

столбцы B^+ доказывается легко, а затем по индукции доказывается возможность такого преобразования для всего определителя B^- . Раскрыв преобразованный определитель B^- по элементам 1-го столбца, получим уравнение относительно тех Z_i , которые фигурируют в (5): $\sum_{i=1}^{M-1} \beta_i^- Z_i = -\beta_M^-$; Z_i зависят от N и не зависят от t_c . Меняя теперь t_c (сдвигая ее каждый раз на Δt вправо по оси времени), получаем нужные нам $(M-1)$ -уравнения относительно неизвестных Z_i :

$$\sum_{i=1}^{M-1} \beta_{1,i}^- Z_i = -\beta_{1,M}^-; \dots \sum_{i=1}^{M-1} \beta_{M-1,i}^- Z_i = -\beta_{M-1,M}^-.$$

Здесь первый индекс при β^- — номер «средней точки». Решив эту систему уравнений, найдем Z_i , а затем по формуле (5) вычислим R . Основная задача решена. Аналогично может быть построен алгоритм идентификации, который использует просто измерения $\alpha(t)$ в равноотстоящих точках, а не интегралы измерений. Однако «интегральный» метод менее подвержен погрешностям и флуктуациям при измерениях.

Потупила 14 ноября 1978 г.

УДК 621.372

С. Д. ГЕРАСИМОВ, Н. Г. КИРЕЕВ, канд. техн. наук

ДИСКРЕТНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЙ ФИЛЬТР НИЖНИХ ЧАСТОТ

Постановка задачи. При решении задачи определения возмущений, действующих на объект, задач идентификации, оптимального управления и целого ряда других возникает необходимость численного дифференцирования дискретного сигнала, зашумленного высокочастотной помехой. В работе предлагается использовать для этой цели дискретный дифференцирующий фильтр нижних частот (ДДФНЧ). Синтез указанного фильтра осуществлен на основе эллиптического рекурсивного фильтра, построенного с помощью теории сплайнов [2].

Важнейшими характеристиками эллиптического рекурсивного фильтра являются: конец полосы пропускания f_c полезного сигнала и начало полосы запрета f_r , а также параметры ϵ , A , которые определяют величину пульсации амплитудно-частотной характеристики фильтра в полосе пропускания и в полосе запрета соответственно. Смысл этих параметров показан на рис. 1, а. Выбор значений параметров ϵ , A , $(f_r - f_c)$ сильно влияет на

порядок N_1 -фильтра, системная функция которого записывается в виде $W_1(z) = \sum_{i=1}^{N_1} a_i z^i / \sum_{i=0}^{N_1} b_i z^i$.

Уменьшение параметра ε , переходной полосы ($f_r - f_c$) и увеличение параметра A влечет за собой повышение порядка фильтра. Поэтому для синтеза эллиптического рекурсивного фильтра

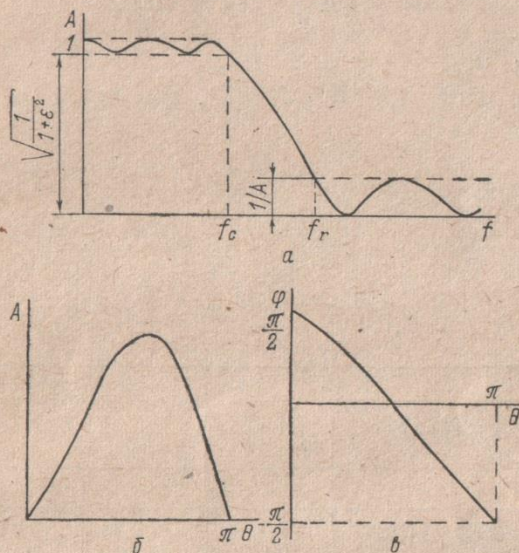


Рис. 1.

невысокого порядка необходимо, например, при уменьшении ε и увеличении A одновременно расширить переходную полосу ($f_r - f_c$).

Для построения дифференцирующего фильтра при синтезе ДДФНЧ используются как наклоны, так и моменты [3]. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики для фильтра порядка $N_2=3$, построенного с помощью наклонов, приведены на рис. 1, б, в. Системная функция этого фильтра имеет вид

$$W_2(z) = \sum_{i=0}^{N_2} c_i z^i / z^{N_2}.$$

Благодаря быстрой сходимости сплайнов дифференцирующий фильтр даже низкого (третьего) порядка обладает хорошими дифференцирующими свойствами. В предположении, что частота полезного сигнала, который необходимо дифференцировать, не превышает 0,1 Гц, получено, что максимальная относительная погрешность дифференцирования для фильтра третьего порядка не превышает 2,7%, для четвертого — 2,6%. Как видно из этих

данных, повышение порядка фильтра не дает значительного улучшения точности дифференцирования.

Синтез дискретного дифференцирующего фильтра нижних частот. Системная функция ДДФНЧ, состоящего из последовательно соединенных фильтра нижних частот (эллиптического рекурсивного фильтра) и дифференцирующего фильтра имеет вид

$$W(z) = \sum_{i=0}^N l_i z^i / \sum_{i=0}^N d_i z^i, \quad (1)$$

где $N = N_1 + N_2$.

