в порівнянні з точками розриву функцій, які залежать тільки від однієї змінної. Ці точки можуть бути ізольованими, утворювати лінії розриву, поверхні розриву тощо.

Функція називається неперервною в області, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

**Визначення.** *Повним приростом* функції $f(\vec{x})$ в точці $\vec{x}$ називається величина

$$\Delta u=f(\vec{x}+\overrightarrow{\Delta x})-f(\vec{x})=$$
$$=f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,\ldots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

тут $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\Delta\vec{x}=(\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots,\Delta x_n)$.

**Визначення.** *Частковим приростом* функції $f(\vec{x})$ за змінною $x_k$ в точці $\vec{x}$ називається величина

$$\Delta_{x_k}u=f(x_1,x_2,\ldots,x_k+\Delta x_k,\ldots,x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots,x_n).$$

### 9.2. Частинні похідні і повний диференціал

Нехай функція $u= f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ визначена в деякій області D і точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ – внутрішня точка цієї області. Якщо існує скінченна границя відношення часткового приросту

$\Delta_{x_k} u = f(x_1^0, \dots, x_k^0+\Delta x_k, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)$ функції $u$ у точці $M_0$ до відповідного приросту змінної $x_k$ при $\Delta x_k \to 0$, то ця границя називається *частинною похідною функції* $u= f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у точці $M_0$ за змінною $x_k$ і позначається $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ або $f'_{x_k}$. Таким чином,

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} (k = \overline{1,n}).$$

Частинні похідні знаходяться за звичайними правилами і формулами диференціювання. При цьому, знаходячи $\frac{\partial u}{\partial x_k}$, всі змінні, крім $x_k$, розглядаються як сталі.

Функція $u = f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$ називається диференційованою у точці $M_0$, якщо її повний приріст

$$\Delta u= f(x_1^0+\Delta x_1, \dots, x_2^0+\Delta x_2, \dots, x_n^0+\Delta x_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

може бути поданим у цій точці у вигляді

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n + o(\rho),$$

де $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}$, а всі частинні похідні обчислені в точці $M_0$.

*Повним диференціалом* функції $u$ у точці $M_0$ називається головна частина її повного приросту в цій точці, лінійна щодо приростів $\Delta x_1$, $\Delta x_2$, ..., $\Delta x_n$.

Отже, $du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n.$

Оскільки диференціали незалежних змінних збігаються з їхніми приростами, тобто $\Delta x_k = dx_k$ $(k=\overline{1,n})$, то повний диференціал можна переписати у вигляді

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n. \quad (9.1)$$

При досить малих приростах незалежних змінних, тобто при малому $\rho$, можна повний приріст функції наближено замінити її повним диференціалом:

$$\Delta u \approx du \tag{9.2}$$

або

$$f(x_1^0+\Delta x_1, \dots , x_n^0+\Delta x_n) \approx f(x_1^0, \dots , x_n^0)+ df(x_1^0, \dots , x_n^0). \tag{9.3}$$

Цю формулу застосовують для наближених обчислень приростів функції або при обчисленні наближених значень функцій у якійсь точці.

**Приклад 1.** $u$= arcsin $y/x$. Знайти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

**Розв'язання**. При обчисленні $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ необхідно пам'ятати, що змінну $y$ варто розглядати як сталу величину, тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2/x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Аналогічно при знаходженні $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ аргумент $x$ варто розглядати як константу, тоді $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2/x^2}}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

**Приклад 2.** Знайти повний диференціал функції $u=\ln(z+\sqrt{x^2+y^2})$.

**Розв'язання**. Знаходимо частинні похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{(z+\sqrt{x^2+y^2})\cdot\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{(z+\sqrt{x^2+y^2})\cdot\sqrt{x^2+y^2}};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{z+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

За формулою (9.1) маємо

$$du=\frac{x}{(z+\sqrt{x^2+y^2})\cdot\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{(z+\sqrt{x^2+y^2})\cdot\sqrt{x^2+y^2}}dy+$$

$$+\frac{1}{z+\sqrt{x^2+y^2}}dz=\frac{xdx+ydy+\sqrt{x^2+y^2}dz}{(z+\sqrt{x^2+y^2})\cdot\sqrt{x^2+y^2}}.$$

**Приклад 3.** Обчислити приблизно $(0{,}98)^{3{,}03}$.

**Розв'язання**. Шукане число можна розглядати як значення функції $z=x^{y}$ при $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$, де $x_0=1$, $y_0=3$, $\Delta x=-0{,}02$, $\Delta y=0{,}03$.

$$z(1,3)=1^3=1; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,3)}=\left.yx^{y-1}\right|_{(1,3)}=3; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,3)}=\left.x^y\ln x\right|_{(1,3)}=0.$$

За формулою (9.3) маємо $(0.98)^{3.03}\approx 1+3\cdot(-0.02)=0{,}94$.

## 9.3. Диференціювання складної функції

Якщо $u=f(x_1,x_2,\dots,x_m)$ – диференційована функція змінних $x_1, x_2, \dots, x_m$, а $x_i=\varphi_i(t_1,t_2,\dots,t_n)$ $(i=\overline{1,m})$ – диференційовані функції змінних $t_1, t_2, \dots t_n$, то частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial t_k}$ функції $u$ як складної функції від змінних $t_1, t_2, \dots, t_n$ можуть бути знайдені за формулами

$$\frac{\partial u}{\partial t_k}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_k}, \quad (k=\overline{1,n}). \tag{9.4}$$

Зокрема, якщо $x_i=\varphi_i(t)$ $(i=\overline{1,m})$, то $u$ є складною функцією однієї змінної $t$ і мова може йти про відшукання повної похідної $\frac{du}{dt}$ за формулою

$$\frac{du}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt}. \tag{9.5}$$

Якщо $t$ збігається, наприклад, зі змінною $x_1$, то повна похідна $\frac{du}{dx_1}$ відшукується за формулою

$$\frac{du}{dx_1}=\frac{\partial u}{\partial x_1}+\sum_{i=2}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dx_1}. \tag{9.6}$$

Варто звернути увагу, що праворуч у цій формулі стоїть частинна похідна $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, обчислена в припущенні, що всі $x_i$ $(i=\overline{2,m})$ – сталі величини. Ліворуч же маємо повну похідну $\frac{du}{dx_1}$, обчислену в припущенні, що $x_2, \dots, x_m$ є змінні величини, які залежать від $x_1$.

**Приклад 1.** $z=u^2 \ln v$, де $u= y/x$, $v = x^2+y^2$. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

**Розв'язання**. Відповідно до формули (9.4) маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2u\ln v\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\frac{u^2}{v}2x=2\frac{y^2}{x}\left(\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2u\ln v\frac{1}{x}+\frac{u^2}{v}2y=2\frac{y}{x^2}\left(\ln(x^2+y^2)+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right).$$

**Приклад 2.** $u=e^{ax}(y-z)$, де $y= a\sin x$, $z = \cos x$. Знайти $\dfrac{du}{dx}$.

**Розв'язання**. Застосовуючи формулу (9.6), маємо

$$\frac{du}{dx}=ae^{ax}(y-z)+e^{ax}a\cos x-e^{ax}(-\sin x)=e^{ax}\left(a^2+1\right)\sin x.$$

**Приклад 3.** Показати, що функція $z=x\varphi\left(xy^2\right)$, де $\varphi(u)$ – диференційована функція, задовольняє співвідношенню

$$2x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$$

**Розв'язання**. Нехай $u = xy^2$. Тоді $z=x\varphi(u)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(u)+x\frac{d\varphi}{du}\cdot y^2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{d\varphi}{du}\cdot 2xy.$$

Підставляючи знайдені похідні в ліву частину даного співвідношення, одержимо

$$2x\varphi(u)+2x^2y^2\frac{d\varphi}{du}-2x^2y^2\frac{d\varphi}{du}=2x\cdot\varphi(xy^2)=2z,$$

що й було потрібно довести.

### 9.4. Похідні і диференціали вищих порядків

Частинні похідні функції $u= f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i=\overline{1,n})$ у свою чергу є функціями $n$ змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і можуть мати частинні похідні по цим змінним.

Частинна похідна від $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ по змінній $x_i$, тобто вираз $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\right)$, називається *частинною похідною 2-го порядку* і позначається $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}$.

Якщо $k \neq i$, частинну похідну називають змішаною. Аналогічно визначають частинні похідні 3-го, 4-го і т.д. порядків.

Для змішаних похідних має місце **теорема Шварца**:

*Якщо функція $u= f(x_1, x_2, \ldots , x_n)$ має в деякій області D усі частинні похідні до m-го порядку включно, причому всі вони неперервні в цій області, то значення будь-якої її змішаної похідної m-го порядку не залежить від того порядку, у якому реалізуються послідовні диференціювання.*

Нехай функція $u= f(x_1, x_2, \ldots , x_n)$ має в області D неперервні частинні похідні 1-го порядку. Тоді, як відомо, її повний диференціал $du$ обчислюється за формулою (9.1). Очевидно, $du$ також є функцією $n$ змінних $x_1, x_2, \ldots , x_n$ і можна говорити про повний диференціал від цього диференціала $d(du)$, який називається *диференціалом 2-го порядку* та позначається $d^2u$. Аналогічно можна визначити $d^3u=d(d^2u)$ – диференціал 3 - го порядку і т.ін.

Таким чином, $d^n u = d\left(d^{n-1}u\right)$ називається диференціалом *n-го* порядку.

При цьому прирости $dx_1, dx_2, \ldots , dx_n$ незалежних змінних розглядаються як сталі і при переході від одного диференціала до іншого залишаються тими самими.

Наприклад, для функції двох змінних $z = f\left(x,\ y\right)$.

$$d^2 z = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2;$$

$$d^3 z = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2 dy + \tag{9.7}$$

$$+3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Для диференціалів вищих порядків має місце символічна формула

$$d^m u = (\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n)^m u\ . \tag{9.8}$$

**Приклад 1.** $u = e^{xyz}$. Знайти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$.

**Розв'язання**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz \cdot e^{xyz}. \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(yz \cdot e^{xyz}) = y^2 z^2 e^{xyz}.$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 z^2 e^{xyz}) = 2yz^2 e^{xyz} + xy^2 z^3 e^{xyz} = yz^2 e^{xyz}(2 + xyz).$$

**Приклад 2.** $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Показати, що $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{2}{u}$.

**Розв'язання**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} =$$

$$= \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2}{u},$$

що й було потрібно довести.

**Приклад 3.** $z$= arctg $x/y$. Знайти $d^2 z$.

**Розв'язання**. Знайдемо спочатку частинні похідні 1-го порядку даної функції

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + x^2/y^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + x^2/y^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Потім знайдемо всі частинні похідні 2-го порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Підставляючи знайдені похідні у формулу (9.8), одержимо

$$d^2 z = \frac{2xy(dy^2-dx^2)+2(x^2-y^2)dxdy}{(x^2+y^2)^2}.$$

## 9.5. Екстремум функції багатьох змінних. Умовний екстремум

### 9.5.1. Дослідження функції багатьох змінних на (безумовний) локальний екстремум

**Визначення.** Точка $M_0(\vec{x})$ є точкою локального максимуму (мінімуму) функції $u = f(\vec{x})$, якщо існує такий окіл $C_\varepsilon(M_0)$ точки $M_0$, що $\forall M \in C_\varepsilon(M_0),\, M \neq M_0$, виконується умова $f(M) < f(M_0)$ $\left(f(M) > f(M_0)\right)$.

Дослідження функції на локальний екстремум складається з таких основних етапів:

1) знаходження області визначення функції;

2) знаходження точок можливого екстремуму (критичних точок);

3) перевірка достатніх умов екстремуму.

Для знаходження точок можливого екстремуму необхідно пам'ятати необхідні умови існування екстремуму.

*Необхідні умови екстремуму.* Якщо диференційовна функція $u = f(\vec{x})$ має в точці $M_0$ локальний екстремум, то

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{M_0} = 0,\ i = \overline{1,n} \text{ або } \left. du\right|_{M_0} = 0.$$

Точки, в яких виконується ця умова, називаються *стаціонарними*.

*Зауваження.* Якщо функція недиференційовна в точці екстремуму, то її частинна похідна не існує в цій точці.

Таким чином, щоб відшукати точки можливого екстремуму, потрібно знайти всі частинні похідні 1-го порядку даної функції і прирівняти їх до нуля. Розв'язуючи отриману систему рівнянь, знаходять *стаціонарні точки* функції. Якщо є точки, у яких частинні похідні не існують, їх так само приєднують до точок можливого екстремуму. Ці точки разом зі стаціонарними утворюють множину критичних точок.

На третьому етапі дослідження перевіряємо достатні умови існування екстремуму. Якщо функція є двічі диференційованою в деякому околі стаціонарної точки $M_0$ і всі частинні похідні 2-го порядку неперервні в ній, то за знаком 2-го диференціала можна визначити наявність екстремуму в точці $M_0$.

Якщо в цій точці другий диференціал $d^2 f(M_0) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k$ є знаковизначеною квадратичною формою диференціалів $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, то в точці $M_0$ функція $f(M)$ набуває екстремального значення, причому якщо $d^2f(M_0) < 0$, то в точці $M_0$ функція має локальний максимум, якщо $d^2f(M_0) > 0$**,** то локальний мінімум.

Уведемо позначення для частинних похідних другого порядку в точці $M_0$:

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{M_0}, \ a_{ij} = a_{ji}, \ i, j = \overline{1, n}.$$

Тоді $d^2 u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j$ є квадратичною формою змінних $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$.

Сформулюємо *критерій знаковизначеності* квадратичної форми – *критерій Сильвестра*: для того щоб квадратична форма $F = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} y_i y_k$ відносно змінних $y_i, i = \overline{1, n}$, була додатно-визначена, необхідно і достатньо, щоб виконувалися наступні нерівності для головних кутових мінорів матриці відповідної квадратичної форми:

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Для того щоб квадратична форма була від’ємно-визначена, необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} < 0, \dots, (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

На підставі критерію Сильвестра можна визначити знак другого диференціала в точці $M_0$, тобто $d^2u(M_0)$, враховуючи знаки головних кутових мінорів $\Delta_i$, $i=\overline{1,n}$, а саме:

а) якщо $\Delta_i > 0,\ i=\overline{1,n}$, то $d^2u\big|_{M_0} > 0$. Отже, $M_0$ є точкою локального мінімуму;

б) якщо $\Delta_i > 0$ для парних значень $i$ та $\Delta_i < 0$ для непарних значень $i$, то $d^2u\big|_{M_0} < 0$. Отже, $M_0$ є точкою локального максимуму;

в) якщо критерій Сильвестра не справджується та $d^2u\big|_{M_0} \neq 0$, то точка $M_0$ не є точкою локального екстремуму;

г) якщо $d^2u\big|_{M_0} = 0$, то потрібне додаткове дослідження.

*Випадок функції двох змінних.* Нехай у деякому околі стаціонарної точки $M_0(x_o, y_o)$ функція $f(x, y)$ двічі диференційована і всі її частинні похідні другого порядку

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

неперервні в цій точці. Тоді, якщо $\Delta(M_0) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то функція $f(x,\ y)$ має в цій точці локальний екстремум, а саме: максимум при $a_{11} < 0$ і мінімум при $a_{11} > 0$. Якщо ж $\Delta(M_0) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то функція $f(x,\ y)$ не має локального екстремуму в цій точці. Випадок, коли $\Delta(M_0) = 0$, вимагає додаткових досліджень.

Підсумовуючи вищесказане, можна дійти наступного висновку для *функції n (n>2) змінних*. Нехай у деякому околі точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ функція $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $m$ раз диференційовна і всі частинні похідні $m$-*го* порядку неперервні в цій точці, до того ж

$$df(M_0)=0,\ d^2f(M_0) = d^3f(M_0) = \ldots = d^{m-1}f(M_0)=0,\ d^m f(M_0) \neq 0.$$

Тоді якщо $m$ – непарне, то точка $M_0$ не буде точкою екстремуму; якщо ж $m$ – парне, то в точці $M_0$ функція $f(x, y)$ має екстремум: локальний максимум, якщо $d^m f(M_0)<0$, і локальний мінімум, якщо $d^m f(M_0)>0$.

**Приклад 1.** Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

**Розв'язання**. Згідно з необхідною умовою існування екстремуму знайдемо стаціонарні точки

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 2xy = 4; \end{cases}$$

$(x+y)^2 = 9,\ |x+y| = 3,\ x+y = \pm 3$. Одержуємо чотири стаціонарні точки: $M_1(1;2),\ M_2(2;1),\ M_3(-1;-2),\ M_4(-2;-1)$. У кожній точці перевіримо виконання достатньої умови, тобто перевіримо знак другого диференціала.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x;$$

$d^2 z = 6x dx^2 + 2 \cdot 6y dy dx + 6x dy^2$.

1) У точці $M_1$:

$$a_{11} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1} = 6,\ a_{12} = \left.\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)\right|_{M_1} = 12,\ a_{22} = \left.\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\right|_{M_1} = 6,$$

$\Delta_1 = a_{11} = 6 > 0;\ \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 36 - 144 < 0$. Екстремуму немає.

2) У точці $M_2$: $a_{11} = 12,\ a_{12} = 6,\ a_{22} = 12$,

$\Delta_1 = a_{11} = 12 > 0; \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 144 - 36 > 0 \Rightarrow$ у точці $M_2$ мінімум і $z_{\min}(M_2) = z_{\min}(2;1) = 8 + 6 - 30 - 12 = -28$;

3) У точці $M_3$: $a_{11} = -6,\ a_{12} = -12,\ a_{22} = -6$,

$\Delta_1 = a_{11} = -6 < 0;\ \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 36 - 144 < 0$. Екстремуму немає.

4) У точці $M_4$: $a_{11} = -12,\ a_{12} = -6,\ a_{22} = -12$,

$\Delta_1 = a_{11} = -12 < 0;\ \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 144 - 36 > 0 \Rightarrow$ у точці $M_4$ максимум і $z_{\max}(M_4) = z_{\max}(-2;-1) = -8 - 6 + 30 + 12 = 28.$

Розв'язання задач зручно оформляти у вигляді таблиці:

| Точки | $M_1(1;2)$ | $M_2(2;1)$ | $M_3(-1;-2)$ | $M_4(-2;-1)$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_{11}$<br>$a_{12}$<br>$a_{22}$ | 6<br>12<br>6 | 12<br>6<br>12 | -6<br>-12<br>-6 | -12<br>-6<br>-12 |
| $\Delta_1 = a_{11}$<br>$\Delta$ | >0<br><0 | >0<br>>0 | <0<br><0 | <0<br>>0 |
| Екстр. | немає | min | немає | max |
| $Z$ | | -28 | | 28 |

**Приклад 2.** Дослідити на локальний екстремум функцію

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z\,.$$

**Розв'язання**. З системи $u'_x = 2x + 2 = 0$; $u'_y = 2y + 4 = 0$; $u'_z = 2z - 6 = 0$ знаходимо єдину стаціонарну точку: $x = -1,\ y = 2,\ z = 3$. Знайдемо похідні другого порядку:
$u''_{xx} = 2,\ u''_{yy} = 2,\ \ u''_{zz} = 2,\ u''_{xy} = 0,\ u''_{xz} = 0,\ \ u''_{yz} = 0.$ Звідси

$$u_{xx}'' = 2 > 0,\ \begin{vmatrix} u_{xx}'' & u_{xy}'' \\ u_{yx}'' & u_{yy}'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,\ \begin{vmatrix} u_{xx}'' & u_{xy}'' & u_{xz}'' \\ u_{yx}'' & u_{yy}'' & u_{yz}'' \\ u_{zx}'' & u_{zy}'' & u_{zz}'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0\,.$$

Отже, другий диференціал, відповідно до критерію Сильвестра, є додатною квадратичною формою. Тому в точці $M_0\left(-1,\ -2,\ 3\right)$ функція має мінімум $\left(u_{\min} = -14\right)$.

**Приклад 3.** Дослідити на екстремум функцію: $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Розв'язання**

1) Функція визначена для всіх $x \in R$ і $y \in R$.

2) $z_x' = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\qquad z_y' = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

Легко переконатися, що ця функція не має стаціонарних точок. Але в точці $M_0(0,0)$ частинні похідні першого порядку не існують, тому що відношення

$$\frac{z(\Delta x,0) - z(0,0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}, \qquad \frac{z(0,\Delta y) - z(0,0)}{\Delta y} = \frac{|\Delta y|}{\Delta y}$$

не мають границі. Тому точка $M_0(0,0)$ є точкою можливого екстремуму. З того, що приріст $z\left(x,y\right) - z\left(0,0\right) = -\sqrt{x^2 + y^2}$ від'ємний всюди, у тому числі й в околі точки $M_0$, робимо висновок, що в цій точці функція має максимум, причому $z_{\max} = 1$.

**Приклад 4.** Дослідити на локальний екстремум функцію:

$$z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

**Розв'язання**

1) Функція визначена при $-\infty < x < \infty,\quad -\infty < y < \infty$.

2) Знайдемо частинні похідні:

$$z'_x = 4x^3 - 2x - 2y, \quad z'_y = 4y^3 - 2x - 2y.$$

Стаціонарні точки знайдемо з системи:

$$\begin{cases} 4x^3 - 2x - 2y = 0, \\ 4y^3 - 2x - 2y = 0. \end{cases}$$

Вона має три розв'язки: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = -1$, $y_2 = -1$, $x_3 = 1$, $y_3 = 1$.
Точки $M_1(0, 0)$, $M_2(-1,-1)$, $M_3(1,1)$ – стаціонарні точки.

3) Для перевірки достатніх умов локального екстремуму обчислимо похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = a_{11} = 12x^2 - 2, \quad a_{12} = z''_{xy} = -2, \quad a_{22} = z''_{yy} = 12y^2 - 2.$$

Утворимо вираз:

$$\Delta(x,y) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \left(12x^2 - 2\right)\left(12x^2 - 2\right) - 4.$$

Оскільки $\Delta(0,0) = 0$, то для з'ясування питання про існування екстремуму необхідні додаткові дослідження. Розглянемо приріст функції $z$ у точці $M_1(0, 0)$:

$$\Delta z(0,0) = z(h,k) - z(0,0).$$

Розглянемо два із усіх можливих випадків змін $k$ і $h$.

Якщо $k=h$, де $0<h<\sqrt{2}$, то $\Delta z(0,0) = 2h^2\left(h^2 - 2\right) < 0$.

Якщо $k=-h$, де $h > 0$, то $\Delta z(0,0) = 2h^4 > 0$.

Отже, приріст $\Delta z(0,0)$ набуває значень різних знаків у цих випадках, тому екстремуму в точці $M_1(0,0)$ немає.

У точках $M_2$ $(-1, -1)$, $M_3$ $(1, 1)$ $\Delta = 96 > 0$, а оскільки $a_{11} = 10 > 0$, то в цих точках функція досягає мінімуму, причому $z_{\min} = -2$.

### 9.5.2. Дослідження функції багатьох змінних на умовний екстремум

**Визначення.** *Умовним екстремумом* функції $u = f(\vec{x})$ називається екстремум цієї функції, який досягається за умови, що змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ зв'язані рівняннями зв'язку $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ k = \overline{1,m}$ $(m<n)$. Тобто задача ставиться так: знайти екстремум функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за умови, що

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases} \tag{9.9}$$

де $m < n$. У випадку умовного екстремуму функція $u = f(M) = f(x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n)$ досліджується на екстремум не у всій області визначення**,** а тільки на множині *E***,** координати всіх точок якої задовольняють рівнянням (9.9). Ці рівняння називають *рівняннями зв'язку*. Припустимо, що існує точка $M_0 \in E$ і такий окіл $C_\varepsilon(M_0) \in E$, що для всіх $M \in C_\varepsilon(M_0) \bigcap E$ буде виконуватися $f(M) > f(M_0) \big( f(M) < f(M_0) \big)$. Тоді стверджують, що функція $u = f(M)$ має в точці $M_0$ умовний мінімум (умовний максимум) при заданих умовах зв'язку (9.9).

Для знаходження точок, підозрюваних на умовний екстремум, будуємо допоміжну функцію Лагранжа $n+m$ змінних

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{9.10}$$

де $\lambda_k$ ($k=\overline{1,m}$) – невизначені множники Лагранжа, і прирівнюємо нулю частинні похідні за всіма її ($n$ + $m$) змінними.

При цьому знак другого диференціала $d^2F\left(x_1^o, \ x_2^o, \ \ldots, \ x_n^o\right)$ в стаціонарній точці $M_0(x_1^0, \ x_2^0, \ \ldots, \ x_n^0)$ при заданих значеннях $\lambda_k$ ($k=\overline{1,m}$) визначає характер екстремуму за умови, що змінні $dx_1$, $dx_2$, ... , $dx_n$ зв'язані співвідношеннями

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} dx_k = 0, \quad j = \overline{1, m}. \right.$$

**Приклад 1.** Дослідити на умовний екстремум функцію $u=xyz$, якщо $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

**Розв'язання**. Складемо функцію Лагранжа

$$F(x, y, z; \ \lambda) = xyz + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 3\right)$$

і випишемо систему

$$\begin{cases} F'_x = yz + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = xz + 2\lambda y = 0, \\ F'_z = xy + 2\lambda z = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0. \end{cases}$$

Із цієї системи знаходимо вісім стаціонарних точок:
$M_1(1,\ 1,\ 1)$, $M_2(1,\ -1,\ -1)$, $M_3(-1,\ 1,\ -1)$, $M_4(-1,\ -1,\ 1)$ для $\lambda = -1/2$ і $M_5(-1,\ -1,\ -1)$, $M_6(-1,\ 1,\ 1)$, $M_7(1,\ -1,\ 1)$, $M_8(1,\ 1,\ -1)$ для $\lambda = 1/2$.

Знайдемо другий диференціал функції Лагранжа:

$$d^2F = 2\lambda\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) + 2zdxdy + 2ydxdz + 2xdydz. \qquad (9.11)$$

Для $\lambda_1 = -1/2$ і точки $M_1$ маємо

$$d^2F\left(M_1, \lambda_1\right) = -\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) + 2dxdy + 2dxdz + 2dydz.$$

Замінюючи в останній сумі $dz$ його значенням, знайденим з рівняння зв'язку в точці $M_1$: $dz = -\left(dy + dx\right)$, маємо

$$d^2\Phi\left(M_1\right) = -\left(dx - dy\right)^2 - \left(dx + dy\right)^2 - 2\left(dx + dy\right)^2 < 0,$$

звідки отримуємо, що в точці $M_1$ функція $u=xyz$ має умовний максимум.

Для $\lambda_1 = -1/2$ і точки $M_2$ з (9.11) маємо

$$d^2F\left(M_2, \lambda_1\right) = -\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) - 2dxdy - 2dxdz + 2dydz.$$

Рівняння зв'язку: $dx = dy + dz$ і, отже,

$$d^2\Phi\left(M_2\right) = -\left(dy + dz\right)^2 - dy^2 - dz^2 - 2\left(dy + dz\right)dy - 2\left(dy + dz\right)dz + 2dydz =$$

$$= -\left(dy + dz\right)^2 - 2\left(dy + dz\right)\left(dy + dz\right) - \left(dy - dz\right)^2 =$$

$$= -3\left(dy + dz\right)^2 - \left(dy - dz\right)^2 < 0.$$

Тому в точці $M_2$ функція досягає умовного максимуму.

Аналогічно знаходимо, що функція $u = xyz$ має умовний максимум у точках $M_3$ і $M_4$: $u_{\max} = 1$.

Для $\lambda_2 = 1/2$ і точки $M_5$ з (9.11) маємо

$$d^2F\left(M_5, \lambda_2\right) = dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2dxdy - 2dxdz - 2dydz.$$

Рівняння зв'язку: $dx + dy + dz = 0$, звідки $dz = -\left(dy + dx\right)$ і

$$d^2\Phi\left(dx,\ \ dy\right) = dx^2 + dy^2 + \left(dx + dy\right)^2 - 2dxdy + 2dx\left(dx + dy\right) + 2dy\left(dx + dy\right) =$$

$= 3\left(dx + dy\right)^2 + \left(dx - dy\right)^2 > 0.$

Отже, у точці $M_5$ функція досягає умовного мінімуму: $u_{\min} = -1$.

Легко переконатися, що в точках $M_6$, $M_7$, $M_8$ функція $u=xyz$ також має мінімум, причому $u_{\min} = -1$.

*Зауваження*. Оскільки функція $u=xyz$ є неперервною на обмеженій замкнутій множині (на сфері) і в стаціонарних точках набуває тільки двох різних значень, то одне з них буде мінімальним, а інше максимальним, тобто перевірка на достатню ознаку екстремуму в цих випадках не обов'язкова.

Відповідно до цього зауваження можна було б відразу визначити, що точки $M_1$, $M_2$, , $M_3$ , $M_4$ є точками максимуму, а $M_5$, $M_6$ , $M_7$ , $M_8$ – точками мінімуму.

**Приклад 2.** Знайти екстремум функції $u= xy + yz$, якщо $x^2+ y^2=2$, $z+y= 2$ ( $x>0$, $y>0$, $z>0$ ).

**Розв'язання**. Складемо функцію Лагранжа:

$$F\left(x,\ y,\ z;\ \lambda,\ \mu\right) = xy + yz + \lambda\left(x^2 + y^2 - 2\right) + \mu\left(y + z - 2\right)$$

і запишемо систему: $\begin{cases} F'_x = y + 2\lambda x = 0 \quad , \\ F'_y = x + z + 2\lambda y + \mu = 0, \\ F'_z = y + \mu = 0 \quad , \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 2 = 0 \quad , \\ F'_\mu = y + z - 2 = 0 \quad . \end{cases}$

Знайдемо числа $\lambda$, $\mu$ і координати стаціонарної точки: $x_0=y_0=z_0=1$, $\lambda = -1/2$, $\mu = -1$.

Запишемо другий диференціал

$$d^2F\left(M_0,\ \lambda,\ \mu\right) = 2\lambda\left(dx^2 + dy^2\right) + 2dxdy + 2dydz.$$

При $\lambda = -1/2$ маємо: $d^2F = -\left(dx^2 + dy^2\right) + 2dxdy + 2dydz$.

З рівнянь зв'язку: $\begin{cases} 2xdx + 2ydy = 0 \\ dy + dz = 0 \end{cases}$ у точці $M_0$ (1,1,1)

$$\begin{cases} 2dx + 2dy = 0 \\ dy + dz = 0 \end{cases}$$

визначаємо, що $dz = -dy$, $dx = -dy$. Тому

$$d^2\Phi = -dy^2 - dy^2 - 2dy^2 - 2dy^2 = -6dy^2 < 0\,.$$

Отже, у точці $M_0$ (1,1,1) функція $u$ має умовний максимум, причому $u_{\max} = 2$.

*Примітка 1.* Припустимо, треба знайти найбільше і найменше значення функції $u = f(M)$ в обмеженій замкнутій області *D*. Для цього потрібно знайти всі внутрішні точки можливого екстремуму і значення функції в них. Потім знайти точки можливого умовного екстремуму на границі області *D* і значення функції в них. Порівняти всі знайдені значення. Найбільше (найменше) з усіх значень і буде найбільшим (найменшим) значенням функції в області *D*.

*Примітка 2.* Деякі задачі геометричного характеру, у яких треба знайти оптимальні значення якихось величин, можна розв'язувати як задачі на умовний екстремум.

**Приклад 3**. На площині $3x - 2z = 0$ знайти точку, сума квадратів відстаней якої від двох заданих точок $A(1,\ 1,\ 1)$ і $B(2,\ 3,\ 4)$ була б найменшою.

**Розв'язання.** Нехай $M(x,\ y,\ z)$ – точка, яку треба знайти. Побудуємо функцію

$$u = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2,$$

що визначає суму квадратів відстаней точки *M* від точок *A* і *B*. Після очевидних перетворень одержимо

$$u = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6x - 8y - 10z + 32\,.$$

**Далі розв'язуємо задачу на умовний екстремум функції**

$$u = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6x - 8y - 10z + 32, \text{ якщо } 3x - 2z = 0.$$

Складемо функцію Лагранжа

$$F(x,\ y,\ z;\ \lambda) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6x - 8y - 10z + 32 + \lambda(3x - 2z)$$

і запишемо систему

$$\begin{cases} F'_x = 4x - 6 + 3\lambda = 0, \\ F'_y = 4y - 8 = 0 \quad, \\ F'_z = 4z - 10 - 2\lambda = 0, \\ F'_\lambda = 3x - 2z = 0 \quad. \end{cases}$$

Розв’язуючи цю систему, знаходимо $\lambda = -2/13$ і стаціонарну точку $M_0\left(\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26}\right)$. Оскільки ця точка єдина, вона і є шуканою, що випливає із самого змісту задачі, а отже, достатні умови перевіряти не треба.

## 9.6. Заміна змінних у диференціальних виразах

Задача заміни змінних полягає в тому, що потрібно формули, які містять функції і їхні похідні, перетворити в еквівалентні їм вирази щодо нових змінних.

### 9.6.1. Функції однієї змінної

Нехай ми маємо деякий вираз, що містить незалежну змінну *x*, функцію від неї *y* і похідні від *y* по *x* різних порядків:

$$W = F\left(x, y, y'_x, y''_{xx}, \ldots\right).$$

Потрібно перейти в цьому виразі до новим змінних – незалежної змінної *t* і функції від неї *u*, з якими старі змінні *x* і *y* пов'язані певними співвідношеннями. Ці співвідношення називаються формулами перетворення. За допомогою цих формул потрібно подати *W* як функцію від *t* і *u* і похідних від *u* по *t*.

*Заміна незалежної змінної*

а) Нехай формула перетворення розв’язана щодо старої змінної *x*: $x = \varphi(t)$.

У цьому випадку за незалежну змінну береться нова змінна *t*, а *x* розглядається як функція цієї змінної (прямий метод). Оскільки $y = f(x)$, а $x = \varphi(t)$, то *y* буде складною функцією від *t*. За правилом диференціювання складної функції маємо

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \qquad y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{x'_t y''_{tt} - y'_t x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3},$$

$$y'''_{xxx} = \left(y''_{xx}\right)'_x = \frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t} = \frac{x'_t\left(x'_t y'''_{ttt} - y'_t x'''_{ttt}\right) - 3x''_{tt}\left(x'_t y''_{tt} - y'_t x''_{tt}\right)}{\left(x'_t\right)^5}, \ldots$$

Отримані вирази підставляємо в *W*:

$$W = \Phi\left(t, y, y'_t, y''_{tt}, \ldots\right).$$

б) Якщо формула перетворення дана у вигляді, нерозв'язаному відносно $x$:

$$\psi(x,t)=0,$$

то задача, власне кажучи, розв'язується так само, лише похідні $x'_t,\ x''_{tt},\ldots$ обчислюються за правилами диференціювання неявних функцій.

*Заміна незалежної змінної та функції*

а) Формули перетворення розв'язані щодо старих змінних:

$$\begin{cases} x=\varphi(t,u), \\ y=\psi(t,u). \end{cases}$$

Якщо $y=f(x)$, то $u$ буде функцією $t$, а тоді $x$ і $y$ будуть складними функціями від $t$. Нову змінну $t$ беремо за незалежну змінну (прямий метод).

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\ \text{де}\ x'_t=\varphi'_t+\varphi'_u\cdot u'_t,\ y'_t=\psi'_t+\psi'_u\cdot u'_t\ .$$

Отже, $$y'_x=\frac{\psi'_t+\psi'_u\cdot u'_t}{\varphi'_t+\varphi'_u\cdot u'_t};$$

$$y''_{xx}=\frac{\left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t}=\frac{\left(\varphi'_t+\varphi'_u\cdot u'_t\right)\left(\psi''_{tt}++2\psi''_{tu}\cdot u'_t+\psi''_{uu}\left(u'_t\right)^2+\psi'_u\cdot u''_{tt}\right)}{\left(\varphi'_t+\varphi'_u\cdot u'_t\right)^3}-$$

$$-\frac{\left(\psi'_t+\psi'_u\cdot u'_t\right)\left(\varphi''_{tt}+2\varphi''_{tu}\cdot u'_t+\varphi''_{uu}\left(u'_t\right)^2+\varphi'_u\cdot u''_{tt}\right)}{\left(\varphi'_t+\varphi'_u\cdot u'_t\right)^3};\ldots$$

б) Формули перетворення розв'язані щодо нових змінних

$$t=\alpha(x,y),\ u=\beta(x,y).$$

За незалежну змінну беремо стару змінну $x$ (обернений метод), $t$ і $u$ будуть складними функціями змінної $x$:

$$\begin{cases} t'_x=\alpha'_x+\alpha'_y\cdot y'_x \\ u'_x=\beta'_x+\beta'_y\cdot y'_x \end{cases}\Rightarrow u'_t=\frac{u'_x}{t'_x}=\frac{\beta'_x+\beta'_y\cdot y'_x}{\alpha'_x+\alpha'_y\cdot y'_x}.\ \text{Звідси}\ y'_x=\frac{\alpha'_x u'_t-\beta'_x}{\beta'_y-\alpha'_y u'_t}\ \text{і т.п.}$$

Якщо формули перетворення не розв'язані щодо змінних, тобто

$$\Phi(x,y,t,u)=0,\ \Psi(x,y,t,u)=0,$$

то похідні обчислюються за правилами диференціювання неявних функцій. При цьому можна користуватися як прямим, так і оберненим методами.

**Приклад 1.** Перетворити рівняння

$$x^2 y''_{xx} + xy'_x + y = 0, \text{ розглядаючи } x = e^t.$$

**Розв'язання**. За незалежну змінну візьмемо *t* (прямий метод). Тоді

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = y'_t \cdot e^{-t}, \; y''_{xx} = \left(y'_t \cdot e^{-t}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \left(y''_{tt}e^{-t} - y'_t e^{-t}\right)e^{-t} = e^{-2t}\left(y''_{tt} - y'_t\right).$$

Рівняння набуває вигляду: $y''_{tt} + y = 0$.

**Приклад 2.** Похідні оберненої функції.

**Розв'язання**. Незалежна змінна $x$ і функція від неї $y$ міняються ролями:

$$\begin{cases} u = x, \\ t = y, \; u = u(t). \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{x'_y}, \; y''_{xx} = \left(\frac{1}{x'_y}\right)'_y \cdot \frac{1}{x'_y} = -\frac{x''_{yy}}{\left(x'_y\right)^3},$$

$$y'''_{xxx} = \left(-\frac{x''_{yy}}{\left(x'_y\right)^3}\right)'_y \cdot \frac{1}{x'_y} = -\frac{x'_y x'''_{yyy} - x''_{yy} \cdot 3x''_{yy}}{\left(x'_y\right)^5}, \ldots$$

**Приклад 3.** Перехід до полярних координат: $x = \rho\cos\varphi, \; y = \rho\sin\varphi$.

**Розв'язання.** Оскільки $y = f(x)$, то й $\rho = \rho(\varphi)$.

$$y'_x = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{\rho'_\varphi \sin\varphi + \rho\cos\varphi}{\rho'_\varphi \cos\varphi - \rho\sin\varphi}; \qquad y''_{xx} = \left(\frac{\rho'_\varphi \sin\varphi + \rho\cos\varphi}{\rho'_\varphi \cos\varphi - \rho\sin\varphi}\right)'_\varphi \frac{1}{x'_\varphi} =$$

$$= \frac{\left(\rho'_\varphi \cos\varphi - \rho\sin\varphi\right)\left(\rho''_{\varphi\varphi}\sin\varphi + 2\rho'_\varphi\cos\varphi - \rho\sin\varphi\right)}{\left(\rho'_\varphi\cos\varphi - \rho\sin\varphi\right)^3} -$$

$$-\frac{\left(\rho'_\varphi \sin\varphi + \rho\cos\varphi\right)\left(\rho''_{\varphi\varphi}\cos\varphi - 2\rho'_\varphi\sin\varphi - \rho\cos\varphi\right)}{\left(\rho'_\varphi\cos\varphi - \rho\sin\varphi\right)^3} = \frac{\rho^2 + 2\left(\rho'_\varphi\right)^2 - \rho\rho''_{\varphi\varphi}}{\left(\rho'_\varphi\cos\varphi - \rho\sin\varphi\right)^3}, \ldots$$

### 9.6.2. Функції декількох змінних

Нехай деякий вираз містить незалежні змінні $x,y,\ldots$, функцію від них $z$, а також частинні похідні $z$ по її аргументам до певного порядку:

$$W = F\left( x,y,\ldots,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\ldots,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ldots \right).$$

Потрібно перейти до нових змінних, які пов'язані зі старими формулами перетворення. Для простоти обмежимося випадком двох незалежних змінних.

*Заміна незалежних змінних*

а) Припустимо, що формули перетворення розв’язані щодо старих змінних:

$$x=\varphi\left(t,s\right),\ y=\psi\left(t,s\right).$$

У цьому випадку вважаємо незалежними змінними $t$ і $s$, а функцію $z$ диференціюємо як складну функцію від $t$ і $s$ (прямий метод). Тоді

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial s}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}. \end{cases}$$

Розв’язуючи цю систему лінійних рівнянь, знаходимо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\dfrac{\partial y}{\partial s}}{\dfrac{\partial x}{\partial t}\dfrac{\partial y}{\partial s}-\dfrac{\partial x}{\partial s}\dfrac{\partial y}{\partial t}}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial t}-\dfrac{\dfrac{\partial y}{\partial t}}{\dfrac{\partial x}{\partial t}\dfrac{\partial y}{\partial s}-\dfrac{\partial x}{\partial s}\dfrac{\partial y}{\partial t}}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial s}; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\dfrac{\partial x}{\partial s}}{\dfrac{\partial x}{\partial t}\dfrac{\partial y}{\partial s}-\dfrac{\partial x}{\partial s}\dfrac{\partial y}{\partial t}}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial t}+\dfrac{\dfrac{\partial x}{\partial t}}{\dfrac{\partial x}{\partial t}\dfrac{\partial y}{\partial s}-\dfrac{\partial x}{\partial s}\dfrac{\partial y}{\partial t}}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial s}. \end{cases}$$

Останні вирази можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=A\dfrac{\partial z}{\partial t}+B\dfrac{\partial z}{\partial s}; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=C\dfrac{\partial z}{\partial t}+D\dfrac{\partial z}{\partial s}. \end{cases}$$

Коефіцієнти *A, B, C, D* залежать від незалежних змінних *t, s*, але не залежать від функції *z*. Тому ці формули можна застосувати для обчислення похідних 2-го порядку, підставляючи відповідно $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ замість функції *z*. Наприклад,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + B\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) =$$

$$A\frac{\partial}{\partial t}\left(A\frac{\partial z}{\partial t} + B\frac{\partial z}{\partial s}\right) + B\frac{\partial}{\partial s}\left(A\frac{\partial z}{\partial t} + B\frac{\partial z}{\partial s}\right) =$$

$$= A\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial t} + B\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial B}{\partial t}\right) +$$

$$+B\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial s} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial s} + B\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial B}{\partial s}\right).$$

б) Якщо формули перетворення розв’язані щодо нових змінних

$$t = \alpha(x,y),\ s = \beta(x,y),$$

то зручніше використати обернений метод, коли незалежними змінними вважаються старі змінні *x* і *y*, а функція *z* є складною функцією від *x* і *y* за посередництвом *t, s*. Тоді

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x}; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial y}. \end{cases}$$

Для похідних другого порядку маємо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)\cdot\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial t\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial t\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

і т.д.

У загальному випадку, коли формули перетворення не розв’язані відносно змінних:

$$\Phi(x,y,t,s)=0,\ \Psi(x,y,t,s)=0,$$

можна користуватися як прямим, так і оберненим методом, обчислюючи частинні похідні за правилами диференціювання неявних функцій.

в) Метод обчислення диференціалів

Цей метод може бути використаний у двох варіантах: як прямий метод і як обернений. При прямому методі ми безпосередньо одержуємо $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},\ldots$а для знаходження похідних $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ldots$треба розв'язувати системи рівнянь, що ускладнює застосування цього методу на практиці. На практиці зручніше використовувати обернений метод, коли ми відразу визначаємо похідні за старими змінними.

Отже, нехай незалежними змінними є $x$ і $y$, а новими змінними є функції $x$ і $y$: $t=\alpha(x,y)$, $s=\beta(x,y)$. Подамо $dz$ подвійно, користуючись інваріантістю форми першого диференціала:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{\partial z}{\partial t}dt+\frac{\partial z}{\partial s}ds\,.$$

Виразимо $dt$ і $ds$ через $dx$ і $dy$, використовуючи формули перетворення:

$$\begin{cases} dt=\dfrac{\partial t}{\partial x}dx+\dfrac{\partial t}{\partial y}dy, \\ ds=\dfrac{\partial s}{\partial x}dx+\dfrac{\partial s}{\partial y}dy. \end{cases}$$

Підставимо в $dz$

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{\partial z}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial x}dx+\frac{\partial t}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial z}{\partial s}\left(\frac{\partial s}{\partial x}dx+\frac{\partial s}{\partial y}dy\right)$$

і прирівняємо коефіцієнти при $dx$ і $dy$ в обох частинах рівності:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial y}. \end{cases}$$

Запишемо тепер вираз для $d^2z$, пам'ятаючи, що незалежними змінними є $x$ і $y$:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(dt)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial s}dtds+\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}(ds)^2+\frac{\partial z}{\partial t}d^2t+\frac{\partial z}{\partial s}d^2s.$$

Знаходимо $d^2t$ й $d^2s$:

$$d^2t=\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 t}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}(dy)^2,$$

$$d^2s=\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Підставимо в $d^2z$: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2=$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\left(\frac{\partial t}{\partial x}dx+\frac{\partial t}{\partial y}dy\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial s}\left(\frac{\partial t}{\partial x}dx+\frac{\partial t}{\partial y}dy\right)\left(\frac{\partial s}{\partial x}dx+\frac{\partial s}{\partial y}dy\right)+$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\left(\frac{\partial s}{\partial x}dx+\frac{\partial s}{\partial y}dy\right)^2+\frac{\partial z}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 t}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}(dy)^2\right)+$$

$$+\frac{\partial z}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}(dy)^2\right).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $(dx)^2$, одержимо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial s}\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}.$$

При $dxdy$ – $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. При $dy^2$ – $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

**Приклад.** Перетворити вираз $W=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ в полярні координати $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$.

**Розв'язання**.

1. Прямий метод: незалежними змінними вважаються $\rho$ і $\varphi$. Тому

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial \rho}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho},\\ \frac{\partial z}{\partial \varphi}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}.\end{cases}$$

З формул перетворення маємо:

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi,\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi.$$

Тоді

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial \rho} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi, \\ \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\rho\sin\varphi + \dfrac{\partial z}{\partial y}\rho\cos\varphi. \end{cases}$$

Для визначення $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ маємо систему лінійних рівнянь. Звідки

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial \rho}\cos\varphi - \dfrac{\sin\varphi}{\rho}\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial \rho}\sin\varphi + \dfrac{\cos\varphi}{\rho}\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Останні рівності можна записати так:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = A\dfrac{\partial z}{\partial \rho} + B\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = C\dfrac{\partial z}{\partial \rho} + D\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}, \end{cases}$$

де $A = \cos\varphi,\ B = -\dfrac{\sin\varphi}{\rho},\ C = \sin\varphi,\ D = \dfrac{\cos\varphi}{\rho}.$

Підставляючи в ці формули замість $z$ відповідно $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, одержимо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = A\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + B\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) =$$

$$= A\frac{\partial}{\partial \rho}\left(A\frac{\partial z}{\partial \rho} + B\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) + B\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(A\frac{\partial z}{\partial \rho} + B\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) =$$

$$= A\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\partial A}{\partial \rho} + B\frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial B}{\partial \rho}\right) +$$

$$+ B\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\partial A}{\partial \varphi} + B\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial B}{\partial \varphi}\right).$$

Заміняючи коефіцієнти $A$ і $B$ і їхні похідні, остаточно знайдемо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}-2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}+$$

$$+2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\frac{\partial z}{\partial\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho}.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=C\frac{\partial}{\partial\rho}\left(C\frac{\partial z}{\partial\rho}+D\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)+B\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(C\frac{\partial z}{\partial\rho}+D\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)=$$

$$=\sin^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}+2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\frac{\partial z}{\partial\varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho}.$$

Отже, $W=\dfrac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial z}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}$.

2. Обернений метод: незалежними змінними вважаються $x$ і $y$. Тоді

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}.\end{cases}$$

Для знаходження похідних $\dfrac{\partial\rho}{\partial x},\dfrac{\partial\rho}{\partial y},\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ можна розв'язати формули перетворення відносно $\rho$ та $\varphi$. Але можна скористатися методами диференціювання неявних функцій, не розв'язуючи рівнянь.

Дійсно, диференціюємо формули перетворення за $x$ і $y$, вважаючи $\rho$ та $\varphi$ функціями від $x$ та $y$:

$$\begin{cases}1=\cos\varphi\dfrac{\partial\rho}{\partial x}-\rho\sin\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\\[2mm]0=\sin\varphi\dfrac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}\dfrac{\partial\rho}{\partial x}=\cos\varphi,\\[2mm]\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=-\dfrac{\sin\varphi}{\rho},\end{array}$$

$$\begin{cases}0=\cos\varphi\dfrac{\partial\rho}{\partial y}-\rho\sin\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\\[2mm]1=\sin\varphi\dfrac{\partial\rho}{\partial y}+\rho\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}\dfrac{\partial\rho}{\partial y}=\sin\varphi,\\[2mm]\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{\cos\varphi}{\rho}.\end{array}$$

Підставляючи ці значення, знайдемо:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos\varphi \dfrac{\partial z}{\partial \rho} - \dfrac{\sin\varphi}{\rho} \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \sin\varphi \dfrac{\partial z}{\partial \rho} + \dfrac{\cos\varphi}{\rho} \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{cases}.$$

Обчислюємо $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\cos\varphi \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\cos\varphi +$$

$$+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\cos\varphi \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right) = \cos^2\varphi \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \varphi} +$$

$$+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\sin\varphi \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\sin\varphi +$$

$$+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\frac{\cos\varphi}{\rho} = \sin^2\varphi \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \varphi} -$$

$$-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi}.$$

Тому $W = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial z}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}$.

