МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до розв'язання задач за темою
"МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА
Частина I.
Молекулярна фізика. Явища переносу"

з курсу "Загальна фізика"

Харків 2010

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до розв'язання задач за темою
"МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА
Частина І.
Молекулярна фізика. Явища переносу"

з курсу "Загальна фізика"

для студентів усіх спеціальностей
та усіх форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 3 від 28.12.2009

Харків НТУ "ХПІ" 2010

Методичні вказівки до розв’язання задач за темою "Молекулярна фізика і термодинаміка. Частина І. Молекулярна фізика. Явища переносу" з курсу "Загальна фізика" для студентів усіх спеціальностей та усіх форм навчання / Уклад.: Бурлакова М.В., Ветчинкіна З.К., Дзюбенко Н.І., Любченко О.А., Тавріна Т.В. – Харків: НТУ "ХПІ", 2010. – 36 с.

Укладачі: М.В. Бурлакова,
З.К. Ветчинкіна,
Н.І. Дзюбенко,
О.А. Любченко ,
Т.В. Тавріна

Рецензент Н.Б. Фат’янова

Кафедра теоретичної та експериментальної фізики

ВСТУП

Методичні вказівки мають на меті допомогти студентам засвоїти теоретичний матеріал та знайти підходи до розв’язання типових задач та завдань підвищеної складності з тем "Молекулярна фізика" і "Явища переносу".

Широкий за рівнем та тематикою спектр задач дозволяє використовувати їх студентами усіх спеціальностей та усіх форм навчання.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА

Молекулярна фізика – розділ фізика, що вивчає залежність фізичних властивостей та агрегатних станів тіл від їх внутрішньої побудови, сил взаємодії між частинками, що складають тіла, та характеру їх руху.

Основні положення молекулярно-кінетичної теорії:

1. Будь-яка речовина має *дискретну* (переривчасту) побудову. Вона складається з атомів та молекул. *Молекули* є найменшими частинками, що володіють хімічними властивостями даної речовини. *Атоми* – найменші частинки, що володіють властивостями хімічних елементів, що входять до складу даної речовини.

2. Молекули (атоми) знаходяться у стані безперервного хаотичного руху, який називається *тепловим*. Під час нагріву речовини швидкість та кінетична енергія його частинок збільшується. Ступень нагріву тіла характеризується *температурою*, яка є мірою середньої кінетичної енергії руху молекул цього тіла.

3. Між молекулами та атомами в процесі їх взаємодії виникають сили притягання та відштовхування.

Для вивчення фізичних властивостей макроскопічних систем, що складаються з великої кількості частинок, застосовують два методи – статистичний та термодинамічний, що взаємно доповнюють один одного.

Статистичний метод базується на законах теорії ймовірностей та математичної статистики. При цьому вважають, що властивості макроскопічної системи обумовлені властивостями частинок системи, особливостями їх руху та середніми значеннями швидкостей, енергій та інших динамічних характеристик цих частинок.

Термодинамічний метод базується на вивченні фізичних властивостей макросистем шляхом аналізу умов та кількісних відношень для процесів перетворень енергії в цих системах.

Фізичні величини, що характеризують стани термодинамічної системи, називають *термодинамічними параметрами* або *параметрами стану* системи. В якості параметрів стану застосовують об'єм, тиск, температуру, концентрацію тощо. Параметри стану ділять на *зовнішні* (тобто такі, що залежать від положення зовнішніх тіл та інших їх характеристик) та *внутрішні* (таких, що залежать не тільки від положення зовнішніх тіл, але також від координат та швидкостей частинок, що складають систему, яка розглядається). Наприклад, для газу об'єм V посудини, у якій він знаходиться, зовнішній параметр, оскільки він залежить від положення зовнішніх тіл – стінок посудини. Тиск газу та його енергія – внутрішні параметри, оскільки вони залежать від швидкостей руху та концентрації молекул газу.

Рівноважним станом (станом термодинамічної рівноваги) називають такий стан системи, який не змінюється з плином часу, причому ця незмінність не пов'язана із протіканням будь-якого процесу в зовнішньому середовищі.

При зміні зовнішніх параметрів буде змінюватися і стан системи – система буде здійснювати *термодинамічний процес*.

Термодинамічний процес називають *рівноважним*, якщо в цьому процесі система проходить через безперервну послідовність нескінченно близьких станів її термодинамічної рівноваги. Реальний процес зміни стану системи буде тим ближче до рівноважного, чим повільніше він протікає. Тому рівноважні процеси часто називають *квазістатичними*.

Під *внутрішньою енергією системи* розуміють кінетичну енергію теплового хаотичного руху молекул, потенціальну енергію взаємодії між молекулами та внутрішньомолекулярну енергію.

Рівняння стану – це відношення, що встановлює зв'язок між параметрами системи.

Ідеальним називають газ, взаємодією між молекулами якого можна знехтувати. На практиці слабка взаємодія між молекулами спостерігається за умов значного розрідження газу, тобто при його незначній густині. Такі гази, як кисень, водень, азот, повітря слабо відрізняються від ідеального навіть за нормальних умов, тобто при кімнатній температурі та атмосферному тиску.

Атомна одиниця маси $\left(m_{\text{од}}\right)$ дорівнює 1/12 маси атома вуглецю ^{12}C.

