

**И.В. ВОЛКОВ**, доктор тех.наук, член-корреспондент НАН Украины, Институт электродинамики НАН Украины;  
**Д.П. КАРШЕНОВ**, аспирант, Институт электродинамики НАН Украины, начальник лаборатории режимов электроснабжения и учета, ПАО «ММК им. Ильича»

### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ m-ПУЛЬСНЫХ РЕГУЛИРУЕМЫХ ВЫПРЯМИТЕЛЕЙ

Аналитическим методом получена универсальная расчетная формула, связывающая выход и вход произвольного m-пульсного регулируемого вентильного преобразователя представляющая собой расчетную модель схемы замещения источниками тока высших гармоник.

Аналітичним методом отримана універсальна розрахункова формула, що зв'язує вихід і вхід довільного m-пульсного регульованого вентильного перетворювача, що є розрахунковою моделлю схеми заміщення джерелами струму вищих гармонік.

The analytical method gains the universal design formula linking an exit and an inlet arbitrary m-pulse of controllable valve inverter representing computational model of an equivalent circuit by current sources of upper harmonics.

**Введение.** Большое многообразие структурных и алгометрических решений, предложенных на сегодня для преобразования электроэнергии с одними параметрами в электроэнергию с другими параметрами – с одной стороны, и описание в технической литературе [2-8] фрагментарных подходов с другой стороны, актуализируют необходимость решения новой системной задачи, которая заключается в формулировке общих закономерностей универсального моделирования режимов и параметров электронных энергетических систем. Моделирование режимов работы электрической сети определяется моделью электрической нагрузки. Нелинейные нагрузки, в том числе и преобразовательной техники, является источником высших гармоник в системе электроснабжения.

В настоящее время широко используются модели полупроводниковых выпрямителей, позволяющих исследовать и оптимизировать электромагнитные процессы, протекающие в их силовых цепях. Универсальные модели полупроводниковых выпрямителей позволяют исследовать режимы их работы, рассчитывать параметры и характеристики электрической сети, в том числе вычислять значения токов и напряжений, мощностей во всех элементах и в различных режимах работы нагрузки, проводить гармонический анализ токов и напряжений, выбирать параметры и настраивать фильтры высших гармоник.

Конкретной задачей моделирования является гармонический анализ кривой входного тока выпрямителя. Модели, которые известны в настоящее время, не являются универсальными, они позволяют определить содержание гармонических составляющих в кривой входного тока лишь для ряда конкретных выпрямителей с фиксированными параметрами. Содержание и доля гармонических составляющих в кривой тока, питающего m-пульсный регулируемый выпрямитель, представляет службную задачу, поскольку ток выпрямитель является функцией не только числа пульсаций выпрямленного напряжения, но и параметров цепи выпрямителя.

**Постановка задачи.** Целью настоящей работы является построение универсальной математической модели m-пульсного регулируемого выпрямителя с произвольной топологией и работающего на смешанную RLC-нагрузку. Задача состоит в выводе формулы входного тока m-пульсного выпрямителя позволяющей представить указанный выпрямитель в виде источников высших гармонических составляющих тока.

Схематичное изображение исследуемой системы показано на рис.1. В квадрат «m-пульсный регулируемый преобразователь» входит произвольное число трансформаторов с произвольным видом соединений обмоток, обеспечивающим нужный сдвиг фаз вторичных напряжений, подаваемых на регулируемые выпрямительные мосты, которые, в свою очередь, могут быть соединены параллельно и (или) последовательно.

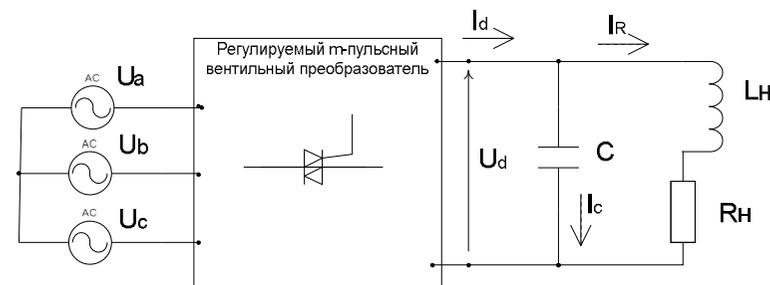


Рис.1 – Схема исследуемой системы

### Результаты исследований.

В основу исследования положены следующие допущения: питающая электросистема имеет бесконечную мощность; потери в вентильях не учитываются и сопротивлением вентилей пренебрегаем; вентилей имеют мгновенную коммутацию и угол управления – произвольный  $\alpha = var$ ; система питающих напряжений синусоидальная и симметричная:

$$u_A(t) = U_{\max} \cdot \sin(\omega t); u_A(t) = U_{\max} \cdot \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3});$$

$$u_A(t) = U_{\max} \cdot \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}).$$

Исследование целесообразно разделить на два этапа: сначала необходимо найти напряжение и ток в цепи выпрямленного тока, а затем определить фазные токи в цепи переменного тока.

