

Панасенко Володимир Олексійович - доктор технічних наук, професор, начальник науково-технічного відділу державної установи «Державний науково-дослідний і проектний інститут основної хімії»; e-mail: office@niochim.kharkov.ua; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0441-9063>

Панасенко Владимир Алексеевич - доктор технических наук, профессор, начальник научно-технического отдела государственного учреждения «Государственный научно-исследовательский и проектный институт основной химии»; e-mail: office@niochim.kharkov.ua; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0441-9063>

Vladimir Panasenکو - Doctor of Sciences (Technology), Professor, Head of Scientific and Technical Department, State Institution "State Research and Design Institute of Basic Chemistry"; e-mail: office@niochim.kharkov.ua; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0441-9063>

Хімія і технологія виробництва основної хімічної промисловості Т. 79. 2019

УДК 004.04(042.3)

**А. О. БОБУХ, М. О. ПОДУСТОВ, А. М. ПЕРЕВЕРЗЄВА,
А. О. БАРАНОВСЬКИЙ**

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ПРО НОРМАЛЬНЕ РОЗПОДІЛЕННЯ ВИПАДКОВОЇ НЕПЕРЕРВНОЇ ВЕЛИЧИНИ

В статті розглянуті теоретичні основи і виконаний аналіз основних понять про нормальний розподіл випадкової неперервної величини і похибки її виміру при проведенні промислового експерименту для хімічних технологій, особливо технології соди кальцинованої аміачним способом, які повинні бути економічними з точки зору необхідного для їх реалізації кількості операцій, сприяти підвищенню енергозбереження та поліпшенню ефективності функціонування цих технологій.

Ключові слова: технологія соди кальцинованої, нормальне розподілення, випадкова неперервна величина, математичне очікування, дисперсії, похибка

**А. А. БОБУХ, Н. А. ПОДУСТОВ, А. М. ПЕРЕВЕРЗЕВА,
А. А. БАРАНОВСКИЙ**

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ О НОРМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СЛУЧАЙНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

В статье рассмотрены теоретические основы и выполнен анализ основных понятий о нормальном распределении случайной непрерывной величины и погрешности ее измерения при проведении промышленного эксперимента для химических технологий, особенно технологии соды кальцинированной аммиачным способом, которые должны быть экономичными с точки зрения необходимого для их реализации количества операций, способствовать повышению энергосбережения и повышению эффективности функционирования этих технологий

Ключевые слова: технология соды кальцинированной, нормальное распределение, непрерывная случайная величина, математическое ожидание, дисперсия, погрешность

A.A. BOBVKH, N.A. PODUSTOV, A.M. PEREVERZEVA, A. A. BARANOVSKY

BASIC DEFINITIONS OF RANDOM CONTINUOUS QUANTITIES NORMAL DISTRIBUTION

Theoretic fundamentals and analysis of basic notions on random continuous quantities normal distribution and its measurement error during industrial experiment for chemical processes, especially for ammonia soda ash process that should consist of as few steps as possible, be energy saving and effective.

Keywords: soda ash process, normal distribution, random continuous quantity, mathematical expectation, dispersion, error

Вступ

Сучасна науково-дослідницька апаратура має вбудовані процесори і їх поєднання з персональними комп'ютерами, що дозволяє комп'ютеризувати певні етапи планування та проведення промислових експериментів на хімічних технологіях, математичної обробки одержуваної інформації, математичного моделювання та інше. Ці процеси полегшують техніку обчислень, сприяють підвищенню ефективності функціонування і зниження енергетичних витрат цих технологій, але вимагають від дослідника принципового знання використовуваних методів, їх переваг, недоліків і меж застосування.

Мета роботи

Розглянути теоретичні основи і виконати аналіз основних понять про нормальний розподіл випадкової неперервної величини і похибку її вимірів при проведенні промислового експерименту для хімічної технології кальцинованої соди аміачним способом (ХТКС), які повинні бути економічними з точки зору необхідного для їх реалізації кількості операцій, сприяти підвищенню енергозбереження та поліпшенню ефективності функціонування цієї технології.