Відносна атомна маса $\left(A_r\right)$ хімічного елемента – відношення маси атома цього елемента до маси атома вуглецю ^{12}C. Тоді маса атома дорівнює $A_r m_{\text{од}}$.

Відносна молекулярна маса $\left(M_r\right)$ хімічного елемента – відношення маси молекули цієї речовини до 1/12 маси атома вуглецю ^{12}C. Тоді маса молекули дорівнює $M_r m_{\text{од}}$.

Число Авогадро дорівнює числу частинок, що містяться в одному молі речовини:

$$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}. \qquad (1.1)$$

Число Лошмідта – число молекул, що знаходяться в 1 м^3 ідеального газу,

$$N_L = 2{,}687 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}. \qquad (1.2)$$

Молярна маса μ – маса 1 моля речовини:

$$\mu = N_A \cdot M_r \cdot m_0 . \tag{1.3}$$

Один моль – кількість речовини, в якому міститься стільки ж структурних одиниць (атомів, молекул, іонів, тощо), скільки атомів міститься в 0,012 кг ізотопу вуглецю з атомною масою 12.

Кількість речовини (вимірюється у молях) – величина, що дорівнює відношенню маси газу до його молярної маси:

$$\nu = \frac{m}{\mu} \tag{1.4}$$

Термодинамічна (абсолютна) температура, одиницею вимірювання якої є Кельвін, зв’язана з температурою по шкалі Цельсія:

$$T = t + 273{,}15 \approx t + 273. \tag{1.5}$$

Закон Авогадро: при однакових тисках і однакових температурах в рівних об'ємах різних ідеальних газів міститься однакове число молекул. З цього випливає, що за нормальних умов (Т = 273,15 К = 0 °С, p = 1,01325·10^5 Па = 1 атм = 760 мм. рт. ст.) один моль будь-якого ідеального газу займає об'єм V_μ = 22,414·10^{-3} = 22,414 літри.

Універсальна (молярна) газова стала згідно із законом Авогадро:

$$R = \frac{1{,}01325 \cdot 10^5 \cdot 22{,}414 \cdot 10^{-3}}{273{,}15} = 8{,}31 \text{ Дж/моль·К.} \tag{1.6}$$

Стала Больцмана

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8{,}32}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К.} \tag{1.7}$$

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії:

$$p = nkT , \tag{1.8}$$

де $n = \dfrac{N}{V}$ – число молекул в одиниці об’єму.

Рівняння стану ідеального газу (*рівняння Менделєєва – Клапейрона*):

$$pV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT \ . \qquad (1.9)$$

З рівняння Менделєєва – Клапейрона для постійної маси ідеального газу випливають:

1) Закон Бойля – Маріотта для *ізотермічного* $(T = \text{const})$ процесу:

$$pV = \text{const} \qquad \text{або} \qquad p_1V_1 = p_2V_2 \,; \qquad (1.10)$$

2) Закон Гей – Люссака для *ізобаричного* $(p = \text{const})$ процесу:

$$\frac{V}{T} = \text{const} \qquad \text{або} \qquad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \,; \qquad (1.11)$$

3) Закон Шарля для *ізохоричного* $(V = \text{const})$ процесу:

$$\frac{p}{T} = \text{const} \qquad \text{або} \qquad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \,. \qquad (1.12)$$

Якщо в об'ємі знаходиться суміш газів, то повний тиск на стінки посудини визначається *законом Дальтона*:

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i \ , \qquad (1.13)$$

де n – число компонентів в суміші; p_i – парціальний тиск i-го компонента.

Парціальним називають такий тиск газу, що входить до складу газової суміші, яке цей газ чинив би на стінки посудини, якби тільки він один займав весь об'єм, заповнений газовою сумішшю.

Тиск газу на стінки посудини визначається ударами молекул, що рухаються поступально, і концентрація яких складає n. Тиск пов'язаний зі середньою кінетичною енергією поступального руху молекули маси m_0:

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon \rangle = \frac{2}{3} n \left\langle \frac{m_0 v^2}{2} \right\rangle . \qquad (1.14)$$

Середня енергія поступального руху молекули

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT . \qquad (1.15)$$

Середня квадратична швидкість молекули маси m_0

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} . \qquad (1.16)$$

Найбільш ймовірна швидкість молекули маси m_0

$$v_{\text{ймов}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} . \qquad (1.17)$$

Середня арифметична швидкість молекули маси m_0

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} . \qquad (1.18)$$

Числом ступенів свободи тіла називають найменше число координат, які необхідно задати для однозначного визначення положення тіла в просторі. Наприклад, для матеріальної точки необхідно три координати x, y, z, отже, вона має 3 ступені свободи. Оскільки молекули одноатомного газу можна розглядати як матеріальні точки, то вважається, що вони мають 3 ступені свободи поступального руху. Молекули, що складаються з великої кількості атомів, мають у залежності від типу зв’язку (жорсткий або пружний зв’язок) інше число ступенів свободи (див. таблицю 1.1).

Таблиця 1.1 – Число ступенів свободи для різних молекул

Тип молекули	Тип руху			Усього	i
	Посту-пальний	Обер-тальний	Коли-вальний		
Одноатомна	3	–	–	3	3
Двоатомна з жорстким зв'язком	3	2	–	5	5
Двоатомна з пружним зв'язком	3	2	1	6	7
Триатомна з жорстким зв'язком*	3	3	–	6	6
Триатомна з пружним зв'язком	3	3	3	9	12

*Молекула CO_2 має стільки ж ступенів свободи, як і молекула двоатомного газу з жорстким зв'язком.