### Функции тока и напряжения в цепи выпрямленного тока.

Функция выпрямленного напряжения  $u_d(t)$  в интервале повторяемости его формы  $[-\frac{\pi}{m} + \alpha; \frac{\pi}{m} + \alpha]$  имеет вид:

$$u_d(t) = \sqrt{3}U_{\max f} \cos \omega t = \sqrt{6}U_{rms.f} \cos \omega t, \quad (1)$$

где  $U_{\max f}$  и  $U_{rms.f}$  - соответственно амплитуда и действующее значение фазного напряжения.

Разложим указанную функцию в ряд Фурье на интервале  $2\pi$  для  $m$ -пульсного преобразователя.

$$U_d(t) = U_{d0} + \sum_{k=1}^{\infty} (U'_{km} \cos kmv + U''_{km} \sin kmv), \quad (2)$$

где  $U_{d0}$  - постоянная составляющая выпрямленного напряжения;

$U_{km}$  - амплитуда  $k$ -ой гармоники переменной составляющей выпрямленного напряжения;

$U'_{km}$  - коэффициент косинусной составляющей ряда Фурье;

$U''_{km}$  - коэффициент синусной составляющей ряда Фурье;

$T = \frac{2\pi}{m}$  - период интегрирования;

$v = \omega t$

$m$  - количество пульсов в периоде  $2\pi$

Найдем коэффициенты Фурье для указанной функции выпрямленного напряжения.

Для постоянной составляющей:

$$U_{d0} = \frac{\sqrt{6}U_{rms.f}}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{m} + \alpha}^{\frac{\pi}{m} + \alpha} \cos v dv = \frac{m\sqrt{6}U_{rms.f}}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \cos(\alpha). \quad (3)$$

Для косинусной составляющей

$$U'_{km} = \frac{\sqrt{6}U_{rms.f}}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{m} + \alpha}^{\frac{\pi}{m} + \alpha} \cos(v) \cdot \cos(kmv) dv =$$

$$= \frac{m\sqrt{6}U_{rms.f}}{2\pi \cdot (km-1)(km+1)} \left[ km \left( (\sin(\pi k) \cos(km\alpha) + \cos(\pi k) \sin(km\alpha)) \left( \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \cos(\alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \sin(\alpha) \right) - (\sin(km\alpha) \cos(\pi k) - \cos(km\alpha) \sin(\pi k)) \left( \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \cos(\alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \sin(\alpha) \right) - (\cos(\pi k) \cos(km\alpha) - \sin(\pi k) \sin(km\alpha)) \left( \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \right) + (\cos(\pi k) \cos(km\alpha) + \sin(\pi k) \sin(km\alpha)) \left( \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \right) \right]$$

Поскольку в выражении подставить  $\sin \pi k = 0$ , а  $\cos \pi k = (-1)^k$  для любых целых значений  $k > 0$ , то имеем:

$$U'_{km} = -\frac{2(-1)^k m\sqrt{6}U_{rms.f}}{\pi \cdot (km-1) \cdot (km+1)} \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \left( \cos(\alpha) \cos(km\alpha) + km \sin(\alpha) \sin(km\alpha) \right)$$

Формулу (4) можно преобразовать и записать в другом виде:

$$U'_{km} = -\frac{(-1)^k m\sqrt{6}U_{rms.f}}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \left( \frac{\cos((km-1)\alpha)}{km-1} - \frac{\cos((km+1)\alpha)}{km+1} \right). \quad (4a)$$

Аналогично для синусной составляющей:

$$U''_{km} = \frac{\sqrt{6}U_{rms.f}}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{m} + \alpha}^{\frac{\pi}{m} + \alpha} \cos(v) \cdot \sin(kmv) dv =$$

$$U''_{km} = -\frac{2(-1)^k m\sqrt{6}U_{rms.f}}{\pi \cdot (km-1) \cdot (km+1)} \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \left( \cos(\alpha) \sin(km\alpha) - km \sin(\alpha) \cos(km\alpha) \right) \quad (5)$$

Формулу (5) можно преобразовать и записать в другом виде:

$$U_{km}'' = -\frac{(-1)^k m\sqrt{6}U_{rms.f}}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{m}\left[\frac{\sin((km-1)\alpha)}{km-1} - \frac{\sin((km+1)\alpha)}{km+1}\right]\right). \quad (5a)$$