Обозначив вход ДДФНЧ $X[nT]$, а выход $Y[nT]$, можно записать

$$\sum_{i=0}^N d_{N-i} Y[(n-i)T] = \sum_{i=0}^N l_{N-i} X[(n-i)T]. \quad (2)$$

Отсюда очевиден смысл коэффициентов l_i , d_i . В таблице приведены результаты расчета коэффициентов системной функции (1) для значений параметров фильтра: $f_c = 0,1$ Гц; $f_{r_1} = 0,2$ Гц; $\varepsilon = 0,32$; $A = 5$; $f_c = 0,1$ Гц; $f_{r_2} = 0,25$ Гц; $\varepsilon = 0,32$; $A = 6$.

Коэффициент ДДФНЧ	$f_{r_2} = 0,2$ Гц; N_2			$f_{r_2} = 0,25$ Гц; N_2		
	для наклонов		для моментов	для наклонов		для моментов
	3	4	3	3	4	3
l_0	-0,1523	0,0452	-0,0250	-0,1523	0,0452	-0,0250
l_1	0,6059	-0,1797	0,1995	0,6040	-0,1791	0,1992
l_2	-0,1458	0,5400	-0,6218	-0,1420	0,5389	-0,6200
l_3	-1,2052	-0,2642	0,5936	-1,1977	-0,2603	0,5899
l_4	0,7549	-0,7101	0,3218	0,7511	-0,7028	-0,3200
l_5	0,5994	0,8052	-0,7931	0,5937	0,8008	0,7891
l_6	-0,4568	0,6217	0,3250	-0,4568	0,6156	0,3250
l_7	—	-0,4968	—	—	-0,4968	—
d_0	0	0	0	0	0	0
d_1	0	0	0	0	0	0
d_2	0	0	0	0	0	0
d_3	-0,9196	0	-0,9196	-0,9100	0	-0,9100
d_4	2,8328	-0,9196	2,8323	2,8129	-0,9100	2,8129
d_5	-2,9131	2,8328	-2,9131	-2,9026	2,8129	-2,9026
d_6	1	-2,9131	1	1	-2,9026	1
d_7	—	1	—	—	1	—
A_n/A_c	25,02%	21,74%	29,63%	18,07%	15,31%	21,65%

В таблице также даны максимальные уровни пропускаемой помехи в процентах от максимальных уровней полезного сигнала на выходе ДДФНЧ в предположении, что $f_c = 0,1$ Гц, а максимальная частота полезного сигнала $f_{\max} = 0,07$ Гц. Из таблицы видно, что чем выше порядок дифференцирующего фильтра, использованного при синтезе ДДФНЧ, тем меньше отношение A_n/A_c . Однако более эффективно на это отношение влияет по-

вышение порядка фильтра нижних частот, так как оно, не увеличивая искажения в полосе пропускания, при том же значении $(f_r - f_c)$ дает возможность сильнее подавить высокочастотную помеху. Но если накладываются ограничения на порядок ДДФНЧ, то, как видно из таблицы, можно, увеличив f_r , уменьшить A_n/A_c . Следовательно, использование наклонов предпочтительнее, чем использование моментов.

На рис. 2 показаны амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики ДДФНЧ. Как видим, использованный при синтезе ДДФНЧ эллиптический рекурсивный фильтр вносит запаз-

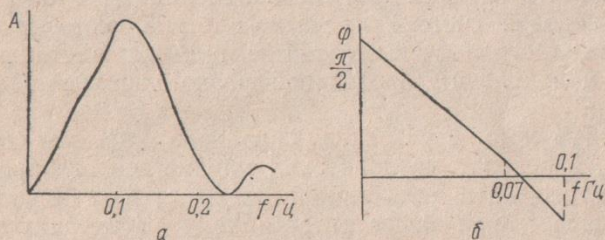


Рис. 1.

дывание $\tau_i = \varphi_i / 2\pi f_i$ при прохождении сигнала с частотой f_i . Нелинейная фазочастотная характеристика аппроксимируется линейной характеристикой на участке 0—0,1 Гц с максимальной относительной погрешностью 8%, а на участке 0—0,07 Гц — с погрешностью 1,08%. Из этого следует, что значение параметра f_c необходимо выбрать большим, чем значение максимальной частоты полезного сигнала. Чтобы обеспечить линейность фазочастотной характеристики синтезированного фильтра в диапазоне частот 0—0,07 Гц, необходимо иметь значение параметра $f_c = 0,1$ Гц. Для всех сигналов с этими частотами задержка τ_i одинакова, что позволяет точно учесть отличие фазочастотной характеристики ДДФНЧ от фазочастотной характеристики идеального дифференцирующего фильтра и определить момент времени, в который вычисляется производная сигнала.

Список литературы. 1. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов. — М.: Сов. радио, 1973. — 367 с. 2. Литвинов В. Н., Несвояль А. Г. Об использовании теории сплайнов для построения дискретных дифференцирующих алгоритмов. — Математическая физика, 1975, вып. 17, с. 137—142. 3. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. — М.: Мир, 1972. — 320 с.

Поступила 25 октября 1978 г.