Закон рівнорозподілу енергії за ступенями свободи: на кожну ступень свободи молекули в середньому припадає однакова кінетична енергія, що дорівнює $\frac{kT}{2}$. На коливальний ступінь свободи припадає енергія kT.

Енергія молекули

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT , \tag{1.19}$$

де *i*– сума числа поступальних $\left(\nu_{\text{пост}}\right)$, числа обертальних $\left(\nu_{\text{об}}\right)$ та подвоєного числа коливальних $\left(\nu_{\text{кол}}\right)$ступенів свободи:

$$i = \nu_{\text{пост}} + \nu_{\text{об}} + 2\nu_{\text{кол}}\,. \tag{1.20}$$

Молекули газу під час теплового руху мають різні швидкості. Розподіл молекул за швидкостями описується *розподілом Максвелла*, який виражається двома залежностями:

1) кількість молекул, що мають при даній температурі швидкості, значення яких лежать в заданому інтервалі швидкостей від v до $v + \Delta v$:

$$dN\left(v\right) = N \cdot f\left(v\right) \cdot dv = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{m v^2}{2kT}} \cdot v^2 \cdot dv\,, \tag{1.21}$$

де $f\left(v\right)$ – функція розподілу молекул за абсолютними значеннями швидкостей, що виражає відношення ймовірності того, що швидкість лежить в інтервалі швидкостей від v до $v + \Delta v$, до величини цього інтервалу; *N* – загальне число молекул; *m* – маса молекули;

2) число молекул, відносні швидкості яких лежать у межах від u до $u + \Delta u$:

$$dN\left(u\right) = N \cdot f\left(u\right) \cdot du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot N \cdot e^{-u^2} \cdot u^2 \cdot du\,, \tag{1.22}$$

де $f\left(u\right)$– функція розподілу за відносними швидкостями; $u = v/v_{\text{ймов}}$ – відносна швидкість, яка дорівнює відношенню швидкості v до найбільш ймовірної швидкості (1.17), яка відповідає максимуму функції $f\left(u\right)$.

У зовнішньому силовому полі розподіл молекул описується *розподілом Больцмана*:

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{U}{kT}}\,, \tag{1.23}$$

де n – концентрація частинок; U – їх потенціальна енергія; n_0 – концентрація частинок у точках поля, де U =0.

Барометрична формула (розподіл тиску в однорідному полі сили тяжіння):

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{m\,g\,z}{kT}} = p_0 \cdot e^{-\frac{\mu\,g\,z}{RT}}, \qquad (1.24)$$

де p – тиск газу; m – маса частинки; μ – молярна маса; z – координата (висота) точки по відношенню до рівня, прийнятого за нульовий; p_0 – тиск на цьому рівні; g – прискорення вільного падіння.

Закономірності статистичної фізики, що наведені вище, описують рівноважні стани або оборотні процеси. Термодинамічний процес називається *оборотним*, якщо він допускає повернення системи в первинний стан без того, щоб в довкіллі залишилися будь-які зміни. Процес, що не задовольняє цим умовам, називається *необоротним*.

1.2. ЯВИЩА ПЕРЕНОСУ

Наука, що вивчає процеси, що виникають при порушеннях рівноваги, називається *фізичною кінетикою*.

Порушення рівноваги приводять до перенесення речовини, енергії, імпульсу з одних місць середовища в інші. Потоки маси, тепла, тощо, що виникають, прагнуть повернути систему в стан рівноваги. Спостережувані при цьому явища носять назву *явищ переносу*.

Потоком будь-якої фізичної величини (маси, енергії, імпульсу) називається кількість цієї величини, що проходить в одиницю часу через деяку уявну поверхню. Потік – скалярна величина, знак якої обирається довільно (наприклад, для замкнутих поверхонь потік, що витікає назовні, додатний).

Явища переносу: дифузія, теплопровідність та внутрішнє тертя (динамічна в'язкість).

1. *Дифузія* (перенесення частинок або маси) – обумовлене тепловим рухом вирівнювання концентрацій у суміші декількох речовин – описується *законом Фіка*:

$$M_i = -D \cdot \frac{d\rho}{dz} \cdot S \qquad \text{або} \qquad N_i = -D \cdot \frac{dn}{dz} \cdot S, \qquad (1.25)$$

де M_i, N_i – потоки маси (кг/с) або молекул ($с^{-1}$) речовини; $\frac{d\rho}{dz}$, $\frac{dn}{dz}$ – градієнти густини (кг/$м^4$) або концентрації ($м^{-4}$); S – площа поверхні, що перпендикулярна осі z ($м^2$); D – коефіцієнт дифузії ($м^2$/с):

$$D = \frac{1}{3} \cdot \langle v \rangle \cdot \lambda, \qquad (1.26)$$

де $\langle v \rangle$ – середня швидкість теплового руху (1.18); λ – *середня довжина вільного пробігу* – середня відстань, що молекула проходить між двома послідовними зіткненнями:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \qquad (1.27)$$

де *d*– *ефективний діаметр*, *n* – концентрація молекул, тобто їх кількість в одиниці об'єму, σ – *ефективний переріз:*

$$\sigma = \pi d^2. \qquad (1.28)$$

Середня кількість зіткнень за 1 секунду

$$\langle Z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\lambda}. \qquad (1.29)$$

