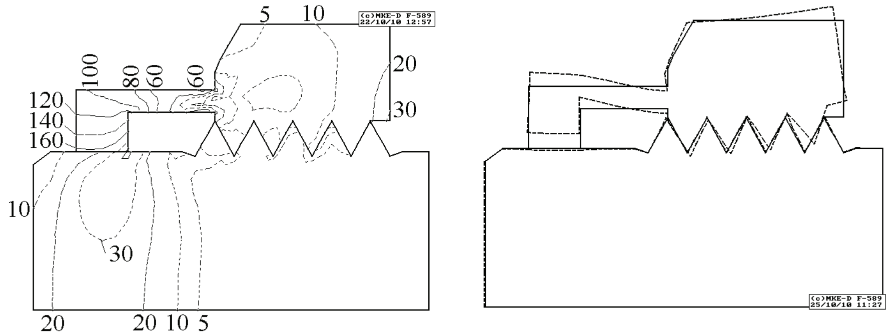


Рисунок 6 – Розподіл еквівалентних напружень і схема деформування в стопорній гайці при її навантаженні силою 1 т, яка імітує вплив закріпленої деталі

**Список літератури:** **1.** А.с. № 179556 СССР. Самостопорящаяся гайка / *Г.Я.Андреев, В.А.Белостоцкий, Н.М.Лактионов, Б.М.Арпентьев, В.И.Кушаков* // Бюл. изобрет. – 1966. – № 5. **2.** *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541. с. **3.** *Сегерлинд Р.* Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с. **4.** *Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф.* ANSYS для инженеров: справочное пособие. – М.: Машиностроение, 2004. – 512 с. **5.** *Миллер В.С.* Контактный теплообмен в элементах высокотемпературных машин. – Киев: Наукова думка, 1966. – 164 с.

*Надійшла до редколегії 14.09.2010*

УДК 539.374

***В.Г.БАБАДЖАНОВА***, Сумгаитский государственный университет, Азербайджан

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМЕРНОЙ НЕСВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ

Пов'язані і не пов'язані задачі про термомеханічної ударі по в'язкопружних тілу досліджені багатьма авторами в конкретних ядрах. Залежність властивості матеріалу від температури, тобто залежність функцій релаксації і повзучості від температури істотно ускладнюють зазначені завдання. У статті вирішується одномірна незв'язана завдання термовязкоупругості за допомогою інтегрального перетворення Лапласа і методом малого параметра для довільних спадкових ядер.

Related and unrelated tasks on thermomechanical impact on the viscoelastic body studied by many authors in specific nuclei. The dependence of material properties on temperature, ie dependence of relaxation and creep functions of the temperature significantly complicate the task. Article solved one-dimensional unrelated tasks thermoviscoelasticity using the integral Laplace transform and the method of small parameter for arbitrary hereditary kernels.

Связанные и несвязанные задачи о термомеханическом ударе по вязкоупругому телу исследованы многими авторами в конкретных ядрах. Зависимость свойства материала от температуры, т.е. зависимость функций релаксации и ползучести от температуры, существенно усложняют указанные задачи.

В статье решается одномерная несвязанная задача ТВУ с помощью интегрального преобразования Лапласа и методом малого параметра для произвольных наследственных ядер.

Рассмотрим задачу о термомеханическом продольном ударе по полубесконечному вязкоупругому стержню, когда свойства материала стержня зависят от температуры. Будем считать, что уравнение притока тепла определяется отделением из общей системы уравнений ТВУ и решается самостоятельно, то есть рассматривается случай невзаимосвязной ТВУ. Математическая задача сводится к интегрированию уравнения движения и теплопроводности:

$$\sigma_{ij,j} - \rho F_i = \rho \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial t^2}; \tag{1}$$

$$ж \frac{\partial^2 \Theta(x,t)}{\partial x^2} = \varphi \frac{\partial \Theta(x,t)}{\partial t};$$

при начальных и граничных условиях.

$$\Theta(x,0) = 0; \qquad u(x,0) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0;$$

$$\begin{aligned} &\Theta(+0,t) = A\psi(t); \quad \sigma(0,t) = \sigma^0 \varphi(t); \\ &\Theta \to 0, \ \sigma \to 0, \ \text{при} \ x \to \infty, \\ &\quad æ = \aleph / c \cdot p. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – заданные функции, $\sigma_0$, $A$ – некоторые постоянные, $\Theta(x,0) = T(x,t) - T_0$, $T_0$ – исходная температура, $\chi$ – коэффициент теплопроводности, $c$ – удельная теплоемкость при постоянной деформации, $\rho$ – плотность материала.

