УДК 681.5.01.23

А.С. КУЦЕНКО, д-р. техн. наук, ***Т.Б. НИКИТИНА,*** канд. техн. наук.

УТОЧНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ КАНАЛОВ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ СИНТЕЗЕ

Розроблена методика уточнення параметрів нелінійних оптимальних регуляторів багатоканальних систем, синтезованих при послідовному синтезі по критеріях оптимальності окремих каналів, з метою зменшення величини критерію оптимальності багатоканальної системи наближаючись до глобального мінімуму. Приведений приклад застосування розробленої методики для синтезу двоканальної системи, що стежить.

Применение многоканальных систем, работающих по принципу грубого и точного управления, в ряде случаев позволяет получать точность, недостижимую в одноканальных системах. Дальнейшее повышение точности в таких системах сдерживается наличием нелинейных элементов. Одним из подходов к решению этой проблемы является аппроксимация нелинейной характеристики аналитическим выражением и использование нелинейной модели исходной многоканальной системы. В работе [1] рассмотрены вопросы синтеза одноканальных систем с аналитическими нелинейностями при цифровом управлении. В работах [2-4] этот подход применен к последовательному синтезу оптимальных регуляторов отдельных каналов многоканальной системы.

Целью данной работы является разработка методики уточнения параметров регуляторов каналов, синтезированных в ходе последовательного синтеза оптимальных регуляторов отдельных каналов с целью уменьшения значения глобального критерия оптимизации, характеризующего точность многоканальной нелинейной системы.

При работе многоканальных систем в реальных условиях отработки задающих либо компенсации возмущающих воздействий, требующих движения исполнительных механизмов многоканальных систем на малых скоростях нередко возникают скачкообразные движения, остановки, автоколебания и т.д., хотя при синтезе системы условия устойчивости заведомо выполнялись[5]. Это связано с тем, что при синтезе системы использовались линейные модели каналов и идеализированная характеристика модели трения в виде знаковой характеристики от скорости движения. Однако при движении на низких и сверхнизких – ползучих скоростях наблюдается падающий участок в характеристике внешнего трения так, что с увеличения скорости движения момент сопротивления уменьшается [6]. Наличие такого падающего участка в характеристике внешнего трения характерно при движении на низких скоростях, как при вращательном, так и при поступательном движении. При увеличении скорости движения падающий участок переходит в горизонтальный.

Для многих механизмов работа на падающем участке может приводить к возникновению автоколебаний, и такой режим является аварийным. Для других механизмов такой режим является нормальным, хотя и приводит к повышенному износу. В системах стабилизации и промышленных следящих системах неплавное движение вызывает ухудшение качества выпускаемой продукции. Так, например, в процессе прокатки многоканальная система регулирования геометрических параметров проката определяет точность поддержания толщины готового проката. Однако в режиме захвата полосы при заправочной скорости проскальзывание валков относительно прокатываемой полосы может привести к серьезным авариям.

Таким образом, при синтезе многоканальных систем необходимо при работе на малых скоростях учитывать наличие падающего участка в характеристике внешнего трения, что обуславливает положительную обратную связь в системе. Однако при работе на больших скоростях целесообразно учитывать горизонтальный и восходящий участки в характеристике внешнего трения, так как системы, синтезированные с учетом падающего участка в линейном приближении при работе с большой скоростью на горизонтальном и восходящем участках обладают излишней инерционностью. С этой целью аппроксимируем нелинейную зависимость момента сопротивления от скорости проскальзывания аналитическим выражением в виде степенного ряда от скорости проскальзывания и при этом исходная система становится нелинейной.

Рассмотрим нелинейную многоканальную систему, состоящую из m автономных нелинейных каналов, каждый j канал которой описывается уравнением состояния

$$\frac{d\vec{x}_j}{dt} = \Phi_j(\vec{x}_j(t), \vec{u}_j(t)), \tag{1}$$

$$\vec{y}_j(t) = \varphi_j(\vec{x}_j(t), \vec{u}_j(t)), \tag{2}$$

в котором векторные функции $\Phi_j(\vec{x}_j(t), \vec{u}_j(t))$, $\varphi_j(\vec{x}_j(t), \vec{u}_j(t))$ могут быть представлены в следующем виде

$$\Phi_j(\vec{x}_j(t), \vec{u}_j(t)) = A_j\vec{x}_j(t) + B_j\vec{U}_j(t) + \sum_{i=2}^{n} f_i(\vec{x}_j(t), \vec{u}_j(t)), \tag{3}$$

$$\varphi_j(\vec{x}_j(t)\vec{u}_j(t)) = C_j\vec{x}_j(t) + D_j\vec{u}_j(t) + \sum_{i=2}^{n} h_i(\vec{x}_j(t), \vec{u}_j(t), \tag{4}$$

где символ i указывает порядок формы от векторов состояния $\vec{x}_j(t)$ и управления $\vec{u}_j(t)$.

