

– 188 с. 7. Дмитриенко В.Д., Заполовский Н.И., Литовченко Б.В. Программный комплекс для расчета инженерных сетей. – Харьков : Вестник НТУ «ХПИ», 2001 – 40-44 с.

Поступила в редколлегию 21.11.07

УДК 519.5:681:513

А. А. ПАВЛОВ, д-р. техн. наук, НТУУ «КПІ»,
Е. И. ЛИЩУК, ас., НТУУ «КПІ»

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

В статті розглянута методика вирішення задач багатокритеріального вибору за допомогою Методу аналізу ієрархій (МАІ). Запропоновано та обґрунтовано алгоритм, в якому при вирішенні задач багатокритеріального вибору за допомогою МАІ експерту не потребується виконувати попарні порівняння альтернатив на нижньому рівні ієрархії.

В статье рассмотрена методика решения задач многокритериального выбора с помощью Метода анализа иерархий (МАИ). Предложено и обосновано алгоритм, в котором при решении задач многокритериального выбора с помощью МАИ не требуется выполнять попарные сравнения альтернатив на нижнем уровне иерархии.

In article the technique of the decision of problems of multicriteria choice with the help of the Analytic Hierarchy Process by T.Saaty (AHP) is considered. It is proposed and is substantiated algorithm in which at the decision of problems of multicriteria choice with help of AHP it is not required to carry out paired comparisons of alternatives at the bottom level of hierarchy.

Введение.

В настоящее время для решения задач многокритериального выбора наиболее часто используемым является метод анализа иерархий (МАИ), предложенный Т.Саати. В качестве задач многокритериального выбора могут выступать как задачи выбора одного варианта из нескольких предлагаемых, так и задачи управления проектами, в том случае, когда задачу управления проектами (прогнозирования) можно представить в виде иерархического дерева Саати. Метод анализа иерархий предполагает декомпозицию проблемы на более простые составляющие части и обработку суждений лица, принимающего решение (ЛПР). В МАИ основным методом сравнения ЛПР объектов (альтернатив, критериев) является метод парных сравнений.

Взаимоотношения между критериями учитываются путем построения иерархии критериев и применением парных сравнений для выявления важности критериев и подкритериев. Метод отличается простотой и дает хорошее соответствие интуитивным представлениям. Главным недостатком этого подхода является большое количество требуемой экспертной информации,

которая представляет собой множество оценок предпочтительности, полученных в процессе парного сравнения альтернатив и критериев.

Общая постановка задачи.

Рассмотрим общую постановку задачи многокритериального выбора:

Есть глобальная цель и ряд альтернатив $A_1 \dots A_m$. Необходимо выбрать ту альтернативу, которая является «наилучшей» с точки зрения глобальной цели. Если бы можно было, введя единицу измерения достижения альтернативой глобальной цели, построить функцию $f(A_i)$, $i = \overline{1, m}$, измеряющую в заданных единицах соответствие альтернативы A_i , $i = \overline{1, m}$ заданной цели, то задача имеет тривиальное решение: выбирается та альтернатива, для которой достигается максимум функции $\max_i f(A_i)$. Но для большинства реальных задач проблема непосредственного построения функции $f(A_i)$ является неразрешимой в силу многих факторов. В качестве наиболее существенных можно выделить следующие:

1. Слабая структурированность задач;
2. Сочетания количественных и качественных факторов, с помощью которых оцениваются задачи;
3. Уверенность в том, что существуют факторы, задающие функцию $f(A_i)$, которые исследователю не известны либо непосредственно не могут быть измерены.

В этом случае и применяется метод анализа иерархий, который является аппроксимацией исходной задачи.