3. Метод обчислення диференціалів

Незалежними змінними вважаємо $x$ та $y$ (обернений метод)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial z}{\partial \varphi}d\varphi.$$

З формул перетворення знаходимо $d\rho$ та $d\varphi$:

$$\begin{cases} dx = \cos\varphi d\rho - \rho\sin\varphi d\varphi \\ dy = \sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi d\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} d\rho = \cos\varphi dx + \sin\varphi dy \\ d\varphi = \left(-\sin\varphi dx + \cos\varphi dy\right)\frac{1}{\rho} \end{array};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial \rho}\left(\cos\varphi dx + \sin\varphi dy\right) + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\left(-\sin\varphi dx + \cos\varphi dy\right)\frac{1}{\rho}.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $dx$ і $dy$ в обох частинах рівності:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos\varphi \dfrac{\partial z}{\partial \rho} - \dfrac{\sin\varphi}{\rho} \dfrac{\partial z}{\partial \varphi}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \sin\varphi \dfrac{\partial z}{\partial \rho} + \dfrac{\cos\varphi}{\rho} \dfrac{\partial z}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Запишемо вираз для $d^2z$, пам'ятаючи, що незалежними змінними є *x* та *y*:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}(d\rho)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \rho\varphi}d\rho d\varphi + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}(d\varphi)^2 + \frac{\partial z}{\partial \rho}d^2\rho + \frac{\partial z}{\partial \varphi}d^2\varphi.$$

Знаходимо $d^2\rho$ і $d^2\varphi$:

$$d^2\rho = -\sin\varphi d\varphi dx + \cos\varphi d\varphi dy = \left(-\sin\varphi dx + \cos\varphi dy\right)\left(-\sin\varphi dx + \cos\varphi dy\right)\frac{1}{\rho} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(\sin^2\varphi(dx)^2 - 2\sin\varphi\cos\varphi dxdy + \cos^2\varphi(dy)^2\right);$$

$$d^2\varphi = \left(-\cos\varphi d\varphi dx - \sin\varphi d\varphi dy\right)\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^2}d\rho\left(-\sin\varphi dx + \cos\varphi dy\right) =$$

$$= \left(-\cos\varphi dx - \sin\varphi dy\right)\left(-\sin\varphi dx + \cos\varphi dy\right)\frac{1}{\rho^2} - \left(-\sin\varphi dx + \cos\varphi dy\right)\left(\cos\varphi dx + \right.$$

$$\left. + \sin\varphi dy\right)\frac{1}{\rho^2} = 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}(dx)^2 + 2\frac{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{\rho^2}dxdy - 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}(dy)^2.$$

Підставимо отримані значення у вираз для $d^2z$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}\left(\cos\varphi dx + \sin\varphi dy\right)^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \varphi}\left(\cos\varphi dx + \sin\varphi dy\right)\left(-\sin\varphi dx + \cos\varphi dy\right)\frac{1}{\rho} +$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\left(-\sin\varphi dx + \cos\varphi dy\right)^2\frac{1}{\rho^2} +$$

$$+\frac{\partial z}{\partial \rho}\left(\sin^2\varphi(dx)^2 - 2\sin\varphi\cos\varphi dxdy + \cos^2\varphi(dy)^2\right)\frac{1}{\rho} +$$

$$+\frac{\partial z}{\partial \varphi}\left(2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}(dx)^2 + 2\frac{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{\rho^2}dxdy - 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}(dy)^2\right).$$

Порівнюємо коефіцієнти в обох частинах рівності при $(dx)^2$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}\cos^2\varphi-2\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\varphi}+\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}+\frac{\sin^2\varphi}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho}+2\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2}\frac{\partial z}{\partial\varphi}.$$

При $(dy)^2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}\sin^2\varphi+2\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\varphi}+\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}+$$

$$+\frac{\cos^2\varphi}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho}-2\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2}\frac{\partial z}{\partial\varphi}.$$

Звідси $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho}.$$

*Загальний випадок заміни змінних*

У загальному випадку заміняються і незалежна змінна, і функція. Для розв’язання задачі застосуємо прямий і обернений методи та метод обчислення диференціалів. Якщо формули перетворення розв’язані відносно старих змінних

$$x=\varphi(t,s,u),\ y=\psi(t,s,u),\ z=\omega(t,s,u),$$

то вважаємо $t$ і $s$ незалежними змінними (прямий метод). Оскільки $z=f(x,y)$, то $u=u(t,s)$. Обчислюючи похідні від $x,y,z$ по новим змінним, потрібно враховувати залежність $u$ від $t$ і $s$.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial t}=\dfrac{\partial\omega}{\partial t}+\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial t},\\ \dfrac{\partial x}{\partial t}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial t},\\ \dfrac{\partial y}{\partial t}=\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial t},\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial s}=\dfrac{\partial\omega}{\partial s}+\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial s},\\ \dfrac{\partial x}{\partial s}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial s},\\ \dfrac{\partial y}{\partial s}=\dfrac{\partial\psi}{\partial s}+\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial s}.\end{cases}$$

З огляду на те, що $z$ є складною функцією від $t$ і $s$, одержимо

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial t}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}=\dfrac{\partial\omega}{\partial t}+\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial t},\\ \dfrac{\partial z}{\partial s}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}=\dfrac{\partial\omega}{\partial s}+\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial s}.\end{cases}$$

Для визначення $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ маємо систему лінійних рівнянь.

Розв'язуючи її, знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$. Щоб одержати вирази для похідних другого порядку, буде використаний той самий прийом, що й при заміні тільки незалежних змінних.

Якщо формули перетворення розв'язані щодо нових змінних

$$t=\alpha(x,y,z),\ s=\beta(x,y,z),\ u=\gamma(x,y,z),$$

то звичайно використовують обернений метод, коли незалежними змінними вважаються $x$ та $y$:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{\partial\gamma}{\partial x}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}=\frac{\partial\gamma}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y},\end{cases}\ \text{де}\ \begin{matrix}\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y},\\ \frac{\partial s}{\partial x}=\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial s}{\partial y}=\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}.\end{matrix}$$

У результаті випливають лінійні відносно $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ рівняння, з яких ці похідні виражаються через $x,y,z,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial s}$.

Для обчислення похідних другого порядку диференціюємо вираз для $\frac{\partial z}{\partial x}$ (або $\frac{\partial z}{\partial y}$) знову по $x$ або $y$, розглядаючи $\frac{\partial u}{\partial t}$ і $\frac{\partial u}{\partial s}$ як функції від $x$ та $y$ за посередництвом $t$ і $s$ і т.п.

Нарешті, можна використати і метод обчислення диференціалів (див. приклад).

**Приклад.** Перетворити рівняння $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$ до нових змінних $t, s, i,$ враховуючи що $x=t,\ y=\frac{t}{1+ts},\ z=\frac{t}{1+tu}$.

**Розв'язання**

а) Прямий метод. Незалежні змінні $t,s$, а $u=u(t,s)$:

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{1}{(1+ts)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{-t^2}{(1+ts)^2}.$$

З іншого боку,

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{1-t^2\dfrac{\partial u}{\partial t}}{(1+tu)^2},\ \frac{\partial z}{\partial s}=-\frac{t^2}{(1+tu)^2}\frac{\partial u}{\partial s}.$$

Прирівнюючи вирази для $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial s}$, знайдемо:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{1}{(1+ts)^2}=\dfrac{1-t^2\dfrac{\partial u}{\partial t}}{(1+tu)^2},\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{-t^2}{(1+ts)^2}=-\dfrac{t^2}{(1+tu)^2}\dfrac{\partial u}{\partial s}.\end{cases}\ \text{Звідси}\ \begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{(1+tu)^2}\left(1-t^2\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial u}{\partial s}\right),\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{(1+ts)^2}{(1+tu)^2}\dfrac{\partial u}{\partial s}.\end{cases}$$

Підставляємо в рівняння:

$$t^2\frac{1}{(1+tu)^2}\left(1-t^2\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial s}\right)+\frac{t^2}{(1+ts)^2}\frac{(1+ts)^2}{(1+tu)^2}\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{t^2}{(1+tu)^2}.$$

Після скорочення одержимо: $\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$ .

б) Обернений метод. Незалежні змінні $x$ та $y$, а $u$ – складна функція від $x$ та $y$ за допомогою $t$, $s$. Для зручності розв'яжемо формули перетворення відносно $t, s, u$:

$$t=x,\ s=\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\ u=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}.$$

Диференціюємо по $x$ і по $y$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial s}\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{x^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\frac{\partial u}{\partial s}=-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Звідки $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z^2\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial u}{\partial s}\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z^2}{y^2}\dfrac{\partial u}{\partial s}$ і т.п.

в) Метод обчислення диференціалів. Незалежні змінні $x, y$.

$$du=\frac{\partial u}{\partial t}dt+\frac{\partial u}{\partial s}ds=-\frac{1}{z^2}dz+\frac{1}{x^2}dx;$$

$$dt=dx,\ ds=-\frac{1}{y^2}dy+\frac{1}{x^2}dx.$$

Отже, $\frac{\partial u}{\partial t}dx+\frac{\partial u}{\partial s}\left(-\frac{1}{y^2}dy+\frac{1}{x^2}dx\right)=-\frac{1}{z^2}dz+\frac{1}{x^2}dx$.

Звідки $dz=z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial s}\right)dx+\frac{z^2}{y^2}\frac{\partial u}{\partial s}dy$.

Але $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Тому $\frac{\partial z}{\partial x}=z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial s}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y^2}\frac{\partial u}{\partial s}$ і т.п.

## 9.7. Геометричне застосування диференціального числення функції багатьох змінних

Нехай маємо криву лінію $L$ у просторі, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\chi(t), \end{cases} \tag{9.12}$$

де функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ – диференційовані. Тоді в кожній точці $M_0$ ($x_0$, $y_0$, $z_0$) $\in L$, у якій $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ одночасно не перетворюються на нуль, можна записати рівняння дотичної прямої до цієї кривої. Ці рівняння мають вигляд:

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\chi'(t_0)}. \tag{9.13}$$

Тут $t_0$ – значення параметра, що відповідає точці $M_0$, тобто $x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\psi(t_0)$, $z_0=\chi(t_0)$.

Площина, що проходить через точку $M_0$ перпендикулярно до дотичної прямої, називається *нормальною площиною*. Її рівняння має вигляд:

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\chi'(t_0)(z-z_0)=0. \tag{9.14}$$

Розглянемо тепер поверхню, задану рівнянням виду

$$F(x,y,z)=0. \tag{9.15}$$

Площина, у якій розташовані всі дотичні прямі до ліній на поверхні, що проходить через дану її точку $M_0$ ($x_0$, $y_0$, $z_0$), називається *дотичною площиною* до поверхні в точці $M_0$.

Точка $M_0$ називається звичайною (неособливою) точкою поверхні (9.15), якщо в цій точці $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ і $\frac{\partial F}{\partial z}$ існують і неперервні, причому хоча б одна з них відмінна від нуля.

Якщо точка $M_0$ – звичайна, то в ній існує, причому єдина, дотична площина, рівняння якої буде мати вигляд:

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}(z-z_0)=0. \qquad (9.16)$$

Пряма, що проходить через точку $M_0$ поверхні (9.15) перпендикулярно до дотичної площини в цій точці, називається *нормаллю до поверхні*. Рівняння цієї прямої визначають в такий спосіб:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}}. \qquad (9.17)$$

Зокрема, якщо поверхня задана явно, тобто рівнянням $z=f(x, y)$, де $f(x, y)$ – диференційована функція в точці $(x_0, y_0)$ і $f(x_0, y_0) = z_0$, то рівняння дотичної площини записується так:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}(y-y_0)=(z-z_0), \qquad (9.18)$$

а рівняння нормалі:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{-1}. \qquad (9.19)$$

**Приклад 1**. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=2x^2+4y^2$ в точці $M_0$ (2, 1, 12).

**Розв’язання**

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=8y;$$

при $x=2$, $y=1$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}=8, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}=8.$$

Отже, рівняння дотичної площини, згідно з (9.18), буде мати вигляд:

$$8(x-2)+8(y-1)=z-12 \quad \text{або}$$

$$8x+8y-z+12=0.$$

Рівняння нормалі:

$$\frac{x-2}{8}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-12}{-1}.$$

**Приклад 2**. Провести до поверхні $x^2+2y^2+z^2=1$ дотичну площину, яка паралельна площині $x-y+2z=0$.

**Розв'язання**. Запишемо вектор нормалі до даної площини: $\vec{n}_1(1;-1;2)$.

Знайдемо координати вектора нормалі до даної поверхні в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Це будуть $\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial z}$, обчислені в точці $M_0$. У даному прикладі $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1$.

Отже, $\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}=2x_0,\ \frac{\partial F(M_0)}{\partial y}=4y_0,\ \frac{\partial F(M_0)}{\partial z}=2z_0$.

Запишемо умову колінеарності вектора $\vec{n}_1$ вектору нормалі до поверхні в точці $M_0$:

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{-1}=\frac{2z_0}{2}=\lambda.$$

Звідси знайдемо $x_0=\frac{\lambda}{2};\ y_0=-\frac{\lambda}{4};\ z_0=\lambda.$

Оскільки точка $M_0$ лежить на поверхні, то її координати задовольняють рівнянню поверхні, тобто $\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^2}{8}+\lambda^2=1$, звідки

$\lambda=\pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$ и $x_0=\pm\sqrt{\frac{2}{11}};\ y_0=\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}};\ z_0=\pm2\sqrt{\frac{2}{11}}.$

Запишемо тепер рівняння дотичної площини в точці $M_0\left(\sqrt{\frac{2}{11}},-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}},2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)$:

$$2\sqrt{\frac{2}{11}}\left(x-\sqrt{\frac{2}{11}}\right)-2\sqrt{\frac{2}{11}}\left(y+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}\right)+4\sqrt{\frac{2}{11}}\left(z-2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=0$$

або

$$x-y+2z-\sqrt{\frac{11}{2}}=0.$$

Аналогічно для точки $\left(-\sqrt{\frac{2}{11}},\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}},-2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)$ одержимо рівняння дотичної площини: $x-y+2z+\sqrt{\frac{11}{2}}=0.$

Якщо просторова крива задана як перетинання двох поверхонь, то для складання рівнянь дотичної і нормальної площини до неї можна перейти до параметричного способу завдання цієї кривої або записати рівняння дотичних площин до двох заданих поверхонь у даній точці, тоді лінія перетину цих площин і буде дотичною.

**Приклад 3.** Записати рівняння дотичної та нормальної площини до лінії перетинання поверхонь

$2x^2+3y^2+z^2=47$ і $x^2+2y^2=z$ в точці $M_0(-2;1;6)$.

**Розв'язання**. *Перший спосіб*. Оскільки точка $M_0$ лежить в II октанті, то $x\le 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

Введемо параметр $t$: $z=t>0$, тоді із системи

$$\begin{cases}2x^2+3y^2=47-t^2\\ x^2+2y^2=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\sqrt{t^2+2t-47}\\ x=-\sqrt{94-3t-2t^2}\end{cases}.$$

Отже, лінія перетину задається параметричними рівняннями

$$\begin{cases}y=\sqrt{t^2+2t-47},\\ x=-\sqrt{94-3t-2t^2},\\ z=t.\end{cases}$$

Точці $M_0$ відповідає $t_0=6$. Знайдемо:

$$x'_t\Big|_{t_0}=\frac{3+4t}{2\sqrt{94-3t-2t^2}}\Bigg|_{t_0}=\frac{27}{4},\ y'_t\Big|_{t_0}=\frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-47}}\Bigg|_{t_0}=7,\ z'_t\Big|_{t_0}=1.$$

Тоді рівняння дотичної за формулою (9.13) має вигляд

$$\frac{x+2}{27}=\frac{y-1}{28}=\frac{z-6}{4}$$

і нормальної площини за формулою (9.14):

$27(x+2)+28(y-1)+4(z-6)=0$, тобто $27x+28y+4z+2=0$.

*Другий спосіб*. Складемо рівняння дотичних площин до поверхонь $2x^2+3y^2+z^2=47$ і $x^2+2y^2=z$ в точці $M_0(-2;1;6)$:

$$\left.\frac{\partial F_1}{\partial x}\right|_{M_0}=4x|_{M_0}=-8;\quad \left.\frac{\partial F_1}{\partial y}\right|_{M_0}=6y|_{M_0}=6;\quad \left.\frac{\partial F_1}{\partial z}\right|_{M_0}=2z|_{M_0}=12.$$

$$-8(x+2)+6(y-1)+12(z-6)=0.$$

$$8x-6y-12z+94=0 \text{ або } 4x-3y-6z+47=0.$$

Для 2-ї поверхні:

$$\left.\frac{\partial F_2}{\partial x}\right|_{M_0}=2x|_{M_0}=-4;\quad \left.\frac{\partial F_2}{\partial y}\right|_{M_0}=4y|_{M_0}=4;\quad \left.\frac{\partial F_2}{\partial z}\right|_{M_0}=-1.$$

Рівняння другої дотичної площини: $4x-4y+z+6=0$.

Дотична пряма – лінія перетину цих двох дотичних площин:

$$\begin{cases}4x-3y-6z+47=0,\\ 4x-4y+z+6=0.\end{cases}$$

Перейдемо до канонічних рівнянь:

$$\vec{s}=\lambda\cdot\left(\vec{N}_1\times\vec{N}_2\right)=\lambda\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -3 & -6\\ 4 & -4 & 1\end{vmatrix}=\lambda\left(-27\vec{i}-28\vec{j}-4\vec{k}\right).$$

Нехай $\lambda=-1$. Тоді $\vec{s}=\{27;28;4\}$.

Рівняння дотичної: $\dfrac{x+2}{27}=\dfrac{y-1}{28}=\dfrac{z-6}{4}$.

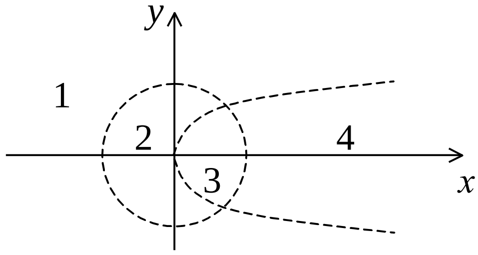
Результат той самий.

## Контрольні приклади до гл. 9

**Перш ніж приступитися до виконання індивідуального розрахункового завдання, читачеві рекомендується разом з нами розв'язати кілька типових задач, замінюючи знак $\boxed{*}$ необхідними числами і виразами.**

**Приклад 9.1.** Знайти область визначення функції $z=\dfrac{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}{\sqrt{x-y^2}}$.

**Розв'язання.** По-перше, знаменник не повинен обертатися в $\boxed{*}$, по-друге, підкореневий вираз повинен бути невід'ємним, по-третє, аргумент функції логарифм повинен бути $\boxed{*}$ (1 – більше нуля, 2 – менше нуля, 3 – більше одиниці). Отже, одержимо таку систему нерівностей: $\begin{cases} 1 - x^2 - y^2 > \boxed{*}, \\ x - y^2 > \boxed{*}. \end{cases}$




Рівняння $1 - x^2 - y^2 = \boxed{*}, x - y^2 = \boxed{*}$ є відповідно рівняннями кола та параболи. Зобразимо їх на площині та виберемо область $\boxed{*}$.

**Приклад 9.2.** Знайти повний диференціал функції $u = (xy)^z$.

**Розв'язання**. Повний диференціал обчислюємо за формулою

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Знайдемо частинні похідні:

$\frac{\partial u}{\partial x} = z(xy)^{\boxed{*}} \cdot y;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \boxed{*}(xy)^{\boxed{*}} \cdot x; \frac{\partial u}{\partial z} = (xy)^z \cdot \boxed{*}$. Підставивши отримані вирази в $du$, остаточно отримаємо:

$$du = z(xy)^{\boxed{*}} \cdot ydx + \boxed{*}(xy)^{\boxed{*}} \cdot xdy + \boxed{*}(xy)^z dz.$$

**Приклад 9.3.** Обчислити наближено $\sqrt{5 \cdot e^{0.02} + 2{,}03^2}$.

**Розв'язання**. Невідому величину потрібно розглядати як значення функції $z = \sqrt{5 \cdot e^x + y^{\boxed{*}}}$ при $x = 0{,}02,\ y = \boxed{*}$. Для розв'язання використаємо наближену рівність $\Delta z \approx dz$, тобто

$$z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx z(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

З огляду на те, що $x = x_0 + \Delta x,\ y = y_0 + \Delta y$, покладемо

$x_0 = 0, \Delta x = 0{,}02, y_0 = \boxed{*}, \Delta y = 0{,}03$.

Тоді $z(x_0, y_0) = 3; \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\boxed{*}}5e^x; \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\boxed{*})} = \frac{5}{6}; \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\boxed{*}}2y; \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,\boxed{*})} = \frac{2}{3}$.

Згідно з формулою одержимо:

$\sqrt{5 \cdot e^{0.02} + 2{,}03^2} \approx 3 + \frac{5}{6} \cdot 0{,}02 + \frac{2}{3} \cdot \boxed{*} = 3{,}04$.

**Приклад 9.4.** Знайти другі частинні похідні функції $z = \dfrac{y^2}{x^2}$.

**Розв'язання**. Знайдемо спочатку перші частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2y^2 \cdot \boxed{*};\; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2\boxed{*}}{x^2}.$$

Потім другі:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{6y^2}{x^{\boxed{*}}};\; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{2}{x^{\boxed{*}}};$$

змішана похідна: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \dfrac{\boxed{*}}{x^3}$.

**Приклад 9.5.** Знайти екстремум функції $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

**Розв'язання**. Згідно з необхідною умовою існування екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y = 0; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \boxed{*}y^2 - 6x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\left(8y^3 - 1\right) = 0; \\ x = 4y^2. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, знайдемо дві стаціонарні точки $M_1(0,0)$, $M_2\left(1;\boxed{*}\right)$.

Перевіримо достатню умову. Для цього обчислимо другі похідні в знайдених точках:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1} = 0;\; \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_1} = \boxed{*};\; \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_1} = 0.$$

Складемо визначник $\Delta_2(M_1) = \begin{vmatrix} 0 & \boxed{*} \\ \boxed{*} & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$, отже, у точці $M_1$ екстремуму функції немає.

Аналогічно знаходимо $\Delta_2(M_2) = \begin{vmatrix} 6 & \boxed{*} \\ -6 & \boxed{*} \end{vmatrix} = \boxed{*} > 0$ й $\Delta_1(M_2) = 6 > 0$, отже, у точці $M_2$ функція має мінімум.

$z_{\min} = z(M_2) = \boxed{*}$.

**Приклад 9.6.** Записати рівняння дотичної до лінії $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$ у точці $M_0\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{b\pi}{3}\right)$.

**Розв'язання**. Скористаємося рівнянням (9.13). Знайдемо $t_0$ із системи

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = a\cos t_0, \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sin t_0, \\ \frac{b\pi}{3} = bt_0 \end{cases} \Rightarrow t_0 = \boxed{*}.$$

Знайдемо похідні в точці $t_0$:

$x'(t_0) = -a\sin t_0 = \boxed{*}$; $y'(t_0) = a\cos t_0 = \boxed{*}$; $z'(t_0) = b$.

Тоді рівняння дотичної в точці $M_0$ мають вигляд:

$$\frac{x - \frac{a}{2}}{\boxed{*}} = \frac{y - \boxed{*}}{a/2} = \frac{z - \frac{b\pi}{3}}{b}.$$

## Лабораторна робота 9. Обчислення частинних похідних та повних диференціалів у системі Maple

**Завдання 1**

а) $u = \ln\left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz\right)$. Довести, що $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x + y + z}$;

б) $v = \operatorname{arctg}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$. Знайти повний диференціал функції $v$.

**Виконання**. Для обчислення частинних похідних використовується команда **diff(expr,x1$n1, x2$n2,…),** де **expr** – вираз, що залежить від змінних **x1, x2,** … , а **n1, n2** – порядки диференціювання по відповідним змінним.

а) Позначимо частинні похідні функції $u$ за змінними $x,y,z$ відповідно через $ux = \frac{\partial u}{\partial x}$, $uy = \frac{\partial u}{\partial y}$, $uz = \frac{\partial u}{\partial z}$, а їхню суму через $s = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$.

**>u:=ln(x^3+y^3+z^3-3*x*y*z);**

$$u := \ln\left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz\right);$$

> **ux:=diff(u,x);**

$$ux := \frac{3x^2 - 3yz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz};$$

> **uy:=diff(u,y);**

$$uy := \frac{3y^2 - 3xz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz};$$

> **uz:=diff(u,z);**

$$uz := \frac{3z^2 - 3xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz};$$

> **s:=simplify(ux+uy+uz);**

$$s := \frac{3}{x + y + z}.$$

б) Позначимо частинні похідні функції $v$ по змінним $x, y$ відповідно $vx = \frac{\partial v}{\partial x}$, $vy = \frac{\partial v}{\partial y}$, а повний диференціал першого порядку $dv$.

> **v:=arctan((x+y)/(1-x*y));**

$$v := \operatorname{arctg}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right);$$

> **vx:=simplify(diff(v,x));**

$$vx := \frac{1}{1 + x^2};$$

> **vy:=simplify(diff(v,y));**

$$vy := \frac{1}{1 + y^2};$$

> **dv:=vx*dx+vy*dy;**

$$dv := \frac{dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{1 + y^2}.$$

**Завдання 2**

а) Показати, що функція $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$, де $x = u + v$, $y = u - v$, задовольняє співвідношенню $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}$.

б) Знайти частинні похідні першого порядку по змінним $x, y$ функції $z = u^2 \cdot \ln v$, де $u = \dfrac{y}{x}$, $v = x^2 + y^2$.

в) Знайти частинну похідну першого порядку по змінній $t$ функції $z = \ln\left(3t + 2x^2 - y\right)$, де $x = \dfrac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$.

**Виконання**

а) Позначимо суму частинних похідних через $s = \dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v}$.

**>restart:**
> **x:=u+v:**
> **y:=u-v:**
> **z:=arctan(x/y):**
> **s:=simplify(diff(z,u)+diff(z,v));**

$$s := \frac{u - v}{u^2 + v^2}.$$

б) Позначимо $zx := \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $zy := \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

> **u:=y/x:**
> **v:=(x^2+y^2):**
> **z:=(u^2)*ln(v):**
> **zx:=simplify(diff(z,x));**

$$zx := -2\frac{y^2\left(\ln\left(x^2 + y^2\right)x^2 + y^2\ln\left(x^2 + y^2\right) - x^2\right)}{x^3\left(x^2 + y^2\right)};$$

> **zy:=simplify(diff(z,y));**

$$zy := 2\frac{y\left(\ln\left(x^2 + y^2\right)x^2 + y^2\ln\left(x^2 + y^2\right) + y^2\right)}{x^2\left(x^2 + y^2\right)}.$$

в) Позначимо $zt := \dfrac{\partial z}{\partial t}$.

> **x:=1/t:**
> **y:=sqrt(t):**
> **z:=ln(3*t+2*x^2-y):**
> **zt:=(diff(z,t));**

$$zt := \frac{3 - \frac{4}{t^3} - \frac{1}{2\sqrt{t}}}{3t + \frac{2}{t^2} - \sqrt{t}}.$$

**Завдання 3**

а) Знайти диференціал другого порядку функції $z = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$;

б) $u = e^{xyz}$. Показати, що $\frac{\partial^3 u}{\partial x dy \partial z} = xy\frac{\partial^2 u}{\partial x dy} + 2x\frac{\partial u}{\partial x} + u$.

**Виконання**. Позначимо частинні похідні $zxx = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $zyy = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $zxy = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, диференціал другого порядку $d2z = d^2 z$.

> **restart; z:=arctan(x/y);**

$$z := \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right),$$

> **zxx:=simplify(diff(z,x$2));**

$$zxx := -2\frac{yx}{\left(x^2 + y^2\right)^2},$$

> **zyy:=simplify(diff(z,y$2));**

$$zyy := 2\frac{yx}{\left(x^2 + y^2\right)^2},$$

> **zxy:=simplify(diff(z,x$1,y$1));**

$$zxy := \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2},$$

> **d2z=simplify(zxx*dx^2+zyy*dy^2+2*zxy*dx*dy);**

$$d2z := -2\frac{yxdx^2 - yxdy^2 + y^2 dxdy - x^2 dxdy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

б) Позначимо частинні похідні $uxyz = \frac{\partial^3 u}{\partial x dy \partial z}$, $uxy = \frac{\partial^2 u}{\partial x dy}$, $ux = \frac{\partial u}{\partial x}$, а суму, що знаходиться в правій частині виразу $s = xy\frac{\partial^2 u}{\partial x dy} + 2x\frac{\partial u}{\partial x} + u$.

> **restart;**
> **u:=exp(x*y*z);**

$$u = e^{xyz},$$

> **uxyz:=(diff(u,x$1,y$1,z$1));**

$$uxyz =: e^{xyz} + 3zxye^{xyz} + x^2y^2z^2e^{xyz},$$

> **uxy:=simplify(diff(u,x$1,y$1));**

$$uxy =: ze^{xyz} + xyz^2e^{xyz},$$

> **ux:=simplify(diff(u,x$1));**

$$ux =: yze^{xyz},$$

> **s:=simplify(uxy*x*y+2*x*dux+u);**

$$e^{xyz} + 3zxye^{xyz} + x^2y^2z^2e^{xyz}`$$

Легко помітити, що умова $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x dy \partial z} = xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x dy} + 2x\dfrac{\partial u}{\partial x} + u$ для функції $u = e^{xyz}$ виконується.

**Завдання 4**

а) Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

б) Дослідити на екстремум функцію

$$u := 2\ln x + 3\ln y + 5\ln z + \ln\left(22 - x - y - z\right).$$

**Виконання.** При виконанні цього завдання будуть використані команди пакета MAPLE , уже знайомі за виконанням попередніх завдань.

а) У програмі, складеної для розв’язання поставленої задачі, використовуються ідентифікатори

*xp*, *yp* – одномірні масиви, у які будуть заноситися координати знайдених стаціонарних точок;

*n* – кількість стаціонарних точок;

*zx*, *zy* – частинні похідні першого порядку $zx = \dfrac{\partial z}{\partial x}, zy = \dfrac{\partial z}{\partial y}$;

*zxx*, *zyy*, *zxy* – частинні похідні другого порядку $zxx = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $zyy = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $zxy = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$,

*a*11, *a*12, *a*22 – чисельні значення частинних похідних другого порядку в стаціонарних точках $a11 = zxx = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $a22 = zyy = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $a12 = zxy = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$,

$del2$ – чисельне значення виразу $del2=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$;

eq1, eq2 – позначення рівнянь $\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$ відповідно.

\> **restart;**

\> **xp:=array(1..10):yp:=array(1..10):**

\> **z:=x^3+3*x*y^2-15*x-12*y;** (задаємо функцію z);

$$z=: x^3+3xy^2-15x-12y;$$

\> **zx:=diff(z,x);**

$$zx=: 3x^2+3y^2-15;$$

\> **zy:=diff(z,y);**

$$zx=: 6xy-12;$$

\> **eq1:=zx=0;** (прирівнюємо похідні першого порядку нулю);

$$eq1=: 3x^2+3y^2-15=0:$$

\> **eq2:=zy=0;**

$$eq2=: 6xy-12=0;$$

\> **solve({eq1,eq2},{x,y});** (розв'язуємо отриману систему рівнянь);

$$\{x=2,y=1\},\{x=1,y=2\},\{x=-1y=-2\},\{x=-2,y=-1\}.$$

Оскільки для кожної функції кількість стаціонарних точок різна, то просто перераховуємо кількість рішень, виданих програмою, і вводимо значення величини **n** вручну, заповнювати масиви **xp** і **yp** також доводиться вручну, тому що програма видає значення координат стаціонарних точок у довільному порядку (в одному випадку – спочатку ординати, потім – абсциси, в іншому – навпаки).

\> **n:=4:**

\> **xp:=[2,1,-1,-2]; yp:=[1,2,-2,-1];**

знаходимо вираз для частинних похідних другого порядку;

\> **zxx:=diff(z,x$2);**

$$zxx:=6x;$$

\> **zyy:=diff(z,y$2);**

$$zyy:=6x;$$

\> **zxy:=diff(z,x$1,y$1);**

$$zxy:=6y;$$

Обчислюємо похідні другого порядку в кожній стаціонарній точці та досліджуємо функцію на екстремум.

```
>for i from 1 to n do
print(Досліджується_точка_з_координатами_x=xp[i],в=yp[i]) ;
a11:=subs(x=xp[i],y=yp[i],zxx);a22:=subs(x=xp[i],y=yp[i],zyy);
a12:=subs(x=xp[i],y=yp[i],zxy);del2:=(a11*a22-a12^2);
if (del2>0) then if (a11>0) then zextr:=subs(x=xp[i],y=yp[i],z);
print(в_точці_функція_досягає_мінімуму,zmin=zextr);fi;
if (a11<0) then zextr:=subs(x=xp[i],y=yp[i],z);
print(в_точці_функція_досягає_максимуму,zmax=zextr)fi;  else
print(в_точці_екстремуму_немає);fi; end do;
```

*Досліджується_точка_з_координатами_x* $= 2, y := 1$

$a11 := 12;$

$a22 := 12;$

$a12 := 6;$

$del2 := 108;$

*â_òî÷ö³_ôóíêö³ÿ_äîñÿãàº_ì³í³ìóì y,* $z\min = -28.$

*Досліджується_точка_з_координатами_x* $= 1, y := 2$

$a11 := 6;$

$a22 := 6;$

$a12 := 12;$

$del2 := -108;$

*â_òî÷ö³_åêñòðåìóìó_íåìàº*

*Досліджується_точка_з_координатами_x* $= -1, y := -2$

$a11 := -6;$

$a22 := -6;$

$a12 := -12;$

$del2 := -108;$

*â_òî÷ö³_åêñòðåìóìó_íåìàº.*

*Досліджується_точка_з_координатами_x* $= -2, y := -1$

$a11 := -12;$

$a22 := -12;$

$a12 := -6;$

$del2 := 108;$

*â_òî÷ö³_ôóíêö³ÿ_äîñÿãàº_ìàêñèìóìó y,* $z\max = 28.$

б) У даному прикладі розглядається функція трьох змінних, тому в програмі використана більша кількість ідентифікаторів, хоча сама програма аналогічна програмі попереднього прикладу.

*xp, yp, zp* – одномірні масиви, в які будуть заноситися координати знайдених стаціонарних точок;

*n* – кількість стаціонарних точок;

*ux, uy, uz* – частинні похідні першого порядку $ux=\frac{\partial u}{\partial x}, uy=\frac{\partial u}{\partial y}, uz=\frac{\partial u}{\partial z}$;

*uxx, uyy, uzz, uxy, uxz, uyz* - частинні похідні другого порядку $uxx=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$uyy=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $uzz=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $uxy=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $uxz=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$, $uyz=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$;

*a*11, *a*12, *a*13, *a*22, *a*23, *a*33 – чисельні значення похідних другого порядку в стаціонарних точках $a11=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a22=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $a33=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $a12=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$,

$a13=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}$; $a23=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}$;

*del*1, *del*2, *del*3 – чисельні значення головних діагональних мінорів матриці квадратичної форми, якими є диференціал другого порядку
$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a12 & a22 & a23 \\ a13 & a23 & a33 \end{pmatrix}$;

*eq*1, *eq*2, *eq*3 позначення рівнянь $\frac{\partial u}{\partial x}=0, \frac{\partial u}{\partial y}=0, \frac{\partial u}{\partial z}=0$ відповідно.

\> **restart;**

\> **xp:=array(1..5):yp:=array(1..5):zp:=array(1..5):**

\> **u:=2*ln(x)+3*ln(y)+5*ln(z)+ln(22-x-y-z);**

$$u := 2\ln x + 3\ln y + 5\ln z + \ln(22-x-y-z);$$

\> **ux:=diff(u,x);**

$$ux := 2\frac{1}{x} - \frac{1}{22-x-y-z};$$

\> **uy:=diff(u,y);**

$$uy := 3\frac{1}{y} - \frac{1}{22-x-y-z};$$

> **uz:=diff(u,z);**

$$uz := 5\frac{1}{z} - \frac{1}{22 - x - y - z};$$

> **eq1:=ux=0;eq2:=uy=0;eq3:=uz=0;** (прирівнюємо похідні нулю);

$$eq1 := 2\frac{1}{x} - \frac{1}{22 - x - y - z} = 0;$$

$$eq2 := 3\frac{1}{y} - \frac{1}{22 - x - y - z} = 0;$$

$$eq3 := 5\frac{1}{z} - \frac{1}{22 - x - y - z} = 0;$$

>**solve({eq1,eq2,eq3},{x,y,z});** (розв'язуємо систему рівнянь);

$\{z = 10, y = 6, x = 4\}$; (отримане рішення);

функція має одну стаціонарну точку.

> **n:=1:**

> **xp:=[10];yp:=[6];zp:=[4]:**

Обчислимо похідні другого порядку:

> **uxx:=diff(u,x$2);uyy:=diff(u,y$2);uzz:=diff(u,z$2);**

$$uxx := -2\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(22 - x - y - z)^2};$$

$$uyy := -3\frac{1}{y^2} - \frac{1}{(22 - x - y - z)^2};$$

$$uzz := -5\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(22 - x - y - z)^2};$$

> **uxy:=diff(u,x$1,y$1);uxz:=diff(u,x$1,z$1);uyz:=diff(u,y$1,z$1);**

$$uxy := -\frac{1}{(22 - x - y - z)^2};$$

$$uxz := -\frac{1}{(22 - x - y - z)^2};$$

$$uyz := -\frac{1}{(22 - x - y - z)^2};$$

обчислюємо значення похідних другого порядку в стаціонарній точці та досліджуємо функцію на екстремум:

```
>for i from 1 to n do
print(Досліджується_точка_з_координатами_x=xp[i],в=yp[i],z=zp[i] );
a11:=subs(x=xp[i],y=yp[i],z=zp[i], zxx);
a22:=subs(x=xp[i],y=yp[i],z=zp[i],uyy);
a33:=subs(x=xp[i],y=yp[i],z=zp[i],uzz);a12:=subs(x=xp[i],y=yp[i],z=zp[i],
uxy);
a13:=subs(x=xp[i],y=yp[i],z=zp[i],uxz);a23:=subs(x=xp[i],y=yp[i],z=zp[i],
uyz);
del1:=a11; del2:=subs(a11*a22-a12^2); del3:=(a11*a22*a33+
a12*a23*a13+a12*a23*a13-a13*a22*a13-a12*a12*a33-a23*a23*a11);
if (del1>0 and del2>0 and del3>0)then
uextr:=subs(x=xp[i],y=yp[i],z=zp[i],u);
print(в_точці_функція_досягає_мінімуму,umin=uextr) else
if (del1<0 and del2>0 and del3<0) then
uextr:=subs(x=xp[i],y=yp[i],z=zp[i],u);
print(в_точці_функція_досягає_максимуму,umax=uextr) else
print(в_точці_екстремуму_немає);fi;fi;end do;
```

$$\textit{Досліджується\_точка\_з\_координатами\_}x=10, y=6, z=4;$$

$$a11 := -\frac{27}{100}; \qquad a22 := -\frac{1}{3};$$

$$a33 := -\frac{9}{16}; \qquad a12 := -\frac{1}{4};$$

$$a13 := -\frac{1}{4}; \qquad a23 := -\frac{1}{4};$$

$$del1 := -\frac{27}{100}; \qquad del2 := \frac{11}{400};$$

$$del3 := -\frac{173}{19200};$$

*â_òî ÷ö³_ôóíêö³ÿ_äîñÿãàº_ìàêñèìóìó,* $u\max = 2\ln(10)+3\ln(6)+5\ln(4)+\ln(2).$

**Завдання 5**. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = 2x^2 + 4y^2$ в точці $M_0(2,1,12)$.

**Виконання**.

```
> restart;
> M:=[2,1,12];
```

$$M := [2,1,12]$$

```
> fz:=2*x^2+4*y^2;
```
$$fz := 2x^2 + 4y^2$$

```
> zx:=diff(fz,x);zy:=diff(fz,y);
```
$$zx := 4x$$
$$zy = 8y$$

```
> A:=(subs(x=M[1],y=M[2],zx));
```
$$A := 8$$

```
> B:=(subs(x=M[1],y=M[2],zy));
```
$$B := 8$$

```
> eqn1:=A*(x-M[1])+B*(y-M[2])=z-M[3]:
> print(рівняння_дотичної_площини):print(eqn1);
```
*рівняння_дотичної_площини*

$$8x - 24 + 8y = z - 12$$

```
> print(рівняння_нормальної_прямої);
```
*рівняння_нормальної_прямої*

```
> "(x-M[1])/A=(y-M[2])/B=(z-M[3])/1";
```
$$"\left(x - M\left[1\right]\right) / A = \left(y - M\left[2\right]\right) / B = \left(z - M\left[3\right]\right) / 1"$$

```
> "(x-2)/8=(y-1)/8=(z-12)/1";
```
$$"\left(x - 2\right) / 8 = (y - 1) / 8 = \left(z - 12\right) / 1"$$

## Контрольні завдання до гл. 9

**Завдання 1.** Знайти області визначення заданих функцій. Зробити креслення.

**9.1.1.** $z = \arcsin y/x$;

**9.1.2.** $z = \sqrt{\sin\pi(x^2 + y^2)}$;

**9.1.3.** $z = \ln\left(x^2 + y^2 - 1\right)$;

**9.1.4.** $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$;

**9.1.5.** $z = \sqrt{1 + x - y^2} + \sqrt{1 - x - y^2}$;

**9.1.6.** $z = \sqrt{x + y} \cdot \ln(y^2 - x^2)$;

**9.1.7.** $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$;

**9.1.8.** $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$;

**9.1.9.** $z = x + \sqrt{x^2 - y^2}$;

**9.1.10.** $u = \sqrt{\ln(1 + z - x^2 - y^2)}$;

**9.1.11.** $u = \dfrac{1}{z^2 - x^2 - y^2}$;

**9.1.12.** $u = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

**9.1.13.** $z = \arcsin\dfrac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$;

**9.1.14.** $z = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2}$;

**9.1.15.** $u = \ln(xyz)$;

**9.1.16.** $z = \ln(-x-y)$;

**9.1.17.** $u = \ln\left(1-x^2-y^2+z^2\right)$;

**9.1.18.** $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$;

**9.1.19.** $z = \arcsin x / y$;

**9.1.20.** $z = \sqrt{xy}$;

**9.1.21.** $z = \sqrt{1-(x^2+y)^2}$;

**9.1.22.** $z = \sqrt{1-(x+y^2)^2}$;

**9.1.23.** $z = \sqrt{x+y}\ln\left(x^2-y^2\right)$;

**9.1.24.** $z = \dfrac{1}{\ln(x^2-y^2)}$;

**9.1.25.** $z = \arccos\dfrac{x}{x+y}$;

**9.1.26.** $z = \arcsin(x^2+y^2-3)$;

**9.1.27.** $z = \arcsin(x+y)$;

**9.1.28.** $u = \dfrac{x}{\ln(1+z-x^2-y^2)}$;

**9.1.29.** $z = \dfrac{y}{\sqrt{4-x^2-2y^2}}$;

**9.1.30.** $z = \dfrac{\ln(x^2 y)}{\sqrt{y-x}}$.

**Завдання 2**

**9.2.1.** $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$, $du = ?$

**9.2.2.** $u = x + ye^{\frac{x}{y}}$, $du = ?$

**9.2.3.** $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$, $du = ?$

**9.2.4.** $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$, $du(1;1;1) = ?$

**9.2.5.** $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $du(3;4;5) = ?$

**9.2.6.** $z = 4e^{-2y} + (2x+4y-3)e^{-y} - x - 1$. Довести, що

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y} + x + z = 0.$$

**9.2.7.** $z = \dfrac{y}{x^2 - y^2}$. Довести, що $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = -z.$

**9.2.8**. $z = x \cdot \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. Довести, що $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} - z = 0.$

**9.2.9.** $u = (xy + \dfrac{x}{y})^z$. Знайти всі частинні похідні першого порядку.

**9.2.10**. $z=y^2 \sin(x^2 - y^2)$. Довести, що $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$

**9.2.11.** $u=\ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$. Довести, що $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{3}{x+y+z}.$

**9.2.12.** $u= (x - y)(y - z)(z - x)$. Довести, що $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

**9.2.13.** $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Довести, що $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

**9.2.14.** $u = x + \dfrac{x - y}{y - z}$. Довести, що $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 1.$

**9.2.15.** $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$. Довести, що $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$

**9.2.16.** $z = \dfrac{x + y}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}$. Довести, що $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{3}z.$

**9.2.17.** $u = e^{\frac{x}{t^2}}$. Довести, що $2x\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0.$

**9.2.18**. $z = \sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$. Довести, що $2x\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z.$

**9.2.19**. $u = x^y$. Довести, що $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u.$

**9.2.20**. $z = \dfrac{x^3}{x - y}$. Довести, що $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z.$

**9.2.21.** $z = e^{\frac{x}{y}}\ln y$. Довести, що $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{\ln y}.$

**9.2.22**. Знайти наближено $(1{,}03)^{3{,}001}$.

**9.2.23**. Знайти наближено $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$.

**9.2.24.** Знайти наближено $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$.

**9.2.25**. Знайти наближено $\mathrm{arctg}(\dfrac{1{,}97}{1{,}02}-1)$.

**9.2.26.** Знайти наближено приріст функції $z=\arcsin y/x$ при зміні $x$ від 5 до 4,5, а $y$ – від 3 до 3,3.

**9.2.27**. Висота конуса $H$=10 см, радіус основи $R$=5 см. Як зміниться об'єм конуса (приблизно) при збільшенні висоти на 2 мм і зменшенні радіуса основи на 2 мм.

**9.2.28.** В усіченому конусі радіуси основ $R$=20 см і $r$=10 см, а висота $h$=30 см. Як зміниться об'єм конуса (приблизно), якщо $R$ збільшити на 2 мм, $r$ – на 3 мм, а $h$ зменшити на 1 мм.

**9.2.29.** Циліндрична склянка має розміри: радіус основи $R$=2,5 м і висоту $H$=4 м та товщину стінок $l$=1 дм. Знайти приблизно об'єм матеріалу, витраченого на виготовлення склянки.

**9.2.30**. Прямокутний паралелепіпед має виміри: $a$=2 м, $b$=3 м, $з$=6м. Знайти приблизно зміну довжини діагоналі паралелепіпеда, якщо $a$ збільшити на 2 см, $b$ – на 1 см, а $зі$ зменшити на 3 см.

### Завдання 3

**9.3.1**. Довести, що функція $z=\mathrm{arctg}\ x/y$, де $x=u+v$, $y=u-v$, задовольняє співвідношенню $\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{u-v}{u^2+v^2}$.

**9.3.2.** $u=\sin x+F\left(\sin y-\sin x\right)$. Впевнитись, що $\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos x+\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos y=\cos x\cos y$ при будь-якій диференційованій функції $F(u)$.

**9.3.3.** $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$. Впевнитись, що $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$ при будь-якой диференційованій функції $f(u)$.

**9.3.4**. $z=y+F\left(x^2-y^2\right)$. Довести, що $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=x$ при будь-якой диференційованій функції $F\left(u\right)$.

**9.3.5.** $z=xy+xF\left(u\right)$, де $u=y/x$. Довести, що $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+xy$.

**9.3.6**. $z = y\varphi(u)$, де $u = x^2 - y^2$. Довести, що $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

**9.3.7.** $z = x^2 y - y^2 x$, де $x=u\cos v$, $y=u\sin v$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

**9.3.8.** $u = x^2 + y^2 + z^2$, де $x = R\cos\phi \cdot \cos\psi$, $y = R\cos\phi \cdot \sin\psi$, $z = R\sin\varphi$.

Показати, що $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \psi} = 0$.

**9.3.9.** $z=x+y+\varphi(x/y)$. Довести, що $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x + y$.

**9.3.10**. $z=1/2\,(x^2+y^2)+\varphi(x-y)$. Довести, що $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$.

**9.3.11**. $z = x\varphi\left(\frac{x}{y}\right) - x^2 - y^2$. Довести, що $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$.

**9.3.12.** $z = y \cdot f\left(x^2 - y^2\right)$. Довести, що $y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xz$.

**9.3.13.** $z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$. Довести, що $x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = nz$.

**9.3.14.** $z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$. Довести, що $x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$.

**9.3.15**. $z = y\varphi(\cos(x-y))$. Довести, що $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y}$.

**9.3.16.** $z = \sin y + f(\sin x - \sin y)$. Довести, що $\sec x\frac{\partial z}{\partial x} + \sec y\frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

**9.3.17**. $z = x^2\ln y$, де $x = \frac{u}{v}, y = 3u - 2v$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

**9.3.18.** $u = \frac{e^{ax}(y+z)}{a^2+1}$, äå $y = a\sin x, z = \cos x$. Çíàéòè $\frac{du}{dx}$.

**9.3.19** $z = \frac{x+y}{f\left(x^2 - y^2\right)}$. Довести, що $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

**9.3.20.** $u = \frac{yz}{x}$, äå $x = e^t, y = \ln t, z = t^2 - 1$. Çíàéòè $\frac{dz}{dt}$.

**9.3.21.** $z = \operatorname{arctg}(xy)$, де $y = e^x$. Знайти $\dfrac{dz}{dx}$.

9.3.22. $u = \arcsin\dfrac{x}{z}$, äå $z = \sqrt{x^2+1}$. Çíàéòè $\dfrac{du}{dx}$.

**9.3.23.** $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, äå $x = e^{2t+1}, y = e^{2t-1}$. Çíàéòè $\dfrac{dz}{dt}$.

**9.3.24**. $u = xyz$, де $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = \operatorname{tg} t$. Знайти $\dfrac{du}{dt}$.

**9.3.25**. $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = H$. Знайти $\dfrac{du}{dt}$.

**9.3.26**. $z = \ln\sin\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, äå $x = 3t^2, y = \sqrt{t^2+1}$. Знайти $\dfrac{dz}{dt}$.

**9.3.27**. $z = \ln\left(x^2+y^2\right)$, де $y = \dfrac{1}{3}x^3 + x$. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{dz}{dx}$.

**9.3.28**. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$, äå $y = \cos x$. Знайти $\dfrac{dz}{dx}$.

**9.3.29**. $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, äå $x = 3t^2, y = 2t^4, z = 4t^6$. Знайти $\dfrac{du}{dt}$.

**9.3.30.** $z = \operatorname{tg}(3t + 2x^2 - y)$, де $x = \dfrac{1}{t}, y = \sqrt{t}$. Знайти $\dfrac{dz}{dt}$.

### Завдання 4

Знайти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ для функцій:

**9.4.1.** $z = y^{\ln x}$,

**9.4.2.** $z = \arcsin(xy)$,

**9.4.3.** $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$,

**9.4.4.** $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Знайти всі змішані похідні 2-го порядку для функцій:

**9.4.5.** $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$,

**9.4.6.** $u = x^{\frac{y}{z}}$.

**9.4.7.** $u = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Довести, що $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Знайти $d^2u$ для функцій:

**9.4.8.** $u=\dfrac{1}{2(x^2+y^2)}$**.**

**9.4.9.** $\boldsymbol{u= e^{xy}}$**.**

**9.4.10.** $\boldsymbol{u= \sin(x+y+z)}$**.**

**9.4.11.** $u=\sqrt{2xy+y^2}$.

Знайти $d^3u$ для функцій:

**9.4.12**. $u=\ln x$.

**9.4.13**. $u=e^x \cos y$.

**9.4.14**. $u=x\cos y+y\sin x$.

**9.4.15**. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xz}$. Знайти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial z^2}$.

**9.4.16.** $z=\arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$. Довести, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

**9.4.17.** $z=e^x(\cos y+x\sin y)$. Довести, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

**9.4.18**. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. Довести, що $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}$.

**9.4.19**. $u=x^3\sin y+y^3\sin x$. Знайти $\dfrac{\partial^6 z}{\partial x^3\partial y^3}$.

**9.4.20**. $u=\dfrac{y}{x}$. Знайти всі частинні похідні 3-го порядку.

**9.4.21**. $u=A\sin\lambda x\cos\lambda t$. Довести, що $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

**9.4.22**. $u=\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$. Довести, що

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

**9.4.23**. $z=e^x\left(x\cos y-y\sin x\right)$. Довести, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

**9.4.24**. $z=\dfrac{y}{y^2-a^2x^2}$. Довести, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

**9.4.25.** $z = xe^{y} + ye^{x}$. Довести, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

**9.4.26.** $z = xe^{-\frac{y}{x}}$. Довести, що $x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}) = y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

**9.4.27**. $z = \frac{x+y}{x-y}$. Довести, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x-y}$.

**9.4.28**. $S = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right)$. Довести, що $\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}$.