Введем вектор состояния многоканальной нелинейной системы $\vec{x}(t)$, компонентами которого являются векторы i-х каналов $\vec{x}_j(t)$ входящих в систему, и вектор управления $\vec{u}(t)$, компонентами которого являются векторы управления $\vec{u}_j(t)$ каналов, входящих в систему. Тогда уравнения состояния многоканальной нелинейной системы может быть записано в следующем виде:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \Phi(\vec{x}(t), \vec{u}(t)), \tag{5}$$

$$\vec{y}(t) = \varphi(\vec{x}(t), \vec{u}(t)), \tag{6}$$

в котором векторные функции $\Phi(\vec{x}(t), \vec{u}(t))$, $\varphi(\vec{x}(t), \vec{u}(t))$ могут быть представлены в следующем виде

$$\Phi(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) = A\vec{x}(t) + B\vec{U}(t) + \sum_{i=2}^{n} f_i(\vec{x}(t), \vec{u}(t)), \tag{7}$$

$$\varphi(\vec{x}(t)\vec{u}(t)) = C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t) + \sum_{i=2}^{n} h_i(\vec{x}(t), \vec{u}(t), \tag{8}$$

где символ i указывает порядок формы от векторов состояния $\vec{x}(t)$ и управления $\vec{u}(t)$.

Задачу синтеза оптимального управления $\vec{u}(t)$ нелинейной многоканальной системы, минимизирующей функционал

$$J = \int_0^\infty \psi(\vec{x}(t), \vec{u}(t)dt, \tag{9}$$

в предположении, что функция $\psi(\vec{x}(t), \vec{u}(t))$ является аналитической и разлагается в степенной ряд

$$\psi(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) = \sum_{i=2}^{n+1} \psi_i(\vec{x}(t)\vec{u}(t)), \tag{10}$$

сведем к оптимальному управлению $\vec{u}(t)$ в форме обратных связей по полному вектору состояния

$$\vec{u}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i(\vec{x}(t)) . \tag{11}$$

Введем функцию Ляпунова

$$V(\vec{x}(t)) = \sum_{i=2}^{n+1} V_i(\vec{x}(t)) . \tag{12}$$

Тогда минимум критерию (8) обеспечивает оптимальное управление (10), образующее систему уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана [1]:

$$\Phi^{T}(\vec{x}(t),\vec{u}(t))\frac{\partial V(\vec{x}(t)}{\partial \vec{x}(t)}+\psi(\vec{x}(t),\vec{u}(t))=0\,, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \Phi^{T}(\vec{x}(t),\vec{u}(t)}{d\vec{u}(t)}\frac{\partial V(\vec{x}(t)}{d\vec{x}(t)}+\frac{\partial \psi(\vec{x}(t),\vec{u}(t))}{\partial \vec{u}(t)}=0\,. \tag{14}$$

При последовательном синтезе вначале синтезируем оптимальное управление для первого канала предполагая, что второй и все последующие каналы отключены. Рассмотрим задачу синтеза оптимального управления $\vec{u}_1(t)$ первого канала, минимизирующего функционал

$$J_1=\int_0^{\infty}\psi_1(\vec{x}_1(t),\vec{u}_1(t)dt, \tag{15}$$

Предполагается, что функция $\psi_1(\vec{x}_1(t),\vec{u}_1(t))$ является аналитической и разлагается в степенной ряд

$$\psi_1(\vec{x}_2(t),\vec{u}_1(t))=\sum_{i=2}^{n+1}\psi_i(\vec{x}_1(t)\vec{u}_1(t))\,. \tag{16}$$

Оптимальное управление $\vec{u}_1(t)$ первого канала в форме обратных связей по полному вектору состояния

$$\vec{u}_1(t)=\sum_{i=1}^{n}\vec{u}_i(\vec{x}_1(t)) \tag{17}$$

определим из уравнения Гамильтона - Якоби - Беллмана [3]:

$$\Phi_1^{T}(\vec{x}_1(t),\vec{u}_1(t))\frac{\partial V_1(\vec{x}(t)}{\partial \vec{x}_1(t)}+\psi_1(\vec{x}_1(t),\vec{u}_1(t))=0\,, \tag{18}$$

$$\frac{\partial \Phi_1^{T}(\vec{x}_1(t),\vec{u}_1(t)}{d\vec{u}_1(t)}\frac{\partial V_1(\vec{x}(t)}{d\vec{x}_1(t)}+\frac{\partial \psi_1(\vec{x}_1(t),\vec{u}_1(t))}{\partial \vec{u}_1(t)}=0\,, \tag{19}$$