Общая формула выпрямленного напряжения для  $m$ -пульсного тиристорного выпрямителя будет иметь вид

$$U_d = \frac{m\sqrt{6}U_{rms.f}}{\pi} \sin\frac{\pi}{m} \left( \cos(\alpha) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(km-1)(km+1)} [(\cos(\alpha)\cos(km\alpha) + kms\sin(\alpha)\sin(km\alpha))\cos(km\alpha) + (\cos(\alpha)\sin(km\alpha) - km\sin(\alpha)\cos(km\alpha))\sin(km\alpha)] \right). \quad (6)$$

Формулу (6) можно преобразовать и записать в другом виде:

$$U_d = \frac{m\sqrt{6}U_{rms.f}}{\pi} \sin\frac{\pi}{m} \left( \cos(\alpha) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[ \left( \frac{\cos((km-1)\alpha)}{km-1} - \frac{\cos((km+1)\alpha)}{km+1} \right) \cos(km\alpha) + \left( \frac{\sin((km-1)\alpha)}{km-1} - \frac{\sin((km+1)\alpha)}{km+1} \right) \sin(km\alpha) \right] \right). \quad (6a)$$

Для удобства последующих расчетов и исследований в формулах (6) и (6a) отдельные части выражения целесообразно заменить вспомогательными коэффициентами:

$$U_{d\max} = \frac{m\sqrt{6}U_{rms.f}}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{m}\right); \quad E'_{km} = \left( \frac{\cos((km-1)\alpha)}{km-1} - \frac{\cos((km+1)\alpha)}{km+1} \right);$$

$$E''_{km} = \left( \frac{\sin((km-1)\alpha)}{km-1} - \frac{\sin((km+1)\alpha)}{km+1} \right);$$

$$E_{km} = \sqrt{(E'_{km})^2 + (E''_{km})^2} = \sqrt{\left( \frac{\cos((km-1)\alpha)}{km-1} - \frac{\cos((km+1)\alpha)}{km+1} \right)^2 + \left( \frac{\sin((km-1)\alpha)}{km-1} - \frac{\sin((km+1)\alpha)}{km+1} \right)^2};$$

$$\varphi_{km} = \arctg \left( \frac{\frac{\cos((km-1)\alpha)}{km-1} - \frac{\cos((km+1)\alpha)}{km+1}}{\frac{\sin((km-1)\alpha)}{km-1} - \frac{\sin((km+1)\alpha)}{km+1}} \right).$$

Тогда формулы (6), (6a) можно записать в виде:

$$U_d(t) = U_{d\max} \left( \cos(\alpha) - \sum_{k=1}^{\infty} [(-1)^k E_{km} \sin(km\omega t + \varphi_{km})] \right). \quad (6б)$$

Предположим, что цепь постоянного тока представляет собой смешанную нагрузку  $R, L, C$  согласно схемы (рис.1), тогда в соответствии с законом Кирхгофа

$$i_d(t) = i_n(t) + i_c(t); \quad (7)$$

$$i_c(t) = C \frac{dU_d(t)}{dt}; \quad (8)$$

$$i_n(t) \cdot R_n - L_n \frac{di_n(t)}{dt} = U_d(t); \quad (9)$$

Используя (8) и (6б), найдем ток в конденсаторе

$$i_c(t) = U_{d\max} \sum_{k=1}^{\infty} [(-1)^k km\omega C (E'_{km} \sin(km\omega t) - E''_{km} \cos(km\omega t))]. \quad (10)$$

По формуле (9) найдем ток в нагрузке, решив неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$i_n(t) = e^{-\int \frac{R_n}{L_n} dt} \left( \int \frac{U_d(t)}{L_n e^{-\int \frac{R_n}{L_n} dt}} dt \right); \quad (11)$$

$$i_n(t) = U_{d\max} \left( \frac{\cos(\alpha)}{R_n} - \sum_{k=1}^{\infty} [(-1)^k \left( \frac{E'_{km} R_n - km\omega L_n E''_{km}}{(R_n)^2 + (km\omega L_n)^2} \cos(km\omega t) + \frac{E''_{km} km\omega L_n + R_n E'_{km}}{(R_n)^2 + (km\omega L_n)^2} \sin(km\omega t) \right) \right)]; \quad (12)$$

Суммарный ток в цепи выпрямленного тока найдем, подставив в (7) выражения (10) и (12)

$$i_d(t) = U_{d\max} \left( \frac{\cos(\alpha)}{R_n} - \sum_{k=1}^{\infty} [(-1)^k \left( \left( \frac{E'_{km} R_n - km\omega L_n E''_{km}}{(R_n)^2 + (km\omega L_n)^2} - E''_{km} km\omega C \right) \cos(km\omega t) + \left( \frac{E''_{km} km\omega L_n + R_n E'_{km}}{(R_n)^2 + (km\omega L_n)^2} + E'_{km} km\omega C \right) \sin(km\omega t) \right) \right)]. \quad (13)$$