Связь между напряжением – деформацией -временем и температурой берем в виде

$$\sigma(x,t) = \int_0^t R(t' - \tau') d\left[e(x,\tau) - \alpha\Theta(x,\tau)\right] \tag{3}$$

где $R(t')$ – функция релаксации, $t'$ – приведенное время, которое дается формулой

$$t' = \int_0^t \frac{d\xi}{\alpha_T(T(x,\xi))}. \tag{4}$$

Функция температурно-временной редукции $\alpha_T(T)$ для термореологически простых материалов выражается формулой Вильямса-Ландера-Ферри

(ВЛФ), тогда

$$f(x,t)=\alpha_T^{-1}(T)=\exp\left\{\frac{b_0}{T}\frac{\Theta(x,t)}{T_0}\frac{1}{1+\Theta(x,t)/T_0}\right\}, \tag{5}$$

где $b_0$ – константа материала. Из (1), (2) легко найти, что

$$\Theta(x,t)=\frac{Ax}{2}\sqrt{\frac{c}{æ\pi}}\int_0^t \psi(t-s)s^{-3/2}e^{\frac{ex^2}{4sæ}}ds, \tag{6}$$

$$\lim_{x\to+0}\Theta(x,t)=A\cdot\Psi(t).$$

При $|\Theta(x,t)/T_0| << 1$ функцию $f(x,t)$ разлагаем в ряд по степеням $\Theta(x,t)/T_0$

$$f(x,t)=1+\frac{b_0\Theta}{T_0^2}-\frac{b_0}{T_0^3}\left(1-\frac{b_0}{T_0}\right)\Theta^2+\frac{b_0}{T_0^4}\left(1-\frac{2b_0}{T_0}+\frac{b_0^2}{T_0^2}\right)\Theta^3-$$

$$-\frac{b_0}{T_0^5}\left(1-\frac{3b_0}{T_0}+\frac{3b_0^2}{T_0^2}\right)\Theta^4+\frac{b_0\Theta^5}{T_0^6}\left(1-\frac{4b_0}{T_0}+\frac{6b_0^2}{T_0^2}\right)+\dots. \tag{7}$$

Обозначим $\sup|\Theta(x,t)|=\Theta_0$, $x\in[0,\infty)$, $t\in[0,\infty)$ и примем $\lambda=b_0\Theta_0/T_0^2$ в качестве малого параметра.

Тогда учитывая (7) в (4), получаем

$$t'=t+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\omega_k(x,t) \tag{8}$$

где

$$\omega_1(x,t)=\frac{1}{\Theta_0}\int_0^t\Theta(x,\xi)d\xi;$$

$$\omega_2(x,t)=\left(1-\frac{T_0}{b_0}\right)\frac{1}{\Theta_0^2}\int_0^t\Theta^2(x,\xi)d\xi;$$

$$\omega_2(x,t)=\left(\frac{T_0^2}{b_0^2}-\frac{2T_0}{b_0}\right)\frac{1}{\Theta_0^3}\int_0^t\Theta^3(x,\xi)d\xi;$$

…………………………………………………

С учетом (8) функцию $R(t')$ разлагаем в ряд по степеням $\lambda$, где

$$R(t')=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k R_k(x,t); \tag{9}$$

$$R_0(t)=R(t);\quad R_1(x,t)=\dot{R}(t)\omega_1(x,t);$$

$$R_2(x,t)=\dot{R}(t)\omega_2(x,t)+\frac{1}{2}\ddot{R}(t)\omega_1^2(x,t);$$

$$R_3(x,t)=\frac{1}{6}\ddot{R}(t)\omega_1^3(x,t)+\frac{1}{2}\ddot{R}(t)\omega_1(x,t)\cdot\omega_2(x,t)+\frac{1}{6}\dot{R}(t)\omega_3(x,t);$$

……………………………………………………………………..

формулы (7 – 9) справедливы при небольших изменениях температуры, которые имеют место в переходных волновых процессах. Дадим некоторое улучшение этих формул. Пусть $\Theta_1(t) = \sup|\Theta(x,t)| \;\; x \in [0,\infty)$ тогда нетрудно получить (из формулы ВЛФ)

$$f(x,t) = \exp\left[T_0\left(1 - \frac{b_0}{b_0+\Theta_1}\frac{1}{1-z}\right)\right], \qquad z = \frac{\Theta_1 - \Theta}{\Theta_1 + b_0};$$

$$T_0 = c_1^g; \quad b_0 = c_2^g.$$

Учитывая, что $|z| < 1$, экспоненциальную функцию разлагаем в ряд по степеням $z$; в итоге получаем

$$f(x,t) = f_0(t)\left\{1 - \frac{T_0 b_0}{(b_0+\Theta_1)^2}(\Theta_1+\Theta) + \frac{T_0 b_0(\Theta_1+\Theta)^2}{(\Theta_1+b_0)^2}\left(\frac{\Theta_1-\Theta}{\Theta_1+\Theta}\right)^2 + \ldots\right\}.$$