2. *Теплопровідність* – процес перенесення теплової енергії – описується *законом Фур'є*:

$$q = -\kappa \cdot \frac{dT}{dz} \cdot S, \qquad (1.30)$$

де *q* – тепловий потік (Дж/с) через поверхню *S*, що розташована перпендикулярно осі *z*; $\frac{dT}{dz}$ – градієнт температури (К/м); κ – *теплопровідність* (коефіцієнт теплопровідності) (Вт/м·К):

$$\kappa = \frac{1}{3} \cdot \langle v \rangle \cdot \lambda \cdot \rho \cdot c_V \, , \tag{1.31}$$

де ρ – густина речовини (кг/м^3), $c_V = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{\mu}$ – питома теплоємність при постійному об'ємі (Дж/кг·К).

3. *Внутрішнє тертя*, що виникає між шарами рідини або газу, характеризується *законом Ньютона*:

$$K = -\eta \cdot \frac{du}{dz} \cdot S \, , \tag{1.32}$$

де K – потік імпульсу (Н) через поверхню S (м^2); $\frac{du}{dz}$ – градієнт швидкості (с$^{-1}$), що показує, як швидко змінюється швидкість течії рідини або газу у напрямі z, що є перпендикулярним напряму їх руху; η – в'язкість, (Па·с).

Часто формулу (1.32) записують у вигляді

$$F = \eta \cdot \left| \frac{du}{dz} \right| \cdot S \, , \tag{1.33}$$

де *F– сила внутрішнього тертя* (Н).

В'язкість (коефіцієнт в'язкості)

$$\eta = \frac{1}{3} \cdot \langle v \rangle \cdot \lambda \cdot \rho \, . \tag{1.34}$$

З порівняння формул (1.26), (1.31) і (1.34) може бути встановлений зв'язок між коефіцієнтами дифузії, теплопровідності та в'язкості:

$$\eta = D\rho, \qquad \kappa = \eta c_V = D\rho c_V \, . \tag{1.35}$$

Знак «мінус» у формулах (1.25), (1.30) та (1.32) обумовлений тим, що напрям потоків маси, енергії та імпульсу протилежний градієнту, який вказує напрям зростання величини концентрації, температури та швидкості.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Знайти масу 1 молекули вуглекислого газу.

Розв'язання

Хімічна формула вуглекислого газу CO_2. Його молярна маса

$$\mu = \mu_C + 2\mu_O = 12\cdot10^{-3}+2\cdot16\cdot10^{-3} = 44\cdot10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

У кожному молі речовини міститься однакова кількість молекул, а саме та, що дорівнює числу Авогадро N_A, тоді масу 1 молекули можна знайти як

$$m = \frac{\mu}{N_A} = \frac{44\cdot10^{-3}}{6\cdot10^{23}} = 7,3\cdot10^{-26} \text{ кг.}$$

Задача 2

У посудині об'ємом 4 л знаходиться 1 г водню. Яке число молекул містить одиниця об'єму посудини?

Розв'язання

Число молекул в довільному об'ємі можна знайти, помноживши кількість речовини на число Авогадро $N_A = 6,02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$:

$$N = \frac{m}{\mu}\cdot N_A .$$

Поділивши отриманий вираз на об'єм посудини, знайдемо концентрацію молекул водню в одиниці об'єму:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{m}{\mu}\frac{N_A}{V} = \frac{10^{-3}\cdot6,02\cdot10^{23}}{2\cdot10^{-3}\cdot4\cdot10^{-3}} = 7,5\cdot10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Задача 3

У балоні знаходилася маса m_1 *= 10 кг газу, тиск якого становив* p_1 *= 10 МПа. Яку масу газу* Δm *було узято з балону, якщо тиск газу зменшився вдвічі? Температуру газу вважати незмінною.*

Розв'язання

Маса газу, що її було взято з балону,

$$\Delta m = m_1 - m_2 ,$$

де m_1 та m_2 – маси газу в балоні до та після відбору, відповідно.

Якщо вважати газ ідеальним, то для його опису можна використовувати рівняння Менделєєва – Клапейрона (1.9):

$$pV = \frac{m}{\mu} RT .$$

Якщо температура газу та його об'єм не змінюються, то $\frac{p}{m} = \frac{RT}{\mu V} = \text{const}$, звідки

$$\frac{p_1}{m_1} = \frac{p_2}{m_2} ,$$

$$m_2 = \frac{p_2}{p_1} m_1 .$$

Згідно умов задачі $\frac{p_2}{p_1} = 0,5$, тоді шукана маса газу

$$\Delta m = m_1 - m_2 = m_1 - \frac{p_2}{p_1} m_1 = m_1 \left(1 - \frac{p_2}{p_1} \right) = 10 \left(1 - 0,5 \right) = 5 \text{ кг.}$$

Задача 4

10 г кисню знаходяться при тиску 304 кПа і температурі 10 °С. Після розширення внаслідок нагрівання при постійному тиску кисень зайняв об'єм 10 л. Знайти об'єм газу до розширення, температуру газу після розширення, густину газу до і після розширення.