**9.4.29.** $u = e^{xyz}$. Довести, що $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x\frac{\partial u}{\partial x} + u$.

**9.4.30**. $u = \ln\frac{x^2 - y^2}{xy}$. Довести, що

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 2\left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{x^3}\right).$$

**Завдання 5.** Перетворити вираз (або рівняння) до нових змінних.

**9.5.1.** а) $y'y''' - 3(y'')^2 = x$, якщо *u=x, t=y,* де *u=u*(*t*);

б) $W = y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, якщо $t = y^2, s = x^2$.

**9.5.2. а)** $x^2 y'' - 4xy' + y = 0$, якщо $x = e^t$;

б) $(y - z)\frac{\partial z}{dx} + (y + z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, якщо $t = y - z,\ s = y + z,\ u = x$, де $u = u(t, s)$.

**9.5.3**. а) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, якщо *u=x, t=xy,* де *u=u*(*t*);

б) $W = x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, якщо $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$.

**9.5.4.** а) $\left(1 - x^2\right)y'' - xy' + n^2 y = 0$, якщо $x = \cos t$;

б) $xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$,

якщо $t=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right),\ s=xy$.

**9.5.5.** а) $\frac{y'''}{\left(y'\right)^3}+y=0$, якщо $u=x,\ t=y$;

б) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, якщо $t=\frac{2}{3}x^{3/2}, s=2y^{1/2}$.

**9.5.6.** а) $x^2y''-6xy'+10y=0$, якщо $x=e^t$;

б) $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=\left(y-x\right)z$, якщо $t=x^2+y^2, s=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\ u=\ln z-\left(x+y\right)$,

де $u=u\left(t,s\right)$.

**9.5.7.** а) $\left(1+x^2\right)^2y''=y$, якщо $x=\mathrm{tg}t,\ y=\frac{u}{\cos t}$, де $u$=$u$($t$);

б) $W=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $t=x,\ s=2\sqrt{y}\ \ \left(y>0\right)$.

**9.5.8.** а) $y'=\frac{x+y}{x-y}$, якщо $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$, де $\rho=\rho\left(\varphi\right)$;

б) $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, якщо $t=xy,\ s=\frac{x}{y}$.

**9.5.9.** а) $y'''=\frac{6y}{x^3}$, якщо $t=\ln\left|x\right|$;

б) $W=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$, якщо $t=xz,\ s=yz,\ u=x$ де $u$=$u$($t$,$s$).

**9.5.10.** а) $x^4y''-xyy'-2y^2=0$, якщо $x=e^t,\ y=ue^{2t}$, де $u$=$u$($t$);

б) $W=x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, якщо $x=\left(t+s\right)^2,\ y=\left(t-s\right)^2$.

**9.5.11**. а) $\left(xy'-y\right)^2=2xy\left(1+y'^2\right)$, якщо $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ \rho=\rho\left(\varphi\right)$;

б) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $t=x-2\sqrt{y},\ s=x+2\sqrt{y}\ \ \left(y>0\right)$.

**9.5.12**. а) $y''+(x+y)(1+y')^3=0$, якщо $x=u+t,\ y=u-t$, де $u$=$u$($t$);

б) $W=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, якщо $t=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $s=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ .

**9.5.13**. а) $y'''-x^3y''+xy'-y=0$, якщо $x=\dfrac{1}{t},\ y=\dfrac{u}{t}$, де $u$=$u$($t$);

б) $W=2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо $t=x+2y+2,\ s=x-y-1$.

**9.5.14.** а) $\left(x^2+y^2\right)^2 y''=\left(x+yy'\right)^3$, якщо $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,$ де $\rho=\rho(\varphi)$;

б) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, якщо $t=x,\ s=2\sqrt{y},\ (y>0)$.

**9.5.15**. а) $W=yy''-2\left(y^2+y'^2\right)$, якщо $x=t,\ y=\dfrac{1}{u}$, де $u$=$u$($t$);

б) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(1+\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,

якщо $t=x,\ s=x+y,\ u=x+y+z$, де $u$=$u$($t$,$s$).

**9.5.16**. а) $\left(1-x^2\right)y''-xy'=0$, якщо $x=\cos t$;

б) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$, якщо $t=\dfrac{x+y}{2},\ s=\dfrac{x-y}{2},\ u=ze^y$ де $u$=$u$($t$,$s$).

**9.5.17**. а) $W=\dfrac{x+yy'}{xy'-y}$, якщо $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,$ де $\rho=\rho(\varphi)$;

б) $4y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-e^{2x}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+4y^2\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$, якщо $t=e^x+y^2,\ s=-e^x+y^2$.

**9.5.18**. а) $y''+2y\left(y'\right)^2=0$, якщо $u=x,\ t=y$;

б) $\mathrm{tg}^2x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2y\,\mathrm{tg}x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\mathrm{tg}^3x\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$, якщо $t=y\sin x,\ s=y$.

**9.5.19**. а) $x^4y''+2x^3y'-y=0$, якщо $x=\dfrac{1}{t}$;

б) $W=y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$.

**9.5.20**. а) $y''+\dfrac{2x}{1+x^2}y'+\dfrac{y}{\left(1+x^2\right)^2}=0$, якщо $x=\mathrm{tg}t$;

б) $(xy+z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\left(1-y^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+yz$,

якщо $t=yz-x,\ s=xz-y,\ u=xy-z$, де $u$=$u$($t$,$s$).

**9.5.21**. а) $3(y'')^2-y'y'''-y''(y')^2=0$, якщо $u=x,\ t=y$;

б) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^3$, якщо $t=x,\ s=y+z$.

**9.5.22.** а) $y'y'''-3(y'')^2=x$, якщо $u$=$x$, $t$=$y$, де $u$=$u$($t$);

б) $W=y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, якщо $t=y^2, s=x^2$.

**9.5.23**. а) $x^2y''-4xy'+y=0$, якщо $x=e^t$;

б) $(y-z)\dfrac{\partial z}{dx}+(y+z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, якщо $t=y-z,\ s=y+z,\ u=x$, де $u=u(t,s)$.

**9.5.24**. а) $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0$, якщо $u$=$x$, $t$=$xy$, де $u$=$u$($t$);

б) $W=x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, якщо $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$.

**9.5.25.** а) $\left(1-x^2\right)y''-xy'+n^2y=0$, якщо $x=\cos t$;

б) $xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\left(x^2+y^2\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$,

якщо $t=\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right),\ s=xy$.

**9.5.26**. а) $\dfrac{y'''}{(y')^3}+y=0$, якщо $u=x,\ t=y$;

б) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, якщо $t=\dfrac{2}{3}x^{3/2}, s=2y^{1/2}$.

**9.5.27**. а) $x^2y''-6xy'+10y=0$, якщо $x=e^t$;

б) $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$, якщо $t=x^2+y^2, s=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, $u=\ln z-(x+y)$ де $u=u(t,s)$.

**9.5.28**. а) $\left(1+x^2\right)^2 y''=y$, якщо $x=\mathrm{tg}t,\ y=\dfrac{u}{\cos t}$, де $u$=$u$($t$);

б) $W=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо $t=x,\ s=2\sqrt{y}\ \ (y>0)$.

**9.5.29**. а) $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$, якщо $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$, де $\rho=\rho(\varphi)$;

б) $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, якщо $t=xy,\ s=\dfrac{x}{y}$.

**9.5.30.** а) $y'''=\dfrac{6y}{x^3}$, якщо $t=\ln|x|$;

б) $W=\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$, якщо $t=xz,\ s=yz,\ u=x$, де $u$=$u$($t$,$s$).

**Завдання 6.** Дослідити на екстремум такі функції:

**9.6. 1.** $z=x^3y^2(6-x-y)$;

**9.6. 2.** $z=x^2+xy+y^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$;

**9.6. 3.** $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y),\ (0\le x\le\pi/2,\ 0\le y\le\pi/2)$;

**9.6. 4.** $z=\sin x\sin y\sin(x+y),\ (0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\pi)$;

**9.6. 5.** $z=x^2+xy+y^2-2x-y$;

**9.6. 6.** $z=e^{-x^2-y^2}(2x^2+y^2)$;

**9.6. 7.** $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$;

**9.6. 8.** $z=1+6x-x^2-xy-y^2$;

**9.6. 9.** $z=x^2-xy+y^2-2x+y$;

**9.6.10.** $z=x^3-3xy+y^3$;

**9.6.11.** $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$;

**9.6.12.** $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0,\ y > 0)$;

**9.6.13.** $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$;

**9.6.14.** $z = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$;

**9.6.15.** $z = (5x + 7y - 25)e^{-\left(x^2+xy+y^2\right)}$;

**9.6.16.** $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$;

**9.6.17.** $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y), (0 \le x \le \pi/2, 0 \le y \le \pi/2)$;

**9.6.18.** $z = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3\operatorname{arctg} y/x$ ;

**9.6.19.** $z = xy\ln(x^2 + y^2)$;

**9.6.20.** $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, (a > 0, b > 0)$;

**9.6.21.** $u = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z$;

**9.6.22.** $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$;

**9.6.23.** $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, (x > 0, y > 0, z > 0)$;

**9.6.24.** $u = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z), (a > 0)$;

**9.6.25.** $u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z),\ \ (0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi,\ 0 \le z \le \pi)$;

**9.6.26.** $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y, \left(x > 0,\ y > 0\right)$;

**9.6.27.** $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

**9.6.28.** $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$;

**9.6.29.** $u = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{2}{z}(x > 0, y > 0, z > 0)$;

**9.6.30.** $u = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x - y - 2z$.

**Завдання 7.** Дослідити на умовний екстремум такі функції:

**9.7. 1.** $z=xy$, якщо $x+y=1$.

**9.7. 2.** $z=x+y$, якщо $x^2+y^2=1$.

**9.7. 3.** $z=x^2+y^2$, якщо $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

**9.7. 4.** $z=\cos^2 x+\cos^2 y$, якщо $x-y=\pi/4$.

**9.7. 5.** $u=x-2y+2z$, якщо $x^2+y^2+z^2=1$;

**9.7. 6.** $u=x^m y^n z^p$, якщо $x+y+z=a,\ (m>0,\ n>0,\ p>0,\ a>0)$;

**9.7. 7.** $u=x^2+y^2+z^2$, якщо $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

**9.7. 8.** $u=xy^2z^3$, якщо $x+2y+3z=a,\ (x>0,\ y>0,\ z>0,\ a>0)$;

**9.7. 9**. $u=xyz$, якщо $x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=0$;

**9.7.10**. $u=\sin x\sin y\sin z$, якщо $x+y+z=\pi/2, (x>0, y>0, z>0)$;

**9.7.11.** $z=x+2y$, якщо $x^2+y^2=5$;

**9.7.12**. $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, якщо $x+y=2$;

**9.7.13.** $z=xy^2$, якщо $x+2y=1$;

**9.7.14**. $z=x^2+y^2-xy+x+y-4$, якщо $x+y+3=0$;

**9.7.15.** $u=2x+y-2z$, якщо $x^2+y^2+z^2=36$;

**9.7.16.** $z=\frac{x-y-4}{\sqrt{2}}$, якщо $x^2+y^2=1$;

**9.7.17.** $u=x^2+y^2+z^2$, якщо $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$;

**9.7.18.** $u=2x+y$, якщо $x^2+y^2=1$;

**9.7.19.** $u=xyz$, якщо $x+y+z=S, (x>0, y>0, z>0, S>0)$.

**9.7.20.** У дану кулю діаметра $2R$ вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.

**9.7.21**. На площині $x+y-2z=0$ знайти точку, сума квадратів відстаней якої до двох площин $x+3z=6$ і $y=3z=2$ була б найменшою.

**9.7.22.** Знайти прямокутний паралелепіпед із заданою площею поверхні $S$, що має найбільший об'єм.

**9.7.23**. Із всіх прямокутних паралелепіпедів, що мають дану діагональ $d$, знайти такий, чий об'єм найбільший.

**9.7.24**. Знайти найбільший об'єм паралелепіпеда при даній сумі $12a$ усіх його ребер.

**9.7.25.** На еліпсі $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ знайти точки, найбільш та найменш віддалені від прямої $3x+y-9=0$.

**9.7.26**. При яких розмірах відкрита прямокутна ванна даної місткості $V$ має найменшу поверхню?

**9.7.27**. На параболі $y=x^2$ знайти точку, найменш віддалену від прямої $x-y-2=0$

**9.7.28.** Розкласти додатне число $a$ на три додатних складники так, щоб їхній добуток був найбільшим.

**9.7.29.** На еліпсоїді обертання $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ знайти точки, найменш і найбільш віддалені від площини $3x+4y+12z=288$.

**9.7.30.** Знайти прямокутник даного периметра $2P$, який обертанням навколо однієї із своїх сторін утворить тіло найбільшого об'єму.

**Завдання 8**

Скласти рівняння дотичної прямої і нормальної площини для наданих ліній у зазначених точках:

**9.8. 1.** $x=t-\sin t$, $y=t-\cos t$, $z=4\sin t/2$ при $t=\pi/2$;

**9.8. 2**. $x^2+y^2+z^2=6$, $x+y+z=0$ у точці $(1,\ 1,\ -2)$;

**9.8. 3**. $x^2+y^2+z^2=6$, $x^2-y^2+z^2=4$ у точці $(1,\ 1,\ 2)$;

**9.8. 4.** $x^2+y^2=10$, $y^2+z^2=25$ у точці $(1,\ 3,\ 4)$;

**9.8. 5.** $y^2+z^2=9$, $x^2-y^2=3$ у точці $(2,\ 1,\ 2)$;

**9.8. 6.** $x^2+y^2+z^2=25$, $x+y+z=5$ у точці $\left(2,\ 2\sqrt{3},\ 3\right)$.

**9.8. 7.** На лінії $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=e^t$ знайти точку, дотична в якій паралельна площині $\sqrt{3}\,x+y-4=0$.

**9.8.8.** На лінії $x=\frac{t^4}{4},\ y=\frac{t^3}{3},\ z=\frac{t^2}{2}$ знайти точку, в якій дотична до цієї лінії паралельна площині $x+3y+2z-10=0$.

Для даних поверхонь 9.8.9 – 9.8.16 знайти рівняння дотичних площин і нормалей у зазначених точках:

**9.8. 9.** $x^2+y^2+z^2=2Rz$ у точці $(R\cos\alpha,\ R\sin\alpha,\ R)$;

**9.8.10.** $2^{x/z}+2^{y/z}=8$ у точці $(2,\ 2,\ 1)$;

**9.8.11.** $x^2yz+2x^2z-3xyz+2=0$ у точці $(1,\ 0,\ -1)$;

**9.8.12.** $z=e^{x\cos y}$ у точці $(1,\ \pi,\ 1/e)$;

**9.8.13.** $4+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x+y+z$ у точці $(2,\ 3,\ 6)$;

**9.8.14**. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ у точці $(1,\ 1,\ \pi/4)$;

**9.8.15.** $z=\frac{x^3-3axy+y^3}{a^2}$ у точці $(a,\ a,\ -a)$;

**9.8.16**. $z^2+4z+x^2=0$ у точках перетинання з віссю OZ.

**9.8.17.** Для поверхні $x^2-z^2-2x+6y=4$ знайти рівняння нормалі, паралельної прямій $\frac{x+2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$.

**9.8.18.** Для поверхні $z=4x-xy+y^2$ знайти рівняння дотичної площини, паралельної площині $4x+y+z-2z+9=0$.

**9.8.19.** Знайти відстань від початку координат до дотичної площини до поверхні $z=y\operatorname{tg}x/a$ в точці ( $\pi a/4$, $a$, $a$ ).

**9.8.20.** До поверхні $x^2+2y^2+3z^2=21$ провести дотичні площини, паралельні площині $x+4y+6z=0$.

**9.8.21.** На поверхні $x^2+y^2-z^2=2x$ знайти точки, у яких дотичні площини паралельні координатним площинам.

**9.8.22.** Довести, що конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ і сфера $x^2+y^2+(z-\frac{b^2+c^2}{c})^2=\frac{b^2}{c^2}(b^2+c^2)$ торкаються один одного.

**9.8.23.** Визначити площину, дотичну до поверхні $x^2+4y^2+z^2=36$ і паралельну площині $x+y-z=0$.

**9.8.24.** Знайти відстань від початку координат до дотичної площини до поверхні $\left(2a^2-z^2\right)x^2-a^2y^2=0$ в точці ( $a,\ a,\ a$ ).

**9.8.25.** У якій точці дотична площина до поверхні $z=4-x^2-y^2$ паралельна площині $2x+2y+z=0$ Написати рівняння цієї дотичної площини.

**9.8.26.** Довести, що конус $z^2=x^2+y^2$ і сфера $x^2+y^2+(z-2)^2=2$ торкаються один одного в точці ( 0, 1, 1 ).

**9.8.27.** Довести, що поверхні $x+2y-\ln z+4=0$ і $x^2-xy-8x+z+5=0$ торкаються одна одну в точці ( 2, –3, 1 ).

**9.8.28.** До поверхні $x^2-y^2-3z=0$ провести дотичну площину, що проходить через точку $A$ ( 0, 0, –1 ) паралельно прямій $\frac{x}{2}=y=\frac{z}{2}$.

**9.8.29.** На поверхні $x^2+y^2+z^2-6y+4z=12$ знайти точки, у яких дотичні площини паралельні координатним площинам.

**9.8.30.** Для поверхні $z=xy$ написати рівняння дотичної площини, перпендикулярної до прямої $\frac{x+2}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1}$.

# Глава 10. Кратні інтеграли

## 10.1. Подвійні інтеграли та їх обчислення в декартовій системі координат

Нехай у замкненій обмеженій області $D$ площини $Oxy$ задана обмежена функція $f(x,y)$. Разіб'ємо область $D$ на $n$ елементарних підобластей $D_1$, $D_2$, … $D_n$, які не мають спільних внутрішніх точок. Площі цих областей позначимо $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ...\Delta\sigma_n$. У кожній елементарній області $D_k$ виберемо довільну точку $(\xi_k, \eta_k)$ та утворимо суму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k,$$

яку будемо називати *інтегральною сумою*. Під діаметром області будемо розуміти довжину найбільшої хорди між двома точками межі області. Позначимо через $\lambda$ найбільший із діаметрів $d_k$ елементарних підобластей $D_k$ ($k = \overline{1,n}$), тобто $\lambda = \max d_k$, $k = \overline{1,n}$.

**Визначення.** Якщо існує границя інтегральних сум $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$ при $\lambda \to 0$, яка не залежить від способу розбиття області $D$ на елементарні частини та вибору точок $M_k(\xi_k, \eta_k) \in D_k$, то вона називається *подвійним інтегралом* функції $f(x,y)$ по області $D$ і позначається

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)d\sigma.$$

Функція $f(x,y)$ у цьому випадку називається інтегровною по області $D$.

*Геометричний зміст подвійного інтеграла*

Якщо функція $z = f(x,y) \geq 0$, то подвійний інтеграл від неї дорівнює об'єму циліндричного тіла, обмеженого знизу областю $D$, зверху поверхнею $z = f(x,y)$ та циліндричною поверхнею, напрямною якої є границя області $D$, а твірні паралельні осі $Oz$.

*Властивості подвійного інтеграла*

Основні властивості подвійного інтеграла подібні до відповідних властивостей визначеного інтеграла.

1. $\iint\limits_D Cf(x,y)dxdy = C\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, де $C = \text{const}$.

2. $\iint\limits_D (f_1(x,y) + f_2(x,y))dxdy = \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy + \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy$.

3. Якщо функція $z = f(x,y) \geq 0$ в області $D$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0.$$

4. Якщо дві функції в області $D$ задовольняють нерівності

$$f(x,y) \geq g(x,y),$$

то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

5. Якщо область $D$ складається з двох областей $D_1$ і $D_2$, які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

6. *Оцінка подвійного інтеграла*. Якщо $z = f(x,y)$ є неперервною функцією в обмеженій замкненій області $D$, яка має площу $S$, то

$$mS \leq \int\limits_D f(x,y)dxdy \leq MS,$$

де $m$ і $M$ – відповідно найменше і найбільше значення функції $z = f(x,y)$ в області $D$.

7. *Теорема про середнє значення функції* $z = f(x,y)$. Якщо функція $z = f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області $D$, яка має площу $S$, то в цій області існує хоча б одна точка $P(\xi,\eta)$ така, що

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\cdot S.$$

Обчислення подвійного інтеграла зводиться до повторного обчислення двох визначених інтегралів.

Припустимо, що область інтегрування *D* перетинається будь-якою прямою, паралельною до осі *Oy*, не більше ніж у двох точках.

Таку область будемо називати *правильною*, або *простою* областю у напрямку осі *Oy*. Нехай на границі області *Γ* найлівіша точка *A*, а найправіша *B*. Позначимо їх абсциси через *a*, *b*. Точки *A* та *B* поділяють контур *Γ* на нижню частину *ACB*, рівняння якої $y = y_1(x)$, та верхню частину *ADB*, рівняння якої $y = y_2(x)$ (рис.10.1). У цьому випадку, якщо функція $f(x,y)$ є інтегровною в області *D* та $\forall x \in [a,b]$ існує інтеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$, то подвійний інтеграл зводиться до повторного за формулою

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (10.1)$$

Припустимо, що область є правильною у напрямку осі *Ox*. Позначимо проекцію області на вісь *Oy* як $[c,d]$. Нехай $x = x_1(y)$ є рівнянням *CAD*, а $x = x_2(y)$ – рівнянням *CBD* (рис.10.1). Якщо функція $f(x,y)$ є інтегровною в області *D* та $\forall y \in [c,d]$ існує інтеграл $\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$, то подвійний інтеграл зводиться до повторного за формулою

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (10.2)$$

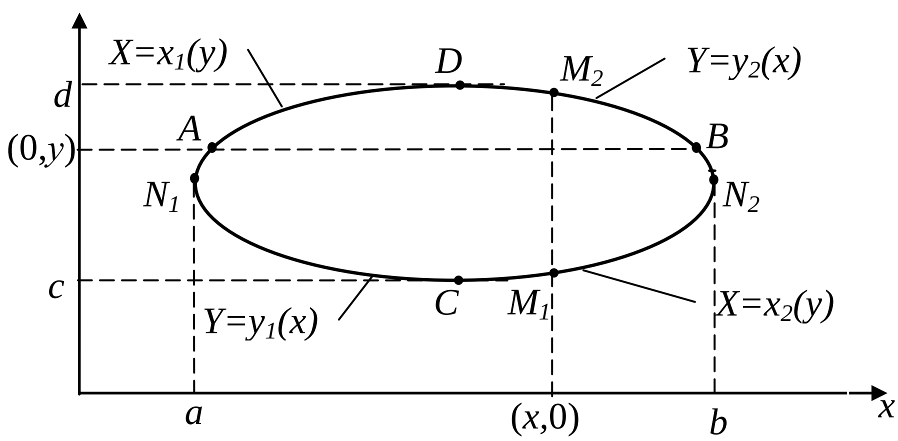



Рис. 10.1

Інтеграли, що стоять справа у формулах (10.1) та (10.2), називаються *повторними,* або *двократними*. Якщо область інтегрування є неправильною, то її можна розбити на правильні підобласті та, використовуючи властивість адитивності, обчислити інтеграли по кожній з них.

При обчисленні подвійного інтеграла важливим моментом є правильна розстановка меж інтегрування, при цьому рекомендовано дотримуватись такої схеми:

1. Область $D$ проектується на одну з осей, наприклад $Ox$. Цим визначається відрізок $[a,b]$: $a \le x \le b$ (рис. 10.1). Числа $a$ та $b$ будуть відповідно нижньою та верхньою межами зовнішнього інтеграла у формулі (10.1), тобто **межі у зовнішньому інтегралі завжди є сталими величинами.**

2. Для знаходження меж інтегрування у внутрішньому інтегралі проводимо через будь-яку точку $(x,0) \in [a,b]$ пряму $x = \text{const}$. Ця пряма перетинає границю області $D$ у двох точках $M_1$ та $M_2$. Для знаходження координат точки входу $M_1$ та виходу $M_2$ необхідно розв'язати рівняння нижньої $ACB$ та верхньої $ADB$ ділянок границі області $D$ відносно $y$: $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$. При цьому функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ на відрізку $[a,b]$ є неперервними, однозначними та зберігають аналітичний вираз. Аналогічно визначаються межі інтегрування у повторному інтегралі формули (10.2), коли область проектується на вісь ординат.

У внутрішньому інтегралі межі інтегрування у загальному випадку є функціями тієї змінної, за якої обчислюється зовнішній інтеграл і яка при обчисленні внутрішнього інтеграла залишається сталою.

У частинному випадку області інтегрування – прямокутнику, обмеженному прямими $x = a,\ x = b\ \ (a < b)$ і $y = c,\ \ y = d\ \ (c < d)$, межі інтегрування у внутрішньому та зовнішньому інтегралах формул (10.1) та (10.2) є сталими, тобто

$$\iint_D f(xy)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy ;$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx .$$

Якщо функція $f(x,y)$неперервна в області $D$, то значення повторного інтеграла не залежить від порядку інтегрування. При цьому для зменшення об'єму обчислювальної роботи треба обирати, якщо це можливо, такий порядок інтегрування, при якому не доводиться розбивати область інтегрування на частини. Продемонструємо це на прикладі.

**Приклад 1.** Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D y dx dy$, якщо область інтегрування $D$ обмежена прямою $y = 4 - x$ та параболою $y^2 = 2x$ (рис. 10.2).

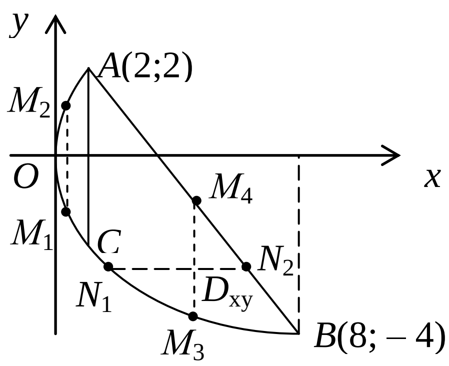



Рис. 10.2

**Розв'язання.** Знаходимо точки перетину даних ліній $A(2;2)$ і $B(8; -4)$. Використаємо спочатку формулу (10.2). Спроектуємо область $D$ на вісь $Oy$, вона проектується у відрізок $[-4;2]$. Якщо через будь-яку точку цього відрізка провести пряму, паралельну осі $Ox$, то вона перетине область лише у двох точках $N_1$ кривої $y^2 = 2x$ та $N_2$ прямої $y = 4 - x$. Розв'яжемо рівняння цих ліній відносно $x$: $x_1 = \frac{y^2}{2}$, $x_2 = 4 - y$.

Подвійний інтеграл зводиться до двократного:

$$I = \iint\limits_D y dx dy = \int\limits_{-4}^{2} y dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{4-y} dx .$$

Обчислення повторного інтеграла почнемо з обчислення внутрішнього інтеграла, для якого $x$ є змінною, $y$ – сталою величиною. Після знаходження первісної, межі внутрішнього інтеграла підставляють замість змінної $x$. У результаті приходимо до визначеного інтеграла за змінною $y$. Таким чином,

$$I = \int\limits_{-4}^{2} x \Big|_{\frac{y}{2}}^{4-y} y dy = \int\limits_{-4}^{2} (4 - y - \frac{y^2}{2}) y dy = \int\limits_{-4}^{2} (4y - y^2 - \frac{y^3}{2}) dy =$$

$$2y^2 - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{8}\Big|_{-4}^{2} = -18.$$

Обчислимо інтеграл, проектуючи область $D$ на вісь $Ox$. У цьому випадку необхідно розбити область інтегрування прямою $AC$ на дві частини $D_1$ та $D_2$ внаслідок того, що верхня межа області складається з двох ділянок, які мають неоднакові рівняння: $y=\sqrt{2x}$ ($OA$) та $y=4-x$ ($AB$). Інтеграл по області $D$ слід подати як суму інтегралів по областях $D_1$ та $D_2$:

$$\iint_D ydxdy=\iint_{D_1} ydxdy+\iint_{D_2} ydxdy.$$

Проекцією $D_1$ на вісь $Ox$ є відрізок [0,2], і будь-яка пряма $x=\mathrm{const}$, $x\in[0,2]$ перетинає область у точках $M_1$ кривою $y=-\sqrt{2x}$ та $M_2$ кривою $y=\sqrt{2x}$. Тому

$$\iint_{D_1} ydxdy=\int_0^2 dx\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} ydy=0.$$

Аналогічно, проекцією області $D_2$ на вісь $Ox$ є відрізок [2,8], і будь-яка пряма $x=\mathrm{const}$, $x\in[2,8]$ перетинає область у точках $M_3$ кривої $y=-\sqrt{2x}$ та $M_4$ кривої $y=4-x$. Тому

$$\iint_{D_2} ydxdy=\int_2^8 dx\int_{-\sqrt{2x}}^{4-x} ydy=\int_2^8 \frac{y^2}{2}\Big|_{-\sqrt{2x}}^{4-x} dx=\frac{1}{2}\int_2^8 (16-8x+x^2-2x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}(16x-5x^2+\frac{x^3}{3})\Big|_2^8=-18$$

$$I=-18.$$

**Приклад 2.** Обчислити інтеграл $I=\iint_D \sqrt{x}ydxdy$, якщо область інтегрування $D$ задається нерівностями: $x\ge 0,\ y\ge x^2,\ y\le 2-x^2$.

**Розв'язання**. Область $D$ зображена на рис.10.3. Точка перетину парабол має координати $A(1,1)$. Проекцією області $D$ на вісь абсцис є відрізок [0,1]. Вертикальна пряма при будь-якому сталому $x$ перетинає $D$ тільки в двох точках: точці $M_1$ кривої $y_1=x^2$ та $M_2$ кривої $y_2=2-x^2$, при цьому аналітичний вираз функцій $y_1,y_2$ для всіх $x\in[0,1]$ залишається незмінним. Тоді

$$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x^2}\sqrt{x}ydy=\int_0^1\sqrt{x}\,\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{2-x^2} dx=\int_0^1\sqrt{x}\,\frac{1}{2}\left(\left(2-x^2\right)^2-x^4\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(2\sqrt{x}-2x^{5/2}\right)dx=\left(\frac{4}{3}x^{3/2}-\frac{4}{7}x^{7/2}\right)\Big|_0^1=\frac{16}{21}.$$

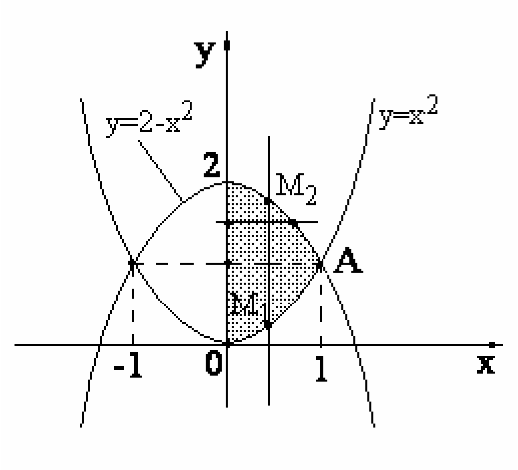



Рис. 10.3

Обчислимо інтеграл, проектуючи область $D$ на вісь $Oy$, тобто внутрішній інтеграл візьмемо по $x$, а зовнішній – по $y$. Прекцією є відрізок [0,2]. При змінюванні $y \in [0,2]$ верхня межа визначається різними рівняннями $y = x^2$ і $y = 2 - x^2$, тому інтеграл по області $D$ слід подавати як суму інтегралів по областях $D_1$ та $D_2$. Оскільки тепер внутрішні інтеграли будуть обчислюватися за змінною $x$, то рівняння ліній, що обмежують кожну з областей $D_1$ та $D_2$, слід розв'язувати відносно цієї змінної. Оскільки

$x \ge 0$, то $x_1 = \sqrt{y}, \quad x_2 = \sqrt{2-y}$. Тоді

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \sqrt{x} y dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} \sqrt{x} y dx = \int_0^1 y \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^{\sqrt{y}} dy + \int_1^2 y \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^{\sqrt{2-y}} dy =$$

$$= \frac{2}{3}\left( \int_0^1 y^{7/4} dy - \int_1^2 \left( (2-y) - 2 \right)(2-y)^{3/4} dy \right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left( \frac{4}{11} + \frac{4}{11}(2-y)^{11/4} \Big|_1^2 - \frac{8}{7}(2-y)^{7/4} \Big|_1^2 \right) = \frac{2}{3}\left( \frac{4}{11} - \frac{4}{11} + \frac{8}{7} \right) = \frac{16}{21}.$$

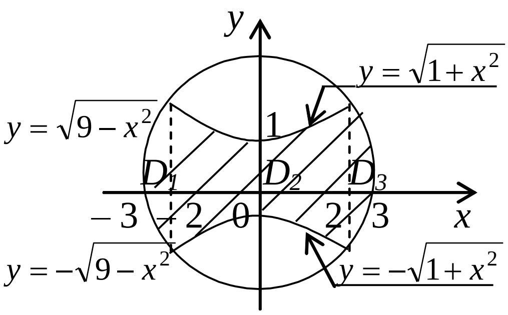



Рис. 10.4

**Приклад 3.** Знайти межі двократного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, якщо область $D$ обмежена гіперболою $y^2 - x^2 = 1$ та колом $x^2 + y^2 = 9$ (область $D$ містить початок координат) (рис. 10.4).

**Розв'язання.** Проекцією області на вісь $Ox$ є відрізок [– 3,3]. Функції, за допомогою яких описується рівняння границі області на цьому проміжку, змінюють вигляд свого аналітичного виразу, тому область необхідно розбити на три частини: $D_1, D_2, D_3$. Для знаходження меж інтегрування по кожній з областей знайдемо абсциси точок перетину кола та гіперболи

$$1+x^2=9-x^2;\; 2x^2=8;\; x=\pm 2\,.$$

За властивістю адитивності маємо

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_3} f(x,y)dxdy=$$

$$=\int\limits_{-3}^{-2}dx\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy+\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)dy+\int\limits_{2}^{3}dx\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy\,.$$

**Приклад 4.** Змінити порядок інтегрування у подвійному інтегралі

$$\int\limits_{-6}^{2}dx\int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy.$$

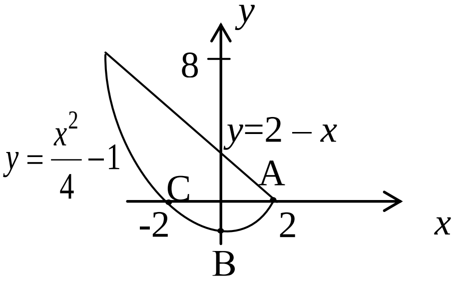


Рис. 10.5

**Розв'язання.** Відновимо область інтегрування: $-6\le x\le 2,\ \frac{x^2}{4}-1\le y\le 2-x.$

Рівняння ліній, що обмежують область $D$, $y=\frac{x^2}{4}-1$ та $y=2-x$. Область інтегрування зображена на рис. 10.5. Для зміни порядку інтегрування необхідно область $D$ спроектувати на вісь $Oy$. Проекцією є відрізок [– 1,8]; при цьому частина границі $ABC$ складається з двох ліній – $AB$ та $BC$, які визначаються різними рівняннями: ($AB$) $x_1=2\sqrt{y+1}$ та ($BC$) $x_2=-2\sqrt{y+1}$. Тому при зміні порядку інтегрування область необхідно розбити на дві області – $D_1$ та $D_2$, тоді

$$\int\limits_{-6}^{2}dx\int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy=\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx+\int\limits_{0}^{8}dy\int\limits_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$$

**Приклад 5**. Змінити порядок інтегрування у подвійному інтегралі

$$I=\int\limits_{0}^{2a}dx\int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy\ (a>0).$$

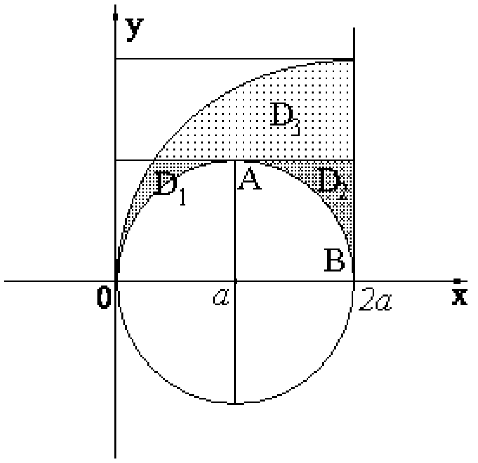



Рис. 10.6

**Розв'язання.** Відновимо область інтегрування, що описується нерівностями

$$0 \le x \le 2a, \sqrt{2ax - x^2} \le y \le \sqrt{2ax}.$$

Припускаємо, що

$$y = \sqrt{2ax - x^2} \quad \Rightarrow x = a \pm \sqrt{a^2 - x^2} \quad ;$$

$$y = \sqrt{2ax} \qquad x = \frac{y^2}{2a}.$$

Область інтегрування зображена на рис. 10.6. Дуга кола $OA$ має рівняння $x = a - \sqrt{a^2 - y^2}$, а дуга кола $AB$: $x = a + \sqrt{a^2 - y^2}$.

Проектуючи область інтегрування на вісь $Oy$, отримуємо три області: $D_1$, $D_2$, $D_3$

$$I = \int_0^a dy \int_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx + \int_a^{2a} dy \int_{y^2/2a}^{2a} f(x,ydx).$$

## 10.2. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат

Нехай необхідно обчислити подвійний інтеграл неперервної функції $z = f(x,y)$ по області $D$. Припустимо, що формули

$$x = \varphi(u,v); \quad y = \psi(u,v)$$

встановлюють взаємно рівнозначне співвідношення між точками $M(x,y)$ області $D$ в площині $xOy$ та точками $M'(u,v)$ деякої області $D'$ у площині $uOv$. Тоді можна довести вірогідність формули

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J|dudv,$$

де $|J|$ – абсолютна величина визначника

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \varphi'_u(u,v) & \psi'_u(u,v) \\ \varphi'_v(u,v) & \psi'_v(u,v) \end{vmatrix}, \tag{10.3}$$

який називається *якобіаном*.

Часто обчислення подвійного інтеграла спрощується заміною прямокутних координат $x$ та $y$ полярними координатами $\rho$ та $\varphi$ за формулами: $x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi$. В цьому випадку якобіан дорівнює

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\rho}\\ \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho. \tag{10.4}$$

Враховуючи, що $|J|=\rho$, маємо:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi. \tag{10.5}$$

Якщо область інтегрування обмежена промінями, що утворюють з полярною віссю кути $\varphi_1$ та $\varphi_2$ $(\varphi_1<\varphi_2)$ і двома кривими $\rho=\rho_1(\varphi)$ та $\rho=\rho_2(\varphi)$ $(\rho_1(\varphi)\le\rho_2(\varphi))$ (рис.10.7), а функції $\rho=\rho_1(\varphi)$ та $\rho=\rho_2(\varphi)$ є неперервними, однозначними та зберігають аналітичний вираз, то

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho. \tag{10.6}$$

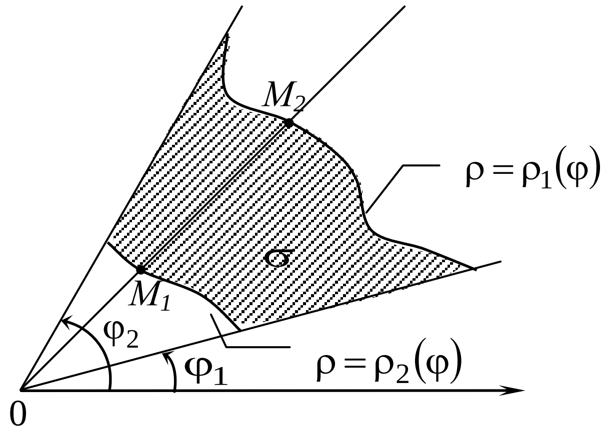



Рис. 10.7

Інтеграл у правій частині цієї формули – повторний (двократний). У внутрішньому інтегралі $\varphi$ слід розглядати як величину сталу, а $\rho$ – змінну. Для визначення меж внутрішнього інтеграла за змінною $\rho$ (полярного радіуса) проведемо з полюса $O$ будь-який промінь $\varphi=\text{const}$, $\varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]$. В точці входу $M_1$ цього променя в область $\rho=\rho_1(\varphi)$, а в точці $M_2$ виходу його із області $\rho=\rho_2(\varphi)$.

Якщо початок координат знаходиться всередині або на границі області інтегрування, то при інтегруванні спочатку по $\rho$, а потім по $\varphi$ (формула (10.6)), нижня межа для першого інтеграла (по $\rho$) буде дорівнювати нулю.

Якщо область інтегрування є кругом з центром на початку координат та радіуса *R*, то межі інтегрування в полярній системі координат (для внутрішнього та зовнішнього інтегралів) будуть постійними, тобто

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho .$$

**Приклад 1.** Обчислити $\iint_D xdxdy$, якщо область *D* обмежена колом $x^2 + y^2 = ax$.

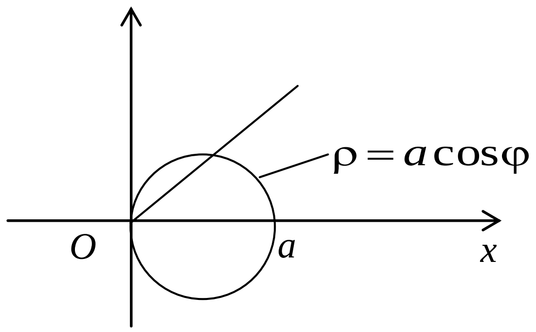



Рис. 10.8

**Розв'язання.** Рівняння кола в полярній системі має вигляд $\rho^2 = a\rho\cos\varphi$, або $\rho = a\cos\varphi$. Кут $\varphi$ змінюється від $-\pi/2$ до $\pi/2$. При кожному фіксованому значенні $\varphi$ змінна $\rho$ змінюється від 0 до $a\cos\varphi$ (рис.10.8). Тоді

$$\iint_D xdxdy = \int_{-\pi./2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \rho\cos\varphi\rho d\rho = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \rho^2 d\rho =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \rho^3 / 3 \Big|_0^{a\cos\varphi} = \frac{a^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{2a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{a^3}{6} \int_0^{\pi/2} (1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi = \frac{a^3}{6} \int_0^{\pi/2} (3/2 + 2\cos 2\varphi + \cos\ 4\varphi/2) d\varphi =$$

$$= \frac{a^3}{6} \left( \frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8} \right) \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^3}{8};$$

Якщо $f(x,y) \equiv 1$, то подвійний інтеграл чисельно дорівнює площі області інтегрування.

**Приклад 2.** Обчислити площу фігури, що обмежена лінією $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2 xy$.

**Розв'язання.** Рівняння кривої $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2 xy$ в полярних координатах має вигляд $\rho^4 = 2a^2\rho^2\cos\varphi\sin\varphi$,

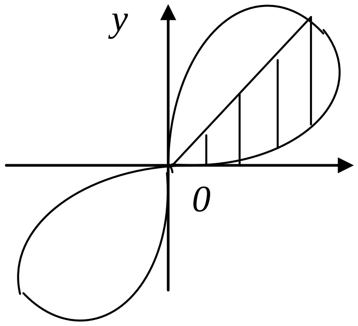


Рис. 10.9

або $\rho^2 = 2a^2 \sin\varphi\cos\varphi = a^2 \sin 2\varphi$,

або $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$.

Будуємо криву, беручи до уваги, що $\rho \geq 0$ або $\sin 2\varphi \geq 0$, тобто

$$0 + 2k\pi \leq 2\varphi \leq \pi + 2k\pi \ \Rightarrow\ k\pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

($k$=0,1). Таким чином, область знаходиться в 1-й та 3-й чвертях і симетрична відносно полюса. При змінюванні $\varphi$ від 0 до $\frac{\pi}{4}$ поточна точка $(\varphi, \rho)$ опише лише четверту частину кривої (рис.10.9). Площа виражається інтегралом

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho d\rho = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin 2\varphi d\varphi = a^2.$$

**Приклад 3**. Обчислити $I = \iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy$, де область обмежена еліпсом.

**Розв'язання.** Введемо так звані узагальнені полярні координати: $x = a\rho\cos\varphi, y = b\rho\sin\varphi$. Якобіан перетворення за формулою (10.3) дорівнює

$$I = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho.$$

Кут $\varphi$ змінюється від 0 до $2\pi$. Рівняння еліпса в узагальнених полярних координатах $\rho = 1$, полюс знаходиться всередині області, тому $\rho$ змінюється від 0 до 1.

Оскільки $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi = 1 - \rho^2$,

то

$$I = ab\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho = ab \cdot 2\pi \left( -\frac{1}{2}\frac{\left(1-\rho^2\right)^{3/2}}{3/2} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\pi ab.$$

### 10.3. Застосування подвійних інтегралів

а) *Обчислення об'ємів тіл*

Об'єм циліндричного тіла, обмеженого знизу областю $D$ площини $xOy$, зверху – поверхнею $z = f(x, y)$, збоку – циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі $Oz$ та з напрямною – границею області $D$, дорівнює $V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$.

**Приклад 1.** Подвійним інтегруванням знайти об'єм тіла, обмеженого циліндрами $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ та площинами $z=0$, $x + z = 6$ (рис. 10.10).

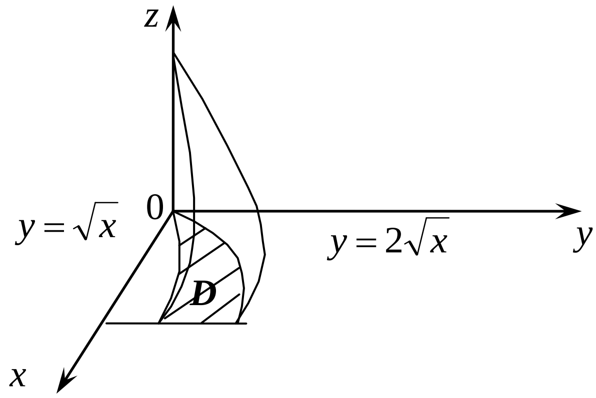



Рис. 10.10

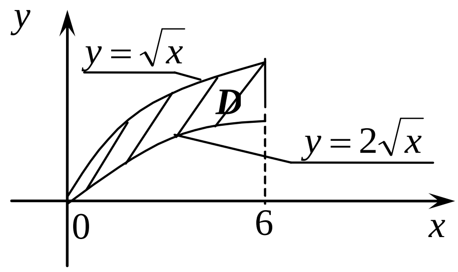



Рис. 10.11

**Розв'язання.** Тіло обмежене зверху площиною $x + z = 6$, знизу площиною $z = 0$ та двома циліндрами $y = \sqrt{x}$ і $y = 2\sqrt{x}$, які проектують його на площину $xOy$ в область $D$, обмежену прямою $x = 6$ та параболами $y = \sqrt{x}$ і $y = 2\sqrt{x}$ (рис. 10.11). При цьому змінна $x$ змінюється від 0 до 6; при будь-якому значенні $x$ із вказаного проміжку $\sqrt{x} < y < 2\sqrt{x}$. Об'єм тіла знаходимо за формулою $V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$.

У даному випадку $z = f(x, y) = 6 - x$. Тоді маємо

$$V = \iint\limits_D (6 - x)dxdy =$$

$$= \int_0^6 (6 - x)dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy = \int_0^6 (6 - x)y\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx = \int_0^6 (6 - x)\left(2\sqrt{x} - \sqrt{x}\right)dx =$$

$$= \int_0^6 \left(6\sqrt{x} - x\sqrt{x}\right)dx = \left(6\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{5/2}}{5/2}\right)\Bigg|_0^6 = 24\sqrt{6} - \frac{72}{5}\sqrt{6} = \frac{48\sqrt{6}}{5}.$$

**Приклад 2.** Обчислити об'єм тіла, обмеженого циліндрами $y=\ln x$, $y=\ln^2 x$ та площинами $z=0$ та $y+z=1$.

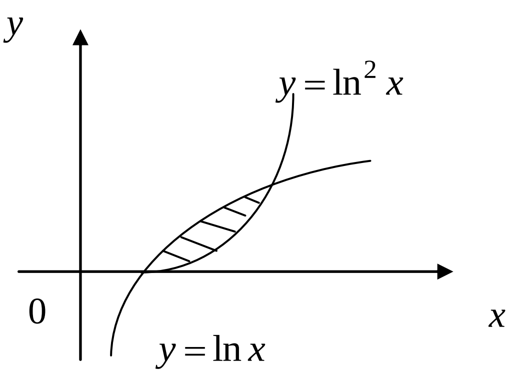



Рис. 10.12

**Розв'язання.** Оскільки зверху тіло обмежене площиною $z=1-y$, а циліндри $y=\ln x$ та $y=\ln^2 x$ є проектуючими циліндрами на площину *xOy*, побудова просторової області не є обов'язковою.

Проекція тіла *D* на площину *xOy* зображена на рис. 10.12. Для зведення подвійного інтеграла до повторного знайдемо абсциси точок перетину кривих $y=\ln x$ і $y=\ln^2 x$

$$\ln x=\ln^2 x, \text{ або } \ln x(1-\ln x)=0; \ \Rightarrow x=1, \quad x=e.$$

Проекцією області *D* на вісь *Oy* є відрізок [0,1]. Об'єм тіла дорівнює

$$V=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_D(1-y)\,dxdy=\int_0^1(1-y)\,dy\int_{e^y}^{e^{\sqrt{y}}}dx=\int_0^1(1-y)\left(e^{\sqrt{y}}-e^y\right)dy=$$

$$=-\int_0^1 e^y dy+\int_0^1 ye^y dy+\int_0^1 e^{\sqrt{y}}dy-\int_0^1 ye^{\sqrt{y}}dy\,.$$

Тут $\int_0^1 e^y dy=e^y\Big|_0^1=e-1;\qquad \int_0^1 ye^y dy=ye^y\Big|_0^1-\int_0^1 e^y dy=e-e+1=1;$

$$\int_0^1 e^{\sqrt{y}}dy=\left\|\begin{matrix}\sqrt{y}=t, \ y=t^2\\ dy=2tdt\end{matrix}\right\|=2\int_0^1 te^t dt=2\,;$$

$\int_0^1 ye^{\sqrt{y}}dy=\left\|\begin{matrix}\sqrt{y}=t, \ y=t^2\\ dy=2tdt\end{matrix}\right\|=2\int_0^1 t^3e^t dt=12-4e$ (застосовуємо формулу інтегрування частинами тричі).

Знаходимо $V=1-e+1+2-12+4e=3e-8$.

**Приклад 3.** Подвійним інтегруванням знайти об'єм тіла, обмеженого циліндрами $x^2+y^2=x$ та $x^2+y^2=2x$, параболоїдом $z=x^2+y^2$ і площинами $x+y=0,\quad x-y=0, z=0$.