Функция $b_0 T_0(\Theta_1+\Theta)/(\Theta_1+b_0)^2$ в некотором диапазоне температур является ограниченной единицей, поэтому величину $\lambda = \sup|(\Theta_1-\Theta)/(\Theta_1+\Theta)|$ можно принять как малый параметр. При этом

$$f(x,t) = f_0(t) + \lambda f_1(x,t) + \lambda^2 f_2(x,t) + \ldots;$$

$$f_0(x,t) = \exp\left[T_0\left(1 - \frac{b_0}{b_0+\Theta_1}\right)\right],$$

$$f_1(x,t) = -f_0(t)\cdot\frac{T_0 b_0(\Theta_1+\Theta)}{(b_0+\Theta_1)^2};$$

$$f_2(x,t) = f_0(t)\cdot\frac{T_0 b_0(\Theta_1+\Theta)^2}{(b_0+\Theta_1)^3};$$

……………………………………..

Приведенное время выражается формулой:

$$t' = \omega_0(t) + \lambda\omega_1(x,t) + \lambda^2\omega_2(x,t) + \ldots\ldots \tag{10}$$

где

$$\omega_k(x,t) = \int_0^t f_k(x,\xi)d\xi; \qquad k = 0,1,2,\ldots\ldots$$

Разлагая $R(t')$ в ряд по степеням $\lambda$, находим:

$$R(t') = R_0(t) + \lambda R_1(x,t) + \lambda^2 R_2(x,t) + \ldots\ldots;$$

$$R_0(t) = R[\omega_0(t)];$$

$$R_1(x,t) = \dot{R}[\omega_0(t)]\omega_1(x,t); \tag{11}$$

$$+\frac{1}{2}\ddot{R}[\omega_0(t)]R_2(x,t) = \dot{R}[\omega_0(t)]\omega_2(x,t)\omega_1^2(x,t);$$

………………………………………………………

Формулы (10), (11) отличаются от (8), (9) тем, что здесь в начальном приближении температура стержня считается равной, $T_0 + \Theta_1(t)$ то есть свойства материала стержня уже считаются измененными.

Решение задач (1), (3), (4) представляем в виде ряда по степеням $\lambda$

$$\sigma(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sigma_n(x,t);$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t). \tag{12}$$

Учитывая (11), (12) в формуле (3) получим

$$\sigma_0(x,t) = \int_0^t R_0(t-\tau) d\left(\frac{\partial u_0(x,\tau)}{\partial x} - \alpha\,\Theta(x,\tau)\right); \tag{13}$$

$$\sigma_1(x,t) = \int_0^t R_1(x,t-\tau) d\left(\frac{\partial u_0(x,\tau)}{\partial x} - \alpha\,\Theta(x,\tau)\right) +$$

$$+ \int_0^t R_0(t-\tau) d\left(\frac{\partial u_1(x,\tau)}{\partial x}\right);$$

$$\sigma_2(x,t) = \int_0^t R_2(x,t-\tau) d\left(\frac{\partial u_0(x,\tau)}{\partial x} - \alpha\,\Theta(x,\tau)\right) +$$

$$+ \int_0^t R_1(x,t-\tau) d\left(\frac{\partial u_0(x,\tau)}{\partial x}\right) + \int_0^t R_0(t-\tau) d\left(\frac{\partial u_2(x,\tau)}{\partial x}\right);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_n(x,t) = \int_0^t R_n(x,t-\tau) d\left(\frac{\partial u_0(x,\tau)}{\partial x} - \alpha\,\Theta(x,\tau)\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int_0^t R_{n-k}(x,t-\tau) d\left(\frac{\partial u_k(x,\tau)}{dx}\right).$$

Учитывая (12) и (13) в уравнении движения (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\lambda$, получаем:

$$\rho \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \int_0^t R_0(t-\tau) d\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right);$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \int_0^t R_0(t-\tau) d\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) + \int_0^t R_1(x,t-\tau) d\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right) +$$

$$+ \int_0^t \frac{\partial R_1(x,t-\tau)}{\partial x} d\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - \alpha\Theta\right); \tag{14}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \int_0^t R_0(t-\tau) d\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) + \int_0^t \frac{\partial R_1(x,t-\tau)}{\partial x} d\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) +$$

$$+\int_0^t R_1(x,t-\tau)d\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)+\int_0^t R_2(x,t-\tau)\,d\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)+$$

$$+\int_0^t \frac{\partial R_2(x,t-\tau)}{\partial x}d\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}-\alpha\,\Theta\right);$$

.............................................

$$\rho\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}=\int_0^t R_n(x,t-\tau)d\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)+$$

$$+\int_0^t \frac{\partial R_n(x,t-\tau)}{\partial x}d\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}-\alpha\,\Theta\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\int_0^t \frac{\partial R_{n-m}(x,t-\tau)}{\partial x}+d\left(\frac{\partial u_m}{\partial x}\right)+\sum_{m=1}^{n}\int_0^t R_{n-m}(x,t-\tau)d\left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}\right).$$

.............................................................