Представим сопротивления:

$$- \text{полное сопротивление нагрузки: } z_{nk} = \sqrt{R_n^2 + (km\omega L_n)^2}, \quad (14)$$

$$- \text{индуктивное сопротивление нагрузки: } x_{nk} = km\omega L_n, \quad (15)$$

$$- \text{емкостное сопротивление: } x_{ck} = \frac{1}{km\omega C} \quad (16)$$

Подставив (14, 15, 16) в (13) получим формулу выпрямленного тока:

$$i_d(t) = U_{dmax} \left( \frac{\cos(\omega t)}{R_H} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[ \left( \frac{E'_{km} R_H - x_{H,km} E''_{km}}{z_{H,km}^2} - \frac{E'_{km}}{x_{C,km}} \right) \cos(k\omega t) + \left( \frac{E'_{km} x_{H,km} + R_H E''_{km}}{z_{H,km}^2} + \frac{E'_{km}}{x_{C,km}} \right) \sin(k\omega t) \right] \right) \quad (13a)$$

Формулу (13) можно записать используя модуль и фазовый угол тока цепи выпрямленного тока:

- модуль тока в цепи выпрямленного тока:

$$I_{H,km} = U_{dmax} \sqrt{\left( \frac{E'_{km} R_H - x_{H,km} E''_{km}}{z_{H,km}^2} - \frac{E'_{km}}{x_{C,km}} \right)^2 + \left( \frac{E'_{km} x_{H,km} + R_H E''_{km}}{z_{H,km}^2} + \frac{E'_{km}}{x_{C,km}} \right)^2}; \quad (17)$$

- фазный угол тока в цепи выпрямленного тока:

$$\varphi_{\theta km} = \arctg \left( \frac{x_{C,km} (E'_{km} R_H - x_{H,km} E''_{km}) - E'_{km} z_{H,km}^2}{x_{C,km} (E'_{km} x_{H,km} + R_H E''_{km}) + E'_{km} z_{H,km}^2} \right). \quad (18)$$

Следовательно, формулу (13a) можно записать через модуль и фазу в виде:

$$i_d(t) = \frac{U_{dmax}}{R_H} - \sum_{k=1}^{\infty} [(-1)^k \cdot I_{km} \cdot \sin(k\omega t + \varphi_{\theta km})]. \quad (13б)$$

### Функции токов в цепи переменного тока

Для описания и последующего исследования входных токов питания  $m$ -пульсного регулируемого тиристорного выпрямителя, найдем фазные токи из формулы выпрямленного тока и соответствующих коммутационных функций для каждой из фаз:

$$i_A(t) = h_A(t) \cdot i_d(t), \quad i_B(t) = h_B(t) \cdot i_d(t), \quad i_C(t) = h_C(t) \cdot i_d(t) \quad (19)$$

Вначале найдем элементарную коммутационную функцию однофазного управляемого тиристорного выпрямителя, которая представляет собой выражение:

$$h(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq \omega t < -\pi + \alpha_1 \\ -1, & -\pi + \alpha_1 \leq \omega t < -\alpha_2 \\ 0, & -\alpha_2 \leq \omega t < \alpha_1 \\ +1, & \alpha_1 \leq \omega t < \pi - \alpha_2 \\ 0, & \pi - \alpha_2 \leq \omega t < \pi \end{cases} \quad (20)$$

где  $\alpha_1$  - угол отпирания тиристорной пары;

$\alpha_2$  - угол запираания тиристорной пары;

$\alpha$  - угол управления тиристора.

Для коммутаций как функций времени удобно использовать их разложение в ряд Фурье, общее выражение для которых имеет вид:

$$h(\omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t). \quad (21)$$

Найдем коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[ 0 \int_{-\pi}^{-\pi+\alpha_1} dv - 1 \int_{-\pi+\alpha_1}^{-\alpha_2} dv + 0 \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} dv + \int_{\alpha_1}^{\pi-\alpha_2} dv + 0 \int_{\pi-\alpha_2}^{\pi} dv \right] = 0.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[ 0 \int_{-\pi}^{-\pi+\alpha_1} \cos(kv) dv - 1 \int_{-\pi+\alpha_1}^{-\alpha_2} \cos(kv) dv + 0 \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} \cos(kv) dv + \int_{\alpha_1}^{\pi-\alpha_2} \cos(kv) dv + 0 \int_{\pi-\alpha_2}^{\pi} \cos(kv) dv \right] =$$