Основна частина

Якщо випадкова величина ХТКС неперервна, то безліч значень, які вона може приймати, нескінченна; ймовірність кожного окремого значення такої величини дорівнює нулю. Для визначення понять математичного очікування і дисперсії випадкової неперервної величини введено поняття щільності розподілу [1-9]. Позначимо через X деяку випадкову неперервну величину, яка може приймати будь-які числові значення у проміжку $(a; b)$. Нехай x є певне число з цього проміжку. Визначимо ймовірність P того, що величина X приймає значення, заключені між x і $(x + dx)$. Очевидно, що ймовірність становить:

$$P = \varphi(x)dx. \quad (1)$$

Функція $\varphi(x)$ називається щільністю розподілу ймовірностей випадкової неперервної величини X , а добуток $\varphi(x)dx$ – елементом ймовірності.

Видатний математик А. М. Ляпунов (працював з 1895 р. по 1902 р. у Харківському університеті [4]) в своїх дослідженнях показав, що якщо випадкову неперервну величину розглядати як результат сумарного впливу багатьох незалежних параметрів, то закон розподілу такої випадкової величини буде близький до нормального [1–9].

Якщо щільність розподілу ймовірностей випадкової неперервної величини з урахуванням коефіцієнту h , який називають мірою точності, має вигляд::

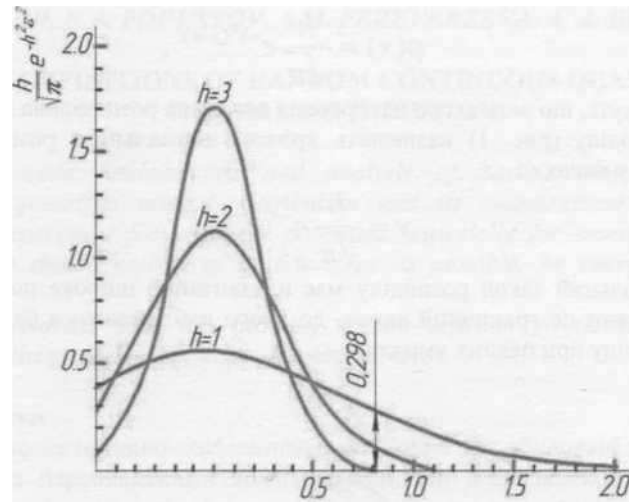


Рисунок 2 - Криві похибки виміру

Обчислимо математичне очікування і дисперсію випадкової неперервної величини, що підпорядковується нормальному закону розподілу.

Для нормального розподілу математичне очікування записується у вигляді:

$$M(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2(x-a)^2} x dx. \quad (4)$$

Припустимо, що $x - a = z$. Тоді математичне очікування прийме наступний вигляд:

$$M(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-h^2 z^2} dz + \frac{ah}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 z^2} dz. \quad (5)$$

Перший з інтегралів (5) дорівнює нулю, оскільки його підінтегральна функція парна, а межі інтегрування симетричні відносно початку координат.

Другий інтеграл (5) дорівнює постійній величині $\frac{\sqrt{\pi}}{h}$, оскільки випадкова величина постійна, тобто:

$$M(x) = a. \quad (6)$$

Точно так само можна показати, що дисперсія величини, що підпорядковується нормальному закону розподілу, складе:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2h^2}, \quad (7)$$

і, отже, середньоквадратичне відхилення σ пов'язане з коефіцієнтом h наступною залежністю:

$$\sigma = \frac{1}{h\sqrt{2}} \text{ або } h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}, \quad (8)$$

Звідси випливає, що рівняння кривої нормального розподілу може бути записано в наступному вигляді:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \quad (9)$$

Якщо математичне очікування a дорівнює нулю, то рівняння (9) спрощується і набуває вигляду:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (10)$$

Результати експерименту при вимірюванні величин ніколи не бувають точними, а завжди мають деякі похибки. Ці похибки або помилки експерименту викликані причинами, що певним чином змінюють результати виміру. Такими причинами можуть бути несправність приладу, зовнішні умови експерименту, які викривляють його результати, тощо. Помилки, що виникають з цих причин, називаються систематичними і можуть бути враховані або навіть достатньо усунені. Помилки, які відбуваються в результаті великої кількості різних випадкових, що не піддаються обліку причин, називаються випадковими [1–9].