Уравнения (13), (14) решаются при следующих начальных и граничных условиях

$$u_n(x,0)=\frac{\partial u_n}{\partial t}\Big|_{t=0}, \qquad (n=1,2,3\ldots\ldots\ldots);$$

$$\sigma_n\to 0;\quad x\to\infty;\quad \sigma_0(0,t)=\sigma^0\varphi(t);$$

$$\sigma_n(0,t)=0, \qquad (n=1,2,3\ldots\ldots\ldots).$$

Из этих соотношений следует, что для определения нулевого приближения $u_0(x,t)$ решается исходная задача с изменной и независящей от координаты $x$ функцией релаксации $R_0(t)$. Последующие приближения определяются из того же уравнения с некоторыми «фиктивными силами» определенными через решения предыдущих приближений.

Применяя преобразование Лапласа к первому уравнения (14) находим для определения $\overline{u}_0(x,p)$

$$\frac{d^2\overline{u}_0(x,p)}{dx^2}-\frac{\rho p}{\overline{R}_0(p)}\overline{u}_0(x,p)=-\alpha A\overline{\phi}(\rho)\sqrt{\frac{cp}{\chi}}e^{-x\sqrt{\frac{cp}{\chi}}} \tag{15}$$

при $\frac{cp}{\chi}\neq\frac{\rho\,p}{\overline{R}_0(p)}$.

Решение этого уравнения, ограниченное при $x\to\infty$, будет

$$\overline{u}_0(x,p)=\overline{c}(p)e^{-x\sqrt{\frac{\rho p}{R_0}}}+\frac{\alpha A\overline{R}_0\overline{\phi}\sqrt{c\chi}}{\sqrt{p}\left(\rho\chi-c\overline{R}_0\right)}e^{-x\sqrt{\frac{cp}{\chi}}}.$$

Коэффициент $\overline{c}(p)$ определяется из граничного условия

$$\overline{\sigma}_0(0,p)=\sigma^0\overline{\varphi}(p).$$

Окончательно получаем:

$$\overline{u}_0(x,p)=\frac{\alpha A\overline{R}_0\overline{\phi}\sqrt{c\chi}}{\sqrt{p}\left(\rho\chi-c\overline{R}_0\right)}e^{-x\sqrt{\frac{cp}{\chi}}}-\frac{\overline{R}_0}{\rho P}\left(\frac{\sigma_0\overline{\varphi}}{p\overline{R}_0}+\frac{\alpha Ac\rho\overline{\phi}}{\rho\chi-c\overline{R}_0}\right)e^{-x\sqrt{\frac{\rho p}{R_0}}} \tag{16}$$

В преобразованиях Лапласа уравнение для определения $\overline{u}_1(x,p)$ записывается в виде

$$\frac{d^2\overline{u}_1(x,p)}{dx^2}-\frac{\rho p}{\overline{R}_0(p)}\overline{u}_1(x,p)=-\overline{\Psi}_1(x,p) \tag{17}$$

где

$$\overline{\Psi}_1(x,p)=\frac{d}{dx}\left[\frac{\overline{R}_1(x,p)}{\overline{R}_0(p)}\left(\frac{d\overline{u}_0(x,p)}{dx}-\alpha\overline{\Theta}(x,p)\right)\right].$$

Учитывая здесь выражения (6) и (16), находим

$$\Psi_1(x,p)=\overline{F}_1(p)\left[\frac{d\overline{R}_1(x,p)}{dx}-\overline{R}_1(x,p)\sqrt{\frac{cp}{\chi}}\right]\times e^{-x\sqrt{\frac{cp}{\chi}}}+$$

$$+\ \overline{F}_2(p)\left[\frac{d\overline{R}_1(x,p)}{dx}-\overline{R}_1(x,p)\sqrt{\frac{\rho p}{\overline{R}_0}}\right]\times e^{-x\sqrt{\frac{\rho p}{R_0}}};$$

$$\overline{F}_1(p)=\left(1/\overline{R}_0\right)\frac{\alpha A\overline{\phi}\rho c}{\rho\chi-c\overline{R}_0};$$

$$\overline{F}_2(p)=\frac{\sigma^0\overline{\varphi}(p)}{p\overline{R}_0^2}+\overline{F}_1(p).$$

Общее решение уравнения (17) будет

$$\overline{u}_1(x,p)=\overline{B}(p)e^{-\sqrt{\rho p/\overline{R}_0}}+\sqrt{\frac{\overline{R}_0}{\rho p}}e^{-\sqrt{\rho p/\overline{R}_0}}\int\overline{\Psi}_1(x,p)e^{-\sqrt{\rho p/\overline{R}_0}}dx \tag{18}$$