$$= \frac{1 - (-1)^k}{\pi \cdot k} \cdot (\sin(k\alpha_2) - \sin(k\alpha_1)).$$

Коэффициент Фурье -  $a_k$ , преобразуем в коэффициент переменной  $(2k+1)$ , тогда получим:

$$a_{2k+1} = \frac{2}{\pi(2k+1)} (\sin((2k+1)\alpha_2) - \sin((2k+1)\alpha_1));$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left[ 0 \int_{-\pi}^{-\pi+\alpha_1} \sin(kv) dv - 1 \int_{-\pi+\alpha_1}^{-\alpha_2} \sin(kv) dv + 0 \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} \sin(kv) dv + \int_{\alpha_1}^{\pi-\alpha_2} \sin(kv) dv + 0 \int_{\pi-\alpha_2}^{\pi} \sin(kv) dv \right] =$$

$$= \frac{1 - (-1)^k}{\pi \cdot k} \cdot (\cos(k\alpha_2) - \cos(k\alpha_1));$$

Коэффициент Фурье -  $b_k$ , преобразуем в коэффициент переменной  $(2k+1)$ , тогда получим:

$$b_{2k+1} = \frac{2}{\pi(2k+1)} (\cos((2k+1)\alpha_2) + \cos((2k+1)\alpha_1)).$$

Таким образом функция (20) после разложения в ряд Фурье примет вид:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(\cos((2k+1)\alpha_2) + \cos((2k+1)\alpha_1))}{2k+1} \sin((2k+1)\omega t) - \frac{(\sin((2k+1)\alpha_2) - \sin((2k+1)\alpha_1))}{2k+1} \cos((2k+1)\omega t) \right], \quad (22)$$

или

$$d_{2k+1} = \sqrt{a_{2k+1}^2 + b_{2k+1}^2} = \frac{4 \cos\left((2k+1)\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right)\right)}{\pi(2k+1)};$$

$$\varphi_{2k+1} = \arctg\left(\frac{a_{2k+1}}{b_{2k+1}}\right) = (2k+1)\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right);$$

$$h(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\cos\left((2k+1)\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right)\right)}{\pi(2k+1)} \sin\left((2k+1)\left(\omega t + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)\right) \right] \quad (22a)$$

Для трехфазной системы напряжения, коммутационная функция для каждой из фаз управляемого выпрямителя («схема Ларионова») будет иметь вид:

$$h(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\cos\left((2k+1)\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right)\right)}{\pi(2k+1)} \sin\left((2k+1)\left(\omega t - (j_i - 1)\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)\right) \right], \quad (23)$$

где  $j=1$  (для фазы «А»),  $j=2$  (для фазы «В»),  $j=3$  (для фазы «С»).

Из анализа спектров трехфазной системы токов (23) следует, что в них содержатся гармоники прямой и обратной последовательности, а при  $(2k+1)$ , кратных трем, в них присутствуют гармоники, имеющие нулевую фазу, т.е. гармоники нулевой последовательности. При отсутствии нулевого провода нет условий для протекания в нагрузке гармоник тока нулевой последовательности. Значит, из спектра коммутационных функций нужно вычесть гармоники нулевой последовательности.

$$h_{A\Sigma 3}(t) = h_{B\Sigma 3}(t) = h_{C\Sigma 3}(t) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} (h_{A,3k}(t) + h_{B,3k}(t) + h_{C,3k}(t)). \quad (24)$$

После вычитания гармоник нулевой последовательности (24) из (23), при  $\alpha_1 = \frac{\pi}{6} + \alpha$  и  $\alpha_2 = \frac{\pi}{6} - \alpha$ , получим новую коммутационную функцию переменной  $(mk \mp 1)$ :

$$h(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\cos\left(\frac{(mk \mp 1)\pi}{6}\right)}{(mk \mp 1)} \sin\left((mk \mp 1)\left(\omega t + (j_i - 1)\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)\right) \right]. \quad (25)$$

Для формирования  $m$ -пульсного управляемого выпрямителя обычно используется фазосдвигающий узел. Он может быть выполнен на базе одного или нескольких трансформаторов. Каждая из  $L$  систем напряжений подключается ко входам одного из  $L$  числа трехфазных управляемых выпрямительных мостов, выходы которых соединяются или параллельно, или последовательно.

Таким образом, для нахождения результирующего вектора тока в фазе трехфазной системы, питающей  $m$ -пульсный выпрямитель, необходимо найти геометрическую сумму векторов токов, протекающих в  $L$  каналах, подключенных к указанной фазе трехфазной системы.