Розв'язання

При не дуже великому тиску і не дуже високих температурах кисень можна вважати ідеальним газом, отже, його стан може визначатися рівнянням Менделєєва – Клапейрона (1.9). Привласнимо характеристикам газу до розширення індекс 1, а після розширення – індекс 2, і запишемо відповідні рівняння стану, врахувавши, що, оскільки тиск в процесі розширення газу залишається постійним, то $p_1 = p_2 = p$:

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1 \quad \text{та} \quad pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2 .$$

Підставимо числові значення величин в одиницях СІ: $m = 10^{-2}$ кг, $p = 3{,}04 \cdot 10^5$ Па, $T_1 = 273 + t = 283$ K, $V_2 = 10^{-2}$ м^3, молярну масу кисню $\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

$$V_1 = \frac{mRT_1}{\mu p} = \frac{10^{-2} \cdot 8{,}31 \cdot 283}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}04 \cdot 10^5} = 2{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 ,$$

$$T_2 = \frac{pV_2\mu}{mR} = \frac{3{,}04 \cdot 10^5 \cdot 10^{-2} \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{10^{-2} \cdot 8{,}31} = 1170 \text{ К}.$$

Густина – фізична величина, що дорівнює масі одиниці об'єму речовини: $\rho = \dfrac{m}{V}$. Виразивши її з рівнянь Менделєєва – Клапейрона (1.9), одержимо залежність ρ від параметрів стану p, V, T:

$$\rho_1 = \frac{p \ \mu}{R \ T_1} \quad \text{та} \quad \rho_2 = \frac{p \ \mu}{R \ T_2} .$$

Підставимо числові значення параметрів та визначимо густину газу до і після розширення:

$$\rho_1 = \frac{3,04 \cdot 10^5 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 283} = 4,1 \text{ кг/м}^3,$$

$$\rho_2 = \frac{3,04 \cdot 10^5 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 1170} = 1,0 \text{ кг/м}^3.$$

Таким чином, при постійному тиску густина газу змінюється обернено пропорційно до абсолютної температури.

Задача 5

У посудині об'ємом 2 літри знаходиться маса m_1 *= 6 г вуглекислого газу* (CO_2) *та маса* m_2 *= 5 г закису азоту* (N_2O) *при температурі t = 127°С. Знайти тиск суміші газів у посудині.*

Розв'язання

За законом Дальтона (1.13) тиск суміші газів в посудині дорівнює сумі парціальних тисків газів: $p = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

Для двох газів рівняння (1.3) має вигляд

$$p = p_1 + p_2 .$$

Знайдемо парціальний тиск кожного газу, скориставшись рівнянням Менделєєва – Клапейрона (1.9):

$$p_1 = \frac{m_1 TR}{V\mu_1} \quad \text{та} \quad p_2 = \frac{m_2 TR}{V\mu_2} .$$

Тиск суміші газів на стінки посудини

$$p = p_1 + p_2 = \frac{m_1 TR}{V\mu_1} + \frac{m_2 TR}{V\mu_2} .$$

Підставимо числові значення в системі СІ, врахувавши, що молярна маса вуглекислого газу μ_{CO_2} =44·10^{-3} кг/моль, молярна маса закису азоту μ_{N_2O} = 44·10^{-3} кг/моль, T = 400 К, R = 8,314 Дж/моль·К, V = 2·10^{-3} м^3, та отримаємо тиск суміші:

$$p = \frac{m_1 TR}{V\mu_1} + \frac{m_2 TR}{V\mu_2} = \frac{TR}{V}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) =$$

$$= \frac{400 \cdot 8,31}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 44 \cdot 10^{-3}}\left(6 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-3}\right) = 4,155 \cdot 10^{5} \text{ Па.}$$

Задача 6

У повітрі міститься 23,6 % кисню та 76,4 % азоту (по масі) при тиску p = 100 кПа та температурі t = 13 ℃. Знайти густину ρ *повітря та парціальні тиски* p_1 *та* p_2 *кисню та азоту.*

Розв'язання

Повітря – це суміш газів, тому маса m повітря містить масу 0,236 m кисню та 0,764 m азоту.

Молярна маса суміші, якщо ν – кількість речовини повітря, дорівнює

$$\mu = \frac{m}{\nu} = \frac{m}{\nu_1 + \nu_2},$$

де ν_1 та ν_2 – кількості речовини кисню та азоту.

Вважаючи, що $\nu_1 = \frac{m_1}{\mu_1} = \frac{0,236m}{\mu_1}$ та $\nu_2 = \frac{m_2}{\mu_2} = \frac{0,764m}{\mu_2}$, а молярні маси кисню $\mu_1 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль та азоту $\mu_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, одержимо:

$$\mu = \frac{m}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{m}{\dfrac{0,236m}{\mu_1} + \dfrac{0,764m}{\mu_2}} = \frac{m\mu_1\mu_2}{m\left(0,236\mu_2 + 0,764\mu_1\right)} =$$

$$= \frac{\mu_1\mu_2}{0,236\mu_2 + 0,764\mu_1} = \frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{0,236 \cdot 28 \cdot 10^{-3} + 0,764 \cdot 32 \cdot 10^{-3}} =$$

$= 28,8 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Густина повітря з врахуванням рівняння (1.9) становитиме

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT} = \frac{10^5 \cdot 28,8 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 286} = 1,21 \text{ кг/м}^3.$$