где введена функция Ляпунова первого канала

$$V_1(\vec{x}(t))=\sum_{i=2}^{n+1}V_i(\vec{x}_1(t))\,. \tag{20}$$

Решение уравнения (18 – 19) для нахождения оптимального управления первого канала (17) является существенно более простой задачей по сравнению с решением исходного уравнения (13 – 14) для нахождения оптимального управления многоканальной системы (11), во-первых, в связи с существенно меньшей размерностью решаемой задачи по сравнению с исходной задачей и, во-вторых, в связи с тем, что собственные значения матрицы состояния решаемой задачи компактно расположены вблизи одной области. Это, в частности, обусловлено тем, что математические модели отдельных каналов имеют наиболее простые описания, адекватные в рабочем диапазоне частот, а математическая модель многоканальной системы содержит описание всех каналов.

После того, как синтезировано оптимальное управление первого канала, сформируем эквивалентное возмущающее и задающее воздействия для второго канала. В частности, в следящей системе эквивалентным задающим воздействием для второго канала является ошибка отработки задающего воздействия с помощью первого канала с учетом компенсации возмущающего воздействия, действующего на первый канал. Тогда, полагая, что оптимальный регулятор первого канала при синтезе оптимального управления второго канала не изменяется, получим оптимальное управление для второго канала. Аналогично может быть синтезировано оптимальное управление для третьего и последующих каналов.

Фактически при последовательном синтезе оптимальных регуляторов отдельных каналов выполняется декомпозиция синтеза оптимального регулятора многоканальной системы на ряд подзадач синтеза оптимальных регуляторов отдельных каналов. Естественно, что в результате синтеза регуляторов отдельных каналов минимизируется ошибка системы, включающей все предыдущие каналы за счет наиболее полного использования энергетических и информационных возможностей синтезируемого канала. Однако после такой процедуры последовательного синтеза отдельных каналов имеется возможность улучшения точности многоканальной системы в целом.

Такой эффект, в частности, имел место при параметрической оптимизации двухканальной электромеханической следящей системы [5-6]: оптимальная полоса пропускания первого канала из условия минимума дисперсии ошибки одноканальной системы составляет 20 рад/с, а при параметрической оптимизации двухканальной системы по критерию минимума дисперсии двухканальной системы оптимальная полоса пропускания первого канала становится равной 6 рад/с, при оптимальной полосе пропускания второго точного канала 50 рад/с.

Аналогичная ситуация имеет место при параметрической оптимизации многоканальной системы автоматического регулирования толщины и профиля прокатываемой полосы на реверсивном стане холодной прокатки [5]. Повышение полосы пропускания электрогидравлического привода распора рабочих валков в одноканальной системе приводит к снижению продольной разнотолщинности за счет эффекта локального предварительного напряжения прокатной клети. Однако при работе двухканальной системы автоматического регулирования толщины необходимо уменьшать полосу пропускания канала электрогидравлического привода распора рабочих валков, так как на вход канала электрогидравлического привода распора опорных валков поступает сигнал, пропорциональны эксцентриситету рабочих валков, являющийся помехой косвенного изменения толщины полосы по давлению в гидроцилиндрах распора рабочих валков.

Еще одним примером такой ситуации является процесс регулирования толщины полосы на многоклетьевом стане холодной прокатки [5-6]. Синтез оптимальных регуляторов на этапе последовательного синтеза начиная с первой клети приводит к тому, что при минимизации дисперсии продольной разнотолщинности на первой клети синтез оптимального регулятора второй клети приводит к большей дисперсии продольной разнотолщинности, чем при одновременном синтезе оптимальных операторов обеих клетей. Значение дисперсии продольной разнотолщинности на первой клети имеет большее значение, чем при синтезе оптимального регулятора первой клети. Это происходит потому, что при последовательном синтезе оптимального регулятора первой клети в прокатную полосу впечатываются эксцентриситеты опорных и рабочих валков, которые потом с помощью оптимального регулятора второй клети не удается компенсировать в полной мере в связи с энергетическими и информационными ограничениями второго канала. С этой целью быстродействие регулятора первой клети снижают так, чтобы можно было скомпенсировать разнотолщинность полосы, но не впечатывать в полосу эксцентриситеты опорных и рабочих валков первой клети, являющихся эквивалентными «шумами» регулятора первой клети. Заметим, что фактически регулятор толщины полосы прокатной клети представляет собой многоканальную систему, включающую регулирование положения нажимных винтов, регулирование давления в гидрораспорах опорных валков, регулирование переднего и заднего натяжений полосы, скоростной асимметрии за счет регулируемой разности вращения верхнего и нижнего валков и т.д.