Здесь $\overline{B}(p)$ определяется из граничного условия $\overline{\sigma}_1(0,p)=0$ и выражается формулой

$$\overline{B}(p)=\frac{\sigma^0\overline{\varphi}\overline{R}_1(0,p)}{\sqrt{\rho}\left(p\overline{R}_0\right)^{3/2}}-\sqrt{\frac{\overline{R}_0}{\rho p}}\overline{F}_3(0,p)+\overline{F}'_3(0,p)\frac{\overline{R}_0}{\rho p}, \tag{19}$$

где обозначены:

$$\overline{F}_3'(0,p)=\overline{\Psi}_1(0,p);$$

$$\overline{F}_3(x,p)=\int\overline{\Psi}_1(x,p)e^{-\sqrt{\rho p/\overline{R}_0}}dx.$$

С учетом выражения функции $\overline{\Psi}_1(x,p)$ функцию $\overline{F}_3(x,p)$ можно представить в виде

$$\overline{F}_3(x,p)=\overline{F}_1(p)\overline{J}_1(x,p)+\overline{F}_2(p)\left[\overline{J}_2(x,p)-\overline{R}_1(x,p)\right];$$

$$\overline{J}_1(x,p)=\int\left[\frac{d\overline{R}_1(x,p)}{dx}-\sqrt{\frac{cp}{\chi}}\overline{R}_1(x,p)\right]\times\exp\left[-x\left(\sqrt{\frac{cp}{\chi}}-\sqrt{\frac{\rho p}{\overline{R}_0}}\right)\right]dx\ ;$$

$$\overline{J}_2(x,p)=\sqrt{\frac{\rho p}{\overline{R}_0}}\int\overline{R}_1(x,p)dx\ .$$

Для определения $u_2(x,p)$ имеем уравнение,
где

$$\frac{d^2\overline{u}}{dx^2}-\frac{\rho p}{R_0}\overline{u}_2=\overline{\Psi}_2(x,p);$$

$$\overline{\Psi}_2(x,p)=-\frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{R}_1}{\overline{R}_0}\frac{d\overline{u}_1}{dx}\right)-\frac{d}{dx}\left[\frac{\overline{R}_2(x,p)}{\overline{R}_0(p)}\left(\frac{d\overline{u}_0}{dx}-\alpha\overline{\Theta}\right)\right].$$

Общее решение этого уравнения находится аналогично предыдущему

$$\overline{u}_2(x,p)=\overline{D}(p)e^{-x\sqrt{\frac{\rho p}{\overline{R}_0}}}-\sqrt{\frac{\overline{R}_0}{\rho p}}e^{-x\sqrt{\frac{\rho p}{\overline{R}_0}}}\int\overline{\Psi}_2(x,p)e^{-\sqrt{\frac{\rho p}{\overline{R}_0}}}dx\ .$$

Функция $\overline{D}(p)$ определяется из условия $\overline{\sigma}_2(0,p)=0$ и выражается формулой

$$\overline{D}(p)=\sqrt{\frac{\overline{R}_0}{\rho p}}\frac{1}{p\overline{R}_0^2}\left[\overline{R}_2(0,p)-\frac{\overline{R}_1^2(0,p)}{\overline{R}_0}\right]\sigma^0\overline{\varphi}+\sqrt{\frac{\overline{R}_0}{\rho p}}\times\left[\overline{F}_4(0,p)-\sqrt{\frac{\overline{R}_0}{\rho p}}\overline{F}_4'(0,p)\right],$$

где

$$\overline{F}_4(x,p)=\int\overline{\Psi}_2(x,p)\exp\left(x\sqrt{\frac{\rho p}{\overline{R}_0}}\right)dx\ ;$$

$$\overline{F}'_4(x,p)=\overline{\Psi}_2(x,p).$$

Вычислим $\overline{F}_4(x,p)$. Для этого предварительно вычислим функцию $\overline{\Psi}_2(x,p)$.

Учитывая (6), (16), (18), (19) в выражении для $\overline{\Psi}_2(x,p)$, после некоторых операций получаем:

$$\overline{\Psi}_2(x,p)=\exp\left(-x\sqrt{\frac{\rho p}{\overline{R}_0}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\overline{R}_0}\right)\left[\frac{d\overline{R}_1}{dx}-\sqrt{\frac{\rho p}{\overline{R}_0}}\overline{R}_1\right]\times$$

$$\times\left[\overline{B}(p)\sqrt{\frac{\rho p}{\overline{R}_0}}+\overline{F}_3(x,p)\right]-\sqrt{\frac{\overline{R}_0}{\rho p}}\frac{\overline{R}_1}{R_0}\frac{d\overline{\Psi}_1(x,p)}{dx}-$$

$$-\overline{\Psi}_1(x,p)\frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{\overline{R}_0}{\rho p}}\left[\frac{d\overline{R}_1}{dx}-\sqrt{\frac{\rho p}{\overline{R}_0}}\overline{R}_1\right]+\overline{F}_1(p)\left[\frac{d\overline{R}_2}{dx}-\overline{R}_2\sqrt{\frac{cp}{\chi}}\right]$$

$$\times\exp\left(-x\sqrt{\frac{cp}{\chi}}\right)-F_2(p)\left[\frac{d\overline{R}_2}{dx}-\sqrt{\frac{\rho p}{\overline{R}_0}}\overline{R}_2\right]\times\exp\left(-x\sqrt{\frac{\rho p}{\overline{R}_0}}\right).$$