З рівняння Менделєєва – Клапейрона $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$ об’єм, що займає суміш газів:

$$V = \frac{mRT}{p\mu}.$$

Парціальні тиски (1.13) кисню та азоту знайдемо, застосувавши рівняння Менделєєва – Клапейрона, а саме:

$$p_1 = \frac{m_1 \cdot RT}{\mu_1 \cdot V} = \frac{0,236m \cdot RT}{\mu_1} \cdot \frac{p\mu}{mRT} =$$

$$= \frac{0,236p\mu}{\mu_1} = \frac{0,236 \cdot 10^5 \cdot 28,8 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} = 2,13 \cdot 10^4 \text{ Па},$$

$$p_2 = \frac{m_2 \cdot RT}{\mu_2 \cdot V} = \frac{0,764m \cdot RT}{\mu_2} \cdot \frac{p\mu}{mRT} =$$

$$= \frac{0,764p\mu}{\mu_2} = \frac{0,764 \cdot 10^5 \cdot 28,8 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} = 7,87 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

Зрозуміло, що сума знайдених парціальних тисків дорівнює тиску суміші газів:

$$p = p_1 + p_2 = 2,13 \cdot 10^4 + 7,87 \cdot 10^4 = 10^5 \text{ Па.}$$

Задача 7

В посудині об'ємом V = 2 л знаходиться маса m*= 10 г кисню при тиску* p *= 90,6 кПа. Знайти середню квадратичну швидкість* $\langle v_{кв} \rangle$ *молекул газу, число молекул N, що містяться в посудині, та густину* ρ *газу.*

Розв'язання

Середня квадратична швидкість молекул (1.16), враховуючи, що з рівняння Менделєєва – Клапейрона (1.9) $\frac{RT}{\mu} = \frac{pV}{m}$, визначається як

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3pV}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 90,6 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}}} = 233 \text{ м/с.}$$

Число молекул *N*, що міститься у посудині, можна знайти, якщо поділити масу газу m на масу однієї молекули m_0, яка, в свою чергу, дорівнює $m_0 = \frac{\mu}{N_A}$. Тоді

$$N = \frac{m}{m_0} = \frac{mN_A}{\mu} = \frac{10^{-2} \cdot 6,022 \cdot 10^{23}}{32 \cdot 10^{-3}} = 1,88 \cdot 10^{23}.$$

Густина газу

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3}} = 5 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 8

Знайти внутрішню енергію 1 кг азоту при температурі 7°С. Яка частина цієї енергії припадає на частку поступального руху молекул і яка частина – на долю обертального руху?

Розв'язання

Повна енергія теплового руху однієї молекули, що припадає на всі ступені свободи, згідно із (1.15) становить $\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT$.

Помноживши цей вираз на число Авогадро (1.1), отримаємо повну енергію одного моля газу, яка дорівнює кінетичній енергії поступального та обертального руху молекул (внаслідок відсутності взаємодії між молекулами ідеального газу їх потенціальна енергія взаємодії дорівнює нулю):

$$U = \frac{i}{2} kT N_A = \frac{i}{2} RT \ .$$

Щоб знайти внутрішню енергію довільної маси ідеального газу, потрібно отриманий вираз для енергії одного моля помножити на кількість речовини $\nu = m/\mu$ (для азоту μ = 28·10^{-3} кг/моль):

$$U = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} \cdot RT \ ,$$

де i – число ступенів свободи молекули газу.

Молекула азоту складається з двох атомів, жорстко зв'язаних один з одним. Згідно з таблицею 1.1 ця молекула має 5 ступенів свободи, з них 3 припадають на поступальний, а 2 – на обертальний рух. Таким чином, повна внутрішня енергія 1 кг азоту

$$U = \frac{1 \cdot 5 \cdot 8{,}31 \cdot 280}{28 \cdot 10^{-3} \cdot 2} = 2{,}07 \cdot 10^{5} \text{ Дж.}$$

На долю поступального руху припадає

$$U_{\text{пост}} = \frac{3}{5}U = 1,24 \cdot 10^5 \text{ Дж},$$

а на долю обертального руху

$$U_{\text{оберт}} = \frac{2}{5}U = 0,83 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Задача 9

На якій висоті густина повітря вдвічі менше за його густину на рівні моря? Температуру газу вважати постійною і рівною 0 °С.

Розв'язання

Для розв'язання задачі слід скористатися формулою Больцмана (1.23) для концентрації молекул, оскільки густина повітря дорівнює добутку маси однієї молекули на їх концентрацію:

$$\rho = m_1 \cdot n.$$

Густину газу на рівні моря позначимо $\rho_0 = m_1 \cdot n_0$, на висоті z над рівнем моря – $\rho = m_1 \cdot n$. Концентрація молекул змінюється в полі сили тяжіння Землі згідно із законом

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{U}{kT}},$$

де $U = m \cdot g \cdot z$ – потенціальна енергія молекул в цьому полі.

Тоді,

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-\frac{m\ g\ z}{kT}}.$$

Якщо показник ступеню помножити і поділити на число Авогадро (1.1) N_A, отримаємо:

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-\frac{mN_A\,g\,z}{kN_A\,T}} = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\mu\,g\,z}{RT}},$$

оскільки $m_1 N_A = \mu$, а $kN_A = R$.