При синтезе оптимальных регуляторов отдельных каналов оптимальное управление (17) представляет собой жесткие обратные связи по полному вектору состояния только синтезируемого канала. Оптимальный регулятор многоканальной системы (11) представляет обратные связи по полному вектору состояния многоканальной системы, включающей вектора состояния всех каналов, входящих в систему. При этом управление любого канала формируется на основании компонент вектора состояния многоканальной системы и, естественно, в такой постановке может быть достигнута меньшая величина ошибки многоканальной системы, чем при формировании управлений каждого канала на основании вектора состояния только этого канала. Следует заметить, что в многоканальной системе за счет взаимосвязей между каналами на вход каждого i-го канала поступает ошибка отработки задающего и компенсации возмущающего воздействий с помощью $(i-1)$ канальной системы, т.е. управление i-м каналом формируется на основании сигналов работы всех предыдущих каналов.

Кроме того, при последовательном синтезе оптимального регулятора отдельного i-го канала минимизируется ошибка i канальной системы при наиболее полном использовании с этой целью усилительных и исполнительных устройств i-го канала. Эта задача решается путем надлежащего выбора весовых функций $\psi(\vec{x}(t),\vec{u}(t))$ в критерии качества (15). Фактически необходимо решить задачу условной оптимизации, при которой минимизируется интегральный критерий качества i-го канала

$$J_i = \int_0^\infty \varepsilon_i\left(\vec{x}_j(t),\vec{x}_{jr}(t),\vec{x}_{jd}(t)\right)dt, \tag{21}$$

характеризующий лишь ошибки $\varepsilon_i(t)$ отработки i канальной системой задающего $j_{ir}(t)$ и компенсации возмущающего $y_{id}(t)$ воздействий с помощью i канальной системы. При этом необходимо учитывать ограничения на управление i-го канала $u_i(t)$ и компоненты вектора состояния $\vec{x}_i(t)$, например, в виде ограничений

$$|u_i(t)| \le u_{i\max}, \tag{22}$$

$$|\vec{x}_i(t)| \le \vec{x}_{i\max}, \tag{23}$$

а, возможно, на управление и переменные состояния могут быть наложены интегральные ограничения

$$\int_0^\infty u_i^e(t)dt \le u_{i\max}^e, \tag{24}$$

$$\int_0^\infty \vec{x}_i^e(t)dt \le \vec{x}_{i\max}^e. \tag{25}$$

В частности, так можно учесть ограничения по нагреву, расходу топлива, энергии и т.д.

Эта задача может быть сведена к решению исходной задачи надлежащим выбором подынтегральной функции $\psi(\vec{x}(t),\vec{u}(t))$.

Естественно, что минимум ошибки многоканальной системы при оптимизации по критерию (9) может быть существенно меньше, чем при последовательном синтезе отдельных каналов по критериям (15). Поэтому после первой итерации синтеза оптимальных регуляторов всех каналов, входящих в многоканальную систему можно добиться некоторого улучшения глобального критерия (9) следующей процедурой.

Необходимым условием оптимальности глобального критерия (9) для оператора i - го канала, синтезированного на этапе последовательного оптимального синтеза, является равенство двойственных оценок глобального критерия (9) по управлению для всех каналов, входящих в систему

$$\left.\frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial u_i}\right|_{W_1} = \left.\frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial u_i}\right|_{W_2} = \ldots = \left.\frac{\partial I(I)}{\partial u_i}\right|_{W_n}. \qquad (26)$$

Это условие является следствием теоремы двойственности, устанавливающей необходимое условие глобального оптимума при автономном синтезе отдельных каналов.

В данной задаче роль двойственных оценок могут играть соответствующие элементы матрицы частных производных функции Ляпунова $\dfrac{\partial V(\vec{x}(t))}{\partial \vec{x}(t)}$.

Естественно, что при синтезе оптимальных регуляторов отдельных каналов на этапе оптимального последовательного синтеза двойственные оценки (26) могут быть различны. Тогда для уменьшения величины глобального критерия (9) можно перераспределить часть управления.

Для реализации управления (11) необходим полный вектор состояния $\vec{x}(t)$. Для исходной нелинейной системы (5-6) построим нелинейный наблюдатель, восстанавливающий вектор состояния системы по измеряемому вектору выхода $\vec{y}(t)$.