Вкратце основные этапы решения задачи многокритериального выбора с помощью метода анализа иерархий Т.Саати [1-7] следующие:

1. Первоначально требуется очертить проблему и определить, что необходимо узнать.
2. Построить иерархию, начиная с вершины (цели - с точки зрения управления), через промежуточные уровни (критерии, от которых зависят следующие уровни) к самому нижнему уровню, который обычно является перечнем альтернатив.
3. Построить множество матриц парных сравнений для каждого из нижних уровней - по одной матрице для каждого элемента примыкающего сверху уровня. Таким образом, получаем квадратную матрицу парных сравнений (суждений). Парные сравнения проводятся в терминах доминирования одного из элементов над другим. Эти суждения затем выражаются в числах. Если элемент А доминирует над элементом Б, то клетка, соответствующая строке А и столбцу Б, заполняется числом, а клетка, соответствующая строке Б и столбцу А, заполняется обратным к нем числом. Если элемент Б доминирует над элементом А, то происходит обратное: целое число ставится в по-

зицию Б, А, а обратная величина автоматически в позицию А, Б. Если считается, что А и Б одинаковы, в обе позиции ставится единица. В качестве шкалы для выполнения парных сравнений наиболее часто используемой является девятибалльная шкала, предложенная Т.Саати.

4. На этапе 3 для получения каждой матрицы требуется $\frac{n(n-1)}{2}$ суждений, где n – это число сравниваемых элементов.
5. После проведения всех парных сравнений и ввода данных по собственному значению $\lambda_{\max}$ можно определить согласованность. Затем, используя отклонение $\lambda_{\max}$ от n , проверяем индекс согласованности. Далее происходит сравнение с соответствующими средними значениями для случайных элементов, получаем отношение согласованности.
6. Этапы 3,4 и 5 проводятся для всех уровней и групп в иерархии.
7. На данном этапе используется иерархический синтез для взвешивания собственных векторов весами критериев и вычисляется сумма по всем соответствующим взвешенным компонентам собственных векторов уровня иерархии, лежащего ниже.
8. Находится согласованность всей иерархии. Согласованность всей иерархии можно найти, перемножая каждый индекс согласованности на вес соответствующего критерия и суммируя полученные числа. Результат затем делится на выражение такого же типа, но со случайным индексом согласованности, соответствующим размерам каждой матрицы [3].

Необходимо отметить, что проблема согласованности иерархии для МАИ является наиболее критичной, т.к. если в результате решения задачи, полученные веса оказываются несогласованными, то требуется повторный пересмотр экспертом (ЛПР) всех своих оценок.

Решение многокритериальной задачи принятия решений с помощью метода анализа иерархий.

Применим последовательно по этапам МАИ для некоторой задачи принятия решений. Заложенный в МАИ принцип идентичности и декомпозиции предусматривает структурирование проблем в виде иерархии или сети. Обычно в наиболее элементарном виде иерархическая структура строится с вершины, через промежуточные уровни к самому низкому уровню. Поэтому первый шаг при решении задачи многокритериальной выбора состоит в декомпозиции и представлении задачи в иерархической форме. Имеем следующую задачу принятия решений (Рис. 1), представленную в иерархической форме.

В представленной на рисунке задаче имеем m альтернатив $A_1, \dots, A_m$ и S уровней критериев $E_j^i, i = \overline{1, s}, j = \overline{1, m_i}$.