Для получения коммутационной функции  $m$ -пульсного вентильного выпрямителя применим алгоритм вектор-веерного формирования. Суть указанного метода заключается в том, что при известном модельном описании одной функции, можно получить результирующую (суммарную) функцию через коэффициент геометрического суммирования. Таким образом, в соответствии с указанным алгоритмом формируют  $L$  последовательно сдвинутых между собой по фазе на угол  $\delta$  элементарных коммутационных функций, а затем их последовательно суммируют, получая суммарную коммутационную функцию:

$$h_j(t) = h_1(t) \cdot K_{SL(2k+1)}. \quad (26)$$

Вывод коэффициента геометрического суммирования векторов  $K_{SL(2k+1)}$  изложен в [1]. В общем случае для суммируемых векторов  $L$  для  $(2k+1)$ -ой гармоники коэффициент геометрического суммирования принимает вид:

$$K_{SL(2k+1)} = \frac{\sin\left[(2k+1)\frac{L\delta}{2}\right]}{L \sin\left[(2k+1)\frac{\delta}{2}\right]}. \quad (27)$$

Модельное описание коммутационной функции в виде ряда Фурье может быть получено на основе модели (26) путем использования спектра

с формой «квазимеандр» (23) совместно с коэффициентом геометрического суммирования (27):

$$h(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\sin \left[ (2k+1) \frac{L\delta}{2} \right] \cos \left( (2k+1) \left( \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \right) \right)}{L(2k+1) \sin \left[ (2k+1) \frac{\delta}{2} \right]} \sin \left( (2k+1) \left( \omega t - (j_i - 1) \frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right) \right) \right]. \quad (28)$$

Формула (28) является расчетной для любого количества каналов  $L$  и для любого угла  $\delta$ . Однако если  $m$ -пульсная система симметричная, то

$$m = 2 * 3 * L; \quad L = \frac{m}{6}; \quad \delta = \frac{2\pi}{m} = \frac{\pi}{3L}. \quad (29)$$

Подставив выражения (29)  $\alpha_1 = \frac{\pi}{6} + \alpha$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{6} - \alpha$  в (31) запишем коммутационную функцию через количество пульсов за период

$$h(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{6 \sin \left[ (2k+1) \frac{\pi}{6} \right] \cos \left( (2k+1) \left( \frac{\pi}{6} \right) \right)}{m(2k+1) \sin \left[ (2k+1) \frac{\pi}{m} \right]} \sin \left( (2k+1) \left( \omega t - (j_i - 1) \frac{2\pi}{3} + \alpha \right) \right) \right] \quad (30)$$

При отсутствии нулевого провода – нет условий для протекания в нагрузке гармоник тока нулевой последовательности. Значит, из спектра коммутационных функций нужно вычесть гармоники нулевой последовательности. После вычитания гармоник нулевой последовательности из (30) окончательное выражение для коммутационной функции:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{6 \sin \left[ (m \cdot k \mp 1) \frac{\pi}{3} \right]}{m \cdot (m \cdot k \mp 1) \cdot \sin \left[ (m \cdot k \mp 1) \frac{\pi}{m} \right]} \sin \left( (m \cdot k \mp 1) \left( \omega t - (j_i - 1) \frac{2\pi}{3} + \alpha \right) \right) \right]. \quad (31)$$

Выполненные исследования показали, что физика работы выпрямительных устройств в предложенных решениях достаточно сложна. Теоретически, изначально используя лишь традиционные методы теоретических основ электротехники и, не располагая необходимым комплектом осциллограмм рабочих процессов, трудно получить детерминированное, логически обоснованное и явное описание процессов в этих схемах. Эти трудности можно обойти, если сформулировать и систематизировать факты, полученные частично теоретическим путем, частично путем имитационного компьютерного моделирования, и, опираясь на них решить эту задачу. Ее решение создаст необходимый информационный базис для формирования расчетных моделей. С целью упрощения анализа на данном этапе примем также допущения об

идеальности вентилях и о том, что результирующий ток (13) на выходе выпрямительного устройства идеально сглажен, то есть содержит только постоянную составляющую, а пульсации (или высшие гармоники) выходного тока подавлены нагрузкой или фильтром. Как следует из (17) указанное условие справедливо даже при наличии небольшой индуктивности в цепи нагрузки, поскольку на частоте гармоник  $k\omega L_n$  индуктивное сопротивление возрастает, то амплитуды токов высших гармоник снижаются пропорционально квадрату индуктивного сопротивления нагрузки. Следовательно, если выполняется соотношение  $R_n \ll k\omega L_n$ , то высшими гармониками в цепи постоянного тока можно.