Тогда функция $\overline{F}_4(x,p)$ будет:

$$\overline{F}_4(x,p)=\frac{1}{\overline{R}_0}\sqrt{\frac{\rho p}{\overline{R}_0}}\overline{B}(p)\overline{R}_1+\frac{1}{\overline{R}_0}\int\left[\frac{d\overline{R}_1(x,p)}{dx}\overline{F}_3(x,p)\right]dx-$$

$$-\frac{\rho p}{\overline{R}_0^2}\overline{B}(p)\int\overline{R}_1(x,p)dx-\frac{1}{\overline{R}_0}\sqrt{\frac{\rho p}{\overline{R}_0}}\int\left[\overline{R}_1(x,p)\overline{F}_3(x,p)\right]dx-$$

$$-\frac{1}{\overline{R}_0}\sqrt{\frac{\overline{R}_0}{\rho P}}\int\overline{R}_1(x,p)\overline{\Psi}_1'(x,p)e^{x\sqrt{\rho p/\overline{R}_0}}dx+$$

$$+\frac{1}{\overline{R}_0}\int\overline{R}_1(x,p)\overline{\Psi}_1(x,p)e^{x\sqrt{\rho p/\overline{R}_0}}dx-\frac{1}{\overline{R}_0}-\sqrt{\frac{\overline{R}_0}{\rho P}}\int\overline{R}_1(x,p)\overline{\Psi}_1(x,p)e^{x\sqrt{\rho p/\overline{R}_0}}dx+$$

$$+\overline{F}_1(p)\int\overline{R}_2'(x,p)e^{x\left(\sqrt{\frac{\rho p}{\overline{R}_0}}-\sqrt{\frac{cp}{\chi}}\right)}dx-\overline{F}_1(p)\int\overline{R}_2(x,p)\sqrt{\frac{cp}{\chi}}e^{x\left(\sqrt{\frac{\rho p}{\overline{R}_0}}-\sqrt{\frac{cp}{\chi}}\right)}dx-$$

$$-\overline{F}_2(p)\overline{R}_2(x,p)+\overline{F}_2(p)\sqrt{\frac{\rho p}{\overline{R}_0}}\int\overline{R}_2(x,p)dx.$$

Здесь $\overline{B}(p)$ выражается формулой (19).

Функция $\overline{u}_2(x,p)$ будет в виде:

$$\overline{u}_2(x,p)=\left\{\frac{1}{p\overline{R}_0^2}\sqrt{\frac{\overline{R}_0}{\rho p}}\left[\overline{R}_2(0,p)-\frac{\overline{R}_1^2(0,p)}{\overline{R}_0}\right]\sigma^0\overline{\varphi}+\right.$$

$$+\frac{\overline{B}(p)}{\overline{R}_0}\overline{R}_1+\frac{\overline{J}_3(0,p)}{\overline{R}_0}\sqrt{\frac{\overline{R}_0}{\rho p}}-\frac{\overline{J}_4(0,p)}{\overline{R}_0}-\frac{\overline{J}_5(0,p)}{\rho p}+$$

$$+\frac{\overline{J}_6(0,p)}{\overline{R}_0}\sqrt{\frac{\overline{R}_0}{\rho p}}-\frac{\overline{J}_7(0,p)}{\overline{R}_0}+\sqrt{\frac{\overline{R}_0}{\rho p}}\times \tag{20}$$

$$\times\left[\overline{F}_1(p)\overline{J}_8(0,p)-\overline{F}(p)\overline{J}_9(0,p)\sqrt{\frac{cp}{\chi_1}}\right]-\overline{F}_2(p)\left[\overline{R}_2(0,p)+\overline{J}_{10}(0,p)-\right.$$

$$\left.\left.-\overline{F}_4'(0,p)\sqrt{\frac{\overline{R}_0}{\rho p}}\overline{F}_4'(x,p)\right]\right\}\times\exp\left(-x\sqrt{\frac{\rho p}{\overline{R}_0}}\right)$$