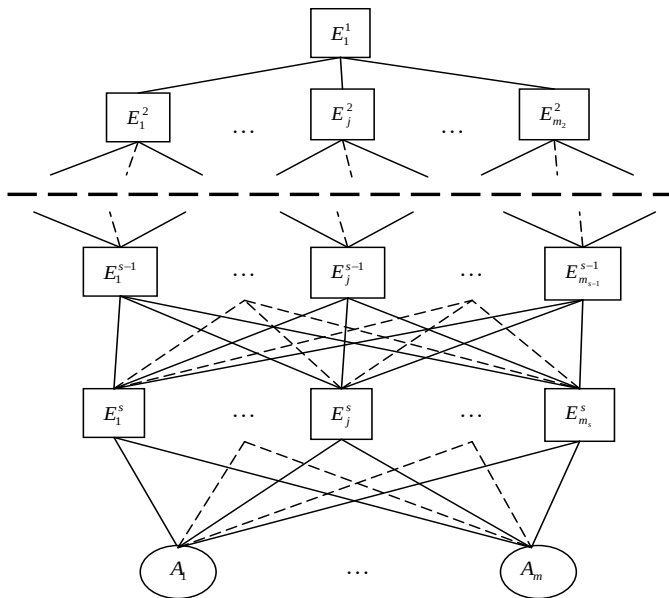


Рис. 1 - Пример иерархического представления задачи принятия решений

На последующих этапах МАИ элементы иерархии сравниваются попарно по отношению к их воздействию на общую характеристику (глобальную цель либо критерий верхнего уровня). Из группы матриц парных сравнений формируется набор локальных приоритетов, которые выражают относительное влияние множества элементов на элемент примыкающего сверху уровня, т.е. в нашем случае компоненты векторов будут иметь следующий вид [6]:

$$\begin{aligned}
 W_{E_1^{s-1}}^A &= [W_{E_1^s}^A W_{E_2^s}^A \dots W_{E_{m_s}^s}^A] W_{E_1^{s-1}}^E \\
 &\dots \\
 W_{E_{m_{s-1}}^s}^A &= [W_{E_1^s}^A W_{E_2^s}^A \dots W_{E_{m_s}^s}^A] W_{E_{m_{s-1}}^{s-1}}^E \\
 &\dots \\
 W_{E_1^{s-j}}^A &= [W_{E_1^{s-j+1}}^A W_{E_2^{s-j+1}}^A \dots W_{E_{m_{s-j+1}}^{s-j+1}}^A] W_{E_1^{s-j}}^E \\
 &\dots \\
 W_{E_{m_{s-j}}^{s-j}}^A &= [W_{E_1^{s-j+1}}^A W_{E_2^{s-j+1}}^A \dots W_{E_{m_{s-j+1}}^{s-j+1}}^A] W_{E_{m_{s-j}}^{s-j}}^E .
 \end{aligned}$$

Последняя формула

$$W_{E_1^1}^A = [W_{E_1^2}^A W_{E_2^2}^A \dots W_{E_{m_2}^2}^A] W_{E_1^1}^E, \quad (1)$$

$$W_{E_1^1}^E = \begin{pmatrix} w_{E_1^1}^{E_1^2} \\ \vdots \\ w_{E_1^1}^{E_{m_2}^2} \end{pmatrix}, \text{ где } w_{E_1^1}^{E_j^2} - \text{ вес критерия } E_j^2 \text{ в глобальной цели } E_1^1, j = \overline{1, m_2},$$

$$W_{E_1^1}^A = \begin{pmatrix} w_{E_1^1}^1 \\ \vdots \\ w_{E_1^1}^m \end{pmatrix}, \text{ где } w_{E_1^1}^j - \text{ результирующий вес } j\text{-ой альтернативы в}$$

глобальной цели $E_1^1, j = \overline{1, m}$.

Таким образом, j -я компонента (1) – это $w_{E_1^1}^j$.

Принимается та альтернатива, на которой достигается максимум

$$\max_j w_{E_1^1}^j,$$

$$W_{E_l^{s-j}}^A = \begin{pmatrix} w_{E_l^{s-j}}^1 \\ w_{E_l^{s-j}}^2 \\ \vdots \\ w_{E_l^{s-j}}^m \end{pmatrix}, \text{ где } w_{E_l^{s-j}}^i - \text{ вес (вклад) } i\text{-ой альтернативы в критерии } E_l^{s-j},$$