**Розв'язання.** Циліндричне тіло обмежене зверху поверхнею $z=x^2+y^2$. Його об'єм

$$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D zdxdy=\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$$

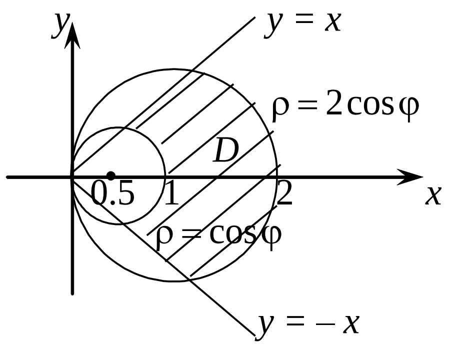


Рис. 10.13

Побудуємо область $D$, яка є проекцією тіла на площину $xOy$ (рис. 10.13).

Область $D$ обмежена колами

$x^2+y^2=x$, або $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$;

$x^2+y^2=2x$, або $(x-1)^2+y^2=1$

та прямими $y=-x,\quad y=x$.

У полярних координатах рівняння кіл мають вигляд $\rho=\cos\varphi$ та $\rho=2\cos\varphi$; рівняння прямих $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ та $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Знаходимо

$$V=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}\rho^3 d\rho=\left\|\begin{matrix}\textit{завдяки симетрії}\\ \textit{області інтегрування}\end{matrix}\right\|=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(16\cos^4\varphi-\cos^4\varphi\right)d\varphi=\frac{15}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)^2d\varphi=$$

$$=\frac{15}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+2\cos2\varphi+\cos^2 2\varphi\right)d\varphi=\frac{15}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+2\cos2\varphi+\frac{1+\cos4\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{15}{8}\left(\frac{3}{2}\varphi+\sin2\varphi+\frac{\sin4\varphi}{8}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{15}{8}\left(\frac{3\pi}{8}+1\right).$$

**Приклад 4**. Знайти об'єм тіла, яке вирізане з кулі радіуса $R$ прямим круговим циліндром радіуса $R/2$, твірна якого проходить через центр кулі.

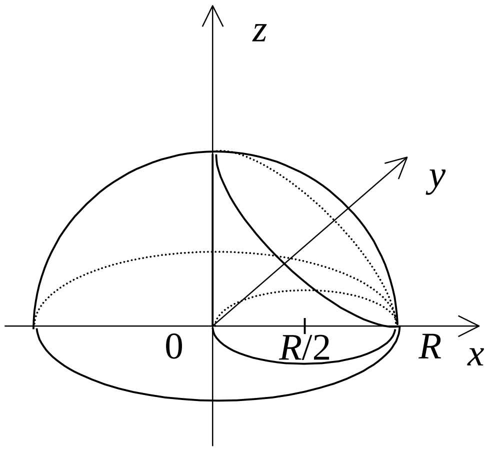



Рис. 10.14

**Розв'язання.** Розташуємо початок координат у центрі кулі, вісь *Oz* направимо вздовж твірної циліндра, а вісь *Ox* – вздовж діаметра основи циліндра (рис.10.14)

Рівняння сфери має вигляд: $x^2+y^2+z^2=R^2$, тоді у першому октанті $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Через симетрію об'єм тіла, вирізаного циліндром із кулі, буде дорівнювати $V=4\iint\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy.$

Проекція тіла на площину *xOy* здігається з кругом $x^2+y^2=Rx$. Для обчислення отриманого інтеграла зручно перейти до полярних координат. Рівняння кола $x^2+y^2=Rx$ в полярних координатах має вигляд $\rho=R\cos\varphi$. Кут $\varphi$ змінюється від 0 до $\pi/2$, $\rho$ змінюється в межах $0\le\rho\le R\cos\varphi$. Переходячи до полярних координат, отримуємо

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho.$$

$$\frac{V}{4}=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{3}\left(R^2-\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^{R\cos\varphi}d\varphi=-\frac{R^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\sin^3\varphi-1\right)d\varphi=$$

$$=\frac{R^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2\varphi\right)d(\cos\varphi)+\frac{\pi R^3}{6}=$$

$$=\frac{R^3}{3}\left(\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}+\frac{\pi R^3}{6}=\frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).\qquad V=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

б) *Обчислення маси неоднорідної пластини*

Маса пластини, що займає область $D$ в площині *xOy* та має густину $\rho(x,y)=\delta(x,y)$, дорівнює $m=\iint\limits_D\delta(x,y)\,dxdy.$

в) *Обчислення моментів інерції пластини.*

Момент інерції пластини відносно початку координат визначається формулою

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\delta(x,y)dxdy.$$

Моменти інерції пластини відносно осей *Ox* та *Oy* дорівнюють відповідно

$$I_x = \iint_D y^2\delta(x,y)dxdy \ , \quad I_y = \iint_D x^2\delta(x,y)dxdy.$$

**Приклад 5.** Знайти момент інерції квадрата зі стороною *a*, поверхнева густина якого пропорційна відстані до однієї зі сторін квадрата відносно вершини, що належить даній стороні.

**Розв'язання.** Нехай квадрат розташований у площині *xOy*; одна з його вершин лежить на початку координат, а дві інші збігаються з осями координат. Відзначимо, що момент інерції не залежить від вибору системи координат. Шуканий момент інерції буде дорівнювати моменту інерції квадрата відносно початку координат з поверхневою густиною *kx*, *k* – коефіцієнт пропорційності (беремо поверхневу густину пропорційною відстані до осі *Oy*). Тоді

$$I_0 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)kxdxdy = k\int_0^a xdx\int_0^a \left(x^2 + y^2\right)dy = k\int_0^a x\left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^a dx =$$

$$= k\int_0^a x\left(x^2 a + \frac{a^3}{3}\right)dx = k\int_0^a \left(x^3 a + x\frac{a^3}{3}\right)dx = k\left(a\frac{x^4}{4} + \frac{x^2 a^3}{6}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= k\left(\frac{a^5}{4} + \frac{a^6}{6}\right) = \frac{5ka^5}{12}.$$

г) *Знаходження центра ваги пластини*

Координати центра ваги $x_c$ та $y_c$ неоднорідної пластини дорівнюють відповідно відношенням статичних моментів відносно осей *Oy* та *Ox* до маси пластини

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\delta(x,y)dxdy}{\iint_D \delta(x,y)dxdy}; \quad y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\delta(x,y)dxdy}{\iint_D \delta(x,y)dxdy}.$$

Якщо ж пластина однорідна

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x dxdy}{S}; \qquad y_c = \frac{\iint\limits_D y dxdy}{S}.$$

**Приклад 6.** Знайти центр ваги однорідної пластини, що обмежена лініями $y = x^2$ і $y = 1$ (рис. 10.15).

**Розв'язання.** Очевидно, що через симетрію фігури $x_c = 0$.

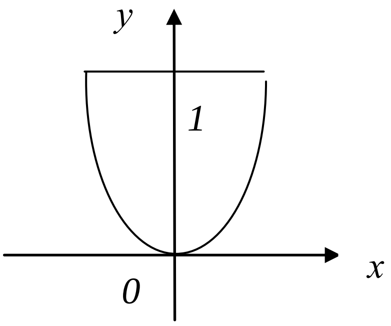


Рис. 10.15

$$\iint\limits_D y dxdy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} y dx = 2\int_0^1 y\sqrt{y} dy = \frac{4}{5} y^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{5};$$

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) dx =$$

$$= 2\int_0^1 (1 - x^2) dx = 2(x - \frac{x^3}{3}) \Big|_0^1 = 2(1 - \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}.$$

Остаточно: $y_c = \frac{3}{5}$.

## 10.4 Потрійні інтеграли та їх обчислення в декартовій системі координат

Нехай в замкненій обмеженій області $V$ задана обмежена функція $f(x, y, z)$. Розіб'ємо область $V$ на $n$ елементарних підобластей $V_1, V_2, \ldots, V_n$, які не мають спільних внутрішніх точок, об'єми яких позначимо $\Delta V_i$. В кожній елементарній області $V_i$ виберемо довільним чином точку $M_i(\xi_i \eta_i, \zeta_i)$ та утворимо суму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i,$$

яку будемо називати *інтегральною сумою* для функції $f(x, y, z)$ по області $V$. Найбільший з діаметрів елементарних областей $V_i$ позначимо $\lambda$, тобто $\lambda = \max d_i$, $i = \overline{1, n}$.

**Визначення.** Якщо існує границя інтегральної суми $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$ за умови, що $\lambda \to 0$, яка не залежить від способу розбиття області $V$ на елементарні частини та вибору точок $M_i(\xi_i\eta_i, \zeta_i) \in V_i$, то вона називається потрійним інтегралом від функції $f(x, y, z)$ по області $V$ та позначається

$$\lim_{\lambda \to 0} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i = \iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz.$$

Функція $f(x, y, z)$ в цьому випадку називається інтегровною в області $V$. Обчислення потрійного інтеграла в декартовій системі координат зводиться до обчислення подвійного інтеграла за проекцією $D$ об'єму $V$ на яку-небудь координатну площину (в даному випадку $xOy$) та внутрішнього інтеграла за третьою змінною (змінною $z$). Внутрішній інтеграл береться від нижньої межі $z = z_1(x, y)$ області $V$ до її верхньої межі $z = z_2(x, y)$. Припускається, що область є правильною в напрямку осі $Oz$ (рис. 10.16).

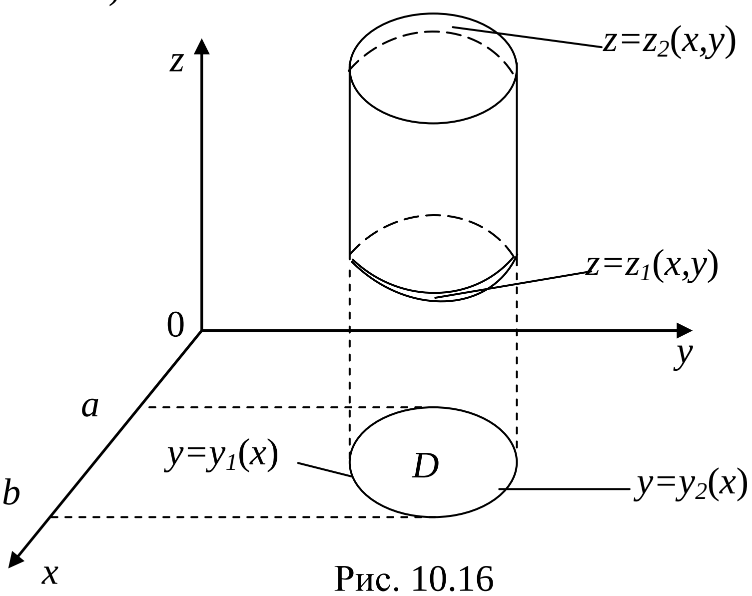


Рис. 10.16

**Визначення.** Якщо будь-яка пряма, яка проходить через внутрішню точку області $V$ паралельно осі $Oz$, перетинає границю області $V$ у двох точках, а проекція $V$ на площину $xOy$ є правильною областю $D$, то область $V$ називається *правильною*.

Враховуючи правила обчислення подвійного інтеграла, останню формулу можна переписати таким чином:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

Якщо область $V$ є неправильною, то її розбивають на скінченне число правильних областей та обчислюють інтеграл, використовуючи властивість адитивності потрійного інтеграла.

Якщо областю інтегрування є прямокутний паралелепіпед, обмежений площинами $x=a,\ x=b\ (a<b)$, $y=c,\ y=d\ (c<d)$, $z=m,\ z=n\ (m<n)$, то межі інтегрування будуть постійними, тобто

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d dy\int\limits_m^n f(x,y,z)dz.$$

У випадку, якщо $f(x,y,z)\equiv 1$, то потрійний інтеграл чисельно дорівнює об'єму області інтегрування.

**Приклад 1.** Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $y=x$, $y=x^2$, $z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$.

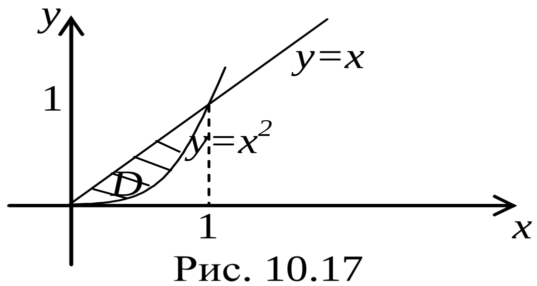


Рис. 10.17

**Розв'язання.** Тіло обмежене площиною $y=x$, циліндром $y=x^2$ та параболоїдами обертання $z=x^2+y^2$, $z=2\left(x^2+y^2\right)$. Нехай $D$ – проекція тіла на площину $xOy$. В даному випадку проектуючими поверхнями тіла є площина $y=x$ та циліндр $y=x^2$ (рис. 10.17). Тоді об'єм тіла

$$V=\iiint\limits_v dv=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x} dy\int\limits_{x^2+y^2}^{2\left(x^2+y^2\right)} dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x} z\Big|_{x^2+y^2}^{2\left(x^2+y^2\right)} dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x}\left(x^2+y^2\right)dy=$$

$$\int\limits_0^1\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x^2}^{x} dx=\int\limits_0^1\left(\frac{4x^3}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}\right)dx=\frac{3}{35}.$$

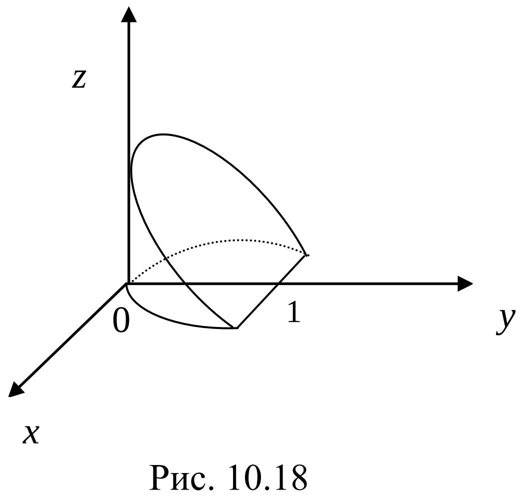


Рис. 10.18

**Приклад 2.** Обчислити масу тіла, обмеженого циліндром $x^2=2y$ і площинами $z=0$, $2y+z=2$, якщо в кожній його точці об'ємна густина чисельно дорівнює аплікаті цієї точки.

**Розв'язання.** Циліндричне

тіло (рис.10.18) обмежено зверху площиною $z = 2-2y$, яка перетинається з площиною $z=0$ по прямій $y=1$. Масу тіла, що займає область $V$, обчислюють за формулою $m = \iiint\limits_V \delta(x,y,z)dxdydz$, де $\delta(x,y,z,)$ – об'ємна густина. У даній задачі $\delta(x,y,z) = z$ і

$$m = \iiint\limits_V zdxdydz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dx \int\limits_0^{2-2y} zdz = 2\int\limits_0^1 (1-y)^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dx = 4\int\limits_0^1 (1-y)^2 \sqrt{2y}dy$$

$$= 4\sqrt{2}\int\limits_0^1 (y^{\frac{1}{2}} - 2y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{5}{2}})dy = 4\sqrt{2}(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}y^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}})\Big|_0^1 = \frac{64\sqrt{2}}{105}.$$

### 10.5. Потрійний інтеграл у циліндричній та сферичній системах координат

У багатьох задачах обчислення потрійних інтегралів зручніше проводити в циліндричній, сферичній або інших системах координат.

Питання про заміну змінних у потрійному інтегралі вирішується таким самим чином, як і у випадку подвійного інтеграла, тобто якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в області $V$ та формули

$$x = \varphi(u,v,w); \quad y = \psi(u,v,w), \quad z = \chi(u,v,w)$$

встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками $M(x,y,z)$ області $V$ та точками $M'(u,v,w)$ області $V'$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))|J|dudvdw,$$

де $|J|$ – абсолютна величина якобіана:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}. \qquad (10.7)$$

У *циліндричній* системі координат положення точки визначається полярними координатами $\varphi, \rho$ та аплікатою *z*, (рис. 10.19, а) (формули, що зв'язують прямокутні та циліндричні координати мають вигляд $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$; z=z), модуль якобіана (10.7) дорівнює $|J| = \rho$.

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{V'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz .$$

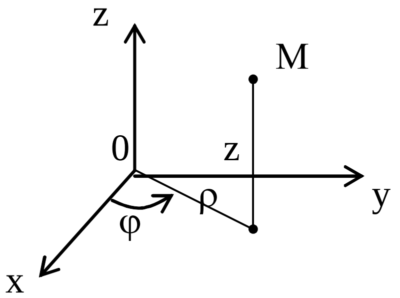



Рис. 10.19, а

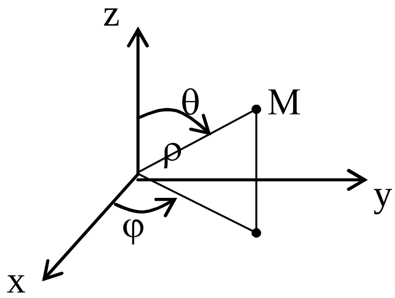



Рис. 10.19, б

У системі циліндричних координат координатні поверхні $\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$ являють відповідно кругові циліндри з віссю *Oz*, полуплощини, що виходять із осі *Oz* та площини, паралельні площині *xOy*.

Тому якщо область інтегрування є круговим циліндром з віссю *Oz*, то потрійний інтеграл по цій області в циліндричній системі координат буде мати сталі межі за всіма змінними, тобто

$$\iiint_V f\left(x, y, z\right)dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho \int_0^H f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z\right)dz$$

*Сферичні* координати точки *M* області *V* позначаються як $\rho, \varphi, \theta$, де $\rho$ – відстань від початку координат до точки *M*, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\varphi$ – кут між віссю *Ox* та проекцією радіус-вектора *OM* на площину *xOy*, а $\theta$ – кут між додатним напрямком осі *Oz* та радіус-вектором *OM* (рис. 10.19, б). Вочевидь, що $(\rho \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$. Тут координатні поверхні є такими: $\rho$ = const – сфери з центром на початку координат, $\varphi = \text{const}$ – полуплощини, що виходить із осі *Oz*, $\theta = \text{const}$ – кругові конуси з віссю *Oz*. Сферичні координати $\rho, \varphi, \theta$ пов'язані з прямокутними координатами співвідношеннями

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, y = \rho\sin\theta\sin\varphi, z = \rho\cos\theta ,$$

а модуль Якобіана (10.7) дорівнює $|J| = \rho^2 \sin\theta$.

Перехід у потрійному інтегралі до сферичних координат здійснюється за формулою

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta$$

Вочевидь, що якщо область інтегрування є кулею з центром на початку координат та радіуса R, то потрійний інтеграл по цій області в сферичній системі координат буде мати сталі межі інтегрування за всіма змінними, тобто

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \rho^2 f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)d\rho.$$

Нижче на конкретних прикладах проілюстровано правила розставлення меж інтегрування в циліндричній та сферичній системах координат і показано їх геометричні та фізичні застосування.

**Приклад 1.** Обчислити $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, де $V$ є частиною області, обмеженої сферою $x^2+y^2+z^2=4$ та параболоїдом $x^2+y^2=3z$, розташованими у першому октанті (рис.10.20).

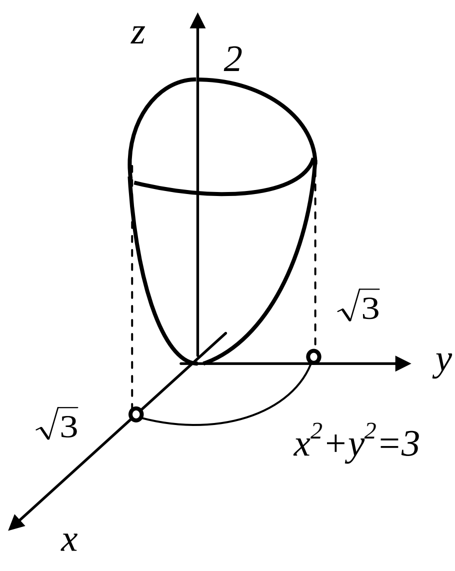



Рис. 10.20

**Розв'язання.** *Перший спосіб.* Обчислення інтеграла в декартовій системі координат.

Перш ніж проектувати область $V$ на площину $xOy$, знайдемо лінію перетину сфери та параболоїда. Для цього розв'яжемо сумісно ці два рівняння

$$\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=3z \end{array}\right\} \Rightarrow z^2+3z-4=0 \Rightarrow$$

$$z=1 \Rightarrow x^2+y^2=3.$$

Тобто поверхні перетинаються по колу радіуса $R=\sqrt{3}$, що лежить у площині $z=1$. Об'єм $V$ проектується на площину $xOy$ як чверть кола даного радіуса, що знаходиться у першій чверті.

Таким чином, будемо мати

$$\iint\limits_D xyzdxdydz = \int\limits_0^{\sqrt{3}} xdx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} ydy \int\limits_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} zdz = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} xdx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} yz^2 \Bigg|_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} xdx \int\limits_0^{\sqrt{3-x}} y(4 - x^2 - y^2 - \frac{(x^2+y^2)^2}{9})dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} x(2y^2 - \frac{x^2y^2}{2} - \frac{y^4}{4} - \frac{x^4y^2}{18} - \frac{x^2y^4}{18} - \frac{y^6}{54})\Bigg|_0^{\sqrt{3-x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} (\frac{13}{4}x - 2x^3 + \frac{x^5}{4} + \frac{x^7}{54})dx = \frac{27}{32}.$$

*Другий спосіб*. Обчислення інтеграла в циліндричній системі координат

$I = \iiint\limits_V xyzdxdydz = \iiint\limits_{V'} \rho^3 \sin\varphi\cos\varphi z d\rho d\varphi dz$, де $V'$ – область змінення циліндричних координат точок області $V$.

Після визначення меж інтегрування одержимо

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho^3 d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} zdz = \frac{1}{2}\frac{\sin^2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho^3(4 - \rho^2 - \frac{\rho^4}{9})d\rho = = \frac{27}{32}.$$

**Приклад 2.** Обчислити об'єм частини кулі $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, розташованої всередині циліндра $\left(x^2 + y^2\right) = R^2\left(x^2 - y^2\right)\left(z \geq 0\right)$ (рис.10.21).

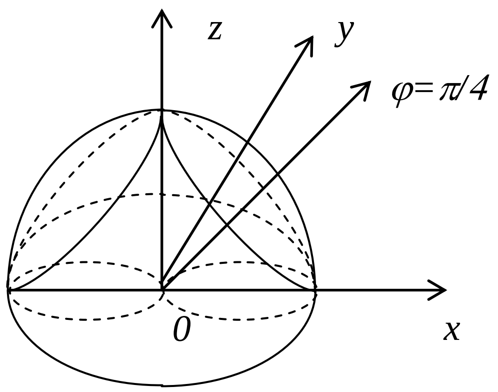



Рис. 10.21

**Розв'язання.** Напрямну циліндра, що обмежена лемніскатою, побудуємо, переходячи до полярних координат $x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi$. Полярне рівняння цієї кривої $\rho = R\sqrt{\cos 2\varphi}$. Крива є симетричною відносно осей $Ox$ та $Oy$ та при зміненні $\varphi$ від 0 до $\pi/4$ поточна точка $(\rho, \varphi)$ опише четверту частину кривої. Шуканий об'єм в циліндричній системі координат обчислюють так:

$$V=\iiint\limits_{V_1}\rho d\rho d\varphi dz=4\int\limits_0^{\pi/4}d\varphi\int\limits_0^{R\sqrt{\cos 2\varphi}}\rho d\rho\int\limits_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}}dz=4\int\limits_0^{\pi/4}d\varphi\int\limits_0^{R\sqrt{\cos 2\varphi}}\rho\sqrt{R^2-\rho^2}d\rho=$$

$$=4\int\limits_0^{\pi/4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(R^2-\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^R d\varphi=\frac{4}{3}\int\limits_0^{\pi/4}R^3\left(1-(1-\cos 2\varphi)^{3/2}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5-4\sqrt{2}}{3}\right).$$

**Приклад 3.** Обчислити об’єм тіла, що обмежене поверхнями: параболоїдом $(x-1)^2+y^2=z$ та площиною $2x+z=2$ (рис. 10.22).

**Розв’язання.** Знайдемо рівняння проекції лінії перетину поверхні $(x-1)^2+y^2=z$ з площиною $2x+z=2$ на площину $xOy$. На лінії перетину аплікати збігаються, тоді будемо мати

$$(x-1)^2+y^2=2-2x,\ x^2+y^2=1.$$

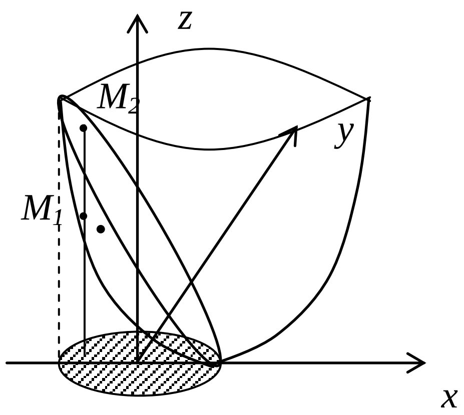



Рис. 10.22

Оскільки область $V$ проектується на коло $D_{xy}: x^2+y^2\le 1$, доцільно перейти до циліндричних координат. Рівняння границі $D_{xy}$ в циліндричних координатах

$$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=1\Rightarrow\rho=1;$$

рівняння площини $z=2(1-\rho\cos\varphi)$; рівняння параболоїда $z=x^2-2x+1+y^2\Rightarrow z=\rho^2-2\rho\cos\varphi+1$.

При кожному значенні $(\rho,\varphi): 0\le\rho\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi$ змінна z змінюється від $z_1=\rho^2-2\rho\cos\varphi+1$ (в точці $M_1$ – точці входу в просторову область $V$) до $z_2=2(1-\rho\cos\varphi)$ (в точці $M_2$ – точці виходу з області $V$). Об’єм тіла в циліндричній системі координат

$$V=\iiint\limits_v\rho d\rho d\varphi dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho d\rho\int\limits_{\rho^2-2\rho\cos\varphi+1}^{2(1-\rho\cos\varphi)}dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\cdot z\Big|_{\rho^2-2\rho\cos\varphi+1}^{2(1-\rho\cos\varphi)}d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\left(2-2\rho\cos\varphi-\rho^2+2\rho\cos\varphi-1\right)d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(\rho-\rho^3\right)d\rho=$$

$$=\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

**Приклад 4.** Обчислити об’єм тіла, що обмежене поверхнею

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=a^3x,\ a>0.$$

**Розв’язання.** В цьому випадку доцільно перейти до сферичних координат, оскільки в сферичних координатах рівняння даної поверхні суттєво спрощується. Дійсно, оскільки

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\theta=\rho^2,$$

то рівняння поверхні, що обмежує тіло, буде мати вигляд

$$\rho^4=a^3\rho\cos\varphi\sin\theta \text{ або } \rho^3=a^3\cos\varphi\sin\theta\Rightarrow\rho=a\sqrt[3]{\cos\varphi\sin\theta}.$$

Оскільки з рівняння поверхні випливає, що $x\ge 0$ (ліва частина рівняння невід’ємна ) отримаємо, що $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$; при цьому $0\le\theta\le\pi$. Тоді

$$v=\iiint\limits_v\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta=\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi\sin\theta}}\rho^2d\rho=$$

$$=\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi\sin\theta}}d\varphi=$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\sin\theta d\varphi=$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi=\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta\sin\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=$$

$$=\frac{a^3}{6}\left(\theta-\frac{\sin2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}\cdot2=\frac{a^3}{3}\left(\pi-\frac{1}{2}\sin2\pi\right)=\frac{\pi a^3}{3}.$$

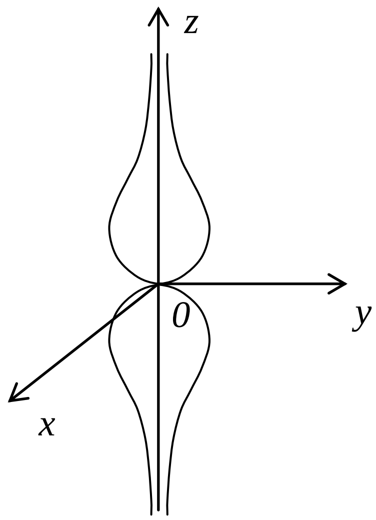


Рис. 10.23

**Приклад 5.** Обчислити об’єм тіла, що обмежене поверхнею $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=\frac{a^6z^2}{x^2+y^2},\ a>0.$ (рис. 10.23)

**Розв’язання.** В сферичних координатах рівняння поверхні має вигляд

$$\rho^6=\frac{a^6\rho^2\cos^2\theta}{\rho^2\sin^2\theta}=a^6\mathrm{ctg}^2\theta\Rightarrow\rho=a\sqrt[6]{\mathrm{ctg}^2\theta}=\rho(\theta).$$

Таким чином, маємо $\lim\limits_{\theta\to+0} a\sqrt[6]{\operatorname{ctg}^2\theta} = \lim\limits_{\theta\to\pi-0} a\sqrt[6]{\operatorname{ctg}^2\theta} = \infty$; $\rho\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Через симетрію поверхня має вигляд, зображений на рис. 10.23

Об’єм тіла дорівнює

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{a\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\theta}} \rho^2 d\rho = 2\varphi\Big|_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{a\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\theta}} = \frac{4\pi a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \operatorname{ctg}\theta d\theta =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\sin\theta\Bigg|_0^{\pi/2} \cdot 2 = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

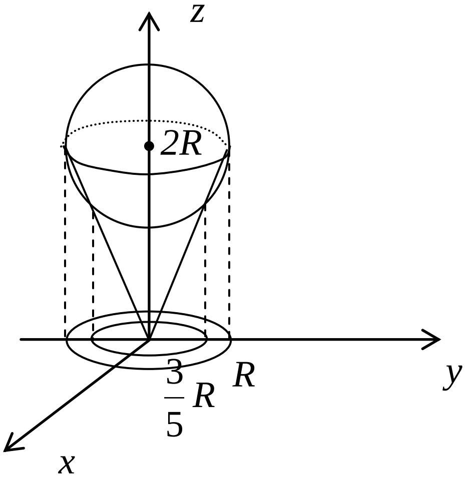



Рис. 10.24

**Приклад 6.** Обчислити об’єм тіла, що обмежене сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz - 3R^2$ та конусом $z^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)$ (мається на увазі частина кулі, що лежить всередині конуса) (рис. 10.24).

**Розв’язання.** Перетворимо рівняння сфери: $x^2 + y^2 + \left(z - 2R\right)^2 = R^2$.

Центр сфери (0,0,2*R*), радіус дорівнює *R*. Знайдемо проекції ліній перетину конуса та сфери на площину *xOy*. Для цього запишемо рівняння поверхонь у циліндричних координатах та прирівняємо аплікати.

$$z^2 = 4\left(x^2 + y^2\right) \Rightarrow z^2 = 4\rho^2,\ z = 2\rho$$

$$x^2 + y^2 + \left(z - 2R\right)^2 \Rightarrow z = 2R \pm \sqrt{R^2 - \rho^2} \qquad \Rightarrow$$

$$2R \pm \sqrt{R^2 - \rho^2} = 2\rho$$

$$\Rightarrow R^2 - \rho^2 = 4\rho^2 - 8R\rho + 4R^2 \Rightarrow 5\rho^2 - 8R\rho + 3R^2 = 0\ ;\rho_1 = \frac{3}{5}R;\ \rho_2 = R.$$

Спочатку обчислимо об’єм частини кулі, що знаходиться зовні конуса:

$$V_1 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{3}{5}R}^{R} \rho d\rho \int\limits_{2R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{2\rho} dz = 2\pi \int\limits_{\frac{3}{5}R}^{R} \rho\left(2\rho - 2R + \sqrt{R^2 - \rho^2}\right) d\rho =$$

$$= 2\pi \int\limits_{\frac{3}{5}R}^{R} \left(2\rho^2 - 2R\rho + \rho\sqrt{R^2 - \rho^2}\right) d\rho = 2\pi \left( 2\frac{\rho^3}{3} - 2R\frac{\rho^2}{2} \right)\Bigg|_{\frac{3}{5}R}^{R} -$$

$$-2\pi \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{3}{5}R}^{R} \left(R^2 - \rho^2\right)^{1/2} d\left(R^2 - \rho^2\right) = 2\pi \left( \frac{2}{3}\left( R^3 - \frac{27}{125}R^3 \right) - R^3 + \frac{9}{25}R^3 \right) -$$

$$-2\pi \frac{1}{2} \frac{\left(R^2 - \rho^2\right)^{3/2}}{3/2} \Bigg|_{\frac{3}{5}R}^{R} = \frac{8}{75}\pi R^3.$$

Тоді об’єм кулі, що лежить всередині конуса, буде дорівнювати

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{8}{75}\pi R^3 = \frac{92}{75}\pi R^3.$$

**Приклад 7.** Обчислити об’єм тіла $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3 = a^2\left(x^2 + y^2\right)^2$.

**Розв’язання.** Перейдемо до сферичних координат, тоді рівняння поверхні буде мати вигляд $\rho^2 = a^2 \sin^4\theta$, або $\rho = a\sin^2\theta$. Обєм тіла у сферичних координатах обчислюють так:

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{a\sin^2\theta} \rho^2 d\rho = 2\pi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{a\sin^2\theta} = 2 \cdot \frac{2\pi a^3}{3} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^7\theta d\theta =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{6!!}{7!!} = \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{7 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{64\pi a^3}{105}.$$

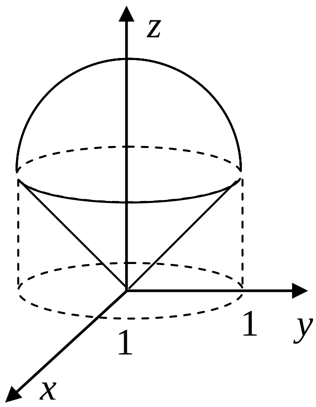


Рис. 10.25

**Приклад 8.** Знайти момент інерції відносно осі $Oz$ однорідного тіла ($\delta(x, y, z) \equiv 1$), що обмежене сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ та конусом $x^2 + y^2 = z^2$ (рис. 10.25).

**Розв’язання.** Побудуємо дане тіло. Для цього знайдемо лінію перетину поверхонь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2z \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow 2z^2 = 2z \Rightarrow z = 1,$$

тобто ця лінія є колом з радіусом $R = 1$, що лежить у площині $z = 1$.

Проекцією тіла на площину $xOy$ є коло $x^2 + y^2 \le 1$.

Момент інерції обчислюється за формулою

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz.$$

Перейдемо до сферичних координат, тоді межі інтегрування за $\varphi$ та $\theta$ можна визначити за допомогою рівняння $x^2 + y^2 = z^2$. Припускаючи, що $x = 0$ (або $y = 0$), будемо мати $y = z \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$, тобто $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$.

$$I_z = \iiint\limits_{V'} r^2 \sin^2\theta r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} \sin^3\theta d\theta \int\limits_0^{2\cos\theta} r^4 dr = \frac{11\pi}{30}.$$

**Приклад 9.** Обчислити центр ваги спільної частини куль $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ та $x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rz$, якщо густина у будь-якій точці даного тіла дорівнює відстані цієї точки від площини $xOy$.

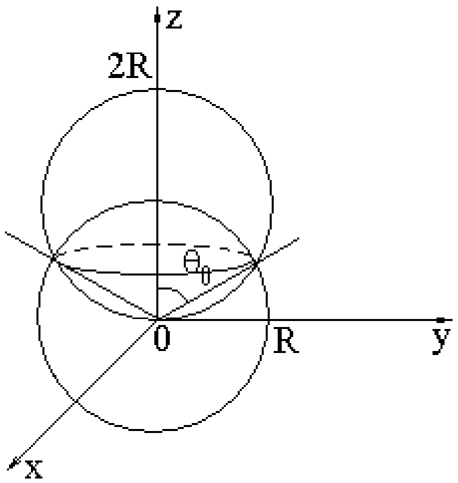



Рис. 10.26

**Розв'язання.** Координати центра ваги тіла обчислюють за формулами:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint\limits_D x\delta(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_D \delta(x,y,z)dxdydz};$$

$$y_c = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint\limits_D y\delta(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_D \delta(x,y,z)dxdydz};$$

$$z_c = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint\limits_D z\delta(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_D \delta(x,y,z)dxdydz},$$

де $M$ – маса тіла, $M_{yz}, M_{xz}, M_{xy}$ – статичні моменти.

У данному прикладі $\delta(x,y,z) = z$. Через симетрію тіла (рис. 10.26) відносно осі $Oz$ маємо $x_c = y_c = 0$. Визначимо кут $\theta_0$, розв'язуючи сумісно рівняння сфер (у сферичних координатах):

$$\begin{cases} \rho = R; \\ \rho = 2R\cos\theta; \end{cases} \Rightarrow \cos\theta_0 = \frac{1}{2}; \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{3}.$$

Тоді $$M_x = \iiint\limits_V z^2 dV = \iiint\limits_V \rho^4 \cos^2\theta \sin\theta \; d\rho \; d\varphi \; d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta \cos^2\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \rho^4 d\rho + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos^2\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2R\cos\theta} \rho^4 d\rho =$$

$$= \frac{7\pi R^5}{60} + \frac{\pi R^5}{160} = \frac{59\pi R^5}{480}.$$

$$M = \iiint\limits_V z dV = \iiint\limits_V \rho^3 \cos\theta \sin\theta \; d\rho \; d\varphi \; d\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta \cos\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \rho^3 d\rho +$$

$$+ \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2R\cos\theta} \rho^3 d\rho = \frac{19\pi R^4}{80}.$$

Таким чином, $z_c = \dfrac{59\pi R^5}{480} \Big/ \dfrac{19\pi R^4}{80} = \dfrac{59R}{114}$.

## Контрольні приклади до гл. 10

**Перш ніж приступити до виконання індивідуального розрахункового завдання, читачу рекомендується разом з нами розв’язати декілька типових задач, замінюючи знак $\boxed{*}$ необхідними числами та виразами.**

**Приклад 10.1.** Обчислити $\iint\limits_D \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right) dxdy$, якщо область $D$ обмежена такими лініями $x = 1;\; y = x^2;\; y = -\sqrt{x}$.

**Розв’язання.** Побудуємо область, що обмежена заданою прямою та параболами. Для визначення меж інтегрування виберемо внутрішню та зовнішню змінні, наприклад, нехай $x$ – зовнішня, а $y$ – внутрішня. Тоді $x \in \left[\boxed{*};1\right]$ та $-\sqrt{x} \le y \le \boxed{*}$. Обчислимо наданий інтеграл

$$\iint\limits_D \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right) dxdy = 4\int\limits_{\boxed{*}}^{\boxed{*}} x^{\boxed{*}} dx \int\limits_{\boxed{*}}^{\boxed{*}} \left(3y^2 + 4\cdot\boxed{*}\right) dy =$$

$$=4\int_{\boxed{*}}^{\boxed{*}} x^{\boxed{*}}\left(y^3+x\cdot\boxed{*}\right)\Big|_{\boxed{*}}^{\boxed{*}}dx=4\int_{\boxed{*}}^{\boxed{*}}\left(x^8+x^{11}+x^{7/2}-\boxed{*}\right)dx=1.$$

**Приклад 10.2.** Обчислити площу фігури, що обмежена такими лініями: $x=5-y^2;\ x=-4y$.

**Розв'язання.** Побудуємо область, що обмежена параболою та прямою. Нехай $x$ – внутрішня, а $y$ – зовнішня змінна. Тоді $y\in\left[-1;\boxed{*}\right]$ та $-4y\le x\le\boxed{*}$.

Обчислимо площу за формулою $S=\iint\limits_D dxdy$, де $D$ – область, площину якої обчислюємо.

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int_{\boxed{*}}^{\boxed{*}}dy\int_{\boxed{*}}^{\boxed{*}}dx=\int_{\boxed{*}}^{\boxed{*}}\left(5+4y-\boxed{*}\right)dy=\left(5y+2y^2-\frac{\boxed{*}}{3}\right)\Bigg|_{\boxed{*}}^{\boxed{*}}=36 \text{ од.кв.}$$

**Приклад 10.3.** Побудуємо площу фігури, що обмежена такими лініями: $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x$.

**Розв'язання.** Перші дві криві є кола. Побудуємо область, що обмежена цими колами та двома прямими $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x$. Площу отриманої фігури легше обчислити у полярній системі координат: $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$. Формула переходу від декартової системи до полярної має вигляд

$$S=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_D rdrd\varphi.$$

Визначимо межі змінення нових змінних:

$\varphi\in\left[\dfrac{\pi}{6},\boxed{*}\right]$ та $\boxed{*}\le r\le 4\sin\varphi$. Тепер можна обчислити шукану площу:

$$S=\iint\limits_D rdrd\varphi=\int_{\boxed{*}}^{\boxed{*}}d\varphi\int_{\boxed{*}}^{\boxed{*}}rdr=6\int_{\boxed{*}}^{\boxed{*}}\sin^2\varphi d\varphi=3\left(\varphi-\frac{\boxed{*}}{2}\right)\Bigg|_{\boxed{*}}^{\boxed{*}}=\frac{\pi}{2} \text{ од. кв.}$$

## Лабораторна робота 10. Обчислення кратних інтегралів у системі Maple

**Завдання 1.** а) Обчислити подвійний інтеграл $\int_{2}^{4}\int_{x}^{2x}\frac{y}{x}dydx$. б) Обчислити подвійний інтеграл $\iint_{D}\left(12x^2y^2+16x^3y^3\right)dxdy$ по області D, що обмежена лініями $D: x=2; y=x^2; y=-\sqrt{x}$. в) Обчислити потрійний інтеграл $\int_{2}^{5}\int_{1}^{4}\int_{1}^{2}xyz\cdot dxdydz$.

**Виконання.** Для обчислення кратних інтегралів у пакеті **student** з бібліотеки Maple маємо дві команди:

**Doubleint(expr,x=a..b,y=c..d)** для подвійного інтегрування;

**Tripleint(expr, x = a..b,y  = c..d , z = e..f,)** для потрійного інтегрування,

де expr – підінтегральний вираз, далі перелічуються змінні інтегрування та межі інтегрування, причому першими вказуються межі внутрішнього інтеграла, а останніми – зовнішнього. Позначимо I1 – аналітичний вираз кратного інтеграла. Щоб отримати чисельне значення інтеграла, треба застосувати команду **value(I1):**

а) > **with(student):**

> **I1:=Doubleint(y/x,y=x..2*x,x=2..4);**

$$I1:=\int_{2}^{4}\int_{x}^{2x}\frac{y}{x}dydx;$$

> **I1:=value(I1);**

$$I1:=9;$$

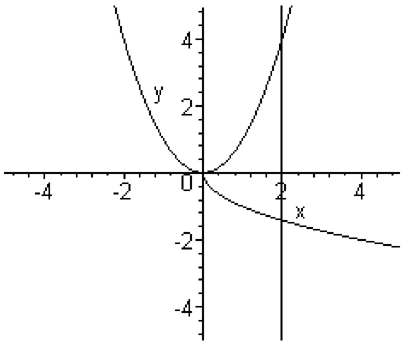
б)> **f:=12*x^2*y^2+16*x^3*y^3;**

$$f:=12x^2y^2+16x^3y^3;$$

Побудуємо область інтегрування. Використаємо знайому вже команду **plot(f1(x), f2(x), f3(x),x=a..b,y=c..d)**. Пряму $x=2$ побудуємо по двох точках, координати яких задамо у масиві dat:

> **dat:=[[2,-5],[2,5]]:**

> **plot([dat,x^2,-sqrt(x)],x=-5..5,y=-5..5,color=black);**




Використовуючи рисунок, розставимо межі інтегрування

> **I1:=Doubleint(f,y=-sqrt(x)..x^2,x=0..2);**

$$I1 := \int_0^2 \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right) dydx\,;$$

> **I1**:=**value(I1);**

$$I1 := \frac{128}{9}\sqrt{2} + \frac{13952}{9}\,;$$

Отримане значення переведемо у десятковий дріб

> I1:= **evalf(I1);**

$$I1 := 1570.335482\,;$$

в) > **I1:=Tripleint(x*y*z,x=1..2,y=1..4,z=2..5);**

$$I1 := \int_2^5 \int_1^4 \int_1^2 xyz \cdot dxdydz\,;$$

> **I1:=value(I1);**

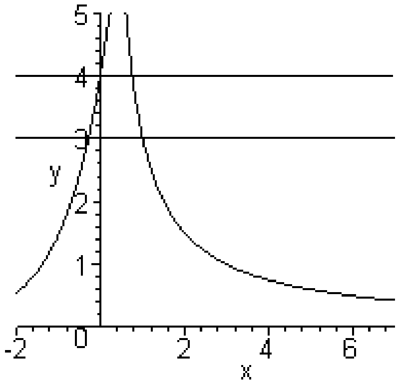
$$I1 := \frac{945}{8}\,.$$

**Завдання 2.** Обчислити площу пластини, що обмежена заданими лініями: а) $y = \frac{3}{x}; y = 4e^x; y = 3, y = 4$; б) $x = 8 - y^2; x = -2$; в) обчислити масу пластини, що обмежена лініями $x = \frac{1}{4}, y = 0, y^2 = 16x, (y \ge 0)$. Поверхнева густина матеріалу пластини $\rho = 16x + \frac{9}{2}y^2$. $S$ – площа пластини.

**Виконання**

а) Будуємо лінії, що обмежують пластину:

> **plot([3/x,4*exp(x),3,4],x=-2..7,y=0..5,color=black);**




Із рисунка видно, що зручніше внутрішній інтеграл брати за змінною $x$, а зовнішній – за $y$, для цього приведемо рівняння ліній до вигляду $x = \ln\left(\frac{y}{4}\right)$ та $x = \frac{3}{y}$.