Ввиду того, что значения гармонических составляющих функции выпрямленного тока (13) малы, для инженерных расчетов их влиянием можно пренебречь. Учитывая формулы (19) спектр гармоник коммутационных функций в относительных единицах представляет собой спектр гармоник тока в относительных единицах или коэффициенты высших гармонических составляющих тока (коэффициент несинусоидальности тока).

$$K_{ij(v)} = I_{j(v)}^* = \frac{I_{j(v)}}{I_{j(1)}} \approx h_{j(v)}^* = \frac{h_{j(v)}}{h_{j(1)}}, \quad (32)$$

$$THD_{ij} = K_{ij} = I_j^* = \frac{\sqrt{\sum_{v=2}^{\infty} I_{j(v)}^2}}{I_{j(1)}} \approx h_{j(v)}^* = \frac{\sqrt{\sum_{v=2}^{\infty} h_{j(v)}^2}}{h_{j(1)}}, \quad (33)$$

где  $V$  - номер гармоники;

$I_{j(v)}$  - действующее значение тока  $V$ -ой гармоники;

$K_{ij(v)}$  - коэффициент  $V$ -ой гармонической составляющей тока, в о.е.;

$K_{ij}$  - коэффициент несинусоидальности кривой тока, в о.е.

Таким образом, для формул (30), (31) коэффициенты несинусоидальности и высших гармонических составляющих по току соответственно можно рассчитать по формулам.

- для электрической сети с нейтралью:

$$K_{ij(v)} = \frac{2 \sin \left[ (2k+1) \frac{\pi}{3} \right] \cdot \sin \left( \frac{\pi}{m} \right)}{\sqrt{3} (2k+1) \cdot \sin \left[ (2k+1) \frac{\pi}{m} \right]}, \quad (34)$$

$$\text{THD}_{I_j} = K_{I_j} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{3}\right)}{(2k+1)\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{m}\right)} \right)^2}; \quad (35)$$

- для сети без нейтрального провода:

$$K_{I_j(v)} = \frac{2 \sin\left[(m \cdot k \mp 1)\frac{\pi}{3}\right] \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\sqrt{3}(m \cdot k \mp 1) \cdot \sin\left[(m \cdot k \mp 1)\frac{\pi}{m}\right]}, \quad (36)$$

$$\text{THD}_{I_j} = K_{I_j} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\sin\left((mk \mp 1)\frac{\pi}{3}\right)}{(mk \mp 1)\sin\left((mk \mp 1)\frac{\pi}{m}\right)} \right)^2}. \quad (37)$$

**Схема замещения регулируемого выпрямителя линейными элементами.** Полученные результаты дают возможность представить нелинейный блок «Регулируемый m-пульсный вентильный преобразователь - R,L,C нагрузка» (рис. 1) схемами замещения с линейными источниками синусоидального тока, показанными на рис. 2 (для первой гармоники), рис. 3 (для гармоник, не кратных трем, в трехпроводных цепях) и рис.4 (для схем с нулевым проводом, где есть путь для протекания токов нулевой последовательности).