где обозначены:

$$\overline{J}_3(0,p)=\left[\int\overline{R}'(s,p)\overline{F}_3(s,p)ds_1\right]_{s=0};$$

$$\bar{J}_4(0,p)=\left[\int \overline{R}_1(s,p)\overline{F}_3(s,p)ds\right]_{s=0};$$

$$\bar{J}_5(0,p)=\left[\int \overline{R}_1(s,p)\overline{\Psi}'(s,p)e^{x\sqrt{\rho p/\overline{R}_0}}ds_1\right]_{s=0};$$

$$\bar{J}_6(0,p)=\left[\int \overline{R}_1(s,p)\overline{\Psi}(s,p)e^{x\sqrt{\rho p/\overline{R}_0}}ds_1\right]_{s=0};$$

$$\bar{J}_7(0,p)=\left[\int \overline{R}'(s,p)\overline{\Psi}_1(s,p)e^{x\sqrt{\rho p/\overline{R}_0}}ds_1\right]_{s=0};$$

$$\bar{J}_8(0,p)=\left\lfloor\int \overline{R}_2'(s,p)\exp\left(s\left(\sqrt{\rho p/\overline{R}_0}-\sqrt{cp/\chi}\right)\right)ds\right\rfloor_{s=0};$$

$$\bar{J}_9(0,p)=\left\lfloor\int \overline{R}_2(s,p)\exp\left(s\left(\sqrt{\rho p/\overline{R}_0}-\sqrt{cp/\chi}\right)\right)ds\right\rfloor_{s=0};$$

$$\bar{J}_{10}(0,p)=\left\lfloor\int \overline{R}_2(s,p)ds\right\rfloor_{s=0}.$$

Таким образом, окончательное решение поставленной задачи приведено к вычислению обратных преобразований Лапласа функций (16), (18) и (20).

Оригиналом выражения (16) является

$$u_0(x,t)=\alpha A\sqrt{c\chi}\phi(t)\cdot R_0(t)\cdot L_1(t)\cdot(1/\pi t)\exp\left(-\frac{cx^2}{4\chi t}\right)-$$

$$-\left\lfloor\sigma^0\varphi(t)\cdot\dot{\Pi}_0(t)+\alpha A\rho c\phi(t)\cdot L_1(t)\right\rfloor\cdot L_2(x,t). \tag{21}$$

где $\Pi_0(t)=\left(\rho\overline{R}_0\right)^{-1}$ является нулевым приближением, звездочка означает обычную свертку функций:

$$f(t)\cdot g(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau,$$

а через $L_1(t)$ и $L_2(x,t)$ обозначены

$$L_1(x,t)\div\frac{1}{\rho\chi-c\overline{R}_0};\qquad L_2(x,t)\div\int_x^\infty \dot{W}\left(t,\frac{\tau}{c_0}\right)d\tau,$$

где точкой сверху обозначена производная по времени

$$W\left(t,\frac{x}{c_0}\right)=\delta\left(t-\frac{x}{c_0}\right)+\frac{\varepsilon x}{2c_0}M_1\left(t-\frac{x}{c_0}\right)+\ldots$$

$$+\ldots+\frac{\varepsilon^n}{2^{2n}n!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2n-k-2)!}{k!(n-k-1)!}\times\left(\frac{2x}{c_0}\right)^{k+1}M_N^{(k)}\left(t-\frac{x}{c_0}\right)+\ldots;$$

$$M_0(t)=\delta(t);\ M_1(t)=E_0\Pi(t)-k(t);\ M_2(t)=M_1(t)\cdot M_0(t)$$

..........................................................................................

$$M_n(t) = M_1(t)\cdot M_{n-1}(t).$$

Восстановление оригинала $L_1(t)$ не вызывает затруднений. Представляя $R_0(p)$ в виде:

$$\overline{R}_0(p) = R_0(0)\left(1-\varepsilon\,\overline{\Gamma}_0\right),$$

где $\varepsilon > 0$ – некоторый малый параметр, а $\left|\overline{\Gamma}_0(p)\right| < 1$ и учитывая, что при больших $|p|$,

$$\left|\varepsilon\, cR_0(0)\overline{\Gamma}_0(p)\left[\rho\,\chi\, p - c\overline{R}_0(0)\right]\right|^{-1} < 1$$

находим

$$L_1(t) = \left[\frac{\delta(t)}{\rho\chi} + \frac{cR_0(0)}{\rho^2\chi^2} e^{-\frac{cR_0(0)}{\rho\chi}} H(t)\right]\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\varepsilon\, cR_0(0)}{\rho\,\chi}\right)^n A_n(t),$$

где

$$A_0(t) = \delta(t);\qquad A_1(t) = \Gamma(t)\cdot\exp\left(-t\,R_0(0)c/\rho\chi\right);$$
$$A_n(t) = A_1(t)\cdot A_{n-1}(t).$$

Нахождение оригинала функций $u_1(x,p)$ и $\overline{u}_2(x,p)$ вычисляются аналогично и не представляет трудности.