**> I1:=Doubleint(1,x=ln(y/4)..3/y,y=3..4);**

$$I1 := \int_{3}^{4} \int_{\ln\left(\frac{y}{4}\right)}^{\frac{3}{y}} dx dy;$$

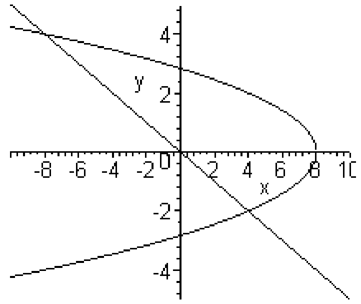
**> S:=value(I1);**

$$S := 1.$$

б) Будуємо лінії, що обмежують пластину, для цього приводимо рівняння ліній до вигляду

$$y = \sqrt{8-x}\,,\; y = -\sqrt{8-x} \;\text{ і }\; y = -\frac{x}{2}.$$

> **plot([sqrt(8-x),-sqrt(8-x),-x/2],x=-10..10,y=-5..5,color=black);**




за допомогою команди **intercept(y=f1(x), y=f2(x),{x,y})** знаходимо координати точок перетину

> **intercept(y=-sqrt(8-x),y=-x/2,{x,y});**

$$\{y = -2, x = 4\};$$

> **intercept(y=sqrt(8-x),y=-x/2,{x,y});**

$$\{y=4, x=-8\};$$

> **I1:=Doubleint(1,x=-2*y..8-y^2,y=-2..4);**

$$I1 := \int_{-2}^{4}\int_{-2y}^{8-y^2} dxdy;$$

> **s:=value(I1);**

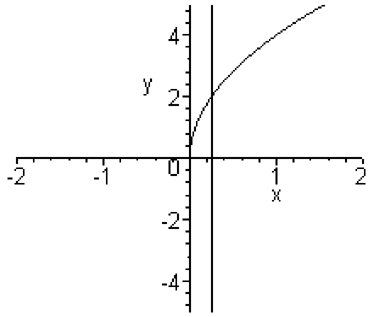
$$S := 36.$$

в)> **f:=16*x+9*y^2/2;** (задаємо функцію густини матеріалу);

$$f := 16x + \frac{9}{2}y^2;$$

> **dat:=[[1/4,-5],[1/4,5]]:** (задаємо точки для побудови лінії $x=\frac{1}{4}$);

> **plot([0,dat,sqrt(16*x)],x=-2..2,y=-5..5,color=black);**




> **I1:=Doubleint(f,y=0..sqrt(16*x),x=0..1/4);**

$$I1 := \int_{0}^{1/4}\int_{0}^{4\sqrt{x}} \left(16x + \frac{9}{2}y^2\right) dydx;$$

> **M:=value(I1);**

$$M := 2.$$

## Контрольні завдання до гл. 10

**Завдання 1.** Змінити порядок інтегрування в подвійних інтегралах:

**10.1.1.** $\int_{1}^{2} dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x} f(x,y)dy$ **10.1.2.** $\int_{0}^{3} dx \int_{\frac{3}{2}-\frac{x^2}{6}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy$

**10.1.3.** $\int_{0}^{2} dx \int_{x}^{x\sqrt{3}} f(x,y)dy$ **10.1.4.** $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$

**10.1.5.** $\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$

**10.1.6.** $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\sqrt{8x-x^2}}^{4\sqrt{x}} f(x,y)dy$

**10.1.7.** $\int\limits_{0}^{R\sqrt{2}/2} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx$

**10.1.8.** $\int\limits_{-1}^{2} dy \int\limits_{y^2-4}^{y-2} f(x,y)dx$

**10.1.9.** $\int\limits_{e}^{e^2} dx \int\limits_{1}^{\ln x} f(x,y)dy$

**10.1.10.** $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{1/y}^{y} f(x,y)dx$

**10.1.11.** $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy$

**10.1.12.** $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$

**10.1.13.** $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$

**10.1.14.** $\int\limits_{-2}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{y} f(x,y)dx$

**10.1.15.** $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{ax}} f(x,y)dy$

**10.1.16.** $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy$

**10.1.17.** $\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$

**10.1.18.** $\int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dx$

**10.1.19.** $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x,y)dy$

**10.1.20.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$

**10.1.21** $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f(x,y)dy$

**10.1.22.** $\int\limits_{0}^{\frac{a}{2}} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-4x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)dy$

**10.1.23.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

**10.1.24.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-y}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

**10.1.25.** $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy$

**10.1.26.** $\int\limits_1^{2} dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{x} f(x,y)dy$

**10.1.27.** $\int\limits_0^{3} dx \int\limits_{\frac{3}{2}-\frac{x^2}{6}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy$

**10.1.28.** $\int\limits_0^{2} dx \int\limits_{x}^{x\sqrt{3}} f(x,y)dy$

**10.1.29.** $\int\limits_0^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$

**10.1.30.** $\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$

**Завдання 2.** Побудувати область $D$ та обчислити $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

**10.2.1.** $f(x,y)=\dfrac{x}{y^2}, D: x=4, y=2, y=2x.$

**10.2.2.** $f(x,y)=\sin(x+y), D: y=0, y=x, x+y=\pi$

**10.2.3.** $f(x,y)=xy, D: x+y=2, y+1=\dfrac{x^2}{4}.$

**10.2.4.** $f(x,y)=xy^3, D: y=x^2-2, y=x.$

**10.2.5.** $f(x,y)=x^2-1, D: x=2, y=x, y=\sqrt{3}x.$

**10.2.6.** $f(x,y)=2x+1, D: y^2=x+1, x=0.$

**10.2.7.** $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}, D: 2y=x^2, y=x.$

**10.2.8.** $f(x,y)=x+2y, D: y^2=x+4, y=x+2.$

**10.2.9.** $f(x,y)=\sqrt{9+x+y}, D: x=0, y=0, x+y=3.$

**10.2.10.** $.f(x,y)=e^y, D: x=0, y=\ln x, y=1, y=2.$

**10.2.11.** $f(x,y)=y+x^{2'}, D: x=1, x=2, y=0, y=3x.$

**10.2.12.** $f(x,y)=x^2y, D: y\ge 0, x^2+y^2-2ax=0.$

**10.2.13.** $f(x,y)=xy^2, D: x=0, x=-\sqrt{2ay-y^2}.$

**10.2.14.** $f(x,y)=x-y$**,** $D:\ y+x^2=2, y+1=2x.$

**10.2.15.** $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2}, D: xy=1, y=x, x=3.$

**10.2.16.** $f(x,y)=x^3y, D: x=0, y=1, y^2=x.$

**10.2.17.** $f(x,y)=x\sqrt{y}, D: y=x^2, y+3x^2-1.$

**10.2.18.** $f(x,y)=y^2+x, D: y=x^2, x=y^2.$

**10.2.19.** $f(x,y)=xy, D: y=\sqrt{2x-x^2}$ **,** $y$=0.

**10.2.20.** $f(x,y)=x^3y, D: x=\sqrt{4y-y^2}, x=0.$

**10.2.21.** $f(x,y)=x^2y, D: y=x, y=2-x^2.$

**10.2.22.** $f(x,y)=x+2y, D: x=0, y=x, y=2-x^2.$

**10.2.23.** $f(x,y)=3y-x, D: y=0, y=x, x^2+y-2=0.$

**10.2.24.** $f(x,y)=x^2y, D: x^2+y^2=4.$

**10.2.25.** $f(x,y)=y+x, D: xy=6, x+y=7.$

**10.2.26.** $f(x,y)=\dfrac{x}{y^2}, D: x=4, y=2, y=2x.$

**10.2.27.** $f(x,y)=\sin(x+y), D: y=0, y=x, x+y=\pi$

**10.2.28.** $f(x,y)=xy, D: x+y=2, y+1=\dfrac{x^2}{4}.$

**10.2.29.** $f(x,y)=xy^3, D: y=x^2-2, y=x.$

**10.2.30.** $f(x,y)=x^2-1, D: x=2, y=x, y=\sqrt{3}x.$

**Завдання 3.** Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, застосовуючи полярні координати.

**10.3.1.** $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, D: x^2+y^2=2a^2, y\ge x, x=0.$

**10.3.2.** $f(x,y)=y+1, D: x^2+y^2=2x, y\ge 0.$

**10.3.3.** $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{3x^2+3y^2}}, D: 1\le x^2+y^2\le 9.$

**10.3.4.** $f(x,y)=2x-y+4, D: (x-2)^2+y^2=4.$

**10.3.5.** $f(x,y)=3-x-y, D: x^2+y^2=2y.$

**10.3.6.** $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, D: y\geq x, x^2+y^2\leq R^2, x\geq 0.$

**10.3.7.** $f(x,y)=2-3x, D: x^2+y^2\leq 2, y\geq \sqrt{3}x, y\geq -x.$

**10.3.8.** $f(x,y)=1+2y, D: x^2+y^2+6y\leq 0, x\leq 0.$

**10.3.9.** $f(x,y)=xy^2, D: x^2+y^2\geq 2x, x^2+y^2\leq 4x.$

**10.3.10.** $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}, D: x^2+y^2\geq 4, x^2+y^2\leq 9.$

**10.3.11.** $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}, D: x^2+y^2\leq 9.$

**10.3.12.** $f(x,y)=xy, D: x^2+y^2-2y=0, y=x, y=-x.$

**10.3.13.** $f(x,y)=y, D: x^2+y^2\geq 2y, x^2+y^2\geq 4y.$

**10.3.14.** $f(x,y)=x\sqrt{x^2+y^2}, D: (x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2), x\geq 0.$

**10.3.15.** $f(x,y)=y+2x, D: x^2+y^2\leq 1, y\geq 0, y\leq \sqrt{3}x.$

**10.3.16.** $f(x,y)=x^3\sqrt{x^2+y^2}, D: (x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2), x\leq 0.$

**10.3.17.** $f(x,y)=x^2+y^2, D: x^2+y^2=2ay.$

**10.3.18.** $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2+1}, D: y=\sqrt{4-x^2}, y=0.$

**10.3.19.** $f(x,y)=x+3y, D: x^2+y^2=1, y\geq -x, y\geq \sqrt{3}x.$

**10.3.20.** $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, D: 4\leq x^2+y^2\leq 9.$

**10.3.21.** $f(x,y)=\ln(x^2+y^2), D: e^2\leq x^2+y^2\leq e^4$

**10.3.22.** $f(x,y)=\dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}, D: x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=8x,\ y=x,\ y=2x.$

**10.3.23.** $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, D: x^2+y^2=1, x\leq 0, y\geq 0.$

**10.3.24.** $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}, D: 1\leq x^2+y^2\leq 4.$

**10.3.25.** $f(x,y)=x^2+y^2, D: x^2+y^2=4x.$

**10.3.26.** $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, D: x^2+y^2=2a^2, y\geq x, x=0.$

**10.3.27.** $f(x,y) = y+1, D: x^2+y^2=2x, y \geq 0.$

**10.3.28.** $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{3x^2+3y^2}}, D: 1 \leq x^2+y^2 \leq 9.$

**10.3.29.** $f(x,y) = 2x-y+4, D: (x-2)^2+y^2=4.$

**10.3.30.** $f(x,y) = 3-x-y, D: x^2+y^2=2y.$

**Завдання 4.** Знайти центр ваги плоскої фігури, що обмежена лініями:

**10.4.1.** $x = \sqrt{6y-y^2}, \ x=0, \ \gamma = \text{const}.$

**10.4.2.** $x^2+y^2 \leq 9, \ y \geq \dfrac{3}{2} - \dfrac{x^2}{6}, \ \gamma = y.$

**10.4.3.** $y = \sqrt{2x-x^2}, \ y=0, \ \gamma = x.$

**10.4.4.** $y^2 = x+4, \ y = x+2, \ \gamma = \text{const}.$

**10.4.5.** $x+y=2, \ y=\sqrt{2x-x^2}, \ \gamma = \text{const}.$

**10.4.6.** $x^2+y^2=R^2, \ y \geq x, \ x \geq 0, \ \gamma = xy.$

**10.4.7.** $y = \sqrt{x}/2, \ y = 1/(2x), \ x=4, \ \gamma = x.$

**10.4.8.** $y = x^2, \ y = x^3, \ \gamma = y.$

**10.4.9.** $x+1 = \dfrac{y^2}{4}, \ x+y=2, \ \gamma = \text{const}.$

**10.4.10.** $x^2+y^2-2y=0, \ y \leq 1, \ \gamma = y.$

**10.4.11.** $x^2+y^2=2x, \ x \geq 1, \ \gamma = x.$

**10.4.12.** $y = \sin x, \ y = \cos x, \ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \ \gamma = \text{const}.$

**10.4.13.** $y^2 = 4x+4, \ y^2 = -2x+4, \ \gamma = x^2.$

**10.4.14.** $x+y=1, \ x = -\sqrt{1-y^2}, \ y \geq 0, \ \gamma = \text{const}.$

**10.4.15.** $y = -\sqrt{2ax-x^2}, \ y=0, \ \gamma = \text{const}.$

**10.4.16.** $x^2+y^2=6x, \ y=0, \ y-x=0, \ \gamma = x.$

**10.4.17.** $y = \sin x, \ y \geq 0, \ \pi \geq x \geq 0, \gamma = \text{const}.$

**10.4.18.** $y = 3x^2, \ y-12x=0, \ \gamma = xy.$

**10.4.19.** $x^2+y^2=6y,\ x=0,\ x=y,\ \gamma=y.$

**10.4.20.** $x^2+y^2=4x,\ y=x,\ \gamma=y.$

**10.4.21.** $2y=(1-x)^2,\ x^2+y^2=1,\ x=0,\ \gamma=\mathrm{const}.$

**10.4.22.** $x^2+y^2=4,\ y\ge 0,\ y\le\sqrt{3}x,\ \gamma=x.$

**10.4.23.** $y=\ln x,\ y=0,\ x=e,\ \gamma=\mathrm{const}.$

**10.4.24.** $y=x,\ y+x^2=2,\ \gamma=2y.$

**10.4.25.** $x^2+y^2=4,\ x\ge 0,\ y\ge\sqrt{3}x,\ \gamma=2y.$

**10.4.26.** $x=\sqrt{6y-y^2},\ x=0,\ \gamma=\mathrm{const}.$

**10.4.27.** $x^2+y^2\le 9,\ y\ge\dfrac{3}{2}-\dfrac{x^2}{6},\ \gamma=y.$

**10.4.28.** $y=\sqrt{2x-x^2},\ y=0,\ \gamma=x.$

**10.4.29.** $y^2=x+4,\ y=x+2,\ \gamma=\mathrm{const}.$

**10.4.30.** $x+y=2,\ y=\sqrt{2x-x^2},\ \gamma=\mathrm{const}.$

**Завдання 5.** Обчислити об’єм тіла, що обмежене поверхнями:

**10.5.1.** $2(x^2+y^2)=9z, x^2+y^2+z^2=9.$

**10.5.2.** $z=8-x^2-y^2, z=4.$

**10.5.3.** $z^2=x^2+y^2, z=6-x^2-y^2.$

**10.5.4.** $12z=x^2+y^2, x^2+y^2+z^2=64.$

**10.5.5.** $4z=x^2+y^2, x^2+y^2=4x.$

**10.5.6.** $z=1, z=\sqrt{25-x^2-y^2}, x^2+y^2=16, (x^2+y^2)\le 16).$

**10.5.7.** $x^2+y^2=2y, z=2y, z=4y.$

**10.5.8.** $x^2+y^2=z^2, x^2+y^2+z^2=4z.$

**10.5.9.** $x^2+y^2+z^2=9, z=\sqrt{(x^2+y^2)/8}.$

**10.5.10.** $x+z=4, 2z=x^2+y^2.$

**10.5.11.** $z=28-x^2-y^2, z=12\sqrt{x^2+y^2}.$

**10.5.12.** $z=\sqrt{36-x^2-y^2}, z=1, x^2+y^2=27, (x^2+y^2\le 27).$

**10.5.13.** $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{9}.$

**10.5.14.** $2z = x^2 + y^2, z^2 = x^2 + y^2.$

**10.5.15.** $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 1, (x^2 + y^2 \geq 1).$

**10.5.16.** $x^2 + y^2 + z^2 = 4, 2x = x^2 + y^2, (x^2 + y^2 \leq 2x).$

**10.5.17.** $z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2), z = 8.$

**10.5.18.** $x^2 + y^2 + z^2 = 144, \quad 18z = x^2 + y^2.$

**10.5.19.** $z = x^2, \ z = 0, \ y = 2x, \ x + y = 3.$

**10.5.20.** $x^2 + y^2 = 9, z = 0, x + y + z = 6.$

**10.5.21.** $z = 0, z = 4 - x^2, x^2 + y^2 = 4.$

**10.5.22.** $6z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 = 16.$

**10.5.23.** $z = 6\sqrt{x^2 + y^2}, z = 16 - x^2 - y^2.$

**10.5.24.** $z = 0, x^2 + y^2 = 2ax, x^2 + y^2 = z^2.$

**10.5.25.** $z = 2x, z = 0, x^2 + y^2 = 2ax.$

**10.5.26.** $2(x^2 + y^2) = 9z, x^2 + y^2 + z^2 = 9.$

**10.5.27.** $z = 8 - x^2 - y^2, z = 4.$

**10.5.28.** $z^2 = x^2 + y^2, z = 6 - x^2 - y^2.$

**10.5.29.** $12z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 = 64.$

**10.5.30.** $4z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4x.$

**Завдання 6.** Знайти масу неоднорідного тіла, обмеженого заданими поверхнями, за відомої функції розподілу густини $\gamma(x, y, z)$.

**10.6.1.** $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz, \ \gamma = z.$

**10.6.2.** $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}, \ \gamma = y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

**10.6.3.** $x + 2y + 3z = 6, \ x = 0, \ y = 0, \ z = 0, \ \gamma = y.$

**10.6.4.** $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ x^2 + y^2 + z^2 = 4, \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

**10.6.5.** $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \ x^2 + y^2 + z^2 = 9, \ \gamma = x^2 + y^2.$

**10.6.6.** $3z = x^2 + y^2, \;\; z = 3, \; \gamma = x^2 + y^2.$

**10.6.7.** $x^2 + y^2 = 2x, \; z = 0, \; z = 2y, \; \gamma = z\sqrt{x^2 + y^2}.$

**10.6.8.** $2z = x^2 + y^2, \; x^2 + y^2 + z^2 = 3, \; \gamma = x^2.$

**10.6.9.** $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \; x^2 + y^2 = z^2, \; x \ge 0, \; y \ge 0, \; z \ge 0, \; \gamma = 4z.$

**10.6.10.** $x^2 + y^2 = 1, \; x - 2y + 3z = 0, \; z = 10, \; \gamma = 2x^2 + z^2.$

**10.6.11.** $z = x^2 + y^2, \; z = 0, x^2 + y^2 = 1, \; \gamma = x^2 y^2.$

**10.6.12.** $x^2 + y^2 + z = 4, \; z = 0, \; \gamma = 3z.$

**10.6.13.** $x^2 + z^2 = y^2, \; y = 1, \; \gamma = x^2 + z^2.$

**10.6.14.** $x^2 + y^2 - z^2 = 1, \; z = 0, \; z = 1, \; \gamma = x^2 + y^2.$

**10.6.15.** $x^2 + y^2 + z = 9, \; z = 0, \; \gamma = x^2 + y^2.$

Знайти координати центра ваги неоднорідного тіла, обмеженого даними поверхнями, за відомої функції розподілу густини $\gamma(x, y, z)$.

**10.6.16.** $x^2 + y^2 + z^2 = 16, \; x^2 + y^2 = 3z^2, \; x \ge 0, \; y \ge 0, \; z \ge 0, \; \gamma = z.$

**10.6.17.** $25(x^2 + y^2) = z^2, \; 5(x^2 + y^2) = z, \; x \ge 0, \; y \ge 0, \; \gamma = yz.$

**10.6.18.** $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \; z \ge 0, \; \gamma = z.$

**10.6.19.** $x + y + z = 10, x = 0, \; y = 0, \; z = 0, \; \gamma = z^2.$

**10.6.20.** $x = 4 - y^2 - z^2, \; x = 0, \gamma = 2x.$

**10.6.21.** $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \; z = 2, \; \gamma = z^3.$

**10.6.22.** $x^2 + z^2 = 4y, \; y = 2, \; \gamma = \mathrm{const}.$

**10.6.23.** $x^2 + y^2 = 4z, \; z = 2, \; \gamma = z.$

**10.6.24.** $x^2 + y^2 = 4, \; x^2 + y^2 = 8z, \; x \ge 0, y \ge 0, \; z \ge 0, \; \gamma = x.$

**10.6.25.** $x^2 + y^2 + z^2 = 9, \; x^2 + y^2 \le 4, \; z \ge 0, \; \gamma = z.$

**10.6.26.** $x^2 + y^2 + z^2 = 16, \; x^2 + y^2 = 3z^2 \;\; , x \ge 0, \; y \ge 0, \; z \ge 0, \; \gamma = z.$

**10.6.27.** $25(x^2 + y^2) = z^2, \; 5(x^2 + y^2) = z \;\; , x \ge 0, \; y \ge 0, \; \gamma = yz.$

**10.6.28.** $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \; z \ge 0, \; \gamma = z.$

**10.6.29.** $x + y + z = 10, \; x = 0, \; y = 0, \; z = 0, \; \gamma = z^2.$

**10.6.30**. $x = 4 - y^2 - z^2, \; x = 0, \; \gamma = 2x.$

## Глава 11. Криволінійні і поверхневі інтеграли

### 11.1. Криволінійні інтеграли I роду

Розглянемо просторову кусково-гладку криву $L$, обмежену точками $A$ і $B$. Нехай у кожній точці $M(x,y,z)$ цієї кривої визначена неперервна функція $f(x,y,z)=f(M)$. Розіб'ємо дугу $AB$ на $n$ частин точками $A_0=A,A_1,A_2,...,A_n=B$. На кожній частині $A_{i-1}A_i$ виберемо довільну точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$ і обчислимо в ній значення функції $f(x_i,y_i,z_i)$. Число $f(x_i,y_i,z_i)$ помножимо на довжину дуги $\Delta l_i$. Утворимо суму

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta l_i ,$$

що називається *інтегральною сумою* по кривій $L$ функції $f(x,y,z)$.

**Визначення.** *Криволінійним інтегралом I роду* від функції $f(x,y,z)$ по кривій $L$ називається границя інтегральної суми при $\lambda\to 0$, де $\lambda=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\{\Delta l_i\}$

$$\int\limits_L f(x,y,z)dl=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{max\Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta l_i .$$

Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна у всіх точках дуги $AB$, то ця границя існує і не залежить ні від способу розбиття дуги $AB$, ні від вибору точки $M_i(x_i,y_i,z_i)$ на кожній із цих частин.

Якщо крива $L$ лежить у площині $XOY$, то функція $f$ залежить тільки від $(x,y)$ і

$$\int\limits_L f(x,y)dl=\lim_{max\Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta l_i .$$

#### 11.1.1. Обчислення криволінійних інтегралів I роду

Обчислення криволінійних інтегралів I-го роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла. Розглянемо різні способи завдання кривої $L$ і перехід до визначеного інтеграла.

а) Якщо крива $L$ задана параметричними рівняннями:

$$L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad (t_1 \le t \le t_2), \\ z = z(t) \end{cases}$$

то $\int\limits_L f(x,y,z)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left[x(t),y(t),z(t)\right]\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt$,

тому що в цьому випадку $dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt$. Якщо крива лежить у площині $xOy$, то

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left[x(t),y(t)\right]\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt.$$

б) Якщо плоска крива $L$ задана рівнянням $y = y(x)$, де $a \le x \le b$, то $dl = \sqrt{1 + y_x'^2}\,dx$ й

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f\left[x,y(x)\right]\sqrt{1 + y_x'^2}\,dx.$$

в) Якщо плоска крива $L$ задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi), (\alpha \le \varphi \le \beta)$ у полярних координатах, то $dl = \sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\,d\varphi$ й

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f\left[\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right]\sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\,d\varphi.$$

Нижня межа інтегрування в усіх випадках менше верхньої: $a < b$, $t_1 < t_2$, $\alpha < \beta$.

### 11.1.2. Застосування криволінійних інтегралів І-го роду

а) *Довжина дуги* $AB$ кривої обчислюється як

$$l = \int\limits_{AB} dl.$$

б) *Маса матеріальної дуги*. Якщо в кожній точці кривої $L$ густина маси $\gamma(x,y,z)$ є функцією координат цієї точки $\gamma(x,y,z) = f(x,y,z)$, то маса дуги кривої обчислюється за формулою

$$m = \int\limits_{(AB)} \gamma(x,y,z)dl.$$

в) *Статичні моменти* плоскої дуги щодо координатних осей визначаються за формулами

$$M_{OX} = \int\limits_{(AB)} y\gamma(x,y)dl;\; M_{OY} = \int\limits_{(AB)} x\gamma(x,y)dl\,.$$

г) *Координати центра ваги* плоскої матеріальної дуги $AB$:

$$x_c = \frac{M_{OY}}{m} = \frac{\int\limits_{(AB)} x\gamma(x,y)dl}{\int\limits_{(AB)} \gamma(x,y)dl};\; y_c = \frac{M_{OX}}{m} = \frac{\int\limits_{(AB)} y\gamma(x,y)dl}{\int\limits_{(AB)} \gamma(x,y)dl}\,.$$

д) *Моменти інерції* матеріальної дуги щодо координатних осей:

$$I_{OX} = \int\limits_{(AB)} y^2\gamma(x,y)dl;\; I_{OY} = \int\limits_{(AB)} x^2\gamma(x,y)dl\,.$$

е) *Притягання точечної маси* матеріальної кривої. Якщо $AB$ – матеріальна крива з густиною розподілу маси $\gamma(x,y)$, а $m_0$ – точечна маса з координатою $(x_0,y_0)$, то крива $AB$ притягає масу $m_0$ із силою $\vec{F}(F_x,F_y)$, проекції якої на осі координат визначаються за формулами

$$F_x = \nu m_0 \int\limits_{AB} \frac{\gamma(x,y)(x-x_0)}{r^3}dl;\; F_y = \nu m_0 \int\limits_{AB} \frac{\gamma(x,y)(y-y_0)}{r^3}dl\,,$$

де $\nu$ – постійна тяжіння; $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ .

### 11.1.3. Приклади обчислення криволінійних інтегралів I роду

**Приклад 1.** Обчислити $\int\limits_L \left(x^5 + 8xy\right)dl$, де $L: y = \frac{1}{4}x^4, x_1 = 0, x_2 = 1$.

**Розв'язання.** Визначимо $y'_x$, $dl$ і перейдемо до визначеного інтеграла.

$$y'_x = x^3,\; dl = \sqrt{1 + y'^2_x}dx = \sqrt{1 + x^6}dx\,.$$

$$\int\limits_L \left(x^5 + 8xy\right)dl = \int\limits_0^1 \sqrt{1+x^6}\left(x^5 + 8x\cdot\frac{1}{4}x^4\right)dx = \int\limits_0^1 \sqrt{1+x^6}\,3x^5dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^6}\,d(x^6+1) = \frac{1}{3}(1+x^6)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

**Приклад 2.** Обчислити $\int\limits_L (2x+y)dl$, де $L$ – контур трикутника $ABC$, $A(1,0), B(0,2), C(0,0)$ (рис. 11.1).

**Розв’язання.** $\int\limits_L (2x+y)dl = \int\limits_{AB} (2x+y)dl + \int\limits_{BC} (2x+y)dl + \int\limits_{CA} (2x+y)dl$.

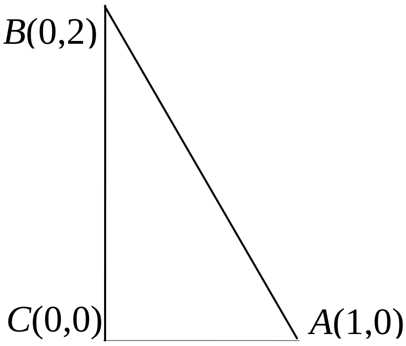


Рис. 11.1

Обчислимо кожний інтеграл окремо:

$$AB: \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}; \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2};$$

$$y = -2x+2, y' = -2;$$

$$dl = \sqrt{1+{y'_x}^2}dx = \sqrt{5}dx;$$

$$\int\limits_{AB} (2x+y)dl = \int\limits_{BA} (2x+y)dl \Rightarrow$$

$$\int\limits_{AB} (2x+y)dl = \int\limits_0^1 \sqrt{5}[2x+(-2x+2)]dx = 2\sqrt{5}\int\limits_0^1 dx = 2\sqrt{5}.$$

$$BC: x=0, x'_y=0; \quad dl = \sqrt{1+{x'_y}^2}dy = dy; \quad \int\limits_{BC} (2x+y)dl = \int\limits_0^2 ydy = \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^2 = 2.$$

$$CA: y=0, y'_x=0; \quad dl = \sqrt{1+{y'_x}^2}dx = dx; \quad \int\limits_{CA} (2x+y)dl = \int\limits_0^1 2xdx = \left.x^2\right|_0^1 = 1.$$

Отже: $\int\limits_L (2x+y)dl = 2\sqrt{5}+2+1 = 3+2\sqrt{5}$.

**Приклад 3.** Обчислити $\int\limits_L (2x+4y-4z+7)dl$, де $L$ – відрізок прямої між точками $M_1(8,9,3)$ й $M_2(6,10,5)$.

**Розв’язання.** Складемо рівняння прямої, що проходить через точки $M_1$ і $M_2$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}; \quad \frac{x-8}{-2} = \frac{y-9}{1} = \frac{z-3}{2} = t.$$

Увівши параметр $t$, одержимо рівняння:

$$\begin{cases} x = -2t+8 \\ y = t+9 \\ z = 2t+3 \end{cases}, 0 \le t \le 1;$$

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt = \sqrt{4+1+4}\,dt = 3dt;$$

$$\int_L (2x+4y-4z+7)dl = 3\int_0^1 \left[2(-2t+8)+4(t+9)-4(2t+3)+7\right]dt =$$

$$= 3\int_0^1 (47-8t)dt = 129.$$

**Приклад 4.** Обчислити $\int_L (x+y)dl$, де $L$ – пелюсток лемніскати $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$, розташований у першому координатному куті (рис 11.2).

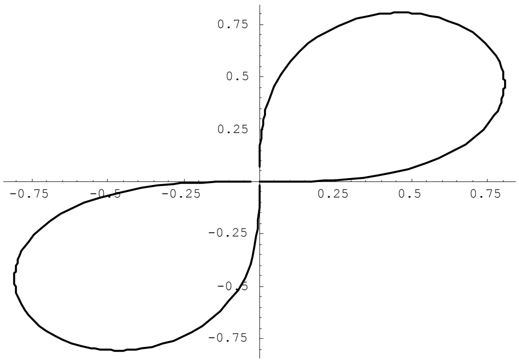



Рис. 11.2

**Розв'язання.** $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$,

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases},$$

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\,d\varphi,$$

$$\rho_\varphi' = \frac{a\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}};\rho_\varphi'^2 = \frac{a^2\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi};$$

$$\rho^2 + \rho_\varphi'^2 = a^2\sin 2\varphi + \frac{a^2\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{a^2}{\sin 2\varphi}.$$

Для встановлення меж інтегрування варто визначити проміжок зміни $\varphi$, що відповідає пелюстку кривої у першому координатному куті. Очевидно $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\int_L (x+y)dl = \int_0^{\pi/2} (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)\frac{a}{\sqrt{\sin 2\varphi}}d\varphi = a^2\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi =$$

$$= a^2(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2} = a^2(1+1) = 2a^2.$$

**Приклад 5.** Обчислити $\int_L \sqrt{2x^2+y^2}\,dl.\quad L: x^2+y^2+z^2 = a^2,\quad z = x$.

**Розв'язання.** Лінія задана перетинанням двох поверхонь: сфери і площини. Складемо параметричне рівняння цієї лінії. Для цього покладемо в рівнянні сфери $z = x$, одержимо спочатку рівняння проекції заданої лінії на площину $xOy$:

$$\frac{x^2}{a^2/2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

Ця проекція являє собою еліпс із півосями $a/\sqrt{2}$ і $a$ Параметричні рівняння еліпса мають вигляд

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t;\quad y=a\sin t;\quad t\in[0,2\pi].$$

Оскільки $z=x$, то параметричні рівняння лінії $L$ мають вигляд

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t;\quad y=a\sin t;\quad z=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t;\quad t\in[0,2\pi].$$

Знайдемо

$$dl=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt=\sqrt{2\frac{a^2}{2}\sin^2 t+a^2\cos^2 t}dt=adt.$$

$$\int\limits_L\sqrt{2x^2+y^2}dl=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2\frac{a^2}{2}\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\cdot a\cdot dt=a^2\int\limits_0^{2\pi}dt=2\pi a^2.$$

**Приклад 6.** Знайти довжину дуги гвинтової лінії:

$$L:\begin{cases}x=4a\cos t,\\ y=4a\sin t,\ (0\le t\le 2\pi).\\ z=3at,\end{cases}$$

**Розв’язання.** $\begin{cases}x'_t=-4a\sin t,\\ y'_t=4a\cos t,\\ z'_t=3a.\end{cases}$

$$dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}dt=\sqrt{16a^2\sin^2 t+16a^2\cos^2 t+9a^2}dt=5adt;$$

$$l=\int\limits_L dl=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}dt=\int\limits_0^{2\pi}5adt=5at\Big|_0^{2\pi}=10a\pi.$$

**Приклад 7.** Знайти центр ваги гвинтової лінії: $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt, t\in\left[0,\pi/2\right]$, якщо лінійна щільність у кожній точці пропорційна добутку перших двох координат. Для розв’язання використаємо формули

$$x_c=\frac{\int\limits_L x\gamma(x,y,z)dl}{\int\limits_L\gamma(x,y,z)dl};\ y_c=\frac{\int\limits_L y\gamma(x,y,z)dl}{\int\limits_L\gamma(x,y,z)dl};\ z_c=\frac{\int\limits_L z\gamma(x,y,z)dl}{\int\limits_L\gamma(x,y,z)dl}.$$

Знайдемо масу дуги $m=\int\limits_L \gamma(x,y,z)dl$. Відповідно до умови $\gamma(x,y,z)=kxy$.

$$dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,dt;$$

$$m=\int\limits_0^{\pi/2} kxy\sqrt{a^2+b^2}\,dt=k\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{\pi/2} a^2\cos t\sin t\,dt=$$

$$=a^2k\sqrt{a^2+b^2}\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\pi/2}=\frac{a^2k\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

$$\int\limits_L x\gamma(x,y,z)dl=ka^3\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin t\,dt=\frac{ka^3\sqrt{a^2+b^2}}{3};$$

$$\int\limits_L y\gamma(x,y,z)dl=ka^3\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos t\,dt=\frac{ka^3\sqrt{a^2+b^2}}{3};$$

$$\int\limits_L z\gamma(x,y,z)dl=kba^2\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{\pi/2} t\sin t\cos t\,dt=$$

$$=\frac{a^2bk\sqrt{a^2+b^2}}{2}\int\limits_0^{\pi/2} t\sin 2t\,dt=\frac{a^2bk\sqrt{a^2+b^2}}{2}\frac{\pi}{4}.$$

$$x_c=2a/3,\ y_c=2a/3,\ z_c=\pi b/4.$$

### 11.2. Криволінійні інтеграли II роду

1. Нехай $L$ – кусково-гладка просторова крива, на якій задано напрямок, а $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – неперервні функції, які визначені на ній. Розіб'ємо криву $L$ на елементарні ділянки $A_{i-1}A_i$, проекції яких на координатні осі $Ox$, $Oy$, $Oz$ відповідно позначимо $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$, $\Delta z_i=z_i-z_{i-1}$. Виберемо на кожній з ділянок довільну точку $M_i(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$ і обчислимо значення функції в цій точці.

Утворимо суму

$$W_n=\sum_{i=1}^{n}P(M_i)\Delta x_i+Q(M_i)\Delta y_i+R(Mi)\Delta z_i,$$

яка називається інтегральною сумою по координатах.

**Визначення.** Якщо $\lambda=\max\overline{A_{i-1}A_i}$ прямує до нуля і ця сума має скінчену границю *W*, що не залежить від способу розбиття кривої та вибору точок $M_i$, то ця границя називається *криволінійним інтегралом II роду* вздовж кривої $L$ і позначається як

$$W=\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz.$$

Криволінійний інтеграл II роду залежить від вибору напрямку кривої. При зміні напрямку інтеграл змінює знак, тобто

$$\int_{AB}Pdx+Qdy+Rdz=-\int_{BA}Pdx+Qdy+Rdz.$$

За своїм фізичним змістом криволінійний інтеграл II роду являє собою роботу змінної сили $\vec{F}=(P,Q,R)$, точка прикладення якої описує криву $L$.

2. *Обчислення криволінійного інтеграла II роду* зводиться до обчислення визначеного інтеграла.

а) Якщо плоска крива задана рівнянням $y=y(x), x\in[a,b]$, причому початку кривої відповідає $x=a$, а кінцю – $x=b$, то

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b P[x,y(x)]dx+Q[x,y(x)]y'_x dx.$$

б) Якщо крива $L$ задана параметрично і початковій точці кривої відповідає значення параметра $t=t_1$, а кінцевій точці – $t=t_2$

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases},\ t\in[t_1,t_2],$$

то

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{t_1}^{t_2}P[x(t),y(t)]x'_t dt+Q[x(t),y(t)]y'_t dt.$$

Зверніть увагу, що і у випадку а) і у випадку б) нижня межа інтеграла необов'язково менша за верхню.

**Визначення 1**. Область $D \subset R^2$ називається *однозв'язною*, якщо для будь-якого замкненого контуру $L \subset D$ область, яка обмежена цим контуром, також цілком лежить в плоскості $D$.

**Визначення 2**. Область $G \subset R^3$ називається *поверхнево-однозв'язною* або *однозв'язною*, якщо на будь-який замкнений контур $L \subset G$ можна натягнути поверхню, що цілком лежить в області $G$.

**Теорема.** *Якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ та їх частинні похідні першого порядку неперервні в замкненій однозв'язній області $D \subset R^2$, яка обмежена кусково-гладкою додатно орієнтованою кривою $L$, то має місце формула*

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \qquad (11.1)$$

Формула (11.1) називається *формулою Гріна*.

Формулу Гріна можна розповсюдити на будь-яку область, яку можна розбити на скінченне число областей вказаного в теоремі типу (наприклад, область, що має точки самоперетину, область, що не є однозв'язною).

**Теорема 1.** Нехай функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ та їх частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в замкненій однозв'язній області $D$. Тоді має місце рівносильність таких чотирьох тверджень:

1. $\oint_L Pdx + Qdy = 0$,

де $L$ – будь-який замкнений контур, що лежить в області $D$.

2. $\int_{AB} Pdx + Qdy$ не залежить від форми шляху, що з'єднує точки $A$ і $B$, $AB \subset D$.

3. $Pdx + Qdy = du(x,y)$, тобто вираз $Pdx + Qdy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, визначеної в області $D$.

4. У всіх точках області $D$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (11.2)$$

При виконанні умов цієї теореми, як наслідок, має місце формула

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} du(x,y) = u(B) - u(A) = u(x,y)\Big|_A^B. \quad (11.3)$$

Аналогічна теорема має місце для тривимірного випадку.

**Теорема 2.** *Нехай функції* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ *неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в замкненій поверхнево-однозв'язній області* $G$. *Тоді має місце рівносильність таких чотирьох тверджень*:

1. $\oint\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz = 0$,

де $L$ – будь-який замкнений контур, що лежить в області $G$.

2. $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ не залежить від форми шляху, що з'єднує точки $A$ і $B$, $AB \subset G$.

3. $Pdx + Qdy + Rdz = du(x,y,z)$, тобто вираз $Pdx + Qdy + Rdz$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y,z)$, визначеної в області $G$.

4. У всіх точках області $G$ виконуються рівності

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad (11.4)$$

При виконанні умов цієї теореми, як наслідок, має місце формула:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{AB} du(x,y,z) = u(B) - u(A) = u(x,y,z)\Big|_A^B. \quad (11.5)$$

*Знаходження функції за її повним диференціалом*

За допомогою розглянутих теорем можна розв'язати таку задачу.

Нехай відомо, що вираз $Pdx + Qdy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто $Pdx + Qdy = du(x,y)$. Умовою того, що цей вираз є повним диференціалом, є виконання умови (4.16): $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Треба знайти цю функцію $u(x,y)$.

Розв'язання задачі виконується так:
з виразу

$$du = Pdx + Qdy$$

випливає, що

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy,$$

де точки $M_0(x_0,y_0)$, $M(x,y)\in D$, $D$ – область визначення функцій $P(x,y)$, $Q(x,y)$ і криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування, а тільки від початкової та кінцевої точок цього шляху. Цей шлях вибираємо, як правило, у вигляді ламаної, складеної з відрізків прямих, паралельних осям координат. Отже, формула для знаходження функції за її повним диференціалом буде подана так:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C\,, \tag{11.6}$$

де $M_0M$ – ламана (рис. 11.3), яка з'єднує точки $M_0(x_0,y_0)$, $M(x,y)$ так, що відрізки ламаної паралельні осям координат.

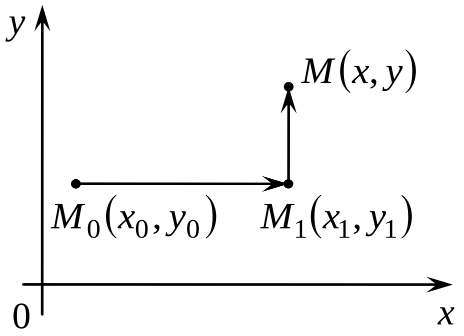



Рис. 11.3

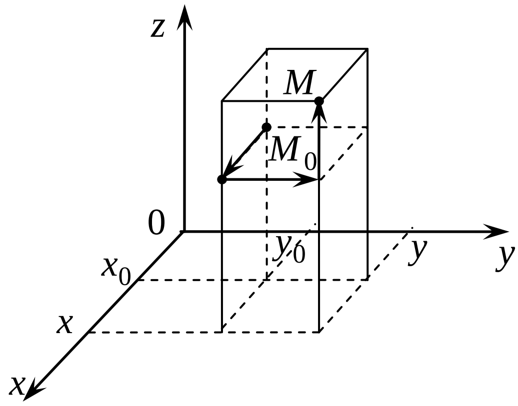



Рис. 11.4

Аналогічно розглядається поставлена задача для тривимірного випадку.

Якщо виконуються умови (4.18): $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial z}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x}$, то $P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=du(x,y,z)$ і тоді

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{y_0}^{y}R(x,y,z)dz+C\,, \tag{11.7}$$

де $M_0M$ – ламана (рис. 11.4), яка з'єднує точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$ так, що сторони ламаної паралельні осям координат.

*Застосування криволінійного інтеграла II роду.*

а) Площа плоскої фігури, що обмежена замкнутою кривою $L$ обчислюється за формулою

$$S=\oint_L xdy\,.$$

б) Робота змінної сили $\vec{F}(P,Q,R)$ при переміщенні матеріальної точки вздовж дуги $L$ обчислюється так:

$$W = \int_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

### 11.2.1. Приклади обчислення криволінійних інтегралів ІІ роду

**Приклад 1.** Обчислити $\int_L x^2dx + \frac{dy}{y^2}$, де $L$ – дуга кривої $x = \frac{1}{y}$ від точки $A(4, 1/4)$ до $B(1,1)$.

**Розв'язання.** З рівняння кривої $y = \frac{1}{x}, y' = -\frac{1}{x^2}$. Змінна $x$ відіграє роль параметра. Початковій точці кривої відповідає $x = 4$, кінцевій – $x = 1$.

$$\int_L x^2dx + \frac{dy}{y^2} = \int_4^1 x^2dx - \frac{1}{x^2}(x^2)dx = \int_4^1 (x^2 - 1)dx = -18.$$

**Приклад 2.** Обчислити $\int_L ydx + xdy$, де $L$ – дуга астроіди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, що розташована між тачками $A(a,0)$ та $B\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$.

**Розв'язання.** Знайдемо $dx = -3a\sin t\cos^2 tdt$, $dy = 3a\sin^2 t\cos tdt$,

$$ydx + xdy = -3a^2\sin^4 t\cos^2 tdt + 3a^2\cos^4 t\sin^2 tdt =$$

$$= 3a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t - \sin^2 t)dt = \frac{3}{4}a^2\sin^2 2t\cos 2tdt.$$

Початковій точці дуги відповідає $t = 0$, кінцевій – $t = \frac{\pi}{4}$, тоді

$$\int_L ydx + xdy = \frac{3}{4}a^2\int_0^{\pi/4} \sin^2 2t\cos 2tdt = \frac{3}{8}a^2\frac{\sin^3 2t}{3}\bigg|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{8}.$$

**Приклад 3.** Обчислити $\int_L y^2dx + (x^2 + z)dy + (x + y + z^2)dz$, де $L$ – відрізок прямої в просторі від точки $A(1,0,2)$ до $B(3,1,4)$.

**Розв'язання.** Складемо рівняння прямої, що проходить через точки $A$ і $B$:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2} = t.$$

Введемо параметр $t$ і одержимо:

$$x = 2t + 1,\ dx = 2dt,$$
$$y = t,\ dy = dt,$$
$$z = 2t + 2,\ dz = 2dt.$$

Параметр змінюється в межах $t_A \le t \le t_B$, тобто $0 \le t \le 1$ .

$$\int\limits_L y^2 dx + (x^2 + z)dy + (x + y + z^2)dz =$$

$$= \int\limits_0^1 2t^2 dt + \left[(1+2t)^2 + 2t + 2\right]dt + \left[(2t+1) + t + (2t+2)^2\right]dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (14t^2 + 28t + 13)dt = \frac{95}{3}.$$

**Приклад 4.** Знайти роботу, що виконує сила $\vec{F}\left\{\left(y^2 - z^2\right); x; yz\right\}$ вздовж дуги гіперболічної гвинтової лінії $x = bt; y = a\,\mathrm{ch}t; z = a\,\mathrm{sh}t$ від точки $A(0, a, 0)$ до точки $B(b, ach1, ash1)$.

**Розв'язання.** Робота дорівнює

$$W = \int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_L (y^2 - z^2)dx + xdy + yzdz .$$

Використовуючи рівняння кривої, знайдемо:

$dx = bdt; dy = a\,\mathrm{sh}tdt; dz = a\,\mathrm{ch}tdt$ .

Початковій точці дуги відповідає $t = 0$, кінцевій – $t = 1$, тоді

$$W = \int\limits_0^1 a^2(\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t)bdt + bta\,\mathrm{sh}tdt + a^3\,\mathrm{ch}^2 t\,\mathrm{sh}tdt = \int\limits_0^1 a^2 bdt + ab\int\limits_0^1 t\,\mathrm{sh}tdt +$$

$$+ a^3 \int\limits_0^1 \mathrm{ch}^2 t\,\mathrm{sh}tdt = a^2 b + ab(\mathrm{ch}1 - \mathrm{sh}1) + \frac{a^3}{3}(\mathrm{ch}^3 1 - 1).$$

**Приклад 5.** Знайти площу еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

**Розв'язання.** Перейдемо до параметричних рівнянь $x = a\cos t; y = b\sin t$. Додатному обходу контуру відповідає зміна параметра $t$ від 0 до $2\pi$ , тоді

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_L xdy - ydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} a\cos tb\cos tdt + b\sin ta\sin tdt = \frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi} dt = \frac{ab}{2}2\pi = \pi ab .$$

**Приклад 6.** Перевірити, що даний вираз $(1-\sin 2x)dy-(3+2y\cos 2x)dx$ є повним диференціалом функції $u(x,y)$, та знайти цю функцію.

**Розв'язання.** $(1-\sin 2x)dy-(3+2y\cos 2x)dx = P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

Знайдемо $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2\cos 2x; \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-2\cos 2x$.

Якщо $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом функції $u(x,y)$. Знайдемо цю функцію, приймаючи $x_0=0; y_0=0$.

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C=\int_0^x -3dx+\int_0^y(1-\sin 2x)dy+C=$$
$$=-3x+(1-\sin 2x)y+C.$$

**Приклад 7.** Обчислити $\oint\limits_L -x^2ydx+xy^2dy$, де $L$ – додатно орієнтоване коло $x^2+y^2=a^2$.

**Розв'язання.** У задачі

$P(x,y)=-x^2y; Q(x,y)=xy^2$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-x^2; \dfrac{\partial Q}{\partial x}=y^2$.

Функції $P(x,y), Q(x,y), \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в області $D$, яка обмежена колом $L$, тому, застосовуючи формулу Гріна, одержимо

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$
$$\oint\limits_L -x^2ydx+xy^2dy=\iint\limits_D\left(y^2+x^2\right)dxdy.$$

У подвійному інтегралі перейдемо до полярних координат. Тоді

$$x=\rho\cos\varphi,$$
$$y=\rho\sin\varphi,$$
$$x^2+y^2=a^2=\rho^2.$$

$$\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint\limits_D\rho^2\rho d\rho d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\rho^3d\rho=\frac{a^4}{4}2\pi=\frac{\pi a^4}{2}.$$

**Приклад 8.** Знайти функцію за повним диференціалом.

$$du = \frac{2(zxdy + xydz - yzdx)}{(x - yz)^2}.$$

**Розв'язання.** Для знаходження $u(x, y, z)$ будемо інтегрувати цей вираз по ламаній $M_0ABM$ (рис. 11.3), відрізки якої паралельні координатним осям, вибравши початкову точку $M_0(1{,}0{,}0)$

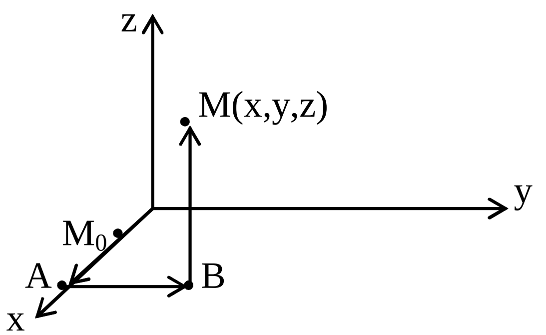



Рис. 11.5

$$u(x, y, z) = \int\limits_{M_0M} du = \int\limits_{M_0A} du + \int\limits_{AB} du + \int\limits_{BM} du .$$

Обчислимо кожен інтеграл окремо.

Рівняння лінії $M_0A: y = 0, z = 0 \Rightarrow$

$$\int\limits_{M_0A} \frac{2(zxdy + xydz - yzdx)}{(x - yz)^2} = 0.$$

Рівняння лінії $AB: x = \text{const}, z = 0 \Rightarrow$

$$\int\limits_{AB} \frac{2(zxdy + xydz - yzdx)}{(x - yz)^2} = 0.$$

Рівняння лінії $BM : x = \text{const}, y = \text{const} \Rightarrow$

$$\int\limits_{BM} \frac{2(zxdy + xydz - yzdx)}{(x - yz)^2} = 2\int_0^z \frac{xydz}{(x - yz)^2} = -2x\int_0^z \frac{d(x - yz)}{(x - yz)^2} = \left.\frac{2x}{(x - yz)}\right|_0^z = \frac{2x}{x - yz} + C..$$

$$u(x, y, z) = \frac{2x}{x - yz} + C .$$

**Приклад 9.** Розглянемо $\oint\limits_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, де $L$ – довільний замкнений контур.

**Розв'язання.** Підінтегральна функція має розрив у точці $O(0{,}0)$.

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2},$$

$$Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

тобто підінтегральний вираз є повним диференціалом у будь-якій області, що не містить точку $O(0{,}0)$.

Якщо ця точка не входить до області, що обмежена замкнутим контуром $L$, то інтеграл дорівнює нулю. Якщо ж точка $O(0{,}0)$ перебуває усередині області, що обмежена контуром $L$, то застосувати формулу Гріна не можна. Обчислимо криволінійний інтеграл безпосередньо. Нехай $L$ – будь-який замкнутий контур, що містить точку $O(0,0)$. Перейдемо до полярних координат

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} dx = \cos\varphi d\rho + \rho(-\sin\varphi)d\varphi, \\ dy = \sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi d\varphi, \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2.$$

$$xdy - ydx = \rho\cos\varphi(\sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi d\varphi) - \rho\sin\varphi(\cos\varphi d\rho - \rho\sin\varphi d\varphi) =$$
$$= \rho^2\cos^2\varphi d\varphi + \rho^2\sin^2\varphi d\varphi = \rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)d\varphi = \rho^2 d\varphi$$

$$\oint_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 d\varphi}{\rho^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

$$\oint_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 2\pi, & \textit{якщо точка } O(0,0) \textit{ всередині контуру } L, \\ 0, & \textit{якщо точка } O(0,0) \textit{ поза контуром } L. \end{cases}$$

## 11.3. Поверхневі інтеграли

### 11.3.1. Поверхневі інтеграли I роду

**Визначення.** Поверхня називається *гладкою*, якщо в кожній її точці існує дотична площина і при переході від точки до точки положення цієї дотичної площини змінюється неперервно. Поверхня, яка складається із скінченного числа неперервно сполучених гладких поверхонь, називається ***кусково-гладкою.***

Нехай дана функція $f(x, y, z)$ неперервна на деякій гладкій поверхні $\sigma$. Розіб'ємо поверхню $\sigma$ довільно проведеними кривими на ряд елементарних підобластей $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$. У кожній із цих частин $\sigma_i$ виберемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, обчислимо значення даної функції в цій точці й помножимо його на площу $\sigma_i$. Утворимо суму всіх таких добутків

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\sigma_i,$$

яка називається інтегральною сумою. Позначимо через $d\sigma_i$ діаметр елементарної частини поверхні, тобто відстань між її найбільш вилученими точками.

**Визначення.** *Поверхневим інтегралом І роду* від функції $f(x,y,z)$ по поверхні $\sigma$ називається границя інтегральної суми при $\max d\sigma_i \to 0$

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)d\sigma = \lim_{\max d(\sigma_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\sigma_i \ ,$$

яка не залежить від способу розбиття поверхні та вибору точок $M_i(x_i,y_i,z_i)$.

Якщо $f(x,y,z) > 0$ і функцію $f(x,y,z)$ розглядати як поверхневу щільність маси матеріальної поверхні $\sigma$, то поверхневий інтеграл визначає масу цієї поверхні:

$$m = \iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma.$$

*Обчислення поверхневих інтегралів І роду*

Припустимо, що поверхня $\sigma$ однозначно проектується на координатні площини. Обчислення поверхневого інтеграла зводиться до обчислення подвійного інтеграла за проекцією цієї поверхні на яку-небудь координатну площину.

а) Якщо рівняння поверхні $\sigma$ $z = z(x,y)$, то $d\sigma = \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|}$ і

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{\sigma_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\frac{dxdy}{|\cos\gamma|},$$

де $\sigma_{xy}$ – проекція поверхні $\sigma$ на площину $xOy$; $\gamma$ – кут між нормаллю до поверхні і віссю $Oz$.

б) Якщо рівняння поверхні $\sigma$ $x = x(y,z)$, то $d\sigma = \dfrac{dydz}{|\cos\alpha|}$ і

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{\sigma_{yz}} f[x(y,z),y,z)]\frac{dydz}{|\cos\alpha|},$$

де $\sigma_{yz}$ – проекція поверхні $\sigma$ на площину $yOz$, $\alpha$ – кут між нормаллю до поверхні і віссю $Ox$.

в) Якщо рівняння поверхні $\sigma$ $y = y(x,z)$, то $d\sigma = \dfrac{dxdz}{|\cos\beta|}$ і

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{\sigma_{xz}} f[x,y(x,z),z)]\frac{dxdz}{|\cos\beta|},$$

де $\sigma_{xz}$ – проекція поверхні $\sigma$ на площину $xOz$, $\beta$ – кут між нормаллю поверхні і віссю $Oy$.

Щоб визначити координати вектора нормалі до поверхні $F(x,y,z)=0$, скористаємося формулою

$$\vec{n}^0 = \frac{F'_x\vec{i} + F'_y\vec{j} + F'_z\vec{k}}{\pm\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}.$$

**Приклади**

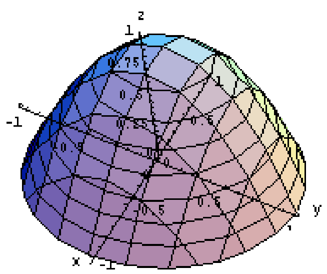


Рис. 11.6

**Приклад** 1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,d\sigma$, де $\sigma$ – поверхня параболоїда $z=1-x^2-y^2$, відсічена площиною $z=0$ (рис. 11.6).