Встановимо аналітичний вираз для закону розподілу випадкових помилок вимірювань. Позначимо через dp ймовірність того, що похибка вимірювання знаходиться між x і $(x + dx)$:

$$dp = \varphi(x)dx. \quad (11)$$

Ця ймовірність має відповідати таким вимогам:

- вона повинна зменшуватися при зростанні абсолютної величини числа x , оскільки великі помилки менш вірогідні, ніж малі;
- вона повинна бути парною функцією від x , оскільки помилки, однакові за абсолютною величиною і мають протилежні знаки (різновірогідні);
- при всіх значеннях x вона повинна бути позитивною;
- оскільки поява похибки, що знаходиться між $-x_M$ і $+x_M$, є подією достовірною, то сума всіх ймовірностей, що відповідають цьому проміжку, повинна дорівнювати 1.

Якщо на осі абсцис відкласти величину помилки x з урахуванням її знака, а на осі ординат – значення функції, то на площині отримаємо криву, що володіє наступними властивостями:

- при негативних x вона зростає, а при позитивних x вона убыває;
- вона симетрична відносно осі ординат;
- вона розташована вище осі абсцис;
- при $|x| > x_M$ вона практично збігається з віссю абсцис.

Ймовірність припуститися помилки, яка укладена між x і $x + dx$, геометрично дорівнює площі, що обмежена цією кривою, віссю абсцис і двома координатами, проведеними в точках з абсцисами x і $x + dx$. Оскільки поява помилки, укладеної між $-x_M$ і $+x_M$, є подією достовірною, то площа кривої, укладеної між $x=x_M$ і $x=-x_M$, дорівнює 1.

Усім цим вимогам, окрім останнього, задовольняє функція Гауса, яка визначає закон нормального розподілу випадкової неперервної величини з урахуванням (8):

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad (12)$$

Однак при досить великих значеннях $|x|$ ця функція практично дорівнює нулю, що підтверджено експериментально: випадкові помилки дійсно підкоряються нормальному закону розподілу.

Згідно нормального закону розподілу, ймовірність того, що в процесі вимірювань отримані помилки, укладені між $(x-x_i)$ і $(x-x_i+dx)$ ($i = \overline{1; n}$), дорівнює:

$$\left(\frac{hdx}{\sqrt{\pi}} \right)^n e^{-h^2 \sum (x-x_i)^2}. \quad (13)$$

Визначимо, при якому значенні коефіцієнту h ця ймовірність буде найбільшою. Прологарифмуємо попередньо вираз (13) і, взявши потім похідну по h , прирівняємо її до нуля. Отримуємо рівняння:

$$\frac{n}{h} - 2h \sum (x-x_i)^2 = 0, \quad (14)$$

з якого знайдемо h :

$$h = \sqrt{\frac{n}{2 \sum (x-x_i)^2}}. \quad (15)$$

Знаменник підкореневого виразу (15) обчислити не можливо, оскільки істинне значення X вимірюваної величини нам невідомо. Позначимо через $\bar{X}$ середнє арифметичне вимірювань і встановимо зв'язок $\sum (x-x_i)^2$ з легко обчислюваною сумою квадратів відхилення окремих спостережень від їх арифметичного середнього $\sum (\bar{X}-x_i)^2$. Для цього позначимо через ξ різницю між істинним значенням x і середнім арифметичним $\bar{X}$:

$$\xi = x - \bar{X} \quad (16)$$

і знайдемо її наближене значення. Очевидно, що:

$$\xi = x - \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1}{n} \sum (x-x_i) \quad (17)$$

або

$$n\xi = \sum (x-x_i). \quad (18)$$

З урахуванням формули (16) $x = \xi + \bar{X}$, отримуємо:

$$x-x_i = \xi + \bar{X} - x_i. \quad (19)$$

Зводячи в квадрат і підсумовуючи по всім значення i від 1 до n , отримаємо:

$$\begin{aligned} (x-x_i)^2 &= \xi^2 + 2\xi(\bar{X}-x_i) + (\bar{X}-x_i)^2; \\ \sum (x-x_i)^2 &= n\xi^2 + 2\xi \sum (\bar{X}-x_i) + \sum (\bar{X}-x_i)^2, \text{ враховуючи, що} \\ \sum (\bar{X}-x_i) &= 0, \\ \sum (x-x_i)^2 &= n\xi^2 + \sum (\bar{X}-x_i)^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Виключивши з рівняння (20) величину ξ , маємо:

$$\sum (x-x_i)^2 = \frac{n}{n-1} + \sum (\bar{X}-x_i)^2. \quad (21)$$

Підставляючи цей вираз в знаменник підкореневого виразу формули (15), отримуємо h :

$$h = \sqrt{\frac{n-1}{2 \sum (\bar{x} - x_i)^2}}. \quad (22)$$

Користуючись формулою (22), знаходимо вираз для середньоквадратичного відхилення і для дисперсії окремих вимірювань. З урахуванням залежностей (8), маємо:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}; \sigma^2 = \frac{\sum (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}. \quad (23)$$

Формула (22) визначає те значення міри точності h , при якій ймовірність отримання даної системи помилок буде найбільшою. Знаючи міру точності, можна вирішити цілий ряд практично важливих питань з оцінки точності вимірювань [1–9].

Визначимо (див. рис. 1), наскільки ймовірним є те, що помилки окремих спостережень не перевищують за абсолютним значенням заданої величини r , тобто знаходяться в межах від $-r$ до $+r$.

На підставі вище викладеного ймовірність зображується площею $ABCDE$, тобто інтегралом:

$$P = \int_{-r}^r \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \xi^2} d\xi. \quad (24)$$

З огляду на парність підінтегральної функції h і виконуючи заміну змінної інтегрування $h\xi = t$, отримаємо вираз для шуканої ймовірності:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr} e^{-t^2} dt. \quad (25)$$

Процес обробки вимірювань не може вважатися закінченим після того, як знайдені різні помилки вимірювань. Необхідно оцінити точність отриманих результатів, тобто визначити міру точності, середньоквадратичну, ймовірну і найбільшу можливу помилку середнього арифметичного. Оскільки результати вимірювань $x_1, x_2, \dots, x_n$ є випадковими величини, то їх середнє арифметичне $\bar{X}$ є також випадковою величиною. Ця випадкова величина розподілена нормально. Не зупиняючись на висновках, наведемо лише формули, які дозволяють оцінити точність середнього арифметичного [1–9].

Нехай h є міра точності окремого виміру, яка визначається формулою (22). Позначимо через H міру точності середнього арифметичного. Можна показати, що H і h пов'язані залежністю:

$$H^2 = n \cdot h^2; H = h\sqrt{n} \quad (26)$$

або, на підставі виразу (22), – залежністю:

$$H = \sqrt{\frac{n(n-1)}{2 \sum (\bar{x} - x_i)^2}}. \quad (27)$$

Міра точності середнього арифметичного більше міри точності окремих вимірювань і пропорційна квадратному кореню з числа вимірів. Якщо число вимірювань збільшити, наприклад, в 4 рази, то точність середнього арифметичного збільшиться вдвічі. Ймовірність того, що середнє арифметичне відрізняється від істинного значення на величину, меншу r , то є ймовірність нерівності:

$$|x - \bar{x}| < r, \quad (28)$$

описується інтегралом:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Hr} e^{-t^2} dt. \quad (29)$$

Середньоквадратична помилка σ_0 середнього арифметичного пов'язана з мірою точності таким же співвідношенням, як і в разі помилок окремих спостережень; вона визначається формулою [1–9].:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (30)$$

де σ – середньоквадратична помилка окремого виміру.

Висновок

В результаті досліджень розглянуті теоретичні основи і виконаний синтез основних понять про нормальний розподіл випадкової неперервної величини і міру точності її вимірів при проведенні промислового експерименту для хімічної технології кальцинованої соди аміачним способом, які економічні з точки зору необхідного для її реалізації кількості операцій, сприятимуть підвищенню енергозбереження та поліпшенню ефективності функціонування цієї технології.