Рассмотрим пример определения функций $\omega_1(x,t)$ и $R_i(x,t)$, ($i = 0,1,2,\ldots$) когда

$$\phi(t) = \delta(t);\qquad R(t) = B\exp(-lt),$$

где $B$ и $l$ – постоянные. Тогда

$$\Theta(x,t) = \frac{Ax}{2t\sqrt{t}}\sqrt{\frac{c}{\chi\pi}}\, e^{-\frac{cx^2}{4\chi^t}}\quad \text{и}\quad \Theta_0 = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{c}{\chi\pi}}$$

В формулах (10), (11) вместо $\Theta_1(t)$ подставляя $\Theta_0$, легко находим

$$\omega_0(t) = A_0 t;\qquad A_0 = \exp\left[(b_0/T_0)\left(1 - T_0/(T_0+\Theta_0)\right)\right];$$

$$\omega_1(x,t) = -\frac{A_0\Theta_0 b_0 t}{\lambda(T_0+\Theta_0)^2}\left[\frac{x}{t}\sqrt{\frac{c}{\chi\pi}}\left(\frac{cx^2}{4\chi t}\right)^{-3/2}\times\Gamma\left(\frac{3}{2},\frac{cx^2}{4\chi t}\right) - 1\right];$$

$$\omega_2(x,t) = -\frac{A_0\Theta_0 b_0}{\lambda^2(T_0+\Theta_0)^3}\left(\frac{b_0}{2(T_0+\Theta_0)} - 1\right)\times$$
$$\times\left[\Theta_0 t - \frac{8\chi T_0}{\sqrt{\pi}cx^2}\Gamma\left(2,\frac{cx^2}{4\chi t}\right)\times\frac{\chi T_0^2}{c\Theta_0 x^2\pi}\Gamma\left(2,\frac{cx^2}{4\chi t}\right)\right];$$

$$R_0(t) = R(\omega_0(t)) = B\exp(-A_0 lt);$$
$$R_1(x,t) = -A_0 Bl(\omega_1(x,t)\exp(-Alt));$$

$$R_2(x,t)=A_0Bl\left(\frac{A_0 l}{2}\omega_1^2(x,t)-\omega_2(x,t)\right)\exp(-A_0 lt)$$

………………………………………………………..

Здесь $\Gamma(y,z)$ – неполная гамма-функция. По схеме (7 – 9) эти функции будут

$$\omega_0(t)=t; \qquad \omega_1(x,t)=\frac{4\chi T_0}{cx^2\Theta_0}\Gamma\left(\frac{3}{2},\frac{cx^2}{4\chi t}\right);$$

$$\omega_2(x,t)=\frac{4\chi T_0}{cx^2\pi\Theta_0^2}\left(1-\frac{T_0}{b_0}\right)\Gamma\left(2,\frac{cx^2}{4\chi t}\right);$$

$$R_0(t)=B\exp(-lt); \qquad R_1(x,t)=Bl\exp(-lt)\omega_1(x,t);$$

$$R_2(x,t)=Bl\left(\frac{l}{2}\omega_1^2(x,t)-\omega_2(x,t)\right)\exp(-lt).$$

Если на торце стержня воздействует периодически изменяющаяся температура, то при $\psi(t)=\sin\omega t$, выражение (6) примет вид

$$\Theta(x,t)=Ae^{-x\sqrt{c\omega/2\chi}}\sin\left(\omega t-x\sqrt{c\omega/2\chi}\right)-(A/\pi)\int_0^\infty e^{-tr}\frac{\omega}{\omega^2+r^2}\sin x\sqrt{\frac{cr}{\chi}}dr\ .$$

Интеграл, входящий в правую часть этой формулы представляет собой интеграл Лапласа, только в нем $p$ заменено на $t$, а $t$ на $r$. При $t\to\infty$ он стремится к нулю, следовательно, изображает затухающий с увеличением времени переходный процесс.

Таким образом, функция $\Theta(x,t)$ определяется в основном своим первым членом, который показывает, что температура в точке $x > 0$ колеблется так же, как температура на границе $x = 0$, но со сдвигом фазы на $x\sqrt{c\omega/2\chi}$ и с амплитудой равной $e^{-x\sqrt{c\omega/2\chi}}$.

**Список литературы:** **1.** *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. – М., Наука, 1970. **2.** *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с. **3.** *Суворова Ю.В.* О применении интегральных преобразований в одномерных волновых задачах наследственной вязкоупругости / В сб: Механика деформируемых тел и конструкций. – М.: Машиностроение, 1975. – С. 47-56. **4.** *Курбанов Н.Т., Бабаджанова В.Г.* Определяющие соотношения для термореологически сложных вязкоупругих материалов // Актуальные проблемы современной науки. – М.: 2009. – № 2. – С. 90-96. **5.** *Карнаухов В.Г.* Связанные задачи термовязкоупругости. – К.: Наукова думка, 1982. – 260 с.

*Поступила в редколлегию 21.01.2010*