**Розв'язання.** Поверхневий інтеграл обчислюється зведенням до подвійного інтеграла.

Рівняння поверхні $z=1-x^2-y^2$ будемо проектувати на площину $xOy$,

$$d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}.$$

Знайдемо вектор нормалі до поверхні.

$$z-1+x^2+y^2=0=F(x,y,z),$$

$$\vec{n}^0 = \frac{F'_x\vec{i} + F'_y\vec{j} + F'_z\vec{k}}{\pm\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 1\vec{k}}{\pm\sqrt{4x^2+4y^2+1}},$$

$$|\cos\gamma| = \left|\frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\right|.$$

$$\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma_{xy}}\left(\sqrt{1+4x^2+4y^2}\right)^2 dxdy = \iint\limits_{\sigma_{xy}}(1+4x^2+4y^2)dxdy.$$

Проекцією $\sigma$ на площину $xOy$ є коло $x^2+y^2\le 1$. Для обчислення подвійного інтеграла перейдемо до полярних координат.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x^2 + y^2 = \rho^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{matrix} \quad 0 \le \varphi \le 2\pi .$$

$$\iint\limits_{\sigma xy} (1 + 4\rho^2)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (1 + 4\rho^2)\rho d\rho = 3\pi .$$

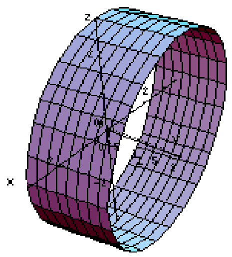


Рис. 11.7

**Приклад 2.** Знайти масу частини циліндричної поверхні $y = \sqrt{9 - z^2}$, яка відсічена площинами $x = 0, x = 2$ (рис. 11.7), якщо поверхнева щільність $\gamma(x, y, z) = ky(x + z)$.

**Розв'язання.** Маса $m = \iint\limits_{\sigma} \gamma(x, y, z) d\sigma$.

Поверхня $y = \sqrt{9 - z^2}$ проектується на площину $xOz$, $d\sigma = \dfrac{dxdz}{|\cos\beta|}$.

Знайдемо нормаль до поверхні:

$$y^2 + z^2 - 9 = F(x, y, z).$$

$$\vec{n}^0 = \frac{2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{\sqrt{4y^2 + 4z^2}} = \frac{2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{2 \cdot 3} = \frac{y\vec{i} + z\vec{k}}{3},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{3}.$$

$$m = \iint\limits_{\sigma_{xz}} ky(x + z) 3 \frac{dxdz}{y} = 3k \iint\limits_{\sigma_{xz}} (x + z) dxdz .$$

Область інтегрування $\sigma_{xz}$ – прямокутник: $-3 \le z \le 3, 0 \le x \le 2$.

$$m = 3k \int\limits_{-3}^{3} dz \int\limits_0^2 (x + z) dx = 36k .$$

### 11.3.2. Поверхневі інтеграли II роду

**Визначення.** Гладка поверхня $\sigma$ називається *двосторонньою*, якщо обхід по будь-якому замкненому контуру, що лежить на поверхні $\sigma$ і не має загальних точок з її межею, не змінює напрямку нормалі до поверхні. Якщо ж на поверхні існує замкнений контур, при обході по якому напрямок нормалі змінюється на протилежний, то поверхня називається *односторонньою*.

Двосторонню поверхню називають *орієнтовною*, а вибір певної сторони поверхні, тобто вибір напрямку нормалі до поверхні, називається *орієнтацією* поверхні.

Припустимо, що в точках двосторонньої поверхні $\sigma$ задана безперервна функція $f(x,y,z)$. Виберемо на поверхні певну сторону, тобто задамо орієнтацію поверхні. Розіб'ємо поверхню $\sigma$ довільними кривими на частини $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n$. У межах кожної частини $\sigma_i$ виберемо довільну точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$ та обчислимо в ній значення даної функції $f(M_i)$. Ці значення помножимо на проекцію $S_i$ частини $\sigma_i$ на площину $xOy$. При цьому, якщо в точках $(M_i)$ нормаль становить із віссю $Oz$ гострий кут, тобто $\cos\gamma_i > 0$, то площу проекції $S_i$ на площину $xOy$ беремо зі знаком плюс, а якщо $\cos\gamma_i < 0$, то перед $S_i$ буде знак мінус.

Утворимо суму

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)S_i .$$

Покладемо $\lambda = \max d_i$, $i = \overline{1,n}$, де $d_i$ – діаметр *i*-тої частини поверхні.

**Визначення.** *Поверхневим інтегралом II роду* називається границя інтегральної суми $T_n$ при $\lambda \to 0$.

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)S_i .$$

Аналогічно визначаються інтеграли $\iint_{\sigma} f(x,y,z)dxdz$, $\iint_{\sigma} f(x,y,z)dydz$, при цьому для вибору знака визначають кут між нормаллю і віссю $Oy$ або $Ox$.

Найбільш загальним видом поверхневого інтеграла II роду є інтеграл

$$\iint_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy ,$$

де $P,Q,R$ – функції, неперервні в точках двосторонньої поверхні $\sigma$.

*Обчислення поверхневих інтегралів II роду*

Обчислення поверхневого інтеграла зводиться до обчислення подвійного інтеграла.

а) Якщо поверхня $\sigma$ однозначно проектується в область $S_1$ на площині $xOy$ та $z = z(x, y)$ – рівняння поверхні, то

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy = \pm\iint_{S_1} R[x, y, z(x, y)]dxdy\,;$$

якщо $\cos\gamma > 0$, то беремо знак плюс, якщо $\cos\gamma < 0$, те беремо знак мінус.

б) Якщо рівняння поверхні $y = y(x, z)$, а $S_2$ – проекція $\sigma$ на площину $xOz$, то

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z)dxdz = \pm\iint_{S_2} Q[x, y(x, z), z]dxdz\,;$$

знак вибираємо залежно від знака $\cos\beta$.

в) Якщо рівняння поверхні $x = x(y, z)$, а $S_3$ – проекція $\sigma$ на площину $yOz$, то

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz = \pm\iint_{S_3} P[x(y, z), y, z]dydz\,;$$

знак вибираємо залежно від знака $\cos\alpha$.

Якщо незамкнена поверхня $\sigma$ однозначно проектується на площину $xOy$ в область $D_{xy}$, а рівняння поверхні можна задати рівнянням $z = z(x, y)$, тоді, враховуючи формулу $\Delta\sigma_i = \dfrac{\Delta x_i \Delta y_i}{|\cos\gamma|}$, поверхневий інтеграл другого роду перетворюється на подвійний інтеграл по області $D_{xy}$:

$$\iint_{\sigma} (\vec{F}, \vec{n})d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left.\frac{(\vec{F}, \vec{n})}{|\cos\gamma|}\right|_{z=z(x,y)} dxdy\,.$$

Якщо поверхня $\sigma$ однозначно проектується на площини $xOz$ або $yOz$, то поверхневий інтеграл другого роду перетворюється на подвійний за формулами:

$$\iint_{\sigma} (\vec{F}, \vec{n})d\sigma = \iint_{D_{xz}} \left.\frac{(\vec{F}, \vec{n})}{|\cos\beta|}\right|_{y=y(x,z)} dxdz\,,$$

$$\iint_{\sigma} (\vec{F}, \vec{n})d\sigma = \iint_{D_{yz}} \left.\frac{(\vec{F}, \vec{n})}{|\cos\alpha|}\right|_{x=x(y,z)} dydz\,.$$

Зауважимо, що коли поверхня $\sigma$ кусково-гладка, тоді її розбивають на гладкі поверхні, які однозначно проектуються на координатні площини, далі обчислення проводять по кожній окремій частині, а інтеграл по усій поверхні $\sigma$ дорівнює сумі інтегралів по усіх частинах.

Якщо $\vec{n}^0 = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ – орт нормалі до обраної сторони поверхні, а $\vec{A}$ – вектор з координатами $P, Q, R$, то

$$\iint_S P dydz + Q dxdz + R dxdy = \iint_S \left(\vec{A}, \vec{n}^0\right) d\sigma = \iint_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) d\sigma .$$

Ця формула зв'язує поверхневі інтеграли І-го і ІІ-го роду.

**Теорема Остроградського – Гаусса**. Якщо поверхня $\sigma$ замкнута, а функції $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ безперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в області $V$, обмеженою цією поверхнею $\sigma$, то має місце формула Остроградського – Гаусса:

$$\iint_\sigma P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz .$$

Ця формула зв'язує поверхневий інтеграл по замкнутій поверхні $\sigma$ з потрійним інтегралом за об'ємом, що обмежений цією поверхнею.

**Теорема Стокса**. Якщо функції $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ неперервно диференційовні і $L$ – замкнутий кусково-гладкий контур, що обмежує кусково-гладку двосторонню поверхню $\sigma$, орієнтація контуру $L$ погоджена з орієнтацією поверхні, то справедлива формула:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz .$$

У плоскому випадку формула Стокса переходить у формулу Гріна.

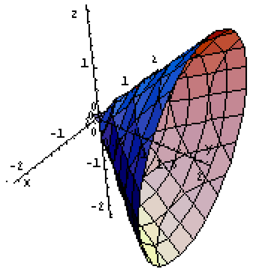


Рис. 11.6

**Приклад 1.** Обчислити $\iint_\sigma \left(x^2 + z^2 + ay^2\right) dxdz$, де $\sigma$ – зовнішня сторона поверхні $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, що відсічена площинами $y = 0, y = b, b > 0$ (рис. 11.6).

**Розв'язання**. Нормаль до поверхні утворить з віссю $Oy$ тупий кут, тобто $\cos\beta < 0$ . Проекція конуса на площину $xOz$ – коло $x^2 + z^2 \le b^2$.

$$\iint_\sigma \left(x^2 + z^2 + ay^2\right) dxdz = -\iint_{\sigma_{xz}} \left[x^2 + z^2 + a\left(x^2 + z^2\right)\right] dxdz =$$

$$=-(a+1)\iint\limits_{\sigma_{xz}}\left(x^2+z^2\right)dxdz=\left|\begin{array}{c}x=\rho\cos\varphi,\ z=\rho\sin\varphi\\ x^2+z^2=\rho^2=b^2\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{array}\right|=$$

$$=-(a+1)\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^b\rho^3d\rho=-\frac{(a+1)b^4\pi}{2}.$$

**Приклад 2.** Обчислити $\oiint\limits_{\sigma}4x^3dydz+4y^3dxdz-6z^4dxdy$, де $\sigma$ – зовнішня сторона замкнутої поверхні, що обмежена циліндром $x^2+y^2=a^2$ і площинами $z=0, z=h$.

Оскільки поверхня σ замкнута, то для обчислення застосуємо формулу Остроградського - Гаусса.

$$P(x,y,z)=4x^3; Q(x,y,z)=4y^3; R(x,y,z)=-6z^4.$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=12x^2; \frac{\partial Q}{\partial y}=12y^2; \frac{\partial R}{\partial z}=-24z^3.$$

$$\oiint\limits_{\sigma}4x^3dydz+4y^3dxdz-6z^4dxdy=\iiint\limits_V(12x^2+12y^2-24z^3)dxdydz.$$

Для обчислення потрійного інтеграла перейдемо до циліндричних координат

$$z=z,$$
$$x=\rho\cos\varphi,$$
$$y=\rho\sin\varphi,$$
$$x^2+y^2=\rho^2=a^2.$$

$$12\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2-2z^3)dxdydz=12\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho d\rho\int\limits_0^h(\rho^2-2z^3)dz=6\pi ha^2(a^2-h^3).$$

**Приклад 3.** Застосовуючи формулу Стокса, обчислити інтеграл

$$I=\oint\limits_L ydx+zdy+xdz,$$

де $L$ – коло, утворене як перетин поверхонь $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x+y+z=0$, що пробігають проти стрілки годинника, якщо дивитися з позитивної сторони осі $Ox$.

**Розв'язання.** Запишемо формулу Стокса в такому вигляді:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz =$$

$$= \iint_\sigma \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\gamma\right]d\sigma,$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси нормалі до поверхні $\sigma$, при цьому напрямок нормалі визначається так, щоб обхід контуру $L$ був проти стрілки годинника.

Виберемо як поверхню, що натягнута на коло $L$, частину площини $x + y + z = 0$, яка обмежена цим колом.

$$P(x, y, z) = y, \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \frac{\partial P}{\partial z} = 0.$$

$$Q(x, y, z) = z, \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \frac{\partial Q}{\partial z} = 1.$$

$$R(x, y, z) = x, \frac{\partial R}{\partial x} = 1, \frac{\partial R}{\partial y} = 0.$$

Тоді $\vec{n} = (1,1,1)$, $\vec{n}^0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right).$

$$I = \oint_L ydx + zdy + xdz = \iint_\sigma [-\cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma]d\sigma = -\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_\sigma d\sigma =$$

$$= -\sqrt{3}\iint_{\sigma_{xy}} \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = -\sqrt{3}\sqrt{3}\iint_{\sigma_{xy}} dxdy = -3S_{\sigma_{xy}} = -3\pi a^2.$$

**Приклад 4.** Застосовуючи формулу Стокса, обчислити інтеграл

$$I = \oint_L xdx + (x + y)dy + (x + y + z)dz,$$

де $L$: $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = a(\sin t + \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$, обхід контуру здійснюється проти стрілки годинника.

**Розв'язання.** Очевидно, що дана крива лежить у площині $z = x + y$, яка проектується на площину $xOy$ в коло $x = a\sin t$, $y = a\cos t$. Виберемо натягнуту поверхню $\sigma$ як частину площини $z = x + y$. Приведемо рівняння площини $z - x - y = 0$ до нормального вигляду:

$$-\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}} = 0.$$

$$\cos\alpha = \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$P = x, P_y' = 0,\ P_z' = 0;\ Q = x + y, Q_x' = 1, Q_z' = 0;\ R = x + y + z, R_x' = 1, R_y' = 1.$$

$$I = \iint_{\sigma} [\cos\alpha - \cos\beta + \cos\gamma] d\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\sigma} d\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\sigma_{xy}} \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \pi a^2.$$

Розв'яжемо цю задачу іншим способом: безпосереднім обчисленням криволінійного інтеграла.

$$dx = -a\sin t dt,\ dy = a\cos t dt,\ dz = a(\cos t - \sin t)dt.$$

$$I = \int_0^{2\pi} \left[-a^2 \cos t \sin t + a(\cos t + \sin t) a\cos t + 2a(\cos t + \sin t) a(\cos t - \sin t)\right] =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left[-\cos t \sin t + \cos^2 t + \cos t \sin t + 2\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)\right] dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt + 2a^2 \int_0^{2\pi} \cos 2t dt = \frac{a^2}{2} 2\pi = a^2 \pi.$$

## Контрольні приклади і запитання до гл. 11

**Приклад 11.1.** Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L (x + y) dl$ вздовж прямої $y = \frac{4}{3}x - 2$ від точки $A(0;-2)$ до $B(3;2)$.

**Розв'язання**. Перетворимо криволінійний інтеграл у звичайний інтеграл за змінною *x*. Для цього визначимо інтервал зміни змінної *x*: $x \in \left[0; \boxed{*}\right]$. Обчислимо диференціал дуги за відомою формулою $dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \boxed{*} dx$. Обчислимо вихідний інтеграл:

$$\int_L (x + y) dl = \int_0^{\boxed{*}} \left(x + \frac{4}{3}x - \boxed{*}\right) \cdot \boxed{*} dx = \frac{15}{2}.$$

**Приклад 11.2.** Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} xyzd\sigma$, де

$$\sigma:\begin{cases} z=1-x-y \\ x\geq 0,\, y\geq 0,\, z\geq 0. \end{cases}$$

**Розв'язання**. Поверхня інтегрування $\sigma$ – трикутник. Перетворимо поверхневий інтеграл у подвійний інтеграл за змінними *x, y*. Для цього спроектуємо поверхню $\sigma$ на площину *XOY* одержимо $\sigma_{xy}$ і знайдемо інтервали зміни змінних: $x\in\left[0;\boxed{*}\right]$, $y\in\left[\boxed{*};1-x\right]$. Нормаль до поверхні $\vec{n}=\left(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\boxed{*};\boxed{*}\right)$. Обчислимо вихідний інтеграл:

$$\iint\limits_{\sigma} xyzd\sigma=\iint\limits_{\sigma_{xy}} xy\, z\Big|_{z=1-\boxed{*}}\frac{dxdy}{\boxed{*}}=\int\limits_{0}^{\boxed{*}} xdx\int\limits_{\boxed{*}}^{1-x} y\cdot\boxed{*}dy=$$

$$=\sqrt{3}\int\limits_{0}^{\boxed{*}} x\left(\left(1-x\right)\frac{\boxed{*}}{2}-\frac{\boxed{*}}{3}\right)\Bigg|_{\boxed{*}}^{1-x} dx=\sqrt{3}\int\limits_{0}^{\boxed{*}}\left(x-\boxed{*}x^2+\boxed{*}x^3-x^4\right)dx=\boxed{*}\ .$$

**Приклад 11.3.** Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+y^2+3z^2\right)dxdy$, де $\sigma:\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=0,\, z=2 \end{cases}$ – зовнішня сторона конуса.

**Розв'язання**. Оскільки $\sigma$ – зовнішня сторона конуса, то $\cos\gamma<\boxed{*}$. Перетворимо поверхневий інтеграл у подвійний інтеграл за змінними *x, y*. Для цього спроектуємо поверхню $\sigma$ на площину *XOY* одержимо коло $\sigma_{xy}$. Черезх те що проекція є коло, то зручно перейти в інтегралі до полярних координат: $\varphi\in\left[0;\boxed{*}\right]$, $\rho\in\left[0;\boxed{*}\right]$. Ураховуємо якобіан при переході до нових змінних: $dxdy=\boxed{*}d\rho d\varphi$. Обчислимо вихідний інтеграл:

$$\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+y^2+3z^2\right)dxdy=-\iint\limits_{\sigma_{xy}}\left(x^2+y^2+3\cdot\boxed{*}\right)dxdy=-\boxed{*}\iint\limits_{\sigma_{xy}}\left(x^2+y^2\right)dxdy=$$

$$=\boxed{*}\int\limits_{0}^{\boxed{*}} d\varphi\int\limits_{\boxed{*}}^{\boxed{*}}\rho^{\boxed{*}}d\rho=\boxed{*}\cdot 2\pi\cdot 4=\boxed{*}.$$

## Контрольні завдання до гл. 11

**Завдання 1.** Обчислити криволінійні інтеграли I роду по вказаних кривих.

**11.1.1.** $\int\limits_L \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dl$; $L$ – дуга синусоїди $y=\sin x, (0\le x\le \pi)$;

**11.1.2.** $\int\limits_L \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dl; L: y=\cos x, (0\le x\le \frac{\pi}{2})$;

**11.1.3.** $\int\limits_L \sqrt{1+\cos^4 x}dl; L: y=\mathrm{tg}\, x, (0\le x\le \frac{\pi}{4})$;

**11.1.4.** $\int\limits_L \sin x\sqrt{1+\sin^4 x}dl; L=\mathrm{ctg}\, x, (\frac{\pi}{4}\le x\le \frac{\pi}{2})$;

**11.1.5.** $\int\limits_L \frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x}dl; L: y=\sin x, (0\le x\le \frac{\pi}{4})$;

**11.1.6.** $\int\limits_L \sin^4 x\cos x dl; L: y=\ln\sin x, (\frac{\pi}{4}\le x\le \frac{\pi}{3})$;

**11.1.7.** $\int\limits_L \sin^2 x\cos^3 x dl; L: y=\ln\cos x, (0\le x\le \frac{\pi}{4})$;

**11.1.8**. $\int\limits_L \sin^4 x\cos^2 x dl; L: y=\ln \mathrm{cosec} x, (\frac{\pi}{6}\le x\le \frac{\pi}{3})$;

**11.1.9.** $\int\limits_L \cos^4 x\sin^2 x dl; L: y=\ln\sec x, (0\le x\le \frac{\pi}{6})$;

**11.1.10.** $\int\limits_L x dl$; $L$ – дуга кола $\rho=R, (0\le\varphi\le \frac{\pi}{2})$;

**11.1.11.** $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2+a^2}dl$; $L$ – дуга спіралі Архімеда $\rho=a\varphi$ від $A(0,0)$ до $B(a^2,a)$;

**11.1.12.** $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$; $L$ – верхня половина кардіоїди $\rho=a(1+\cos\varphi)$;

**11.1.13.** $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$; $L$ – дуга лемніскати $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}, (0\le\varphi\le \frac{\pi}{4})$;

**11.1.14**. $\int\limits_L (x^2+y^2)^{3/2}dl$; $L$ – дуга лемніскати $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}, (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$;

**11.1.15.** $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}dl$; $L$ – дуга лемніскати $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}, (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4})$;

**11.1.16.** $\int\limits_L \sqrt{\frac{a^2}{b^2}y^2+\frac{b^2}{a^2}x^2}dl$; $L$ – дуга еліпса

$x = a\cos t, y = b\sin t, (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$;

**11.1.17**. $\int\limits_L ydl$; $L$ – перша арка циклоїди $x = 3(t-\sin t), y = 3(1-\cos t)$;

**11.1.18**. $\int\limits_L (x+2y-3z)dl$; $L$ – відрізок прямої між точками

$A(1,3,-1), B(3,5,-1)$;

**11.1.19.** $\int\limits_L (3x-5y+z+2)dl$; $L$ – відрізок прямої між точками

$A(4,1,6), B(5,3,8)$;

**11.1.20.** $\int\limits_L \sqrt{1+\frac{x}{R}}dl$; $L$ – дуга кривої

$x = R\sin^2 t,\ \ y = R\sin t\cos t,\ \ z = R\cos t, (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$;

**11.1.21**. $\int\limits_L \sqrt{1+4y+9xz}dl$; $L$ – дуга кривої $x = t, y = t^2, z = t^3, (0 \le t \le 1)$;

**11.1.22.** $\int\limits_L ye^{-x}dl$; $L$ – дуга кривої $x = \ln(1+t^2), y = 2\,\mathrm{arctg}t - t + 8, (0 \le t \le 1)$;

**11.1.23**. $\int\limits_L (x^2+y^2)dl$; $L: x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t), (0 \le t \le 2\pi)$;

**11.1.24.** $\int\limits_L xyzdl$; $L: x = \frac{1}{2}t^2, y = t, z = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, (0 \le t \le 1)$;

**11.1.25.** $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl$; $L$ – дуга гвинтової лінії

$x = a\cos t,\ \ y = a\sin t,\ \ z = bt,\ \ (0 \le t \le 2\pi)$;

**11.1.26.** $\int\limits_L xydl$; $L$ – дуга еліпса $x = a\cos t, y = b\sin t, (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$;

**11.1.27.** $\int\limits_L zdl$; $L$ – дуга конічної гвинтової лінії

$x = t\cos t, y = t\sin t, z = t, (0 \le t \le \pi)$;

**11.1.28.** $\int\limits_L \frac{dl}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$; $L$ – дуга гіперболічної спіралі

$\rho\varphi = 1, \quad \varphi_1 = \sqrt{3}, \quad \varphi_2 = 2\sqrt{2}$;

**11.1.29.** $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\, dl$; $L$ – коло $x^2 + y^2 = Rx$

**11.1.30**. $\int\limits_L \sqrt{2x^2 + y^2}\, dl$; $L$ – коло $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \ z = x$.

**Завдання 2.** Застосування криволінійних інтегралів I роду.

**11.2.1.** Обчислити статичний момент першого витка конічної гвинтової лінії $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t$ відносно площини $XOY$, якщо щільність пропорційна квадрату відстані точки до цієї площини.

**11.2.2.** Знайти координати центра ваги дуги гвинтової лінії $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, (0 \le t \le \pi)$, якщо в кожній її точці лінійна щільність пропорційна аплікаті цієї точки.

**11.2.3.** Знайти координати центра ваги однорідної дуги кривої $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t, (-\infty \le t \le 0)$.

**11.2.4.** Знайти координати центра ваги однорідної дуги гвинтової лінії $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, (0 \le t \le \beta)$.

**11.2.5.** Знайти координати центра ваги однорідної дуги циклоїди $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), (0 \le t \le 2\pi)$.

Обчислити довжину дуг у задачах **6 – 15.**

**11.2.6.** $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - \sqrt{x}$, між точками перетину з віссю $OX$;

**11.2.7.** $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, (1 \le x \le 4)$;

**11.2.8.** $x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t), (0 \le t \le \beta)$;

**11.2.9.** $x = t - \frac{1}{2}\mathrm{sh}\, 2t, y = 2\,\mathrm{ch}\, t, (0 \le t \le 2)$;

**11.2.10.** $y=\ln\sin x, (\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2})$;

**11.2.11.** $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), z=4a\cos\frac{t}{2}, (0\le t\le 2\pi)$;

**11.2.12.** $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t, z=\cos 2t, \quad (0\le t\le 2\pi)$;

**11.2.13**. $x=a\cdot cht, y=a\cdot sht, z=at, \qquad (0\le t\le\beta)$;

**11.2.14.** $x=at, y=a\sqrt{2}\ln t, z=\frac{a}{t}, \qquad (1\le t\le 10)$;

**11.2.15**. $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t \qquad (0\le t\le 2\pi)$.

Знайти масу матеріальної дуги в задачах **16 – 26.**

**11.2.16.** $L: xy=1, \qquad \gamma(x,y)=\frac{k\cdot y^3}{x^2}, \qquad (1\le y\le 2)$;

**11.2.17.** $L: y=\frac{1}{3}x^3, \qquad \gamma(x,y)=kx^3, \qquad (0\le x\le 1)$;

**11.2.18.** $L: y=x^4, \qquad \gamma(x,y)=kx^5 \qquad (0\le x\le 1)$;

**11.2.19.** $L: x=\ln y, \qquad \gamma(x,y)=y^3\sqrt{1+y^2}, \qquad (1\le y\le 2)$;

**11.2.20.** $L: y=\ln\sin x, \qquad \gamma(x,y)=k\sin^3 x, \qquad \left(\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$;

**11.2.21.** $L: y=\ln\cos x, \qquad \gamma(x,y)=k\sin x\cdot\cos^2 x, \qquad \left(0\le x\le\frac{\pi}{6}\right)$;

**11.2.22.** $L: y=\ln \mathrm{cosec}\, x, \qquad \gamma(x,y)=k\sin^3 x\cos x, \qquad \left(\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{3}\right)$;

**11.2.23.** $L: y=\ln\sec x, \qquad \gamma(x,y)=k\sin^2 x\cos^2 x, \qquad \left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$;

**11.2.24.** $L: x=t^3, \quad y=t, \quad z=t^2, \qquad \gamma(x,y,z)=k\sqrt{1+4z+9xy}, \quad (0\le t\le 1)$;

**11.2.25.** $L: x=R\cos t, \quad y=R\sin^2 t, \quad z=R\sin t\cos t,$

$\gamma(x,y,z)=k\sqrt{1+\frac{y}{2}}, \left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$;

**11.2.26.** $x=a\cos t, \qquad y=b\sin t, \qquad \gamma(x,y)=y \quad (0\le t\le\frac{\pi}{2})$.

Обчислити криволінійний інтеграл I роду в задачах **27 – 30.**

**11.2.27.** $\int\limits_L \sqrt{1+x^4}\,dl, \quad L: \quad y=\frac{1}{3}x^4 \qquad (1\le x\le 2)$**;**

**11.2.28.** $\int\limits_L \sqrt{1+x^2}\,dl, \quad L: \quad 2y-x^2=0 \qquad (1\le x\le 3)$;

**11.2.29.** $\int\limits_L (x+y+z)dl$, $L$ – відрізок прямої між точками $A(0,0,0)$ і $B(1,1,1)$;

**11.2.30.** $\int\limits_L (x+y)dl$, $L$ – контур трикутника $ABO$, $\quad A(1,0), B(0,1), O(0,0)$.

**Завдання 3.** Обчислити криволінійні інтеграли II роду.

**11.3.1.** $\int\limits_L \cos^2 x dx+\frac{dy}{y^3}, \quad L: y=\mathrm{tg}\,x, \qquad (\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{3})$**;**

**11.3.2.** $\int\limits_L (x^2+y^2)dx+xydy, \quad L: y=e^x$ от $A(0,1)$ до $B(1,e)$**;**

**11.3.3.** $\int\limits_L \sin^3 x dx+\frac{dy}{y^2}, \quad L: y=\mathrm{ctg}x, \qquad (0\le x\le\frac{\pi}{3})$**;**

**11.3.4.** $\int\limits_L (x+y)dx+(x-y)dy, \quad L: x=R\cos t, y=R\sin t, \qquad (0\le t\le\frac{\pi}{2})$**;**

**11.3.5.** $\int\limits_L y^2dx+xydy, \quad L: x=a\cos t, y=b\sin t, \qquad (0\le t\le\frac{\pi}{2})$**;**

**11.3.6.** $\int\limits_L ydx+x^2dy+zdz, \quad L: x=t, y=t^3, z=t^5, \qquad (0\le t\le 1)$**;**

**11.3.7.** $\int\limits_L (x^2+y+z)dx+z^2dy+(x+y^2)dz, \quad L$ – відрізок прямої від $A(2,1,0)$ до $B(4,3,1)$;

**11.3.8.** $\int\limits_L x^2dx+(x+z)dy+xydz, \quad L: x=\sin t, y=\sin^2 t, z=\sin^3 t,$

$0\le t\le\frac{\pi}{2}$;

**11.3.9.** $\int\limits_L zdx+ydy+(x^2-y^2)dz, \quad L: x=a\,\mathrm{ch}t, y=a\,\mathrm{sh}t, z=bt, \qquad (0\le t\le 1)$;

**11.3.10.** $\int\limits_L zdx+xdy-\frac{xy}{z}dz, \quad L: x=t\cos t, y=t\sin t, z=t, \qquad (0\le t\le\frac{\pi}{2})$.

Знайти роботу сили $\vec{F}(P,Q)$ в задачах **11 – 16.**

**11.3.11.** $\vec{F}(x;\frac{1}{y^2})$, уздовж дуги кривої $xy=1, \qquad (1\le x\le 4)$;

**11.3.12.** $\vec{F}(\sin^2 x;\ \ y^2)$, уздовж дуги кривої $y=\cos x \qquad (0\le x\le \pi)$;

**11.3.13.** $\vec{F}((x^2+y);(x+y^2))$, уздовж відрізка $A(-1{,}1)\ \ B(0{,}2)$;

**11.3.14.** $\vec{F}(-y;x)$, уздовж дуги кривої $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t, \qquad (0\le t\le \frac{\pi}{2})$;

**11.3.15.** $\vec{F}((xy-x);\frac{x^2}{2})$, уздовж $y=2\sqrt{x}$ від $A(0{,}0)$ до $B(1{,}2)$;

**11.3.16.** $\vec{F}((y^2-y);(2xy+x))$, уздовж $x^2+y^2=9$, від $A(3{,}0)$ до $B(-3{,}0)$;

Перевірити, що підінтегральний вираз є повним диференціалом функції $u(x,y)$; знайти цю функцію в задачах **17 – 25.**

**11.3.17.** $\int 3x^2e^y dx+(x^3e^y-1)dy$;

**11.3.18.** $\int (xy^2+\frac{x}{y^2})dx+(x^2y-\frac{x^2}{y^3})dy$;

**11.3.19.** $\int \frac{y}{x^2}dx-\frac{xy+1}{x}dy$;

**11.3.20.** $\int [\sin 2x-2\cos(x+y)]dx-2\cos(x+y)dy$;

**11.3.21.** $\int \frac{dx}{y}-\frac{x+y^2}{y^2}dy$;

**11.3.22.** $\int (\sin y+y\sin x+\frac{1}{x})dx+(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y})dy$;

**11.3.23.** $\int e^y dx+(\cos y+xe^y)dy$;

**11.3.24.** $\int (y^2+\frac{y}{\cos^2 x})dx+(2xy+\operatorname{tg} x)dy$;

**11.3.25.** $\int (3x^2y+2y+3)dx+(x^3+2x+3y^2)dy$;

Застосовуючи формулу Остроградського – Гріна, обчислити інтеграл в задачах **26 – 30.**

**11.3.26.** $\oint\limits_L (1-x^2)ydx+x(1+y^2)dy, \qquad L: x^2+y^2=R^2$**;**

**11.3.27.** $\oint\limits_L (x+y)dx-(x-y)dy, \qquad L: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

**11.3.28.** $\oint\limits_L e^{-(x^2-y^2)}\left[\cos 2xydx+\sin 2xydy\right], \qquad L: x^2+y^2=a^2$;

**11.3.29.** $\oint\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy, \qquad L: x^2+y^2=ax$;

**11.3.30.** $\oint\limits_L (4x^3-3y^2+5y)dx+(5x-6xy-4y)dy, \qquad L$ – контур трикутника $A(1,1), B(2,2), C(1,3)$.

**Завдання 4.** Обчислити поверхневі інтеграли.

**11.4.1.** $\iint\limits_\sigma (x^2+y^2+3z^2)d\sigma, \qquad \sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}, z=0, z=1$;

**11.4.2.** $\iint\limits_\sigma (x^2+y^2+z-\frac{1}{2})d\sigma, \qquad \sigma: 2z=2-x^2-y^2, z=0$;

**11.4.3.** $\iint\limits_\sigma z(x+y)d\sigma, \qquad \sigma: z=\sqrt{9-x^2}, y=0, y=2$;

**11.4.4.** $\iint\limits_\sigma (z^2+x^2+y^3)d\sigma, \qquad \sigma: y=\sqrt{R^2-x^2-z^2}, y\geq 0$;

**11.4.5.** $\iint\limits_\sigma (5x^2+3y^2+3z^2+4)d\sigma, \qquad \sigma: x=\sqrt{y^2+z^2}, x=0, x=2$;

**11.4.6.** $\iint\limits_\sigma (x^4+y^4+2x^2y^2+z^2)d\sigma, \qquad \sigma: x+y+z=a, x^2+y^2=R^2$;

**11.4.7.** $\iint\limits_\sigma \sqrt{1+4y^2+4z^2}d\sigma, \qquad \sigma: x=4-y^2-z^2, x=0$;

**11.4.8.** $\iint\limits_\sigma (2z^2-x^2-y^2)d\sigma, \qquad \sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$, що відрізана $x^2+y^2=2x$;

**11.4.9.** $\iint\limits_\sigma y(z+x)d\sigma, \qquad \sigma: y=\sqrt{c^2-z^2}, x=0, x=a$;

**11.4.10.** $\iint\limits_\sigma (x^2+y^2)d\sigma, \qquad \sigma: \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1$;

**11.4.11.** $\iint\limits_\sigma \dfrac{d\sigma}{(1+x+y+z)^2}, \qquad \sigma: x+y+z\leq 1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$;

**11.4.12.** $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y+z^2-2)d\sigma, \quad \sigma: 2y=9-x^2-z^2, y=0$**;**

**11.4.13.** $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1+y^2+z^2}d\sigma, \ \sigma: x=zy$**,** що відрізана циліндром $(z^2+y^2)^2=2zy$;

**11.4.14**. $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1+4x^2+4z^2}d\sigma, \quad \sigma: y=2-x^2-z^2, y=0$;

**11.4.15.** $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y+z^2-1)d\sigma, \quad \sigma: 2y=9-x^2-z^2, y=0$;

**11.4.16.** $\iint\limits_{\sigma}(5x^2+5y^2+z^2)dxdy$, $\sigma$ – верхня сторона поверхні $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, що відрізана $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

**11.4.17.** $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+3z^2)dxdy, \quad \sigma: \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, z=0, z=2$ (верхня сторона конуса);

**11.4.18.** $\iint\limits_{\sigma}\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\right)dxdy, \ \sigma: z=4-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}, z=0$ (нижня сторона параболоїда);

**11.4.19.** $\iint\limits_{\sigma}(x^2-2y^2+6z)dxdy, \quad \sigma: y^2=6z, z=6, x=0, x=3$ (зовнішня сторона циліндра);

**11.4.20.** $\iint\limits_{\sigma}(2x+3y+4z)dxdy, \quad \sigma: x+y+z-6=0, \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ (верхня сторона площини, що відрізана циліндром);

**11.4.21.** $\iint\limits_{\sigma}(x^2+z^2)dydz, \quad \sigma: x=\sqrt{9-y^2}, z=0, z=2$ (зовнішня сторона циліндра, що відсічена плоскостями)

**11.4.22.** $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+z^2)dxdy, \quad \sigma: y=\sqrt{1-x^2-z^2}, y=\sqrt{x^2+z^2}$ (зовнішня сторона півкулі, що відрізана конусом);

**11.4.23**. $\iint\limits_{\sigma}(2x^2+y^4+z^4)dydz, \quad \sigma: x=yz, y\geq 0, z\geq 0, (y^2+z^2)^2=2b^2yz$ (зовнішня сторона поверхні, що відрізана циліндром).

За допомогою формули Стокса обчислити:

**11.4.24.** $\oint\limits_L (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz,\quad L$ – коло

$x^2+y^2+z^2=a^2,\ x+y+z=0$;

**11.4.25.** $\oint\limits_L ydx+zdy+xdz,\quad L$ – коло $x=R\cos^2 t, y=\dfrac{R}{\sqrt{2}}\sin 2t, z=R\sin^2 t$;

**11.4.26.** $\oint\limits_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz,\ L$ – еліпс $x^2+y^2=a^2, \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1$.

За допомогою формули Остроградського – Гаусса обчислити:

**11.4.27.** $\iint\limits_\sigma xdydz+ydzdx+zdxdy,\quad \sigma: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

**11.4.28.** $\iint\limits_\sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy,\ \sigma$ – зовнішня сторона куба $0\le x\le a$,

$0\le y\le a,\quad 0\le z\le a$;

**11.4.29.** $\iint\limits_\sigma x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy,\quad \sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$;

**11.4.30**. $\iint\limits_\sigma xdydz+ydxdz+zdxdy,\quad \sigma: x^2+y^2=a^2, -h\le z\le h$.

## Глава 12. Елементи теорії поля

Нехай в просторі задано деяку величину, наприклад, температуру, тиск, швидкість і т.п. Тоді якщо в кожній точці простору (або його частини) ця величина визначена, то простір називають полем заданої величини.

Поле може бути *скалярним* або *векторним*, наприклад, поля температур, тиску, щільності є скалярними полями, а поле швидкостей – векторним.

Якщо досліджувана величина за своїм змістом задана у площині, то відповідне поле називається плоским (або плоскопаралельним). Прикладом такого поля є скалярне поле температур у тонкій пластині, товщиною якої при дослідженні можна знехтувати, або векторне поле швидкостей пластини, що обертається навколо осі, перпендикулярної до її площини.

### 12.1. Скалярне поле. Основні характеристики

**Визначення.** Задане поле називається *скалярним*, якщо воно визначається скалярною функцією $U=\varphi(x,y,z)$, тобто кожній точці поля M($x$,$y$,$z$) поставлено у відповідність деяке дійсне число $\varphi(\mathrm{M})$.

Основними *геометричними характеристиками* скалярного поля є *поверхні рівня* (у просторі) і *лінії рівня* (на площині), тобто такі поверхні або лінії, у всіх точках яких поле набуває одного і того ж значення.

Рівняння поверхні (лінії) рівня має вигляд:

$$\varphi(x,y,z)=\text{const}, \qquad (\varphi(x,y)=\text{const}).$$

**Приклад**. Знайти лінії рівня скалярного поля: $\varphi(x,y)=\ln\sqrt{\dfrac{y}{2x}}$.

**Розв’язання.** Запишемо рівняння ліній рівня поля: $\ln\sqrt{\dfrac{y}{2x}}=C$. Після перетворень одержуємо рівняння сім’ї кривих в канонічному вигляді: $y=2e^{2C}x$, звідки $y=kx$ $\left(k=2e^{2C}>0\right)$.

Очевидно, що лініями рівня є однопараметрична сім’я прямих, що проходять через початок координат, крім самої точки (0,0), та нахилених під гострим кутом до осі OX (при будь-якому C).

## 12.2. Похідна за напрямом та градієнт скалярного поля

Нехай $\vec{\ell}$ − деякий вектор, $\varphi(x,y,z)$− скалярне поле, $M_0$ і $M$ − точки на прямій з напрямним вектором $\vec{\ell}$. Позначимо приріст функції $\varphi(x,y,z)$ при переході від точки $M_0$ до точки $M$ як $\Delta\varphi=\varphi(M)-\varphi(M_0)$, а приріст модуля вектора $\vec{\ell}$ як $\left|\Delta\vec{\ell}\right|=\left|\overrightarrow{MM}_0\right|$.

**Визначення.** *Похідною* $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\ell}$ *скалярного поля* $\varphi(x,y,z)$ в точці $M_0$ *за напрямом* $\vec{\ell}$ називається вираз: $$\frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial\ell}=\lim_{\substack{\left|\Delta\vec{\ell}\right|\to 0\\ (M\to M_0)}}=\frac{\Delta\varphi}{\left|\Delta\vec{\ell}\right|}.$$

**Теорема.** Якщо функція $\varphi(x,y,z)$ диференційована в точці $M_0$, то її похідна за будь-яким напрямом $\vec{\ell}$ існує і дорівнює
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\ell}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma,$$
де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ − напрямні косинуси вектора $\vec{\ell}$.

Основні властивості похідної за напрямом:

1) Похідна за напрямом зображує *швидкість* зміни поля в цьому напряму. Якщо в даній точці $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\ell}>0$ ($\dfrac{\partial\varphi}{\partial\ell}<0$ ), то поле в цьому напряму зростає (спадає). Рівність нулю похідних в усіх напрямах є ознакою стаціонарності поля.

2) Похідна за будь-яким напрямом, дотичним до поверхні рівня, що проходить через дану точку, дорівнює нулеві.

**Визначення.** *Градієнтом* $grad\,\varphi$ (або $\vec{\nabla}\varphi$) *скалярного поля* $\varphi(x,y,z)$ в точці $\mathrm{M}(x,y,z)$ називається *вектор*, проекції якого в декартовій системі координат визначаються частинними похідними функції $\varphi$:
$$grad\,\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

Основні властивості градієнта:

1) $\vec{\nabla}(\varphi\pm\psi)=\vec{\nabla}\varphi\pm\vec{\nabla}\psi$; 2) $\vec{\nabla}(\varphi\cdot\psi)=\psi\vec{\nabla}\varphi+\varphi\vec{\nabla}\psi$;

3) $\vec{\nabla}\left(\dfrac{\varphi}{\psi}\right)=\dfrac{\psi\vec{\nabla}\varphi-\varphi\vec{\nabla}\psi}{\psi^2}$; 4) $\vec{\nabla}F(\varphi)=F'_{\varphi}(\varphi)\vec{\nabla}\varphi$.

**Приклад 1.** Нехай поле задано скалярною функцією $F(\vec{r})$ радіуса-вектора точки М, де $\vec{r}=\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z$, $\quad r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Визначити $\vec{\nabla}F$, якщо: 1) $F(\vec{r})=r$ ; 2) $F(\vec{r})=(\vec{a},\vec{r})$; 3) $F(\vec{r})=F(r)$.

**Розв'язання.** 1) Якщо $F(\vec{r})=r$, то $\vec{\nabla}F=\vec{\nabla}r$ і $\vec{\nabla}(r)=\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}==\frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{j}+\frac{z}{r}\vec{k}=\frac{1}{r}\vec{r}$. Маємо співвідношення, яке зручно використовувати при розв'язанні задач:

$$\vec{\nabla}(r)=\frac{\vec{r}}{r};$$

аналогічними перетвореннями для випадків 2) та 3) одержимо два інших важливих співвідношення:

$$\vec{\nabla}(\vec{a},\vec{r})=\vec{a}\text{, де } \vec{a}=\text{const};$$

$$\vec{\nabla}F(r)=F'(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r}.$$

**Приклад 2.** Знайти градієнт скалярного поля $\varphi=\frac{(\vec{a},\vec{r})^2}{r^3}$ ($\vec{a}=\text{const}$).

**Розв'язання.** У даному випадку поле задано відношенням двох скалярних функцій від $\vec{r}$. Використаємо наведені вище властивості та співвідношення і одержимо: $\vec{\nabla}\varphi=\vec{\nabla}\frac{(\vec{a},\vec{r})^2}{r^3}=\frac{r^3\cdot\vec{\nabla}(\vec{a},\vec{r})^2-(\vec{a},\vec{r})^2\cdot\vec{\nabla}r^3}{r^6}=$

$$=\frac{r^3\cdot 2(\vec{a},\vec{r})\vec{\nabla}(\vec{a},\vec{r})-(\vec{a},\vec{r})^2\cdot 3r^2\vec{\nabla}r}{r^6}=\frac{r^2\cdot 2(\vec{a},\vec{r})\vec{a}-(\vec{a},\vec{r})^2\cdot 3\vec{r}}{r^5}.$$

**Зв'язок між похідною за напрямом, градієнтом та нормаллю до поверхні рівня.**

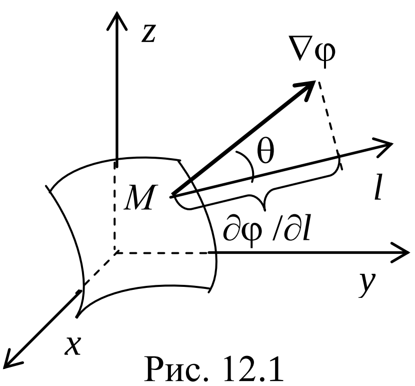


Рис. 12.1

За визначенням градієнта та наведеної вище теореми і рис.12.1, очевидно, що

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\ell}=\left(\vec{\nabla}\varphi,\vec{\ell}^{\,o}\right)=np_{\vec{\ell}}\vec{\nabla}\varphi=\left|\vec{\nabla}\varphi\right|\cdot\cos\theta,$$

де $\vec{\ell}^{\,o}=\frac{\vec{\ell}}{|\vec{\ell}|}$, а $\theta$ − кут між градієнтом і напрямом $\vec{\ell}$.

Найбільше значення $\frac{\partial\varphi}{\partial\ell}$ має, якщо

$\cos\theta = 1$, тобто в тому випадку, коли напрям $\vec{\ell}$ збігається з напрямом градієнта. Звідси маємо *фізичний зміст градієнта*: градієнт у будь-якій точці скалярного поля спрямований у бік найбільшого зростання поля і за абсолютною величиною дорівнює найбільшої швидкості зростання поля у цій точці $V_{\max} = |\vec{\nabla}\varphi|$.

*Напрям градієнту* $\vec{\nabla}\varphi$ скалярного поля φ *(x,y,z)* у точці М*(x,y,z)* *збігається* з *напрямом нормалі до поверхні рівня поля*, що проходить через цю точку.

При розв'язанні задач на *геометричні та механічні застосування* градієнта використовують наведені властивості градієнта та наступні:

1) для будь-якої *поверхні* $F(x,y,z)=0$ *вектор нормалі* в заданій точці М$(x,y,z)$ має вигляд: $\vec{n}^0 = \pm\dfrac{\vec{\nabla}F}{|\vec{\nabla}F|} = \pm\dfrac{gradF(x,y,z)}{|gradF(x,y,z)|}$;

2) *найбільшою крутістю підйому поверхні* $z = \varphi(x,y)$ в точці М$(x,y,z)$ є тангенс кута між нормалями до поверхні та до площини $XOY$ у точці М. Якщо $z = \varphi(x,y)$, то $\vec{n} = \{-\varphi'_x, -\varphi'_y, 1\}$ і $\cos\alpha = (\vec{n}^0, \vec{k})$, тобто: $\operatorname{tg}\alpha = |gradz|$.

**Приклад 3**. Записати вектор нормалі до поверхні $2z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ в точці $A(-2,-3,1)$.

**Розв'язання.** Запишемо рівняння поверхні у вигляді $F(x,y,z)=0$. Нормаль визначається за формулою $\vec{n}^0\Big|_A = \pm\dfrac{gradF(x,y,z)}{|gradF(x,y,z)|}\Bigg|_A$. У нашому випадку $F(x,y,z) = 2z - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}F = -\dfrac{x}{2}\vec{i} - \dfrac{2y}{9}\vec{j} + 2\vec{k}$, в точці А: $\vec{\nabla}F(A) = \vec{i} + \dfrac{2}{3}\vec{j} + 2\vec{k}$, $|\vec{\nabla}F| = \dfrac{7}{3}$ і $\vec{n}^0\Big|_A = \dfrac{1}{7}(3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k})$.

**Приклад 4**. За яким напрямом повинна рухатися точка М$(x,y,z)$, щоб при переході через точку А$(-1,2,-2)$ поле $\varphi = \dfrac{10}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$ зростало з найбільшою швидкістю? Чому дорівнює найбільша швидкість зростання?

**Розв'язання.** Напрям найбільшого зростання поля − це напрям градієнта, тобто $\vec{\ell}^0_{\max} = \dfrac{\vec{\nabla}\varphi}{|\vec{\nabla}\varphi|}$; швидкість у цьому напряму $V_{\max} = |\vec{\nabla}\varphi|$. Тоді

$$\vec{\nabla}\varphi = -\frac{10}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2}\cdot\left(\vec{i}\cdot 2x+\vec{j}\cdot 2y+\vec{k}\cdot 2z\right),\ \vec{\nabla}\varphi\Big|_A = \frac{1}{5}\left(\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}\right),$$

$$\left|\vec{\nabla}\varphi\right|\Big|_A = \frac{\sqrt{1+4+4}}{5} = \frac{3}{5} \text{ та остаточно } V_{\max} = \frac{3}{5};\ \vec{\ell}^{\,0}_{\max} = \frac{1}{3}\left(\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}\right).$$

**Приклад 5**. Знайти найбільшу крутість підйому поверхні $z = x^y$ в точці M(2;2;4).

**Розв'язання.** Найбільша крутість підйому визначається за формулою $\operatorname{tg}\alpha_{\max} = \left|\vec{\nabla}z\right|$, де $\vec{\nabla}z = \vec{i}\cdot y\cdot x^{y-1} + \vec{j}\cdot x^y\cdot \ln x$; $\vec{\nabla}z\Big|_M = 4\vec{i} + 4\ln 2\cdot\vec{j}$, тоді $\operatorname{tg}\alpha_{\max} = \left|\vec{\nabla}z\right|\Big|_M = 4\sqrt{1+\ln^2 2} \approx 4.87$, звідки $\alpha_{\max} \approx 78^{\circ}24'$.

**Приклад 6**. Обчислити похідну скалярного поля $\varphi = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$ в точці $A\left(2;\sqrt{3};3\right)$ в напрямі радіуса-вектора цієї точки.

**Розв'язання.** Градієнт поля $\vec{\nabla}\varphi = \vec{i}\cdot\frac{x}{2} + \vec{j}\cdot 2y + \vec{k}\cdot\frac{2z}{9}$, в точці A він дорівнює вектору $\vec{\nabla}\varphi(A) = \vec{i} + \vec{j}\cdot 2\sqrt{3} + \vec{k}\cdot\frac{2}{3}$; орт напряму радіуса-вектора $\vec{r}^{\,o}(A) = \frac{\vec{r}(A)}{\left|\vec{r}(A)\right|} = \frac{1}{4}\left(2\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} + 3\vec{k}\right)$, тоді похідна в напрямі радіуса-вектора

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\ell} = \left(\vec{\nabla}\varphi(A), \vec{r}^{\,o}\right) = \frac{1}{4}\left(\vec{i} + 2\sqrt{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}\right)\left(2\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} + 3\vec{k}\right) = \frac{5}{2}.$$

**Приклад 7.** Обчислити похідну скалярного поля $\varphi = ln\left(xy + yz + xz\right)$ в точці A(0,1,1), що належить колу $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1 \end{cases}$ за напрямом кола (рух проти годинної стрілки). Встановити характер зміни поля в цьому напрямку.