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \Phi_H(\hat{x}(t), \vec{u}(t), \vec{y}(t)), \qquad (27)$$

в котором нелинейная векторная функция $\Phi_H(\hat{x}(t), \vec{u}(t), \vec{y}(t))$ может быть представлена в виде ряда

$$\Phi_H(\hat{x}(t), \vec{u}(t), \vec{y}(t)) = A_H\hat{x}(t) + B_H\vec{u}(t) + G_H\vec{y}(t) + \sum_{i=2}^{n} f_{Hi}(\hat{x}(t), \vec{u}(t), \vec{y}(t)), \qquad (28)$$

где символ i указывает порядок формы от векторов состояния $\hat{x}(t)$, управления $\vec{u}(t)$ и измерения $\vec{y}(t)$.

При последовательном синтезе можно построить автономные наблюдатели отдельных каналов, так как для реализации оптимального управления каждым каналом необходим полный вектор состояния каждого канала $\vec{x}_i(t)$. Построим нелинейный наблюдатель каждого канала

$$\frac{d\hat{x}_1(t)}{dt} = \Phi_{1H}(\hat{x}(t), \vec{u}_1(t), \vec{y}_1(t)), \qquad (29)$$

в котором нелинейная векторная функция $\Phi_{1H}(\hat{x}_1(t), \vec{u}_1(t), \vec{y}_1(t))$ может быть представлена в виде ряда

$$\Phi_{1H}(\hat{x}_1(t), \vec{u}_1(t), \vec{y}_1(t)) = A_{1H}\hat{x}_1(t) + B_{1H}\vec{u}_1(t) + G_{1H}\vec{y}_1(t) + \sum_{i=2}^{n} f_{1Hi}(\hat{x}_1(t), \vec{u}_1(t), \vec{y}_1(t)), \qquad (30)$$

При перераспределении ресурсов между каналами и уточнении параметров каналов необходимо на каждой итерации уточнять и параметры наблюдателей каналов.

Применение данного подхода при синтезе двухканальной следящей системы [5] позволило уменьшить дисперсию ошибки двухканальной системы на 20% несмотря на то, что дисперсия одноканальной системы при этом увеличилась на 4%. Эффект нелинейных регуляторов при управлении нелинейными системами проявляется в том, что при малых скоростях движения когда система находится на падающем участке характеристики внешнего трения в управлении в основном превалируют линейные составляющие переменных состояния, обеспечивая хорошее демпфирование системы при наличии в ней внутренней положительной обратной связи за счет падающего участка характеристики внешнего трения. По мере увеличения скорости движения и переходе системы на горизонтальный участок характеристики внешнего трения в системе увеличивается внутреннее демпфирование, а демпфирование системы с помощью обратных связей линейных составляющих регулятора уменьшается за счет обратных связей по квадратичным составляющим переменных состояния. За счет такого нелинейного регулирования достигается повышение быстродействия системы при работе на горизонтальном участке характеристики внешнего трения при высоком демпфировании системы при ее работе на падающем участке характеристики внешнего трения.

Таким образом, разработана методика уточнения параметров нелинейных оптимальных регуляторов, синтезированных при последовательном синтезе по критериям оптимальности отдельных каналов, с целью уменьшения величины критерия оптимальности многоканальной системы приближаясь к глобальному минимуму.

Список литературы: **1.** *Никитина Т.Б.* Синтез приближенно – оптимальных нелинейных систем цифрового управления технологическими процессами с аналитическими нелинейностями. //Автоматизація виробничих процесів. Київ.- 2003. - №2(17). - С.62-65. **2.** *Никитина Т.Б.* Приближенно оптимальное цифровое управление электроприводами с аналитическими нелинейностями. //Вестник НТУ «ХПИ». Сб. научных трудов. Харьков: НТУ «ХПИ».- 2003. - №10. Т1. - С.321-322. **3.** *Никитина Т.Б.* Приближенно – оптимальный синтез многоканальных систем с аналитическими нелинейностями.// Механіка та машинобудування. -2005. - №1. - С. 47-52. **4.** *Никитина Т.Б* Синтез многоканальных нелинейных электромеханических систем. //Вестник НТУ «ХПИ». Сборник научных трудов. Харьков. НТУ «ХПИ». – 2005. - №45. - С. 130 – 131. **5.** *Кузнецов Б.И., Новоселов Б.В., Богаенко* И.Н. Проектирование многоканальных систем оптимального управления.// Киев. Техника. - 1993. - 242с. **6.** *Кузнецов Б.И. Новоселов Б.В., Богаенко И.Н.* Проектирование систем со сложными кинематическими цепями.//.-Киев. Техника. - 1996. - 282 с.

Поступила в редколлегию 02.12.05