За умов задачі густина повітря на висоті z дорівнює половині ρ_0. Тоді після підстановки маємо

$$\frac{\rho_0}{2} = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\mu\,g\,z}{RT}}.$$

Щоб знайти шукану висоту, слід взяти натуральний логарифм від цього виразу:

$$\ln\ 2 = \frac{\mu\,g\,z}{RT},$$

звідки

$$z = \frac{RT\ \cdot \ln 2}{\mu g} = \frac{8{,}31 \cdot 273 \cdot 0{,}69}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8} = 5{,}5 \cdot 10^3 \text{ м.}$$

Таким чином, густина повітря буде вдвічі менше за його густину на рівні моря на висоті п'яти з половиною кілометрів.

Задача 10

Обсерваторія розташована на висоті 3250 м над рівнем моря. Знайти тиск повітря на цій висоті. Температуру повітря вважати постійною і рівною 5°С. Молярна маса повітря складає 0,029 кг/міль. Тиск на рівні моря 101,3 кПа.

Розв'язання

Для розв'язання задачі скористуємося барометричною формулою (1.24), яка є чинною для ізотермічної атмосфери, тобто такої, для якої температура не залежить від висоти і вважається незмінною $\left(T = \text{const}\right)$:

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{\mu \cdot g \cdot z}{RT}} .$$

Підставляючи числові значення задачі в одиницях СІ, одержимо

$$p = 1,013 \cdot 10^5 \cdot e^{\frac{-0,029 \cdot 9,8 \cdot 3250}{8,31 \cdot 278}} = 1,013 \cdot 10^5 \cdot e^{-0,4} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{1,49} = 6,8 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

Задача 11

Визначити відносне число молекул водню, швидкості яких при 0°С знаходяться у межах від 2000 до 2100 м/с.

Розв'язання

Скористаємося розподілом Максвелла для відносних значень швидкостей (1.22):

$$dN = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot N \cdot e^{-u^2} \cdot u^2 \cdot du .$$

Для випадку, коли виконується умова $\Delta v << v$ і, як результат, умова $\Delta u << u$ для відносних швидкостей, шукане число молекул визначиться як

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \; e^{-u^2} \cdot u^2 \cdot \Delta u .$$

За умов задачі v_1 = 2000 м/с, а v_2 = 2100 м/с, тому $\Delta v = v_2 - v_1$ = 100 м/с.

Найбільш ймовірна швидкість (1.17)

$$v_{\text{ймов}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 273}{2 \cdot 10^{-3}}} = 1,5 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Відносна швидкість

$$u = \frac{v}{v_{\text{ймов}}} = \frac{2000}{1500} = 1,33 .$$

Тоді

$$u^2 = 1,78 ,$$

$$e^{-u^2} = \frac{1}{e^{u^2}} = 0,17 ,$$

$$\Delta u = \frac{\Delta v}{v_{\text{ймов}}} = \frac{100}{1500} = \frac{1}{15} = 0,07 .$$

Підстановка числових значень дає

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot 0,17 \cdot 1,78 \cdot 0,07 = 0,048 .$$

Таким чином, кількість молекул, швидкості яких лежать у вказаному інтервалі швидкостей, дорівнює 4,8 % від загальної кількості молекул.

Задача 12

Визначити відносне число молекул ідеального газу, швидкості яких знаходяться у межах від 0 до 0,1 $v_{\text{ймов}}$.

Розв’язання

У цій задачі не виконується умова $\Delta u << u$, тому необхідно скористатися законом Максвелла в диференціальній формі (1.22):

$$dN(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot N \cdot e^{-u^2} \cdot u^2 \cdot du ,$$

де $u = \dfrac{v}{v_{\text{ймов}}}$ – відносна швидкість молекул.

Повне число молекул, відносні швидкості яких лежать в інтервалі від $u_1 = \dfrac{0}{v_{\text{ймов}}} = 0$ до $u_2 = \dfrac{0{,}1\ v_{\text{ймов}}}{v_{\text{ймов}}} = 0{,}1$, знайдемо, зінтегрувавши праву частину (1.22):

$$\Delta N = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot N \cdot \int_0^{0,1} e^{-u^2} \cdot u^2 \cdot du\ .$$

Шукана частина молекул

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{0,1} e^{-u^2} \cdot u^2 \cdot du.$$

Цей інтеграл в кінцевому виді не береться, тому слід скористатися методом наближеного інтегрування. Для цього потрібно розкласти підінтегральну функцію в ряд Маклорена:

$$e^{-u^2} = 1 - \frac{u^2}{1} + \frac{u^4}{2} - \frac{u^6}{6} + \frac{u^8}{24} - \ \ldots,$$

$$e^{-u^2} \cdot u^2 = u^2 - \frac{u^4}{1} + \frac{u^6}{2} - \frac{u^8}{6} + \frac{u^{10}}{24} - \ldots.$$

Зінтегрувавши, отримаємо:

$$\int_0^{0,1} e^{-u^2} \cdot u^2 \cdot du = \int_0^{0,1} \left(u^2 - \frac{u^4}{1} + \frac{u^6}{2} - \frac{u^8}{6} + \ldots \right) \cdot du =$$

$$= \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{14} - \frac{u^9}{54} + \ldots \right) \Bigg|_0^{0,1} = \frac{10^{-3}}{3} - \frac{10^{-5}}{5} + \frac{10^{-7}}{14} - \ldots \approx \frac{10^{-3}}{3}.$$

Можна обмежитися першим членом розкладання, при цьому погрішність визначення $\dfrac{\Delta N}{N}$ буде не більше, ніж 0,01:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{10^{-3}}{3} = 0{,}74 \cdot 10^{-3}\ .$$

Цей результат означає, що відносне число молекул ідеального газу, швидкості яких поміщені у межах від 0 до 0,1 $v_{\text{ймов}}$, складає 0,074 %.