Бібліографічний список

1. Драйпер Н. Прикладной регрессионный анализ [Текст] Пер. с англ. / Н. Драйпер, Г. Смит. 3-е изд. – М.: Вильямс, 2007. – 912 с.
2. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей [Текст] / Б. В. Гнеденко. – М. : ЭДИТОРИАЛ УРСС, 2005. – 448 с.
3. Горелова Г. В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel [Текст] / Г. В. Горелова. – М. : Феникс, 2005. – 476 с.
4. Бобух А. А. Компьютерно-интегрированная система автоматизации технологических объектов управления централизованным теплоснабжением [Текст] Монография / А. А. Бобух, Д. А. Ковалев; под. общ. ред. А. А. Бобуха. – Х. : ХНУГХ им. А. Н. Бекетова, 2013. – 226 с.
5. Рогов В. А. Методика и практика технических экспериментов [Текст] Учеб. пособ. / В. А. Рогов. – М. : Академия, 2005. – 288 с.
6. Протасов К. В. Статистический анализ экспериментальных данных [Текст] / К. В. Протасов. – М. : Мир, 2005. – 142 с.
7. Косарев Е. Л. Методы обработки экспериментальных данных [Текст] / Е. Л. Косарев. – М.: Физматлит, 2008. – 208 с.
8. Фаддеев М. А. Элементарная обработка результатов эксперимента [Текст] Учеб. пособ. / М. А. Фаддеев. – Н. Новгород : НГГУ, 2010. 122 с.
9. Бобух А. А. Методы планирования эксперимента и обработки экспериментальных данных [Текст] Текст лекций / А. А. Бобух, А. М. Дзевочко, М. А. Подустов. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2016. – 88 с.

Рукопис надійшов до редакції 01.06.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Бобух Анатолій Олексійович - канд. техн. наук, професор кафедри автоматизації технологічних систем і екологічного моніторингу Національного

технічного університету «Харківський політехнічний інститут»; e-mail: aabobukh@ukr.net; orcid.org/0000-0002-3405-386X

Бобух Анатолій Алексеевич - канд. техн. наук, професор кафедри автоматизації технологічних систем і екологічного моніторингу Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»; e-mail: aabobukh@ukr.net; orcid.org/0000-0002-3405-386X **Anatoliy Bobukh** - Candidate of Sciences (Technology), Professor, Department of Automation of Technological Systems and Environmental Monitoring, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"; e-mail: aabobukh@ukr.net; orcid.org/0000-0002-3405-386X

Подустов Михайло Олексійович — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматизації технологічних систем і екологічного моніторингу Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»; e-mail: podustov@kpi.kharkov.ua; orcid.org/0000-0003-2119-1961.

Подустов Михаил Алексеевич - доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой автоматизации технологических систем и экологического мониторинга Национального технического университета «Харьковский политехнический институт»; e-mail: podustov@kpi.kharkov.ua; orcid.org/0000-0003-2119-1961.

Mikhail Podustov - Doctor of Sciences (Technology), Professor, Head of the Department of Automation of Technological Systems and Ecological Monitoring of the National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute"; e-mail: podustov@kpi.kharkov.ua; orcid.org/0000-0003-2119-1961.

Переверзева Алевтина Миколаївна — аспірант кафедри автоматизації технологічних систем і екологічного моніторингу Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»; e-mail: pereverzieva_alya@ukr.net; orcid.org/0000-0003-2072-2521.

Переверзева Алевтина Николаевна - аспирант кафедры автоматизации технологических систем и экологического мониторинга Национального технического университета «Харьковский политехнический институт»; e-mail: pereverzieva_alya@ukr.net; orcid.org/0000-0003-2072-2521.

Alevtina Perevezeva - Postgraduate Student of the Chair of Automation of Technological Systems and Environmental Monitoring of the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"; e-mail: pereverzieva_alya@ukr.net; orcid.org/0000-0003-2072-2521.

Барановський Анатолій Олександрович — завідувач лабораторії метрології, автоматизації та сушіння державної установи «Державний науково-дослідний і проектний інститут основної хімії», e-mail: office@niochim.kharkov.ua

Барановский Анатолий Александрович - заведующий лабораторией метрологии, автоматизации и сушки государственного учреждения «Государственный научно-исследовательский и проектный институт основной химии», e-mail: office@niochim.kharkov.ua

Anatoliy Baranovsky - Anatoliy Baranovsky - Head of Laboratory of Metrology, Automation and Drying, State Institution "State Research and Design Institute of Basic Chemistry", e-mail: office@niochim.kharkov.ua