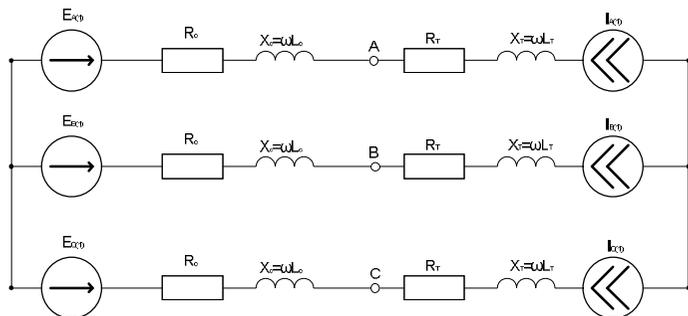


Рис. 2 – Схема замещения

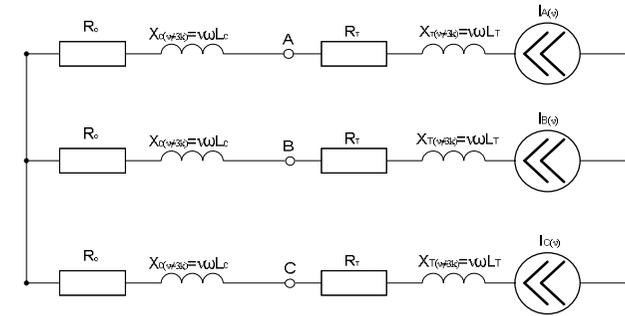


Рис. 3 – Схема замещения

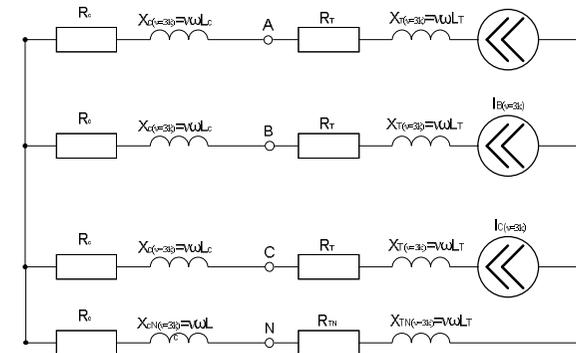


Рис. 4 – Схема замещения

Согласно принципу наложения, мгновенные значения тока любой ветви схемы равно сумме мгновенных значений токов отдельных гармоник. Аналогично, мгновенное значение напряжения на любом участке схемы равно сумме мгновенных значений напряжений отдельных гармоник на этом участке. Расчет производят для каждой из гармоник в отдельности. Для расчета согласно принципу наложения следует учитывать принятое допущения о том, что система напряжений синусоидальная и система питания имеет бесконечную мощность. Следовательно источники ЭДС присутствуют только в схеме замещения только для первой гармоники (Рис. 3). При расчете элементов схем замещения следует учитывать, что индуктивное сопротивление растёт прямо пропорционально частоте; поэтому для  $\nu$ -гармоники  $X_{L\nu}$  в  $\nu$  раз больше чем для первой гармоники. На схемах замещения  $X_{C\nu}$ ,  $X_{T\nu}$ ,  $X_{CN\nu}$ ,  $X_{TN\nu}$ , соответственно индуктивные сопротивления сети, трансформатора и нейтрального провода.

Токи источников тока рассчитывают по формулам (13), (34), (36):  
- для электрической сети с нейтралью:

$$I_{j(v)} \approx I_{d \max} \frac{2 \sin \left[ (2k+1) \frac{\pi}{3} \right] \cdot \sin \left( \frac{\pi}{m} \right)}{\sqrt{3} (2k+1) \cdot \sin \left[ (2k+1) \frac{\pi}{m} \right]}; \quad (38)$$

- для сети без нейтрального провода:

$$I_{j(v)} \approx I_{d \max} \frac{2 \sin \left[ (m \cdot k \mp 1) \frac{\pi}{3} \right] \cdot \sin \left( \frac{\pi}{m} \right)}{\sqrt{3} (m \cdot k \mp 1) \cdot \sin \left[ (m \cdot k \mp 1) \frac{\pi}{m} \right]}. \quad (39)$$

**Таким образом,** аналитическим методом для m-пульсного регулируемого вентильного преобразователя получены универсальные формулы фазных токов в виде гармонических рядов, дающие возможность рассчитать также для любого управляемого вентильного преобразователя коэффициенты высших гармонических составляющих и коэффициенты несинусоидальности. Определены расчетные модели управляемого вентильного преобразователя как источника токов высших гармоник. При заданном значении тока нагрузки, потребляемого вентильным преобразователем, с помощью полученных значений коэффициентов высших гармонических составляющих можно определить реальные значения генерируемых токов высших гармоник. Этим доказано, что любой управляемый вентильный преобразователь, являющийся для питающей сети нелинейной нагрузкой, можно эквивалентировать линейной схемой замещения как совокупностью источников тока основной и высших гармоник с рассчитанными по полученным формулам амплитудами и фазами токов для любых нагрузочных режимов.

**Список литературы:** 1. Волков И.В. Универсальные математические модели m-пульсных выпрямителей со смешанной RLC-нагрузкой в цепи постоянного тока / Волков И.В. Каршенов Д.П. // Техническая электродинамика. – 2012. – №3. 2. Галкин В.И. Промышленная электроника: Учеб. Пособие / В.И. Галкин. – Мн.:Выш.шк., 1989. – 336 с. 3. Гумен М.Б. Основы теорії електричних кіл: У 3 кн.// М.Б.Гумен, А.М. Гуржій, В.М. Співак, Ю.Г. Савченко; За ред. М.Б. Гумена. – К.: Вища шк., 2004. – 391с. 4. Жежеленко И.В. Качество электроэнергии на промышленных предприятиях / И.В. Жежеленко, Саенко Ю. Л. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 2005. – 261 с. 5. Забродин Ю.С. Промышленная электроника: Учебник для вузов / Ю.С. Забродин. – М.: Высш.школа, 1982 – 496 с. 6. Маевский О.А. Энергетические показатели вентильных преобразователей / О.А. Маевский – М.: Энергия, 1978. – 320 с. 7. Мерабишвили П.Ф., Ярошенко Е.М. Нестационарные электромагнитные процессы в системах с вентилями / П.Ф. Мерабишвили, Е.М. Ярошенко. – Кishenev: Штиинца, 1980. – 208 с. 8. Шидловский А.К. Высшие гармоники в низковольтных электрических сетях / А.К. Шидловский, А.Ф. Жаркин. – К.: Наукова думка, 2005. – 207 с.

Поступила в редколлегию 30.03.2012