$i = \overline{1, m}, j = \overline{0, s-1}, l = \overline{1, m_{s-j}},$

$$W_{E_l^{s-j}}^E = \begin{pmatrix} w_{E_l^{s-j}}^{E_1^{s-j+1}} \\ w_{E_l^{s-j}}^{E_2^{s-j+1}} \\ \vdots \\ w_{E_l^{s-j}}^{E_{m_{s-j}+1}^{s-j+1}} \end{pmatrix}, \text{ где } w_{E_l^{s-j}}^{E_p^{s-j+1}} - \text{ вес } E_p^{s-j+1} \text{ критерия в критерии } E_l^{s-j},$$

$j = \overline{1, s-1}, l = \overline{1, m_{s-j}}, p = \overline{1, m_{s-j+1}}.$

Если в дереве иерархий не все связи имеют место, то соответствующие веса принимаются равными нулю. Поэтому в данной статье рассматривается только общий случай.

Рассмотрим, каким образом дерево иерархий с весами, приписанными каждой из ветвей, аппроксимирует неизвестное выражение $f(A_i)$, $i = \overline{1, m}$. Для этого рассмотрим следующие выражения:

$E_j^s(A_i)$ - значение, которое принимает критерий E_j^s на альтернативе A_i ,

$$E_j^s(A_i) = w_{E_j^s}^i, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m_s}.$$

При этом для фиксированного j $w_{E_j^s}^i$ измеряются в одних и тех же единицах и нормируются: $\sum_{i=1}^m w_{E_j^s}^i = 1$.

$$E_j^{s-1}(A_i) = \sum_{l=1}^{m_s} w_{E_j^{s-1}}^{E_l^s} E_l^s(A_i), \quad \text{при этом веса } w_{E_j^{s-1}}^{E_l^s} \text{ при фиксированных } s \text{ и } j$$

измеряются в одних и тех же единицах и нормируются $\sum_{l=1}^{m_s} w_{E_j^{s-1}}^{E_l^s} = 1$.

В общем случае:

$$E_t^{s-j}(A_i) = \sum_{l=1}^{m_{s-j+1}} w_{E_t^{s-j}}^{E_l^{s-j+1}} E_l^{s-j+1}(A_i), \quad \text{при этом веса } w_{E_t^{s-j}}^{E_l^{s-j+1}} \text{ при фиксированных}$$

s, j и t измеряются в одних и тех же единицах и нормируются $\sum_{l=1}^{m_{s-j+1}} w_{E_t^{s-j}}^{E_l^{s-j+1}} = 1$.

Примечание: в иерархической системе Саати все веса считаются неотрицательными.

И наконец:

$$E_1^1(A_i) = \sum_{l=1}^{m_2} w_{E_1^1}^{E_l^2} E_l^2(A_i), \quad i = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Выражение (2) и есть аппроксимация неизвестного значения $f(A_i)$, $i = \overline{1, m}$. Значение $E_1^1(A_i)$, $i = \overline{1, m}$ можно также представить следующим образом

$$E_1^1(A_i) = \sum_{t=1}^{m_s} \alpha_t w_{E_1^1}^i, \quad i = \overline{1, m},$$

где коэффициенты α_t очевидным образом определяются из выражения (2).

Пусть каждая альтернатива A_i характеризуется значениями n критериев

$$x^i = \begin{pmatrix} x_1^i \\ \vdots \\ x_n^i \end{pmatrix}, \text{ но вес } w_{E_l^s}^i \text{ } i\text{-й альтернативы является линейной сверткой,}$$

$$x_l^i = \begin{pmatrix} x_{l_1}^i \\ \vdots \\ x_{l_{n_l}}^i \end{pmatrix} \quad n_l \text{ критериев } n_l \leq n \text{ одинаковых для любой альтернативы с}$$