**Розв'язання.** Знаходимо градієнт поля в точці A:

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{xy + yz + xz}\left(\vec{i}(y+z) + \vec{j}(x+z) + \vec{k}(y+x)\right),\quad \vec{\nabla}\varphi(A) = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

Визначаємо значення параметра $t$, що відповідає точці A(0,1,1):

$$\left.\begin{aligned} x_A = 0 \Rightarrow \cos t_A = 0 \\ y_A = 1 \Rightarrow \sin t_A = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow t_A = \frac{\pi}{2}.$$

Знаходимо одиничний вектор за напрямом кола, що визначається як орт вектора $\vec{\tau}$ дотичної до заданої кривої. Крива задана параметричними рівняннями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, тому $\vec{\tau} = \{x'(t); y'(t); z'(t)\}$. Тоді орт дотичної до кола в точці А має вигляд: $\vec{\tau}^o(\mathrm{A}) = \vec{\ell}^o(\mathrm{A}) = \dfrac{(-1{,}0{,}0)}{\sqrt{1}}$.

Знаходимо похідну за напрямом, яка дорівнює скалярному добутку $(\vec{\nabla}\varphi(\mathrm{A}), \vec{\ell}^o(\mathrm{A}))$ = $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial\ell}\right|_A = \left(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)\left(-\vec{i}\right) = -2$. Оскільки $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial\ell}\right|_A < 0$, то поле в заданому напряму спадає.

**Приклад 8**. Знайти похідну функції $z = \dfrac{y^2}{x}$ у будь-якій точці еліпса $2x^2 + y^2 = 1$ ($x \neq 0$) за напрямами дотичної та нормалі до цього еліпса.

**Розв'язання.** Знайдемо вектор $\vec{\nabla}z$: $\vec{\nabla}z = -\dfrac{y^2}{x^2}\vec{i} + 2\dfrac{y}{x}\vec{j}$.

Знайдемо орти дотичної $\vec{\tau}^o$ і нормалі $\vec{n}^o$. Для неявно заданої функції $F(x, y) = 0$ маємо формули:

$$\vec{\tau}^o = \frac{\{-F'_y; F'_x\}}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y}}, \quad \vec{n}^o = \frac{\{F'_x; F'_y\}}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y}}.$$

Якщо $F(x, y) = 2x^2 + y^2 - 1 = 0$, то $F'_x = 4x$; $F'_y = 2y$ і

$$\vec{\tau}^o = \frac{\{-y;\, 2x\}}{\sqrt{4x^2 + y^2}}; \quad \vec{n}^o = \frac{\{2x; y\}}{\sqrt{4x^2 + y^2}}.$$

Остаточно маємо: $\left.\dfrac{\partial z}{\partial\ell}\right|_{\vec{\ell}=\vec{\tau}^o} = \left(-\vec{i}\,\dfrac{y^2}{x^2} + \vec{j}\,\dfrac{2y}{x}\right)\left(-\vec{i}y + \vec{j}2x\right)\dfrac{1}{\sqrt{4x^2 + y^2}} =$

$$= \frac{\dfrac{y^3}{x^2} + 4y}{\sqrt{4x^2 + y^2}} = \frac{y\left(y^2 + 4x^2\right)}{x^2\sqrt{4x^2 + y^2}} = \frac{y}{x^2}\sqrt{4x^2 + y^2}.$$

У верхній півплощині, де $y>0$ та $\left.\dfrac{\partial z}{\partial\ell}\right|_{\vec{\ell}=\vec{\tau}^o} > 0$, поле зростає за напрямом дотичної, у нижній − спадає. Похідна за напрямом нормалі має вигляд:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial\ell}\right|_{\vec{\ell}=\vec{n}^o} = \left(-\vec{i}\cdot\frac{y^2}{x^2} + \vec{j}\cdot\frac{2y}{x}\right)\cdot\left(\vec{i}\cdot 2x + \vec{j}\cdot y\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{4x^2 + y^2}} = \frac{-\dfrac{2y^2}{x} + \dfrac{2y^2}{x}}{\sqrt{4x^2 + y^2}} = 0,$$

тобто у будь-якій точці еліпса ( $x \neq 0$ ) за напрямом нормалі поле залишається стаціонарним.

### 12.3. Векторне поле

**Визначення.** Задане *поле* називають *векторним*, якщо воно визначається векторною функцією, тобто кожній точці $\mathrm{M}(x,y,z)$ простору (або його частині) поставлено у відповідність вектор

$$\vec{a}(\mathrm{M}) = \{P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\}.$$

Прикладом векторного поля може бути поле швидкостей твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Кожній точці M твердого тіла можна поставити у відповідність вектор швидкості $\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

На площині (або деякій частині площини) також може бути задане векторне поле, якщо кожній точці M($x$,$y$) поставити у відповідність плоский вектор $\vec{a} = \{P(x,y); Q(x,y)\}$.

Надалі будемо вважати, що функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ неперервно диференційовні. Ця вимога звичайно виконується в реальних фізичних задачах.

*Геометричними характеристиками* векторного поля є векторні (силові) лінії.

*Векторною (силовою) лінією поля* називається крива $\vec{r} = \vec{r}(t)$, в кожній точці якої дотичний вектор $d\vec{r}$ колінеарний до вектора поля $\vec{a}$ *(M)*.

Очевидно, що векторними лініями поля швидкостей твердого тіла, що обертається навколо осі, є кола, по яких рухаються точки при такому обертанні: дотичний вектор до кола є колінеарним вектору швидкості точки.

З визначення векторної лінії випливає, що $\exists\lambda$ (const) таке, що $\forall$M($x$,$y$,$z$) виконується рівність $d\vec{r} = \lambda\vec{a}(\mathrm{M})$, звідки маємо співвідношення

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)},$$

яке є системою диференціальних рівнянь для визначення векторних ліній поля.

**Приклад 9**. Знайти векторні лінії поля

$$\vec{a} = (z-y)\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (y-x)\vec{k}\ .$$

**Розв'язання.** Складаємо систему рівнянь векторних ліній:

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}.$$

Застосовуючи метод інтегровних комбінацій (використаємо основну властивість пропорцій $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3}{\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\lambda_3 b_3}$ ), маємо:

$$\frac{dx+dy+dz}{(z-y)+(x-z)+(y-x)}=\frac{dz}{y-x}\Rightarrow\frac{d(x+y+z)}{0}=\frac{dz}{y-x}.$$

Одержимо перший загальний інтеграл системи диференціальних рівнянь:

$$x+y+z=C_1.$$

Другий інтеграл одержимо аналогічно:

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{x(z-y)+y(x-z)+z(y-x)}=\frac{zdz}{z(y-x)}\Rightarrow\frac{1/2\,d\left(x^2+y^2+z^2\right)}{0}=\frac{dz}{y-x},$$

звідки випливає: $x^2+y^2+z^2=C_2$.

Отже, векторні лінії в нашому випадку – це кола, що утворюються в результаті перетину сфер $x^2+y^2+z^2=C_2$ із площинами $x+y+z=C_1$.

Якщо знайти обидва інтеграли за допомогою інтегровних комбінацій не вдається, то при знаходженні другого інтеграла використовують перший. Покажемо це на прикладі.

**Приклад 10**. Знайти векторні лінії поля $\vec{a}=-\vec{i}\,y+\vec{i}\,x+\vec{k}$ .

**Розв'язання.** Система рівнянь векторних ліній має вигляд:

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{1}.$$

Щоб одержати перший інтеграл системи, застосуємо метод інтегрованих комбінацій: $\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}\Rightarrow xdx+ydy=0$, звідки $x^2+y^2=C_1^2$.

Для визначення другого інтеграла використовуємо знайдений перший інтеграл. Запишемо отриману залежність у параметричному вигляді: $\begin{cases}x=C_1\cos t\\ y=C_1\sin t\end{cases}$. Тоді друге рівняння набуде вигляду $\frac{C_1\cos t dt}{C_1\cos t}=\frac{dz}{1}$, звідки маємо: $z=t+C_2$. Отже, отримано двопараметричну сім'ю гвинтових ліній: $x=C_1\cos t$, $y=C_1\sin t$, $z=t+C_2$, яка описує векторні лінії заданого поля.

Основними локальними характеристиками векторного поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ є *дивергенція* та *ротор* поля.

**Визначення.** *Дивергенцією векторного поля* $\vec{a}$ *в точці M* називається число $div\vec{a}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}$.

Дивергенція векторного поля є *скалярною* характеристикою поля: при прийнятих відносно функцій $P,Q,R$ припущеннях кожній точці M поля можна поставити у відповідність **число** $div\vec{a}(\text{M})$.

Якщо вважати, що $\vec{a}$ − поле швидкостей рухомої рідини, то $div\vec{a}(\text{M})$ є потужність джерела, що знаходиться у точці M (за умовою, що $div\vec{a}(\text{M})>0$) або потужність стоку ($div\vec{a}(\text{M})<0$). Кожному векторному полю $\vec{a}$ відповідає скалярне поле $div\vec{a}(M)$, яке характеризує розподіл джерел та стоків поля $\vec{a}$.

Поле $\vec{a}$, що не має джерел і стоків ($div\vec{a}(\text{M})=0$ для будь-якої точки M поля), називається *соленоїдним.*

**Визначення**. *Ротором векторного поля* $\vec{a}$ *в точці M* називається вектор

$$rot\vec{a}(M) = \left.\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\right|_{(M)} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial R(M)}{\partial y} - \frac{\partial Q(M)}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial P(M)}{\partial z} - \frac{\partial R(M)}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q(M)}{\partial x} - \frac{\partial P(M)}{\partial y}\right).$$

Ротор поля є *векторною характеристикою поля*, тому що кожній точці *M* поля $\vec{a}$ можна поставити у відповідність вектор $rot\vec{a}(M)$.

Фізичний зміст $rot\vec{a}$ видний із приклада: якщо $\vec{a}$ є поле швидкостей тіла, що обертається навколо осі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, то $rot\vec{a} = 2\vec{\omega}$.

Кожному векторному полю $\vec{a}$ відповідає інше векторне поле $rot\vec{a}$, яке характеризує обертання поля $\vec{a}$ в кожній точці.

Якщо $rot\vec{a}(\text{M})=0$ для будь-якої точки M поля $\vec{a}$, то таке поле $\vec{a}$ називається *безвихровим*. Безвихрове поле в однозв'язній області є *потенціальним* (тобто градієнтом деякого скалярного поля), і навпаки, будь-яке потенціальне поле є безвихровим.

Кожне векторне поле $\vec{a}$ може бути подане як *сума безвихрового та соленоїдного*.

Операції обчислення дивергенції та ротора можуть бути спрощені, якщо скористатися оператором

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z},$$

впровадженим Гамільтоном і названим *оператором Гамільтона або оператором “набла”*:

$$div\vec{a} = (\vec{\nabla}, \vec{a}),\ rot\vec{a} = [\vec{\nabla}, \vec{a}].$$

За допомогою цього оператора легко одержати основні властивості дивергенції і ротора:

$$rot(\vec{a} + \vec{b}) = [\vec{\nabla}, (\vec{a} + \vec{b})] = [\vec{\nabla}, \vec{a}] + [\vec{\nabla}, \vec{b}] = rot\vec{a} + rot\vec{b};$$

$$div(u\vec{a}) = u\,div\vec{a} + (\vec{\nabla}u, \vec{a});$$

$$rot[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{\nabla}, [\vec{a}, \vec{b}]] = [\vec{b}, rot\vec{a}] - [\vec{a}, rot\vec{b}].$$

**Приклад 11.** Обчислити дивергенцію та ротор векторного поля $\vec{a} = \{z - y, x - z, y - x\}$.

**Розв’язання.** 1) $div\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(z - y) + \frac{\partial}{\partial y}(x - z) + \frac{\partial}{\partial z}(y - x) \equiv 0$ для $\forall M \Rightarrow$ дане поле є соленоїдним.

2) $$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z - y & x - z & y - x \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial(y - x)}{\partial y} - \frac{\partial(x - z)}{\partial z}\right) +$$

$$+\vec{j}\left(\frac{\partial(z - y)}{\partial z} - \frac{\partial(y - x)}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial(x - z)}{\partial x} - \frac{\partial(z - y)}{\partial y}\right) = 2(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}).$$

### 12.4. Течія векторного поля крізь поверхню. Визначення. Способи обчислення

Нехай $\vec{a}$ − векторне поле, що задано в деякій області, S − обрана сторона двосторонньої поверхні, що знаходиться у цій області, $\vec{n}^0$ − орт нормалі до обраної сторони поверхні S.

**Визначення.** *Течією* $\Pi(S)$ *векторного поля* $\vec{a}$ крізь поверхню S називають поверхневий інтеграл $\Pi(S) = \iint\limits_S (\vec{a}, \vec{n}^0)\, ds$.

Якщо $\vec{a}$ − поле швидкостей рідини, що рухається, то течія поля $\vec{a}$ крізь поверхню S дорівнює кількості рідини, що протікає крізь цю поверхню в одиницю часу.

Оскільки течія векторного поля визначається як поверхневий інтеграл, то вона має усі властивості таких інтегралів. При обчисленні течій частіш за все використовують властивість адитивності: якщо $S = S_1 \cup S_2 \Rightarrow \Pi(S) = \Pi(S_1) + \Pi(S_2)$.

Якщо S − зовнішня сторона замкненої поверхні, то при обчисленні течії зручніше використовувати *формулу Гаусса−Остроградського*, що дозволяє перейти від поверхневого інтеграла по поверхні S до потрійного інтеграла по об'єму V, обмеженому цією поверхнею:

$$\oiint_S \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) ds = \iiint_V div\vec{a}\, dv .$$

Основна складність при обчисленні течії полягає у виборі засобу зведення поверхневого інтеграла до подвійного. Зручно дотримуватися такої схеми:

1. Рівняння поверхні $F(x, y, z) = 0$ однозначно розв'язати відносно якоїсь змінної. Якщо це можливо, то аналізована поверхня взаємно однозначно проектується на відповідну координатну площину. Наприклад, із рівняння $3x - 6y^2 - 4z^2 = 0$ можна однозначно визначити $x = 2y^2 + \frac{4}{3}z^2$. Розглянутий еліптичний параболоїд взаємно однозначно проектується на площину YOZ.

2. Поверхневий інтеграл, що виражає течію, зводиться в цьому випадку до подвійного інтеграла по області, яка є проекцією поверхні S на відповідну координатну площину.

2.1. При проектуванні поверхні S на площину X=0:

$$\Pi = \iint_S \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) ds = \iint_{D_{YOZ}} \left.\frac{\left(\vec{a}, \vec{n}^0\right)}{|\cos\alpha|}\right|_{x=\chi(y,z)} dydz .$$

2.2. При проектуванні поверхні S на площину Y=0:

$$\Pi = \iint_S \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) ds = \iint_{D_{XOZ}} \left.\frac{\left(\vec{a}, \vec{n}^0\right)}{|\cos\beta|}\right|_{y=\psi(x,z)} dxdz .$$

2.3. При проектуванні поверхні S на площину Z=0:

$$\Pi = \iint\limits_S \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) ds = \iint\limits_{D_{XOY}} \left. \frac{\left(\vec{a}, \vec{n}^0\right)}{|\cos\gamma|} \right|_{z=\varphi(x,y)} dxdy.$$

3. При визначенні орта $\vec{n}^0$ нормалі до поверхні необхідно *враховувати сторону поверхні*, крізь яку обчислюється течія. Нормаль спрямована до обраної сторони поверхні так, що якщо дивитися з її кінця, то *позитивний* обхід будь-якого замкненого контуру, що лежить на фіксованій стороні, відбувається *проти стрілки годинника*, тобто за правилом "правого гвинта". Вектор $\vec{n}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, що відповідає заданій стороні поверхні $F(x, y, z) = 0$, може збігатися з одним із двох векторів $\pm \frac{\vec{\nabla} F}{|\vec{\nabla} F|}$. Для того щоб обрати знак, достатньо хоча б в одній точці обраної поверхні визначити (наприклад, із геометричних міркувань) знак напрямного косинуса і порівняти його із знаком відповідної частинної похідної функції $F(x, y, z)$ в цій точці. Наприклад, якщо знаки $\cos\alpha$ і $F'_x$ збігаються, то обирають "+", в протилежному випадку обирають "−".

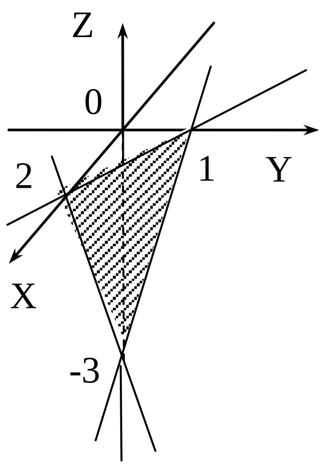


Рис. 12.2

При розв’язанні наступної задачі будемо дотримуватися наведеної схеми.

**Приклад 12.** Обчислити течію векторного поля $\vec{a} = \{z; -x; y\}$ крізь нижню сторону трикутника, отриманого при перетині площини $3x + 6y - 2z = 6$ з координатними площинами (рис. 12.2).

**Розв’язання.** Рівняння площини однозначно розв’язується щодо будь-якої із трьох змінних, тобто існує взаємно однозначна відповідність між точками поверхні і точками їх проекцій на будь-яку координатну площину. Розв’яжемо рівняння, наприклад, відносно координати $y$: $y = -\frac{1}{6}(3x - 2z - 6)$.

Спроектуємо поверхню на площину Y=0 (рис. 12.3), а поверхневий інтеграл, що виражає течію, запишемо як подвійний інтеграл $\Pi = \iint\limits_{D_{XOZ}} \left. \frac{\left(\vec{a}, \vec{n}^0\right)}{|\cos\beta|} \right|_{y=\psi(x,z)} dxdz$ та обчислимо його.

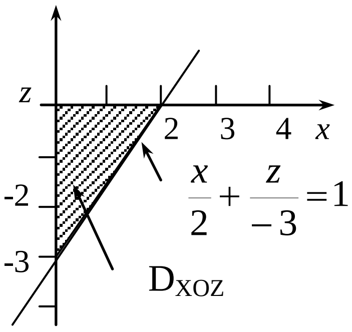



Рис. 12.3

Оскільки нормаль до обраної сторони поверхні утворює тупий кут з віссю 0Z, то $\cos\gamma < 0$. Якщо функцію $F(x, y, z)$ подати у вигляді $F(x, y, z) = 3x + 6y - 2z - 6$, то $\vec{\nabla} F = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$. Тоді знаки $\cos\gamma$ і $F'_z = -2 < 0$ збігаються і $\vec{n}^0 = +\frac{\vec{\nabla} F}{\left|\vec{\nabla} F\right|}$,

$\left|\vec{\nabla} F\right| = \sqrt{9 + 36 + 4} = 7$, $\vec{n}^0 = \frac{1}{7}\left(3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}\right)$. Звідси випливає:

$$\cos\beta = \frac{6}{7};\quad \frac{\left(\vec{a}, \vec{n}^0\right)}{|\cos\beta|} = \frac{1}{6}(3z - 6x - 2y).$$

Область інтегрування − це частина площини XOZ, яка обмежена прямими:

$$D_{XOZ}: \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ 3x - 2z - 6 = 0 \end{cases}$$ , тоді течія визначається як

$$\Pi = \frac{1}{6}\iint\limits_{D_{XOZ}} (3z - 6x - 2y)\Big|_{y=\frac{-1}{6}(3x-2z-6)} dxdz = \frac{1}{6}\int_0^2 dx \int_{\frac{3}{2}(x-2)}^{0} \left(\frac{7}{3}z - 5x - 2\right)dz = -\frac{23}{6}.$$

**Приклад 13.** Знайти течію векторного поля $\vec{a} = \left\{x^2; y^2; z^2\right\}$ крізь верхню частину поверхні параболоїда $x^2 + y^2 + 2z = 1$, розташовану в другому октанті (рис. 12.4).

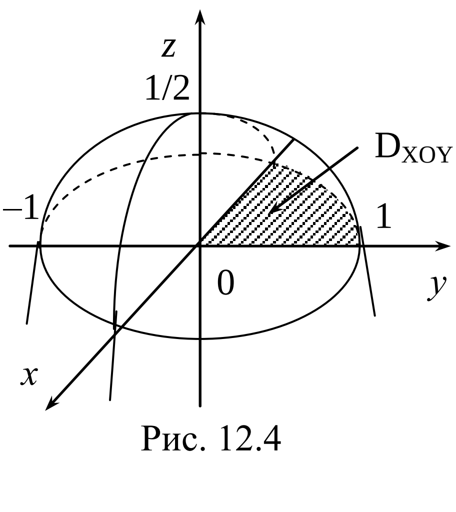



Рис. 12.4

**Розв'язання.** Рівняння поверхні однозначно розв'язується відносно координати *z*:

$$z = \frac{1}{2}\left(1 - x^2 - y^2\right).$$

Виконаємо проектування поверхні S на площину Z=0 (рис.12.5). Поверхневий інтеграл обчислимо через подвійний по проекції $D_{XOY}$ :

$$\Pi = \iint\limits_{D_{XOY}} \frac{\left(\vec{a}, \vec{n}^0\right)}{|\cos\gamma|}\Bigg|_{z=\varphi(x,y)} dxdy;$$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z - 1 = 0;$$

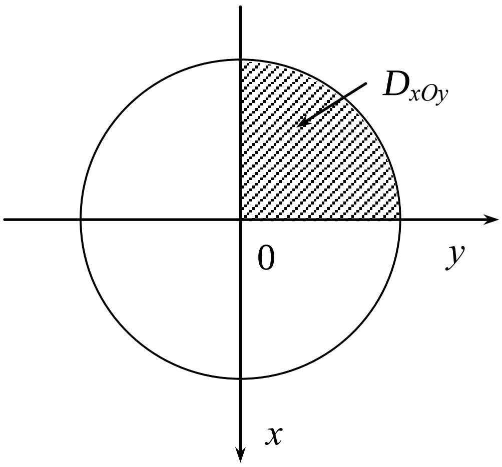



Рис. 12.5

$$\vec{\nabla}F = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2\vec{k}\,;\ \left|\vec{\nabla}F\right| = 2\sqrt{x^2+y^2+1}\,.$$

Нормаль до верхньої сторони параболоїда утворює гострий кут з віссю 0Z, отже, $\cos\gamma > 0$. Таким чином, $F_z' = 2 > 0$ та

$$\vec{n}^0 = +\frac{\vec{\nabla}F}{\left|\vec{\nabla}F\right|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+1}};$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}};\quad \left(\vec{a},\vec{n}^0\right) = \frac{x^3+y^3+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}};$$

$$\left.\frac{\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)}{\left|\cos\gamma\right|}\right|_{z=\frac{1}{2}\left(1-x^2-y^2\right)} = x^3+y^3+\frac{1}{4}\left(1-x^2-y^2\right)^2.$$

Переходимо до полярної системи координат:

$$\Pi = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi\int\limits_0^1\left(\rho^3\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)+\frac{1}{4}\left(1-\rho^2\right)^2\right)\rho d\rho =$$

$$= \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi\left.\left(\frac{\rho^5}{5}\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)-\frac{1}{8}\frac{\left(1-\rho^2\right)^3}{3}\right)\right|_0^1 = \left|\begin{array}{l}\psi=\varphi-\dfrac{\pi}{2}\\ \psi_H=0,\psi_B=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\psi d\psi + \int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\psi d\psi\right) + \frac{1}{24}\int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi = \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{24}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{48}.$$

Користуючись наведеною вище схемою, розглянемо ще один випадок, що часто зустрічається при обчисленні течій.

1. Візьмемо рівняння заданої поверхні $F(x,y,z)=0$. Переконаємося в тому, що його можна однозначно розв'язати відносно кожної змінної. Цей факт говорить про можливість взаємно однозначного проектування поверхні на кожну координатну площину.

2. У формулі для обчислення течії запишемо скалярний добуток у розгорнутому вигляді:

$$\Pi = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \pm\iint\limits_{D_{YOZ}} P(x,y,z)\big|_{x=\chi(y,z)}\,dydz\ \pm$$

$$\pm\iint\limits_{D_{XOZ}} Q(x,y,z)\big|_{y=\psi(x,z)}\,dxdz\ \pm\iint\limits_{D_{XOY}} R(x,y,z)\big|_{z=\varphi(x,y)}\,dxdy\,.$$

Знак перед кожним інтегралом вибирається таким, який знак має відповідний напрямний косинус нормалі до поверхні S.

Наведемо <u>друге розв’язання</u> задачі **прикладу 12** (рис. 12.6 − 12.8).

1. Впевнімося в тому, що рівняння площини однозначно розв'язується відносно кожної змінної, яка входить до нього, та знайдемо орт нормалі до неї. Оскільки площина визначається формулою S: $3x+6y-2z-6=0$, або $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-3}=1$, то ортом нормалі до неї є вектор $\vec{n}^0=\left\{\frac{3}{7};\frac{6}{7};-\frac{2}{7}\right\}$ зі знаками напрямних косинусів $\cos\alpha>0,\ \cos\beta>0, \cos\gamma<0$. .

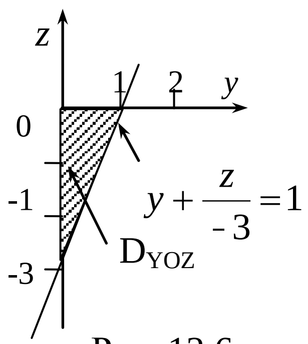


Рис. 12.6

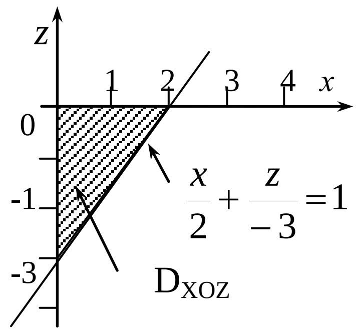


Рис. 12.7

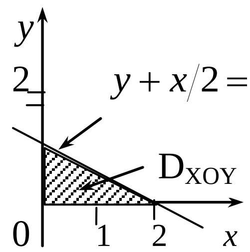


Рис. 12.8

2. Врахувавши знаки напрямних косинусів нормалі та заданий вектор поля $\vec{a}=\{z;-x;y\}$, запишемо в розгорнутому вигляді формулу для обчислення течії:

$$\Pi=+\iint\limits_{D_{YOZ}} zdydz+\iint\limits_{D_{XOZ}} -xdxdz-\iint\limits_{D_{XOY}} ydxdy=\int\limits_{-3}^{0} zdz\int\limits_{0}^{1+z/3} dy-\int\limits_{0}^{2} xdx\int\limits_{\frac{3}{2}(x-2)}^{0} dz-$$

$$-\int\limits_{0}^{1} ydy\int\limits_{0}^{2(1-y)} dx==\int\limits_{-3}^{0}\left(z+\frac{z^2}{3}\right)dz+\frac{3}{2}\int\limits_{0}^{2}\left(x^2-2x\right)dx-2\int\limits_{0}^{1}\left(y-y^2\right)dy=-\frac{23}{6}.$$

Обчислення течії крізь *замкнену поверхню* зручніше проводити за *теоремою Остроградського – Гаусса*:

$$\Pi=\oiint\limits_{S}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)ds=\iiint\limits_{V} div\,\vec{a}\,dv.$$

Іноді *незамкнену* поверхню доповнюють іншими поверхнями, щоб зробити її *замкненою*. Потім обчисляють течію за теоремою Остроградського − Гаусса і з результату віднімають течії крізь додаткові поверхні. Розв’яжемо таким чином ще раз задачу **прикладу 12**.

**Розв'язання.** З креслення (рис.12.2) бачимо, що площина $3x+6y-2z-6=0$ разом із координатними площинами утворює замкнену поверхню $S$. Застосуємо теорему Остроградського – Гаусса (межі інтегрування відповідають рис.12.6-12.8):

$$S:\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-3}=1\\ x=0;\ y=0;\ z=0\end{cases};\qquad \vec{a}=\{z;-x;y\}\Rightarrow div\,\vec{a}=0;$$

$$\Pi=\iint_S\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)ds=\iiint_V div\,\vec{a}\,dv-(\Pi_{\Delta XOY}+\Pi_{\Delta XOZ}+\Pi_{\Delta YOZ});$$

$$\Pi_{\Delta XOY}==\iint_{D_{XOY}}\left(\vec{a},\vec{k}\right)\Big|_{Z=0}dxdy=\int_0^1 ydy\int_0^{2(1-y)}dx=2\int_0^1\left(y-y^2\right)dy=\frac{1}{3};$$

$$\Pi_{\Delta XOZ}=-\iint_{D_{XOZ}}\left(\vec{a},\vec{j}\right)\Big|_{y=0}dxdz=\int_0^2 xdx\int_{\frac{3}{2}(x-2)}^{0}dz=\frac{3}{2}\int_0^2\left(x^2-2x\right)dx=2;$$

$$\Pi_{\Delta YOZ}=\iint_{D_{YOZ}}\left(\vec{a},\vec{i}\right)\Big|_{x=0}dydz=-\int_{-3}^{0}zdz\int_0^{1+z/3}dy=\frac{3}{2}.$$

Остаточно маємо: $\Pi=0-\left(\frac{1}{3}+2+\frac{3}{2}\right)=-\frac{23}{6}$.

Якщо задані поверхні *не мають взаємно однозначних* проекцій на координатні площини, то ці поверхні *розбивають на частини*, які задовольняють вимоги взаємно однозначного проектування, а потім обчислюють течію, використовуючи властивість адитивності поверхневих інтегралів.

**Приклад 14.** Обчислити течію вектора $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ крізь зовнішню сторону бічної поверхні кругового циліндра $x^2+y^2=R^2$, обмежену площинами $z=0$ і $z=H$ $(H>0)$.

**Розв'язання.** Течія $\Pi=\iint_{S_{б.п.ц.}}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)ds$. Розглянемо результати проектування бічної поверхні заданого кругового циліндра на координатні площини (рис. 12.9 – 12.11):

1) $D_{YOZ}:\begin{cases} x=0 \\ y=\pm R \\ z=0 \\ z=H \end{cases}$ 2) $D_{XOZ}:\begin{cases} y=0 \\ x=\pm R \\ z=0 \\ z=H \end{cases}$ 3) $D_{XOY}:\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2=R^2 \end{cases}$

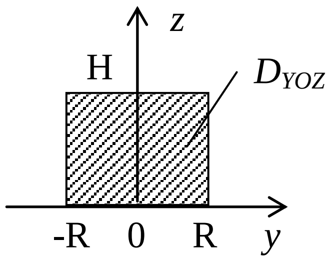


Рис. 12.9

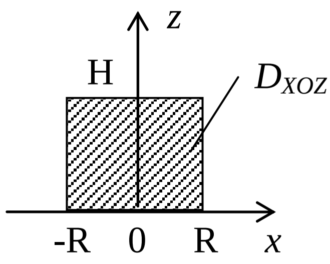


Рис. 12.10

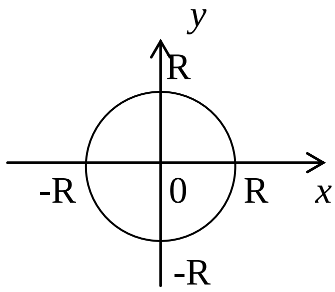


Рис. 12.11

Проекції $D_{YOZ}$ і $D_{XOZ}$ однотипні − кожній точці проекції відповідають *дві* точки на бічній поверхні циліндра, тобто немає взаємно однозначної відповідності точок поверхні точкам проекцій. Проекцією $D_{XOY}$ бічної поверхні циліндра на площину XOY буде коло, тобто кожній точці кола відповідає *нескінченна* множина точок проектованої поверхні. *Висновок*: при обчисленні потоку потрібно розділити бічну поверхню на дві частини, кожна з яких має взаємно однозначну відповідність зі своєю проекцією на площині, наприклад, на площині YOZ.

Течія − величина адитивна, тобто $\Pi=\Pi_1+\Pi_2$, де $\Pi_1$− течія крізь частину циліндра $S_1$, що лежить у півпросторі $y\geq 0$, а $\Pi_2$− течія крізь частину $S_2$ циліндра, що лежить у півпросторі $y<0$. У даному випадку $\Pi_1=\Pi_2$, тоді $\Pi=2\Pi_1$, $\vec{n}^o=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}}{R}$, $\left(\vec{a},\vec{n}^o\right)=\left(\vec{r},\vec{n}^o\right)=np_{\vec{n}^o}\vec{r}=R$, тому що зовнішня нормаль до бічної поверхні циліндра паралельна площини XOY. Течія крізь бічну поверхню циліндра

$$\Pi=2\Pi_1=2\iint\limits_{S_{бок.}}\left(\vec{r},\vec{n}^0\right)ds=2\iint\limits_{S_{бок.}}ds=2R\cdot\pi RH=2\pi R^2H\,.$$

*Зауваження.* Ця ж задача може бути розв'язана іншим засобом: $\vec{n}^o=\left\{\dfrac{x}{R},\dfrac{y}{R},0\right\}$, $\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)=\left(\vec{r},\vec{n}^0\right)=\dfrac{x^2}{R}+\dfrac{y^2}{R}$, тоді $np_{\vec{n}^0}\vec{r}=R$ і

$$\Pi=\iint\limits_{S_{бок.}}np_{\vec{n}^0}\vec{r}\,ds=R\iint\limits_{S_{бок.}}ds=R\cdot 2\pi R\cdot H=2\pi R^2H\,.$$

**Приклад 15.** Обчислити течію вектора $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ крізь частину бічної поверхні циліндра $x^2 + y^2 = R^2$, відсічену площинами $z = 0$ і $z = x$ $(z \ge 0)$ (рис.12.12).

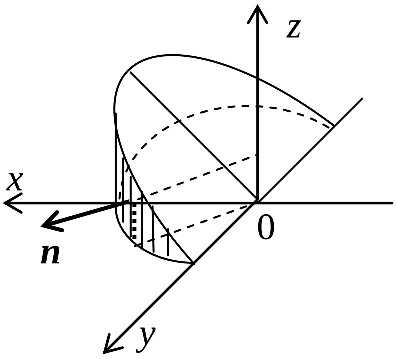


Рис. 12.12.

**Розв'язання.** $\Pi = \iint\limits_{S_{бок.}} \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) ds$, де

$$\vec{n}^o = \pm \frac{\vec{\nabla}\left(x^2 + y^2 - R^2\right)}{\left|\vec{\nabla}\left(x^2 + y^2 - R^2\right)\right|} = \pm \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Нормаль до обраної бічної поверхні утворює гострий кут з віссю 0X і $\cos\alpha > 0$, отже, у формулі для $\vec{n}^0$ обираємо знак "+":

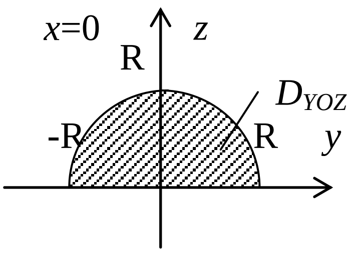


Рис. 12.13

$$\vec{n}^0 = + \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{R} = \frac{1}{R}\left(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}\right). \text{ Тоді}$$

$$\left(\vec{a}, \vec{n}^o\right) = \left(y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}\right) \cdot \left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R}(xy + zy) =$$

$$= \frac{1}{R} y(x + z) \text{ і } \Pi = \frac{1}{R} \iint\limits_{S_{бок.}} y(x + z)\, ds.$$

Взаємно однозначну відповідність буде досягнуто у випадку проектування циліндричної поверхні на координатну площину YOZ (рис. 12.13):

$$D_{YOZ} : \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = x \\ z \ge 0 \end{cases} \Rightarrow D_{YOZ} : \begin{cases} z^2 + y^2 = R^2 \\ x = 0 \\ z \ge 0 \end{cases},$$

$$\Pi = \frac{1}{R} \iint\limits_{D_{YOZ}} \left.\frac{y(x+z)}{|\cos\alpha|}\right|_{x=z} dydz = \left\| \begin{matrix} |\cos\alpha| = \dfrac{x}{R} \\ x \ge 0 \end{matrix} \right\| = \iint\limits_{D_{YOZ}} \left.\frac{y(x+z)}{x}\right|_{x=z} dydz =$$

$$= 2 \iint\limits_{D_{YOZ}} ydydz = 2\int\limits_0^R dz \int\limits_{-\sqrt{R^2 - z^2}}^{\sqrt{R^2 - z^2}} ydy = 0.$$

**Приклад 16.** Знайти течію векторного поля $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ крізь зовнішню сторону повної поверхні конуса $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{R^2}{H^2} z^2 \\ 0 \le z \le H \end{cases}.$

**Розв'язання**

**1 спосіб**. Обчислимо течію *безпосередньо за визначенням,* тобто як поверхневий інтеграл $\Pi = \oiint\limits_{S_{п.п.к.}} \left(\vec{a}, \vec{n}^o\right) ds = \iint\limits_{S_{б.п.к.}} \left(\vec{a}, \vec{n}^o\right) ds + \iint\limits_{S_{основи\ к.}} \left(\vec{a}, \vec{n}^o\right) ds = \Pi_1 + \Pi_2$;

$$\Pi_1 = \iint\limits_{D_{XOY}} \left.\frac{\left(\vec{a}, \vec{n}^0\right)}{|cos\,\gamma|}\right|_{z=\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}} dxdy\,;\ \ \vec{n}^o = \pm\frac{gradF}{|gradF|},\ \ F(x,y,z) = x^2 + y^2 - \frac{R^2}{H^2}z^2,$$

$gradF = 2\left(x\vec{i} + y\vec{j} - \frac{R^2}{H^2}z\vec{k}\right)$, $|gradF| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + \left(\frac{R^2}{H^2}z\right)^2}$, $\vec{n}^o -$ *зовнішня* нормаль до бічної поверхні конуса і $\cos\gamma < 0$, тому вибираємо знак «+»:

$$\vec{n}^o = +\frac{x\vec{i} + y\vec{j} - \frac{R^2}{H^2}z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(\frac{R^2}{H^2}z\right)^2}},\ \cos\gamma = -\frac{R^2}{H^2}\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(\frac{R^2}{H^2}z\right)^2}},\ z \ge 0\,;$$

$$\left.\frac{\left(\vec{a}, \vec{n}^o\right)}{|\cos\gamma|}\right|_{z=\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}} = \left.\frac{x^4 + y^4 - \frac{R^2}{H^2}z^4}{z}\cdot\frac{H^2}{R^2}\right|_{z=\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{H}{R}\cdot\frac{x^4 + y^4 - \frac{H^2}{R^2}\left(x^2 + y^2\right)^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left\|\begin{matrix} x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le R \end{matrix}\right\| =$$

$$= \frac{H}{R}\cdot\frac{r^4\left(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi\right) - \frac{H^2}{R^2}r^4}{r} = \frac{H}{R}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\varphi - \frac{H^2}{R^2}\right)r^3;$$

$$\Pi_1 = \frac{H}{R}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3R^2 - 4H^2}{4R^2} + \frac{1}{4}\cos 4\varphi\right)d\varphi\int\limits_0^R r^3 r dr = \frac{H}{R}\cdot\frac{3R^2 - 4H^2}{4R^2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{5}R^5 =$$

$$= \frac{\pi}{10}\cdot R^2 H\left(3R^2 - 4H^2\right);\quad \Pi_2 = \iint\limits_{S_{осн.}}\left(\vec{a}, \vec{k}\right)ds = \iint\limits_{S_{осн.}} z^3\big|_{z=H}\, ds = \pi H^3 R^2;$$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \pi H R^2\cdot\frac{1}{10}\left(3R^2 - 4H^2\right) + \pi R^2 H\cdot H^2 = \frac{3}{10}\cdot\pi R^2 H\left(R^2 + 2H^2\right).$$

**2 спосіб.** Обчислимо течію з *використанням теореми* Остроградського – Гаусса:

$$\Pi = \oiint\limits_{S_{п.п.к.}} \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) ds = \iiint\limits_V div\,\vec{a}\,dv\,,\ \vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}\,,\ div\vec{a} = 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

Перейдемо до циліндричних координат, тоді $div\vec{a} = 3\left(r^2 + z^2\right)$,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{R^2}{H^2} z^2 \\ 0 \le z \le H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = r \cdot H/R,\ 0 \le z \le H, \\ 0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases};$$

$$\Pi = \iiint\limits_V div\,\vec{a}\,dv = 3\iiint\limits_V \left(r^2 + z^2\right) r dr d\varphi dz = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r dr \int\limits_{\frac{H}{R}r}^{H} \left(r^2 + z^2\right) dz =$$

$$= 3 \cdot 2\pi \int\limits_0^R r\left( r^2 z + \frac{z^3}{3} \right)\Bigg|_{\frac{H}{R}\cdot r}^{H} dr = 6\pi \int\limits_0^R \left( r^3 H + \frac{1}{3} H^3 r - \frac{H}{R} r^4 - \frac{1}{3} \cdot \frac{H^3}{R^3} r^4 \right) dr =$$

$$= 6\pi \left( \frac{1}{4} R^4 H + \frac{1}{6} R^2 H^3 - \frac{1}{5} R^4 H - \frac{1}{15} R^2 H^3 \right) = \frac{3}{10} \pi R^2 H \left( R^2 + 2H^2 \right).$$

## 12.5. Лінійний інтеграл у векторному полі. Циркуляція

Нехай $L$ − орієнтована крива, $\vec{\tau}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ − одиничний вектор (орт) дотичної до кривої.

**Визначення.** *Лінійним інтегралом* векторного поля $\vec{a} = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ вздовж орієнтованої кривої $L$ називають криволінійний інтеграл першого роду по довжині дуги $L$:

$$\mathrm{A} = \int\limits_L \left(\vec{a}, \vec{\tau}^0\right) dl = \int\limits_L \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) dl = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz\,.$$

Якщо $\vec{a}$ − поле сил, то лінійний інтеграл А дорівнює ***роботі***, створеній полем по переміщенню матеріальної точки вздовж лінії $L$.

**Приклад 17.** Обчислити лінійний інтеграл поля радіуса-вектора $\vec{r}$ уздовж одного витка гвинтової лінії: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = ht$, орієнтованої в напрямку зростання параметра $t$.

**Розв'язання.** Оскільки $\vec{a} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то $\mathrm{A} = \int\limits_L xdx + ydy + zdz$.

Крива задана параметричними рівняннями, відзначимо, що одному витку гвинтової лінії відповідає $t \in [0, 2\pi]$, тоді

$$\mathrm{A} = \int_0^{2\pi} \left( -R\cos t \cdot R\sin t + R\sin t \cdot R\cos t + ht \cdot h \right) dt = 2\pi^2 h^2 .$$

**Визначення.** Лінійний інтеграл вздовж замкненого контуру називається *циркуляцією*:

$$C = \oint_L \left( \vec{a}, \vec{\tau}^{\,0} \right) dl .$$

*Циркуляція* векторного поля може бути *обчислена*:

1) безпосередньо (як лінійний інтеграл по замкненому контуру);

2) з використанням *теореми Стокса*, яка стверджує, що циркуляція дорівнює течії ротора поля крізь будь-яку поверхню $S$, натягнуту на контур $L$ (орієнтації поверхні $S$ і контуру $L$ узгоджені):

$$C = \oint_L \left( \vec{a}, \vec{\tau}^{\,0} \right) dl = \iint_S \left( rot\,\vec{a}, \vec{n}^{\,0} \right) ds .$$

Схему розв'язання задачі покажемо на прикладі.

**Приклад 18.** Для поля $\vec{a} = z\vec{i} - y\vec{k}$ знайти циркуляцію по контуру L: $x^2 + y^2 = 4$ , $x + 2z = 5$ безпосередньо і за теоремою Стокса.

**Розв'язання. 1 спосіб**. Безпосереднє обчислення.

Рівняння контуру, по якому обчислюється циркуляція, подаємо в параметричному вигляді. Проекція контуру на площину XOY лежить на колі $x^2 + y^2 = 4$, звідки $x = 2\cos t$ ; $y = 2\sin t$. Оскільки контур лежить у площині $x + 2z = 5$, то $z = \frac{1}{2}(5 - 2cos\,t)$.

Визначаємо межі зміни параметра, що відповідають позитивному обходові. У цьому випадку $t \in [0, 2\pi]$.

Обчислюємо інтеграл:

$$C = \oint_L \vec{a} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2}(5 - 2\cos t)(-2\sin t) - 2\sin t \sin t \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( -5\sin t + 2\sin t \cos t - 2\sin^2 t \right) dt = -2\pi .$$

**2 засіб.** Обчислення з використанням теореми Стокса.

Обираємо поверхню, яку буде натягнуто на контур, що розглядається. У даному випадку контур плоский, тому за таку поверхню може бути обрана частина площини $x+2z=5$, обмежена контуром (обирається верхня її сторона, оскільки обхід на контурі позитивний).

$$\text{Обчислюємо: } rot\,\vec{a}:=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z & 0 & -y\end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}\ .$$

Визначаємо напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні. У даному випадку рівняння поверхні $F(x,y,z)=x+2z-5=0$;

тоді $\vec{n}^0=\dfrac{1\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{i}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{k}$, $\quad\cos\gamma=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Визначаємо циркуляцію за теоремою Стокса:

$$C=\iint_S\left(rot\,\vec{a},\vec{n}^0\right)ds=\iint_{D_{XOY}}\left.\frac{\left(rot\,\vec{a},\vec{n}^0\right)}{|\cos\gamma|}\right|_{z=f(x,y)}dxdy\ .$$

$$C=-\iint_{D_{XOY}}\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\vec{i}+2\vec{k}\right)\left(\vec{i}+\vec{j}\right)dxdy=-\frac{1}{2}\iint_{D_{XOY}}dxdy=-\frac{1}{2}\pi\cdot 2^2=-2\pi.$$

**Приклад 19.** Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}=xy\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k}$ вздовж лінії $L$ перетину циліндра і площини (рис. 12.14), якщо рівняння лінії $L:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x+y+z=1.\end{cases}$

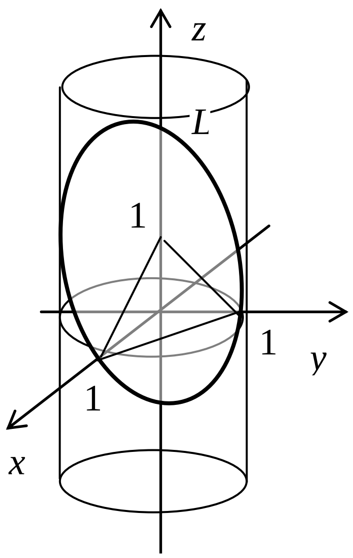


Рис. 12.14

**Розв’язання**

**1 спосіб**. Безпосереднє обчислення.

$C=\oint_L\vec{a}d\vec{r}=\oint_L xydx+yzdy+xzdz$. Лінія $L$ − еліпс, що проектується на площину XOY в коло $x^2+y^2=1$. Цей еліпс у параметричному вигляді може бути подано як $L:\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=1-\cos t-\sin t\end{cases}$,

$0\le t\le 2\pi$. Звідси $dx=-\sin tdt$, $dy=\cos tdt$, $dz=(\sin t-\cos t)dt$ і підінтегральний вираз набуває вигляду:

$$xydx+yzdy+xzdz=-\cos t\sin^2 tdt+\sin t(1-\cos t-\sin t)\cos tdt+$$

$+\cos t(1-\cos t-\sin t)(\sin t-\cos t)\,dt=\big(-3\sin^2 t\cos t+2\sin t\cos t-\sin t\cos^2 t-$
$-\cos^2 t+\cos^3 t\big)dt$.

Циркуляція $C=-3\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\,d\sin t+\int\limits_0^{2\pi}\sin 2t dt+\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t\,d\cos t\;-\int\limits_0^{2\pi}\frac{(1+\cos 2t)}{2}dt+$

$+\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\sin^2 t\right)d\sin t=\left(-\frac{4\sin^3 t}{3}-\frac{\cos 2t}{2}+\frac{\cos^3 t}{3}-\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}+\sin t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=-\pi.$

**2 спосіб**. Обчислення за теоремою Стокса $C=\oint\limits_L\left(\vec{a},\vec{\tau}^0\right)dl=$

$=\iint\limits_S\left(rot\,\vec{a},\vec{n}^0\right)ds$, де $S$ є будь-яка поверхня, натягнута на контур $L$.

Доцільно за поверхню $S$ у даному випадку обрати площину $x+y+z=1$, що має нормаль $\vec{n}^o=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$. Проекцією цієї нормалі на площину $XOY$ буде круг (рис. 12.15).

$C=\iint\limits_S\left(rot\,\vec{a},\vec{n}^0\right)ds=\iint\limits_{D_{XOY}}\frac{\left(rot\,\vec{a},\vec{n}^0\right)}{|\cos\gamma|}\Bigg|_{z=1-x-y}dxdy;$

$$rot\,\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & 0 & -y\end{vmatrix}=\vec{i}\,(-y)-\vec{j}z+\vec{k}(-x)=$$

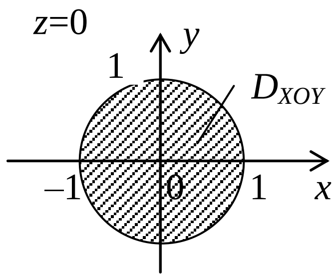


Рис. 12.15

$=-\left(y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}\right);\ \left(rot\vec{a},\vec{n}^o\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z);$

$|\cos\gamma|=\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{\left(rot\,\vec{a},\vec{n}^0\right)}{|\cos\gamma|}\Bigg|_{z=1-x-y}=-1$. Отже, $C=-\iint\limits_{D_{XOY}}dxdy=-\pi$.

## Контрольні приклади до гл. 12

*Перш ніж почати виконання індивідуального розрахункового завдання, читач може разом з нами розв'язати декілька типових завдань, замінюючи знак* $\boxed{*}$ *необхідними числами і виразами.*

**Приклад 12.1.** Знайти лінії рівня скалярного поля $u(x,y)=x^2+y^2+2x$.

**Розв'язання.** Складемо рівняння ліній рівня поля: $u(x,y)=C$.

Для того щоб встановити, які лінії описуються даними співвідношеннями при різних значеннях $C$, перетворимо рівняння, виділивши повний квадрат: $\left(x+\boxed{*}\right)^2+y^2=C+\boxed{*}$.

Якщо права частина рівняння додатна, тобто $C>\boxed{*}$, то лініями рівня поля є сім'я кіл з центром у точці $\left(\boxed{*};\boxed{*}\right)$ і радіусом $R=\sqrt{C+\boxed{*}}$. При $C=\boxed{*}$ лінії рівня вироджуються в точку з координатами $\left(\boxed{*};\boxed{*}\right)$. При $C<\boxed{*}$ дійсних ліній рівня не існує.

**Приклад 12.2.** Знайти поверхні рівня скалярного поля $u(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

**Розв'язання.** Задане скалярне поле визначене усюди, окрім осі $\boxed{*}$ (осі позначені цифрами 1, 2, 3 – відповідно осі OX, OY, OZ). Рівняння поверхонь рівня поля: $\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=C$.

Якщо $C>\boxed{*}$, то рівняння $z=C\sqrt{x^2+y^2}$ описує верхню частину поверхні $\boxed{*}$ (цифрами позначені поверхні: 1 – сфери, 2 – однополого гіперболоїда, 3 – конуса). При $C<\boxed{*}$ рівняння визначає нижню частину поверхні $\boxed{*}$. При $C=\boxed{*}$ поверхнею рівня є вся площина $z=\boxed{*}$, окрім точки $\left(\boxed{*};\boxed{*};\boxed{*}\right)$.