известными коэффициентами $\alpha_1^{E_l^s}, \dots, \alpha_{n_l}^{E_l^s}$. При этом критерии могут иметь различную физическую природу и лишь некоторые из них определяют вес альтернативы в E_l^s критерии. Но обязательно для каждого x_l^i есть E_l^s , что $x_l^i \in \{x_{l_1}^i, \dots, x_{l_{n_l}}^i\}$. Веса $w_{E_l^s}^i$ определяются из выражения:

$$\sum_{p=1}^{n_l} \alpha_p^{E_l^s} x_{l_p}^i = w_{E_l^s}^i, \quad l = \overline{1, m_s}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3)$$

Выражение (3) вытекает из естественного предположения о том, что эксперт-системотехник учитывая непосредственную связь между критериями нижнего уровня иерархии и альтернативами $A_1 \dots A_m$ может задать в явном виде свертку (3) с непосредственным определением (без парных сравнений) весов $\alpha_p^{E_l^s}$, $p = \overline{1, n_l}$, $l = \overline{1, m_s}$.

Компоненты вектора x^i задают значения всех возможных критериев, линейная свертка подмножества которых и определяют вес альтернативы A_i в критерии нижнего уровня иерархии Саати E_l^s , $l = \overline{1, m_s}$. Тогда

$$w_i = \sum_{t=1}^{m_s} \alpha_t \sum_{p=1}^{n_t} \alpha_p^{E_t^s} x_{t_p}^i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Представление весов w_j , $j = \overline{1, m}$ альтернатив в глобальном критерии в виде (4) позволяют сформулировать следующую оптимизационную задачу управления проектами, когда глобальная цель, представленная иерархическим деревом Саати, задается выражением (4).

Имеется m участников конкурса на выполнение проекта, который характеризуется значениями n критериев. Ограничения на реализацию проекта у каждого из участников являются линейными.

Обоснование. Ресурсные ограничения и вообще модели планирования в большинстве практических случаев задаются линейными ограничениями. Обозначим их:

$$A_j x^j \leq b_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

Тогда оптимальной стратегией каждого участника конкурса является построение проекта, являющегося решением следующей задачи линейного программирования:

$$\max_{x^j} w_j = \max_{x^j} \sum_{t=1}^{m_t} \alpha_t \sum_{p=1}^{n_t} \alpha_p^{E_t} x_{t_p}^j,$$

$$A_j x^j \leq b_j.$$

Пусть x_j, w_j^* - проекты и им соответствующие оптимальные веса w_j^* в глобальной цели. Победителем является тот проект A_j , которому соответствует $\max_{x^j} w_j^*$.

Заключение.

В статье показано, что при решении задачи многокритериального выбора с помощью МАИ эксперту не требуется выполнять парные сравнения альтернатив на нижнем уровне иерархического дерева, т.к. существует непосредственная связь между ними, и вес альтернатив можно определить с помощью линейной свертки. Также в статье приведен алгоритм решения задачи управления проектами с помощью метода анализа иерархий Саати.

Список литературы: 1. *Saaty T.L.* Multycriteric Decision Making. The Analytic Hierarchy Process.— New York: McGraw Hill International, 1980.— 300 p. 2. *Саати Т., Кернс К.* Аналитическое планирование. Организация систем / Пер. с англ. Р.Г. Вачнадзе.— М.: Радио и связь, 1991.— 223 с. 3. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий / Пер. с англ. Р.Г. Вачнадзе.— М.: Радио и связь, 1993.— 315 с. 4. *Тоценко В.Г.* Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект.— Киев: Наукова думка, 2002.— 381 с. 5. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решений.— М.: Логос, 2000.— 200 с. 6. *Андрейчикова А.В., Андрейчикова О.Н.* Анализ, синтез, планирование решений в экономике.— Москва: Финансы и статистика, 2001.— 257 с. 7. *Павлов А.А., Гриша С.Н., Томашевский В.Н. и др.* Основы системного анализа и проектирования АСУ / Учеб. пособие: под общ. ред. А.А. Павлова.— К.: Выща школа, 1991.— 367 с.

Поступила в редколлегию 31.10.07