**Приклад 12.3.** Оцінити характер зміни поля $u(x,y,z)=ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ в точці $M(-3;0;4)$ у напрямі радіуса-вектора цієї точки.

**Розв'язання.** Характер зміни поля в даній точці $M$ в заданому напрямі визначається похідною за напрямом, обчисленою в точці M: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\left.\left(\overrightarrow{\nabla u},\vec{l}^{\,0}\right)\right|_M$. Вектор $\vec{l}^{\,0}$ направлений так само, як і вектор $\vec{l}$, обчислюється за формулою $\vec{l}^{\,0}=\dfrac{\vec{l}}{\left|\vec{l}\right|}$, а його довжина $\left|\vec{l}^{\,0}\right|=\boxed{*}$

У нашому випадку:

$\vec{l}\Big|_M = \vec{r}(M) = \boxed{*}\cdot\vec{i} + \boxed{*}\cdot\vec{j} + \boxed{*}\cdot\vec{k}$;     $\left|\vec{l}\right| = \boxed{*}$;     $\vec{l}^{\,0} = \dfrac{\boxed{*}}{\boxed{*}}\cdot\vec{i} + \dfrac{\boxed{*}}{\boxed{*}}\cdot\vec{j} + \dfrac{\boxed{*}}{\boxed{*}}\cdot\vec{k}$.

Знайдемо градієнт $\overrightarrow{\nabla u}\Big|_M = \left\{\dfrac{\partial u}{\partial x};\dfrac{\partial u}{\partial y};\dfrac{\partial u}{\partial z}\right\}\Bigg|_M$. Частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \boxed{*}\frac{x}{r^2};\ \frac{\partial u}{\partial y} = \boxed{*}\frac{y}{r^2};\ \frac{\partial u}{\partial z} = \boxed{*}\frac{z}{r^2},\ \text{ де } r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Остаточно маємо: $\overrightarrow{\nabla u}\Big|_M = \left\{\dfrac{\boxed{*}}{\boxed{*}};\dfrac{\boxed{*}}{\boxed{*}};\dfrac{\boxed{*}}{\boxed{*}}\right\}$.

Обчислюємо скалярний добуток градієнта на орт $\vec{l}^{\,0}$: $\dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_M = \dfrac{\boxed{*}}{5}$.

Оскільки $\dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_M > \boxed{*}$, то поле в точці $M$ в даному напрямку є $\boxed{*}$ (1 – зростаюче, 2 – спадне, 3 – стаціонарне).

**Приклад 12.4.** Знайти течію векторного поля $\vec{a} = \left(x + e^z\right)\vec{i} + (2y + x)\vec{j} - z\vec{k}$ через зовнішню сторону поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

**Розв’язання.** Оскільки поверхня замкнена, то для обчислення течії скористаємося теоремою Остроградського – Гаусса: $\Pi = \iiint\limits_V div\vec{a}\,dv$.

Дивергенція $div\vec{a}$ – це $\boxed{*}$ (1 – векторна, 2 – скалярна) характеристика векторного поля. Операція обчислення дивергенції за допомогою «набла» - оператора може бути записана як $div\vec{a} = \left(\vec{\nabla},\vec{a}\right)$. У нашому випадку: $div\vec{a} = 1 + \boxed{*} - \boxed{*} = \boxed{*}$.

Тоді течія $\Pi = \iiint\limits_V \boxed{*}\,dv = \boxed{*}\iiint\limits_V dv$. Оскільки $\iiint\limits_V dv = V$, де $V$ – це об'єм кулі, то  $\Pi = \boxed{*}\dfrac{4}{3}\pi\cdot\boxed{*}^3 = \boxed{*}$.

**Приклад 12.5.** Знайти течію векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$ крізь бічну поверхню конуса $x^2 + y^2 = 4z^2$, $0 \le z \le 1$. Нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю $Oz$.

**Розв'язання.** Течія П поля $\vec{a}$ крізь поверхню обчислюється за формулою: $\Pi = \iint\limits_S \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) ds$, де $\vec{n}^0$ – орт нормалі до поверхні.

Якщо поверхня задана рівнянням $F(x,y,z)=0$, то $\vec{n}^0 = \pm \dfrac{\overrightarrow{\nabla F}}{\left|\overrightarrow{\nabla F}\right|}$ (знак визначається стороною поверхні). У нашому випадку:

$F(x,y,z) = x^2 + y^2 \boxed{*} 4z^2$; $\overrightarrow{\nabla F} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \boxed{*} z\vec{k}$; $\left|\overrightarrow{\nabla F}\right| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + \boxed{*} z^2}$.

За умовою завдання нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю $OZ$, отже, напрямний косинус нормалі з віссю $OZ$ повинен бути додатним. Оскільки $z \in [0,1]$ $F'_z \boxed{*} 0$, то $\vec{n}^0 = \boxed{*} \dfrac{\overrightarrow{\nabla F}}{\left|\overrightarrow{\nabla F}\right|} = \boxed{*} \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} - \boxed{*} z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + \boxed{*} z^2}}$.

Тоді течія $\Pi = \iint\limits_S \left(\vec{a}, \boxed{*} \dfrac{\overrightarrow{\nabla F}}{\left|\overrightarrow{\nabla F}\right|}\right) ds = \iint\limits_S \dfrac{\boxed{*} x^2 \boxed{*} y^2 - \boxed{*} z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + \boxed{*} z^2}} ds$.

Поверхня однозначно проектується на площину $XOY$, отже, отриманий поверхневий інтеграл може бути обчислено за формулою

$$\Pi = \iint\limits_{D_{xoy}} \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) \frac{1}{|cos\,\gamma|}\Bigg|_{z=\varphi(x,y)} dxdy,$$

де $D_{xoy}$ – проекція поверхні на площину $XOY$, в нашому випадку – це круг радіуса $\boxed{*}$ з центром у точці $\left(\boxed{*}; \boxed{*}\right)$;

$$|cos\,\gamma| = \frac{\boxed{*} z}{\sqrt{x^2 + y^2 + \boxed{*} z^2}}; \qquad z = \varphi(x,y) = \frac{1}{\boxed{*}} \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\Pi = \iint\limits_{x^2+y^2 \le \boxed{*}} \frac{\boxed{*} x^2 \boxed{*} y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy = \boxed{*} \iint\limits_{x^2+y^2 \le \boxed{*}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy = \left\| \begin{array}{l} \rho^2 = x^2 + y^2; \\ \rho \in \left[\boxed{*}, \boxed{*}\right] \\ \varphi \in \left[\boxed{*}, \boxed{*}\pi\right] \\ dxdy = \rho\, d\rho d\varphi \end{array} \right\| =$$

$$= \boxed{*} \int\limits_{\boxed{*}}^{\boxed{*}\pi} d\varphi \int\limits_{\boxed{*}}^{\boxed{*}} \rho^2 d\rho = \boxed{*}\pi \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_{\boxed{*}}^{\boxed{*}} = \frac{\boxed{*}}{3}\pi.$$

## Контрольні завдання до гл. 12

**Завдання 1.** Знайти поверхні (лінії) рівня скалярного поля:

**12.1.1.** $\varphi = x^2 + 2y$; **12.1.2.** $\varphi = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

**12.1.3**. $\varphi = x^2 + y^2 - 2x$; **12.1.4.** $\varphi = \ln(r-2)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$;

**12.1.5.** $\varphi = \dfrac{x^2+y}{z}$; **12.1.6**. $\varphi = \sqrt{R^2 - r^2}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

**12.1.7**. $\varphi = (\vec{a},\vec{r}) - \omega z$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{a}$ – постійний вектор;

**12.1.8.** $\varphi = 2x^2 + 4y^2 + 1$; **12.1.9.** $\varphi = z^2 - x^2 - y^2$;

**12.1.10**. $\varphi = \operatorname{tg}(x^2 + y^2 - 2z^2)$; **12.1.11.** $\varphi = z - x^2 - y^2$;

**12.1.12.** $\varphi = \dfrac{x^2 - 4y}{z}$; **12.1.13.** $\varphi = \dfrac{x^2 - 4y}{z}$;

**12.1.14.** $\varphi = \operatorname{arctq}\dfrac{z}{\sqrt{z^2+y^2}}$; **12.1.15**. $\varphi = \ln(r-3)$;

**12.1.16.** $\varphi = 2x^2 + 4y^2 - 4y$; **12.1.17.** $\varphi = 4z^2 - x^2 - y^2$;

**12.1.18.** $\varphi = \operatorname{ctq}(x^2 + y^2 - 2z^2)$; **12.1.19.** $\varphi = z - 2x^2 - 2y^2$;

**12.1.20.** $\varphi = z^2 - 4x^2 - 4y^2$. **12.1.21.** $\varphi = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2 + z^2)$.

**12.1.22.** $\varphi = \ln(5 - r)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

**12.1.23.** $\varphi = \operatorname{arctq}(r-3)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

**12.1.24.** $\varphi = x^2 + z^2 - 2x$; **12.1.25.** $\varphi = z^2 + x^2 + y^2 + 2x$;

**12.1.26.** $\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; **12.1.27.** $\varphi = x^2 y + x$;

**12.1.28.** $\varphi = \sqrt{x^2+y^2+y^2}$; **12.1.29.** $\varphi = \ln(r-1)$, $r = \sqrt{z^2+y^2}$;

**12.1.30.** $\varphi = \dfrac{x^2+y^2}{z}$.

**Завдання 2.** Знайти градієнт скалярного поля, якщо $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – постійні вектори:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **12.2.1.** | $\varphi = r^4 \cdot (\vec{a},\vec{r})^3$; | **12.2.2.** | $\varphi = f(r^2)\cdot(\vec{a},\vec{r})$; |
| **12.2.3.** | $\varphi = \dfrac{(\vec{a},\vec{r})}{r^3}$; | **12.2.4.** | $\varphi = (\vec{r},[\vec{b},\vec{r}])$; |
| **12.2.5.** | $\varphi = (\vec{a},[\vec{b},\vec{r}])$; | **12.2.6.** | $\varphi = r \cdot (\vec{a},\vec{r})$; |
| **12.2.7.** | $\varphi = [\vec{a},\vec{r}]^2$; | **12.2.8.** | $\varphi = ([\vec{a},\vec{r}],[\vec{b},\vec{r}])$; |
| **12.2.9.** | $\varphi = (\vec{a},\vec{r})^2 \cdot (\vec{b},\vec{r})^3$; | **12.2.10.** | $\varphi = \dfrac{(\vec{a},\vec{r}^{o})}{r^4}$; |
| **12.2.11.** | $\varphi = (\vec{a},\vec{b},\vec{r})^2$; | **12.2.12.** | $\varphi = r^3[\vec{a},\vec{r}]^2$; |
| **12.2.13.** | $\varphi = r^3 \cdot (\vec{a},\vec{r})^3$; | **12.2.14.** | $\varphi = (\vec{r},[\vec{r},\vec{b}])$; |
| **12.2.15**. | $\varphi = ([\vec{a},\vec{r}],[\vec{r},\vec{b}])$; | **12.2.16.** | $\varphi = \dfrac{(\vec{a},\vec{r}^{o})}{r^3}$; |
| **12.2.17.** | $\varphi = r^2 \cdot (\vec{a},\vec{r})^3$; | **12.2.18.** | $\varphi = r^3 \cdot (\vec{a},\vec{r})$; |
| **12.2.19.** | $\varphi = \dfrac{(\vec{a},\vec{r}^{o})}{r^2}$; | **12.2.20.** | $\varphi = r^2 \cdot (\vec{r},\vec{a})$; |
| **12.2.21.** | $\varphi = ([\vec{b},\vec{r}],\vec{r})$; | **12.2.22.** | $\varphi = r^3 \cdot [\vec{a},\vec{r}]^2$; |
| **12.2.23.** | $\varphi = (\vec{r},\vec{a},\vec{b})$; | **12.2.24.** | $\varphi = [\vec{r},\vec{a}]^2$; |
| **12.2.25.** | $\varphi = ([\vec{r},\vec{a}],[\vec{r},\vec{b}])$; | **12.2.26.** | $\varphi = r \cdot (\vec{a},\vec{r})^3$; |
| **12.2.27**. | $\varphi = f(r)\cdot(\vec{a},\vec{r})$; | **12.2.28.** | $\varphi = \dfrac{(\vec{a},\vec{r})}{r^2}$; |
| **12.2.29**. | $\varphi = ([\vec{b},\vec{r}],\vec{a})$; | **12.2.30.** | $\varphi = ([\vec{r},\vec{a}],[\vec{b},\vec{r}])$. |

**Завдання 3**. Знайти вектори нормалей до поверхні $F(x,y,z)=0$ в точці A$(x_0, y_0, z_0)$:

**12.3.1.** $-x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z - 12 = 0$, A(2,8,0);

**12.3.2.** $x^2 - y^2 - 3z = 0$, A( – 3,0,3);

**12.3.3.** $x^2 + y^2 - 3z^2 + 2y = 0$, A(0, – 3,1);

**12.3.4.** $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$, A$(x_0, y_0, z_0)$ – точка, в якій нормаль до поверхні колінеарна осі OY;

**12.3.5.** $-x^2 - y^2 + z = 0$, A(1,2,5);

**12.3.6**. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{8}=0$, A(4,3,4);

**12.3.7.** $x^2+y^2+z^2-4z=0$, $\mathrm{A}\left(2\cos\alpha, 2\sin\alpha, 2\right)$;

**12.3.8.** $3xyz-z^3=8$, A(0,2 – 2);

**12.3.9.** $z=\frac{x^2}{2}-y^2$, A(2 – 1,1);

**12.3.10.** $z=x^2+y^2+xy+x-y+1$, A(2, – 2,9);

**12.3.11.** $z=x^3+y^3-3xy$, A(1,1 – 1);

**12.3.12.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$, у точці $\mathrm{A}\left(x_0, y_0, z_0\right)$, в якій нормаль утворює рівні кути з осями координат;

**12.3.13.** $x^2-2y^2+2z^2=1$, A(1 – 1,1);

**12.3.14.** $x^2+2y^2-2z^2=1$, A( – 1,1, – 1);

**12.3.15**. $4x^2-y^2+z^2=16$, A( – 2,1, – 1);

**12.3.16.** $x^2+y^2-4z^2=0$, A(2, – 2, – $\sqrt{2}$ );

**12.3.17.** $x^2-y^2+z^2=4$, A(1,1, – 2);

**12.3.18.** $x^2+y^2+z-4=0$, A( – 1, – 1,2);

**12.3.19.** $x^2-y^2=z^2$, A( – 2,1,– $\sqrt{3}$ );

**12.3.20.** $x^2+4y^2-z^2=4$, A( – 2, – 2,4);

**12.3.21.** $x^2+9y^2-6x+z^2-4z+4=0$, A(3, – 1,2);

**12.3.22.** $x^2+y^2-2z-10=0$, A(2,2, – 1);

**12.3.23.** $x^2+4y^2-z^2-4=0$, A(0, – 1,0);

**12.3.24**. $x^2+y^2-4z=9$, A(2, – 1, – 1);

**12.3.25.** $x^2-y^2-z^2=0$, A( – 3, 2, – $\sqrt{5}$ ).

**12.3.26.** $x^2-y^2-z^2+6y-4z+12=0$, A(2,8,0);

**12.3.27.** $x^2-y^2-3z=0$, A( – 3,0,3);

**12.3.28**. $x^2+y^2-3z^2-2y=0$, A(0,3,1);

**12.3.29**. $x^2+y^2-z=0$, A( – 1,2,5);

**12.3.30.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{8}=0$, A(4,3,4);

**Завдання 4.** Знайти похідну скалярного поля в заданому напрямі:

**12.4.1.** $\varphi = xyz$ в напрямі вектора $\overrightarrow{AB}$, де A(1 – 1,1), B(2,3,1);

**12.4.2.** $\varphi = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}$ у точці A(1,1,1) в напрямі $\vec{\ell} = 2\vec{j} - \vec{k}$;

**12.4.3.** $\varphi = \operatorname{arctg}(xy)$ у точці A(1,1) в напрямі бісектриси першого координатного кута;

**12.4.4.** $\varphi = \ln\left(e^x + e^y\right)$ на початку координат в напрямі променя, який утворює кут $\pi/6$ з віссю OX;

**12.4.5.** $\varphi = \ln(xy + yz + xz)$ в точці A(0,1,1) кола $L$ за напрямом цього кола, якщо рівняння кола $L: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 1. \end{cases}$

**12.4.6.** $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ в точці $A\left(1, -\sqrt{3}\right)$, яка належить колу $x^2 + y^2 = 4x$, за напрямом цього кола;

**12.4.7.** $\varphi = x^2 + y^2$ у точці A(– 1,1) кола $x^2 + y^2 = 2$ за напрямом цього кола;

**12.4.8.** $\varphi = xz^2 + 2yz$ у точці A(1,0,2), яка належить колу $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0 \\ z = 6 \end{cases}$, за напрямом цього кола;

**12.4.9.** $\varphi = \ln(x^2 + 2y)$ в точці A(4, – 4) параболи $y^2 = 4x$ за напрямом цієї кривої;

**12.4.10.** $\varphi = y^2 + 2yx$ в точці A(0 – 2) еліпса $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ за напрямом цієї кривої;

**12.4.11.** $\varphi = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ в точці $A\left(x_0, y_0, z_0\right)$ за напрямом радіуса-вектора цієї точки;

**12.4.12.** $\varphi = \ln(x^2 + 4xy + 3y^2)$ в точці A(2,0) за напрямом вектора, колінеарного бісектрисі першого координатного кута;

**12.4.13.** $\varphi = 3xz - \dfrac{z}{x}$ в точці A( – 1,2,3) за напрямом $\vec{\ell} = \vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$;

**12.4.14.** $\varphi=\sqrt{xy}+\sqrt{4-z^2}$ в точці А( – 1, – 1,0) за напрямом $\vec{\ell}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$;

**12.4.15.** $\varphi=x^3+\sqrt{4y^2+z^2}$ в точці А( – 2,2, – 3) за напрямом $\vec{\ell}=-3\vec{i}+4\vec{k}$;

**12.4.16.** $\varphi=2\sqrt{y-z}+y\,\mathrm{arctg}x$ в точці А(1,4 – 5) за напрямом $\vec{\ell}=4\vec{i}-3\vec{j}$;

**12.4.17.** $\varphi=2x^2-\ln\left(z^2+y^2\right)$ в точці А(2 – 1,1) за напрямом $\vec{\ell}=\{0;-1;0\}$;

**12.4.18.** $\varphi=\cos(x-2y)+4yz^2$ в точці А(π/2; π/4; 1) за напрямом $\vec{\ell}=\{2;-1;2\}$;

**12.4.19.** $\varphi=y^2+\mathrm{arctg}(x-z)$ в точці А(0, – 2, – 1) за напрямом $\vec{\ell}=\{2;-6;-3\}$;

**12.4.20.** $\varphi=xy^2+\sqrt{yx^2-z^3}$ в точці А(–1,1,–2) за напрямом $\vec{\ell}=8\vec{i}-4\vec{j}-8\vec{k}$;

**12.4.21.** $\varphi=x^2y^2z+\ln(z+1)$ в точці А(4, – 3,0) за напрямом $\vec{\ell}=2\vec{i}+\vec{k}$;

**12.4.22.** $\varphi=yz+\dfrac{z}{x}$ в точці А( – 1,3,4) за напрямом $\vec{\ell}=\vec{i}-\vec{k}$;

**12.4.23.** $\varphi=\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}$ в точці А( – 1, – 1, – 1) за напрямом $\vec{\ell}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$;

**12.4.24.** $\varphi=3\sqrt{x-y}+2\sqrt{z-x}$ в точці А(1, – 3,5) за напрямом $\vec{\ell}=-\vec{i}+2\vec{k}$;

**12.4.25.** $\varphi=x^2-5\,\mathrm{arcctg}(y+2z)$ в точці А(1,1,0) за напрямом $\vec{\ell}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.

**12.4.26.** $\varphi=x^2+y^2-3x+2y$ в напрямі вектора $\overrightarrow{AB}$, де А(0,0,0), В(3,4,0);

**12.4.27.** $\varphi=x^2z-2xyz+z^2$ у точці А(3,1,1) за напрямом $\vec{\ell}=\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}+\vec{k}$;

**12.4.28.** $\varphi=xyz$ у точці А(5,1 – 8) в напрямі, що йде від цієї точки до точки В(9,4,4);

**12.4.29.** $\varphi=\sqrt{xy}+\sqrt{4-z^2}$ в точці А(1,1,2) за напрямом $\vec{\ell}=-2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$;

**12.4.30.** $\varphi=5x^2yz-7xy^2z+5xyz^2$ в точці А(1,1,1) за напрямом $\vec{\ell}=8\vec{i}-4\vec{j}+8\vec{k}$;

**Завдання 5.** Знайти величину і напрям найбільшої швидкості зміни поля в точці А. У яких точках поле стаціонарне?

**12.5.1.** $\varphi = (xyz)^2$, A(1, – 1, 3);

**12.5.2.** $\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$, A(1, – 1, 2);

**12.5.3.** $\varphi = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$, A( – 1, 1, – 1);

**12.5.4.** $\varphi = ln\left(x^2 - y^2 + z^2\right)$, A(1, 1, 1);

**12.5.5.** $\varphi = e^x\left(x - y^3 + 3y\right)$, A(0, 2);

**12.5.6**. $\varphi = xy + yz + xz$, A(1, 1, 1);

**12.5.7.** $\varphi = x^2y + y^2z + xz^2$, A(1, 0, 0);

**12.5.8.** $\varphi = \frac{10}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$, A( – 1, 2, – 2);

**12.5.9**. $\varphi = x^3 + y^2 + 3x^2 + 6xy$, A(4, – 1, 2).

Знайти найбільшу крутість підйому поверхні $\varphi(x, y, z) = 0$ в точці А:

**12.5.10**. $\frac{1}{3}\left(9 - x^2 - 4y^2\right) - z = 0$, A( – 2, 1, 1/3);

**12.5.11**. $ln\left(x^2 + 4y^2\right) - z = 0$, A(0, 5, 2ln10);

**12.5.12**. $\frac{x + \sqrt{y}}{y} - z = 0$, A(2, 1, 3).

Знайти кут між градієнтом поля $\varphi(x, y, z)$ в точці А та нормаллю до площини z =0:

**12.5.13**. $\varphi = \ln\left(x^2 + y^2\right) - 3xyz$, A(1, – 1, 0);

**12.5.14.** $\varphi = \sqrt{xy} - \sqrt{9 - z^2}$, A( – 1, – 1, 2);

**12.5.15.** $\varphi = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}$, A(1, – 2, 2);

**12.5.16**. $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + yz$, A( – 1, – 1, 2);

**12.5.17.** $\varphi = \sqrt{x^2 + y^2} + 4z$, A( – 3, – 4, 2);

**12.5.18.** $\varphi = \sqrt{16 + x^2} + \sqrt{yz}$, A( – 3, – 4, – 9);

**12.5.19.** $\varphi = \ln\left(1 + y^2\right) + x\sqrt{z}$, A(1, – 2, 4);

**12.5.20.** $x^2-2y^2+2z^2=1$, A( – 1, 2, – 2);

**12.5.21**. $\varphi=xy^2-2\sqrt{x^3z}$, A(2, 4, 2);

**12.5.22.** $\varphi=2\ln\left(x^2+5\right)+3xyz$, A( – 1, 2, 3);

**12.5.23.** $\varphi=\ln\left(1+x^2\right)-\sqrt{z^2+y^2}$, A( – 1, 0, 2);

**12.5.24.** $\varphi=\sqrt{x^2+z^2}-4y$, A( – 2, 3, 0);

**12.5.25.** $\varphi=2\ln\left(5+x^2\right)-3xyz$, A( – 1, 2, 3).

**12.5.26.** $\varphi=(xyz)^2$, A(1, – 1, 3);

**12.5.27.** $\varphi=x^2+y^2+z^2-2xyz$, A(1, – 1, 2);

**12.5.28.** $\varphi=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}$, A( – 1, 1, – 1);

**12.5.29.** $\varphi=\ln\left(x^2-y^2+z^2\right)$, A(1, 1, 1);

**12.5.30.** $\varphi=e^x\left(x-y^3+3y\right)-z$, A(0, 2, 1).

**Завдання 6.** Знайти векторні (силові) лінії векторних полів:

**12.6.1.** $\vec{a}=-\vec{j}x+5z\vec{i}$; **12.6.2.** $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+(x+y)\vec{k}$;

**12.6.3.** $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+\left(z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\vec{k}$;

**12.6.4.** $\vec{a}=-2y\vec{i}+2x\vec{j}+\left(x^2+y^2\right)\vec{k}$;

**12.6.5.** $\vec{a}=\vec{r}/r^3$;

**12.6.6.** $\vec{a}=x\left(y^2-z^2\right)\vec{i}-y\left(x^2+z^2\right)\vec{j}+z\left(x^2+y^2\right)\vec{k}$;

**12.6.7.** $\vec{a}=\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]$, де $\vec{\omega}$ – постійний вектор;

**12.6.8.** $\vec{a}=(z-y)^2\vec{i}+z\vec{j}+y\vec{k}$;

**12.6.9.** $\vec{a}=(z-y)\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(y-x)\vec{k}$;

**12.6.10.** $\vec{a}=x^2\vec{i}-y^3\vec{j}+z^2\vec{k}$; **12.6.11**. $\vec{a}=(x+3)\vec{i}+2y\vec{j}+z/2\,\vec{k}$;

**12.6.12**. $\vec{a}=(x-y)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+z\vec{k}$;

**12.6.13.** $\vec{a}=(y+z)\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$; **12.6.14**. $\vec{a}=-2z\vec{i}+2x\vec{j}+\left(x^2+z^2\right)\vec{k}$;

**12.6.15.** $\vec{a} = x^2\vec{i} + y\vec{j} - z^2\vec{k}$; **12.6.16.** $\vec{a} = (-x+1)\vec{i} - 3y\vec{j} + 5z\vec{k}$;

**12.6.17**. $\vec{a} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j} - z\vec{k}$; **12.6.18.** $\vec{a} = 7x\vec{i} + 4y\vec{j} - z\vec{k}$;

**12.6.19.** $\vec{a} = 5x\vec{i} - y\vec{j}$; **12.6.20.** $\vec{a} = -5y\vec{i} + 7z\vec{k}$;

**12.6.21.** $\vec{a} = -2x\vec{j} + 4y\vec{k}$; **12.6.22.** $\vec{a} = 9y\vec{j} - 11z\vec{k}$;

**12.6.23.** $\vec{a} = \vec{i}x - 7y\vec{k}$; **12.6.24.** $\vec{a} = 2y\vec{j} - 3z\vec{k}$;

**12.6.25.** $\vec{a} = 5z\vec{i} + 2y\vec{k}$ **12.6.26.** $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + (x-y)\vec{i}$;

**12.6.27.** $\vec{a} = e^x\vec{i} + y^2\vec{j} + ye^x\vec{k}$; **12.6.28.** $\vec{a} = xy\vec{i} - x^2\vec{j} + yz\vec{k}$;

**12.6.29.** $\vec{a} = xy\vec{i} + (x-2z)\vec{j} + yz\vec{k}$; **12.6.30.** $\vec{a} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + x\vec{k}$.

**Завдання 7.** Обчислити течію векторного поля $\vec{a}$ крізь поверхню S:

**12.7.1**. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, де S – частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яка належить другому октанту (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ);

**12.7.2.** $\vec{a} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, де S – бічна поверхня конуса $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 4$ (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ);

**12.7.3.** $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, де S – зовнішня сторона бічної поверхні прямого кругового конуса з основою в площині XOY і вершиною на осі OZ (висота конуса $h = 1$, радіус основи $r = 2$);

**12.7.4**. $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$, де S – зовнішня сторона бічної поверхні піраміди з вершинами в точках A(2,0,0), B(0,1,0), D(0,0,2), O(0,0,0) і основою OAB;

**12.7.5**. $\vec{a} = xy\vec{i} + xz\vec{j} + yz\vec{k}$, де S − частина площини $x + y + z = 0$, що відсікається площинами $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ);

**12.7.6.** $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, де S – верхня частина розташованої в другому октанті поверхні $x^2 + y^2 + 2bz = b^2$ ($b > 0$);

**12.7.7.** $\vec{a} = xy\vec{i} - 5z^2\vec{j} + 8\vec{k}$, де S – круг, який сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ вирізує на площині $x + y = 3$ (нормаль утворює тупий кут з віссю OУ);

**12.7.8**. $\vec{a} = x^2\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}$, де S – зовнішня сторона частини поверхні параболоїда $y = x^2 + z^2$, яка належить першому октанту і обмежена площиною $y = 1$;

**12.7.9.** $\vec{a} = x\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (z-y)\vec{k}$, де S – верхня сторона частини сферичної поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, що розташована в першому октанті;

**12.7.10.** $\vec{a} = (x-z)\vec{i} + (z^2 - y^2)\vec{j} + (x+z)\vec{k}$, де S – зовнішня сторона частини циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = R^2$, обмеженої площинами $z = 0$, $z = 8$;

**12.7.11**. $\vec{a} = 3x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$ де S – зовнішня сторона частини поверхні параболоїда $x^2 + y^2 = 9 - z$, що розташована в першому октанті;

**12.7.12.** $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ де S – верхня сторона круга, яка вирізана конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ на площині $z = 3$;

**12.7.13.** $\vec{a} = -\vec{i}x^2 - \vec{j}y^2 - \vec{k}z^2$, де S – верхня сторона частини сферичної поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, розташованої в третьому октанті;

**12.7.14**. $\vec{a} = xy\vec{i} - yz\vec{j} + z^2\vec{k}$, де S – частина площини $x + 3y - 4z = 12$, яка відсічена координатним кутом (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ);

**12.7.15.** $\vec{a} = 3\vec{i} + 3x^2\vec{j} - 8xz\vec{k}$, де S – верхня сторона частини конуса $4x^2 + 9y^2 = (z-4)^2$, що розташована над площиною XOY ($0 \le z \le 4$);

**12.7.16**. $\vec{a} = 2x\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (z-x)\vec{k}$, де S – верхня сторона частини параболоїда $4 - z = x^2 + y^2$, що розташована в другому октанті;

**12.7.17.** $\vec{a} = xz\vec{i} + xy\vec{j} + yz\vec{k}$, де S – частина зовнішньої сторони параболоїда $x = y^2 + z^2$, що належить першому октанту і обмежена площиною $x = 1$;

**12.7.18**. $\vec{a} = -2x\vec{i} + 4y\vec{j} - 12z\vec{k}$, де S – частина площини $x - 2y + 6z - 12 = 0$, що відсічена координатними площинами (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ);

**12.7.19.** $\vec{a}=(5+2x)\vec{i}+3y\vec{j}-(8+6z)\vec{k}$, де S – нижня сторона круга, який утворений перетином поверхонь $\begin{cases}4z=x^2+y^2,\\ z=4;\end{cases}$

**12.7.20.** $\vec{a}=(1+2x)\vec{i}+(3z^2-4)\vec{j}+(2-5z)\vec{k}$, де S – верхня сторона частини поверхні $x^2+y^2-6z=9$, що розташована в третьому октанті;

**12.7.21**. $\vec{a}=(x^2+y^2)\vec{i}+(y^2+z^2)\vec{j}+(z^2+x^2)\vec{k}$, де S – частина площини $x+y+z=4$, що відсічена координатними площинами (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ);

**12.7.22.** $\vec{a}=(3z-2x)\vec{i}+(2y-4xz^2)\vec{j}+(2-z)\vec{k}$, де S – зовнішня сторона частини поверхні конуса з першого октанта $(z-4)^2=x^2+y^2$, $z\in[0,4]$;

**12.7.23.** $\vec{a}=-2x\vec{i}+4y\vec{j}-12z\vec{k}$, де S – частина площини $x-2y+6-12=0$, що відсічена координатними площинами (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ);

**12.7.24.** $\vec{a}=(x+2z)\vec{i}+(y+2x)\vec{j}+(z+2y)\vec{k}$, де S – зовнішня сторона частини поверхні сфери $x^2+y^2+z^2=4$, розташованої у другому октанті;

**12.7.25**. $\vec{a}=(z-3x)\vec{i}+(2x-y)\vec{j}+(y-z)\vec{k}$, де S – частина площини $-x+2y+3z=-6$, що відсічена координатним кутом (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ);

**12.7.26.** $\vec{a}=(x-2z)\cdot\vec{i}+(3z-4x)\cdot\vec{j}+(5x+y)\cdot\vec{k}$, де S – верхня сторона трикутника з вершинами у точках A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1);

**12.7.27.** $\vec{a}=x^2\vec{i}+x\vec{j}+xz\vec{k}$, де S – частина зовнішньої сторони параболоїда обертання $x^2+z^2=y$, що лежить у першому октанті і обмежена площиною $y=1$ ( $y\in[0,1]$);

**12.7.28**. $\vec{a}=2\vec{i}-x\vec{j}+5z\vec{k}$, де S – верхня сторона трикутника ABC, отриманого при перетині площини $x+2y+3z-6=0$ з координатними площинами;

**12.7.29**. $\vec{a}=4\vec{i}-9\vec{j}$, де S – зовнішня сторона поверхні параболоїда обертання $y=x^2+z^2$, обмеженого площиною $y=4$ та розташованого в другому октанті;

**12.7.30.** $\vec{a}=(x-z)\cdot\vec{i}+\left(z^2-y^2\right)\cdot\vec{j}+(x+z)\cdot\vec{k}$, де S – зовнішня частина циліндричної поверхні $x^2+y^2=R^2$, що обмежена площинами $z=0$, $z=b$ (нормаль утворює гострий кут з віссю OX).

**Завдання 8.** Обчислити течію вектора $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (безпосередньо і за теоремою Остроградського – Гаусса):

**12.8.1.** $\vec{a}=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$, S: $x^2+y^2+z^2=R^2$;

**12.8.2.** $\vec{a}=2x\vec{i}-y\vec{j}+z\vec{k}$, S: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\0\le z\le 1;\end{cases}$

**12.8.3.** $\vec{a}=xy\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k}$, S: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0;\end{cases}$

**12.8.4**. $\vec{a}=3x\vec{i}-2z\vec{j}+y\vec{k}$, S: $\begin{cases}x+y+z=2,\\x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0;\end{cases}$

**12.8.5.** $\vec{a}=(x+z)\vec{i}+(y+x)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$, S: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\x=z;\end{cases}$

**12.8.6.** $\vec{a}=yz\vec{i}-x\vec{j}-y\vec{k}$, S: $\begin{cases}x^2+y^2-z^2=1,\\z=1,\ z=0;\end{cases}$

**12.8.7.** $\vec{a}=2x\vec{i}+(1-2y)\vec{j}+2z\vec{k}$, S: $\begin{cases}x^2+2y+z^2=1,\\y\ge 0,\ z=0;\end{cases}$

**12.8.8.** $\vec{a}=(1+2x)\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, S: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25,\\z=4,\ z\ge 0;\end{cases}$

**12.8.9.** $\vec{a}=x\vec{i}+xz\vec{j}+y\vec{k}$, $S$: $\begin{cases}x^2+y^2+z=4,\\z=0,\ z\ge 0;\end{cases}$

**12.8.10.** $\vec{a}=\left(y^2+z^2\right)\vec{i}-y^2\vec{j}+2yz\vec{k}$, $S$: $\begin{cases}x^2+z^2=y^2,\\y=1,\ y\ge 0;\end{cases}$

**12.8.11.** $\vec{a}=2x\vec{i}-(z-1)\vec{k}$, $S$: $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\z=0,\ z=1;\end{cases}$

**12.8.12.** $\vec{a} = x\vec{i} - 2y\vec{j} - z\vec{k}$, $S$: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 1, \\ z = 0; \end{cases}$

**12.8.13.** $\vec{a} = 3x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$, $S$: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 3, \\ z = 0; \end{cases}$

**12.8.14.** $\vec{a} = 2x\vec{i} - 2^x\vec{j} - (z+1)\vec{k}$, $S$: $\begin{cases} x^2 + y^2 = z + 4, \\ z = 8; \end{cases}$

**12.8.15.** $\vec{a} = 3x\vec{i} - 2y\vec{j} + z\vec{k}$, $S$: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 0,\ z = 1; \end{cases}$

**12.8.16.** $\vec{a} = 5x\vec{i} + 2z\vec{j} - y\vec{k}$, $S$: $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0; \end{cases}$

**12.8.17.** $\vec{a} = 2x\vec{i} + x^2z\vec{j} + y\vec{k}$, $S$: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 9, \\ z = 0; \end{cases}$

**12.8.18.** $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$, $S$: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x \le 0,\ y \le 0,\ z \le 0; \end{cases}$

**12.8.19.** $\vec{a} = (2x + z)\vec{i} + (2y + x)\vec{j} + (y + 2z)\vec{k}$, $S$: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x = z,\quad z = 0; \end{cases}$

**12.8.20.** $\vec{a} = (2 + 3x)\vec{i} - y\vec{j} + 2z\vec{k}$, $S$: $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 3; \end{cases}$

**12.8.21.** $\vec{a} = 5x\vec{i} - 2z\vec{j} + y\vec{k}$, $S$: $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0; \end{cases}$

**12.8.22.** $\vec{a} = 2x^3\vec{i} + 2y^3\vec{j} + 2z^3\vec{k}$, $S$: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;

**12.8.23.** $\vec{a} = (y^2 + z^2)\vec{i} + y^2\vec{j} - 3yz\vec{k}$, $S$: $\begin{cases} y^2 + z^2 = x^2, \\ x = 1; \end{cases}$

**12.8.24.** $\vec{a} = xy\vec{i} - yz\vec{j} + xz\vec{k}$, $S$: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x \le 0,\ y \le 0,\ z \le 0; \end{cases}$

**12.8.25.** $\vec{a} = y\vec{i} + y^2\vec{j} + yz\vec{k}$, $S$: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z, \\ x \ge 0,\ z = 1,\ y \ge 0; \end{cases}$

**12.8.26.** $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ $S$ : $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

**12.8.27**. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + (1-z)\vec{k}$, $S$: $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ 0 \le z \le H; \end{cases}$

**12.8.28**. $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$, $S$: $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{R^2}{H^2} z^2, \\ 0 \le z \le H; \end{cases}$

**12.8.29.** $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + (1-z)\vec{k}$, S: $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ 0 \le z \le H; \end{cases}$

**12.8.30.** $\vec{a} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 2(2z-1)\cdot\vec{k}$, S: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - 2z, \\ z = 0; \end{cases}$.

**Завдання 9.** Обчислити лінійний інтеграл векторного поля $\vec{a}$ вздовж лінії L:

**12.9.1**. $\vec{a} = (2c - y)\,\vec{i} + (y - c)\,\vec{j}$, L – перша арка циклоїди $\begin{cases} x = c(t - \sin t), \\ y = c(1 - \cos t), \end{cases}$ у напрямі зростання параметра $t$;

**12.9.2.** $\vec{a} = -(x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j})$, L – дуга еліпса $\begin{cases} \dfrac{x^2}{m^2} + \dfrac{y^2}{n^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ від точки A$(m,0,0)$ до точки B$(0,n,0)$;

**12.9.3.** $\vec{a} = (x^2 - yz)\,\vec{i} + (y^2 - xz)\,\vec{j} + (z^2 - xy)\,\vec{k}$, L – дуга гвинтової лінії: $x = b\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, $z = h\varphi/2\pi$ від A$(b,0,0)$ до B$(b,0,h)$;

**12.9.4**. $\vec{a} = yz\vec{i} + z\sqrt{9 - y^2}\,\vec{j} + xy\vec{k}$, L – дуга гвинтової лінії: $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 2t/\pi$ від точки A – перетину лінії з площиною XOY до точки B – перетину лінії з площиною $z = 4$;

**12.9.5.** $\vec{a} = (y^2 - z^2)\vec{i} + 2yz\vec{j} - x^2\vec{k}$, L: $x = t$, $y = t$, $z = t^3$ в напрямі зростання параметра $t$ $(0 \le t \le 1)$;

**12.9.6.** $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + (x + y - 1)\,\vec{k}$, L – відрізок прямої AB, де A(1,1,1), B(2,3,4), в напрямі від точки A до точки B.

**12.9.7.** Обчислити роботу силового поля $\vec{a} = (2xy - y)\,\vec{i} + (x^2 + x)\,\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L: $\begin{cases} x^2 + y = 9, \\ y \ge 0 \end{cases}$ від точки M(3, 0) до точки N( – 3, 0).

**12.9.8.** Обчислити роботу силового поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L: $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1, \\ y \ge 0 \end{cases}$ від точки M($\frac{\sqrt{2}}{2}$,0) до точки N($-\frac{\sqrt{2}}{2}$,0).

**12.9.9.** Обчислити роботу сили $\vec{f}$ при переміщенні точки M вздовж дуги еліпса $x = a\cos t$, $y = \sqrt{3}\sin t$, $z = 0$, що лежить у першому квадранті, у напрямі зростання параметра $t$. Сила $\vec{f}$ за величиною дорівнює відстані від точки M до центра еліпса і напрямлена до центра ( $\vec{f} = -x\vec{i} - y\vec{j}$ ).

**12.9.10**. Знайти роботу сили $\vec{f}$ при переміщенні точки M вздовж кола $x = \cos t$, $y = 1$, $z = \sin t$ від точки A(0,1,1) до точки B(1,1,0). Сила $\vec{f}$ обернено пропорційна за величиною відстані точки M до осі OZ, перпендикулярна цієї осі і напрямлена до неї ( $\vec{f} = -\frac{x}{x^2 + y^2}\vec{i} - \frac{y}{x^2 + y^2}\vec{j}$ ).

**12.9.11.** Знайти роботу сили $\vec{f}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж прямої від точки A(1,1,1) до точки B(2,2,2), якщо за величиною сила $\vec{f}$ обернено пропорційна відстані від точки її прикладання до площини XOY і напрямлена до початку координат ( $\vec{f} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ).

**12.9.12.** Знайти роботу сили $\vec{f} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ вздовж дуги кола одиничного радіуса від точки A(1,0) до точки B(0,1).

**12.9.13.** Знайти роботу сили $\vec{f} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ вздовж дуги кола одиничного радіуса від точки A(0,1) до точки B( – 1,0).

**12.9.14.** Знайти роботу сили $\vec{f} = (x - y)\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$ при переміщенні точки M в додатному напрямі вздовж кола $L$: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4z^2 = 0, \\ z = \frac{1}{2}. \end{cases}$.

**12.9.15.** Знайти роботу сили $\vec{f} = 2y\vec{i} + 2z\vec{j} + 3z\vec{k}$ при переміщенні точки M в додатному напрямі вздовж кривої $L$: $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

**12.9.16.** Знайти роботу сили $\vec{f}=(2-y)\vec{i}+(y-1)\vec{j}$ при переміщенні точки М вздовж першої арки циклоїди $L:\begin{cases}x=2(t-\sin t),\\ y=2(1-\cos t)\end{cases}$ в напрямі спадання параметра.

**12.9.17.** Знайти роботу сили $\vec{f}=\left(x^2-yz\right)\vec{i}+\left(y^2-xz\right)\vec{j}+\left(z^2-xy\right)\vec{k}$ вздовж гвинтової лінії $L$ від точки A(2,0,0) до точки B(2,0,3),

$$L:\begin{cases}x=2\cos\varphi,\\ y=2\sin\varphi,\\ z=\dfrac{3\varphi}{2\pi}.\end{cases}$$

**12.9.18.** Знайти роботу сили $\vec{f}=\left(y^2-z^2\right)\vec{i}+2yz\vec{j}+x^2\vec{k}$ вздовж кривої $L\colon x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ від точки A(1,1,1) до точки B(2,0,3).

**12.9.19.**Знайти роботу сили $\vec{f}=yz\,\vec{i}+z\sqrt{9-yz}\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$ вздовж гвинтової лінії $L: x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=\dfrac{2t}{\pi}$ від точки A(0,3,1) до точки B(3,0,0).

**12.9.20.** Знайти роботу сили $\vec{f}=x\vec{i}+y\vec{j}$ вздовж дуги еліпса $L$: $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{5^2}=1,\ z=0$ від точки A(3,0,0) до точки B(0 – 5,0).

**12.9.21.** Знайти роботу сили $\vec{f}=yz\,\vec{i}+z\sqrt{16-y^2}\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$ вздовж гвинтової лінії $L:\ x=4\cos t,\ y=4\sin t,\ z=\dfrac{2t}{\pi}$ від точки перетину лінії з площиною XOY до точки перетину лінії з площиною Z=4.

**12.9.22.** Знайти роботу сили $\vec{f}=(4-y)\,\vec{i}+(y-2)\,\vec{j}$ вздовж другої арки циклоїди $L$: $\begin{cases}x=2(t-\sin t),\\ y=2(1-\cos t)\end{cases}$ у напрямі спадання параметра t.

**12.9.23.** Сила за величиною дорівнює відстані від точки М еліпса $x=2\cos t,\ y=3\sin t,\ z=0$ та спрямована до центра еліпса $\vec{f}=-x\vec{i}-y\vec{j}$. Обчислити роботу сили щодо переміщення точки М вздовж дуги еліпса від точки $M_1$( – 2,0,0) до точки $M_2$(0,3,0).

**12.9.24.** Знайти роботу сили $\vec{f}=(2xy-y)\,\vec{i}+\left(x^2+x\right)\vec{j}$ щодо переміщення точки вздовж дуги параболи $y=9-x^2$ від точки $M_1$(–3,0) до точки $M_2$(0,9).

**12.9.25.** Знайти роботу сили $\vec{f} = \left(x^2 - yz\right)\vec{i} + \left(y^2 - xz\right)\vec{j} + \left(z^2 - xy\right)\vec{k}$ щодо переміщення точки М вздовж гвинтової лінії $L$: $x = 3\cos\varphi$, $y = 3\sin\varphi$, $z = \frac{\varphi}{\pi}$ від точки А(3,0,2) до точки В(3,0,0).

**12.9.26.** Знайти роботу сили $\vec{f} = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j}$ щодо переміщення точки М вздовж дуги кола одиничного радіуса від точки А(1,0) до точки В(0,1).

**12.9.27.** Знайти роботу сили $\vec{f} = xy\vec{i} + y^2\vec{j}$ щодо переміщення точки М вздовж дуги кола одиничного радіуса від точки А(0,1) до точки В(–1,0).

**12.9.28.** Знайти роботу сили $\vec{f} = y\vec{i} + z\vec{j} + z\vec{k}$ щодо переміщення точки М вздовж кривої $L$ в додатному напрямі, якщо $L: \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$.

**12.9.29.** Знайти роботу сили $\vec{f} = (2 - y)\vec{i} + (y - 1)\vec{j}$ щодо переміщення точки М вздовж першої арки циклоїди $L: \begin{cases} x = (t - \sin t), \\ y = (1 - \cos t) \end{cases}$ у напрямі зростання параметра.

**12.9.30**. Знайти роботу сили $\vec{f}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж прямої від точки А(1,1,1) до точки В(3,3,3), якщо за величиною сила $\vec{f}$ обернено пропорційна відстані від точки її прикладання до площини XOY і спрямована до початку координат ($\vec{f} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$).

**Завдання 10.** Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}$ по замкненому контуру L: а) безпосередньо і б) за теоремою Стокса (обхід в додатному напрямі).

**12.10.1.** $\vec{a} = y^2\vec{i} + x^2\vec{j} - z^2\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0, y = 0, z = 0; \end{cases}$

**12.10.2.** $\vec{a} = x^2 y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = 1; \end{cases}$

**12.10.3.** $\vec{a} = z\vec{i} - y\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + 2z = 5; \end{cases}$

**12.10.4.** $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1; \end{cases}$

**12.10.5.** $\vec{a}=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ y=\sqrt{3}x; \end{cases}$

**12.10.6.** $\vec{a}=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ \frac{x}{2}+\frac{z}{4}=1; \end{cases}$

**12.10.7.** $\vec{a}=y^2z^2\vec{i}+x^2z^2\vec{j}+x^2y^2\vec{k}$, L: $\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\cos 2t,, \ t\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]; \\ z=R\cos 3t, \end{cases}$

**12.10.8**. $\vec{a}=(x-2z)\vec{i}+(x+3y+z)\vec{j}+(5x+y)\vec{k}$, L: $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x=0, y=0, z=0; \end{cases}$

**12.10.9.** $\vec{a}=y\vec{i}-x\vec{j}+z\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x=z; \end{cases}$

**12.10.10.** $\vec{a}=(xz+y)\vec{i}+(yz-x)\vec{j}-\left(x^2+y^2\right)\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=3; \end{cases}$

**12.10.11**. $\vec{a}=zy^2\vec{i}+xz^2\vec{j}+x^2y\vec{k}$, L: $\begin{cases} y^2+z^2=x, \\ x=9; \end{cases}$

**12.10.12**. $\vec{a}=(xz+y)\vec{i}+(xy-z)\vec{j}-\left(y^2+z^2\right)\vec{k}$, L: $\begin{cases} y^2+z^2=1, \\ x=1; \end{cases}$

**12.10.13**. $\vec{a}=y^2\vec{i}-x^2\vec{j}+z^2\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x=0, y=0, z=0; \end{cases}$

**12.10.14.** $\vec{a}=x^2y^3\vec{i}+\vec{j}+z\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ z=0; \end{cases}$

**12.10.15.** $\vec{a}=xy\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ x+y+z=3; \end{cases}$

**12.10.16.** $\vec{a}=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x+\frac{z}{2}=1; \end{cases}$

**12.10.17.** $\vec{a}=y^2z^2\vec{i}+x^2z^2\vec{j}+x^2y^2\vec{k}$, L: $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\cos 2t, \ t\in[0,\ 2\pi]; \\ z=2\cos 3t, \end{cases}$

**12.10.18.** $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x = z; \end{cases}$

**12.10.19.** $\vec{a} = y\vec{i} - z\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2 + z^2 = 4, \\ x + 2y = 5; \end{cases}$

**12.10.20.** $\vec{a} = (xz + y)\vec{i} - (xy + z)\vec{j} - \left(y^2 + z^2\right)\vec{k}$, L: $\begin{cases} y^2 + z^2 = 4, \\ x = 1; \end{cases}$

**12.10.21.** $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} + zk$, L: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x = z; \end{cases}$

**12.10.22.** $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ y = x; \end{cases}$

**12.10.23.** $\vec{a} = 2yz\vec{i} + xz\vec{j} - x^2\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 9,\ z > 0; \end{cases}$

**12.10.24.** $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4z^2 = 0, \\ z = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$

**12.10.25.** $\vec{a} = -3z\vec{i} + y^2\vec{j} + 2y\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - 3y - 2z = 1; \end{cases}$

**12.10.26.** $\vec{a} = y^2\vec{i} + x^2\vec{j} - z^2\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x = 0, y = 0, z = 0; \end{cases}$

**12.10.27.** $\vec{a} = y^2x^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 1; \end{cases}$

**12.10.28.** $\vec{a} = z\vec{i} - y\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x + z = 4; \end{cases}$

**12.10.29.** $\vec{a} = yz\vec{i} + yx\vec{j} + xz\vec{k}$, L: $\begin{cases} y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 1; \end{cases}$

**12.10.30.** $\vec{a} = (y - x)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (z - y)\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ y = \sqrt{3}z. \end{cases}$