Задача 13

Яка ймовірність того, що молекула ідеального газу має швидкість, яка відрізняється від 2 $v_{\text{ймов}}$ не більше, ніж на 1 %?

Розв'язання

Ймовірність W визначається як відношення кількості молекул, що мають означену швидкість, до загальної кількості молекул. Тому для розв'язання задачі нам треба використати розподіл Максвелла (1.22) для відносних швидкостей.

У даному випадку, оскільки виконується умова $\Delta v << v_{\text{ймов}}$, розподіл Максвелла запишемо з використання кінцевих приростів Δu :

$$\Delta W(u) = \frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-u^2} \cdot u^2 \cdot \Delta u.$$

Визначимо величини, що входять до складу цієї формули. Оскільки в задачі йдеться про те, що швидкість вдвічі більше, ніж найбільш ймовірна (1.17) швидкість, то слід вважати, що $v = 2v_{\text{ймов}}$. Тоді $\Delta v = 0,01 \cdot v = 0,02 \cdot v_{\text{ймов}}$. У цьому випадку відносна швидкість складе $u = \frac{v}{v_{\text{ймов}}} = \frac{2v_{\text{ймов}}}{v_{\text{ймов}}} = 2$, а її квадрат $u^2 = 4$. Тоді $e^{-u^2} = e^{-4} = 0,0183$, а $\Delta u = \frac{\Delta v}{v_{\text{ймов}}} = 0,02$.

Підставляючи отримані значення в формулу, знаходимо, що

$$\Delta W(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot 0,0183 \cdot 4 \cdot 0,02 = 0,0033.$$

Отже, ймовірність того, що дана молекула ідеального газу має швидкість, відмінну від 2 $v_{\text{ймов}}$ не більше, ніж на 1 %, складає 0,33 % .

Задача 14

Знайти концентрацію молекул кисню у балоні, якщо тиск p = 0,3 кПа, а середня квадратична швидкість його молекул $\left\langle v_{кв} \right\rangle$ *= 250 м/с. Яка густина газу в балоні?*

Розв'язання

Тиск газу, що знаходиться в посудині, визначається формулою (1.14)

$$p = \frac{2}{3} n \left\langle \varepsilon \right\rangle = \frac{2}{3} n \left\langle \frac{m_0 v_{кв}^2}{2} \right\rangle.$$

Тоді n – шукана концентрація, враховуючи, що маса молекули $m_0 = \dfrac{\mu}{N_A}$, становить

$$n = \frac{3p}{m_0 \left\langle v_{\text{кв}}^2 \right\rangle} = \frac{3pN_A}{\mu \left\langle v_{\text{кв}}^2 \right\rangle} = \frac{3 \cdot 300 \cdot 6,022 \cdot 10^{23}}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 250^2} = 2,71 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}.$$

Густину газу можна визначити через масу однієї молекули m_0 та концентрацію молекул n у посудині, а саме:

$$\rho = m_0 n = \frac{\mu \cdot n}{N_A} = \frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot 2,71 \cdot 10^{23}}{6,022 \cdot 10^{23}} = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ кг/м}^3.$$

Задача 15

Для молекул повітря, діаметр яких вважати рівним 0,3 нм, за нормальних умов визначити:

1) середню довжину λ вільного пробігу молекул;

2) середню кількість зіткнень за 1 секунду $\langle Z \rangle$;

3) середній час τ між двома послідовними зіткненнями.

Розв'язання

Середня довжина вільного пробігу молекул згідно з (1.27):

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot n}.$$

Необхідну для визначення концентрацію знайдемо з основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії (1.8) $p = nkT$, враховуючи, що за нормальних умов температура складає T =273 К, а тиск $p = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па. Тоді

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{\sqrt{2}\pi 9 \cdot 10^{-20} \cdot 1{,}01 \cdot 10^5} = 9{,}33 \cdot 10^{-8} \text{ м.}$$

Середня кількість зіткнень за 1 секунду визначається виразом (1.29) $\langle Z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\lambda}$, де середня арифметична швидкість згідно (1.18) становить $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$.

Отже

$$\langle Z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\lambda} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{1}{\lambda} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8{,}31 \cdot 273}{\pi \cdot 29 \cdot 10^{-3}}} \cdot \frac{1}{9{,}33 \cdot 10^{-8}} = 4{,}8 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

Середній час між зіткненнями

$$\tau = \frac{\lambda}{\langle v \rangle} = \frac{1}{\langle Z \rangle} = \frac{1}{4{,}8 \cdot 10^{9}} = 2{,}08 \cdot 10^{-10} \text{ с.}$$

Задача 16

Вуглекислий газ та азот знаходяться при однаковій температурі і тиску. Вважаючи діаметри молекул цих газів однаковими, знайти для них відношення коефіцієнтів: 1) дифузії; 2) в'язкості; 3) теплопровідності.

Розв’язання

Значення шуканих коефіцієнтів визначається формулами (1.26, 1.31, 1.34):

$$D = \frac{1}{3} \cdot \langle v \rangle \cdot \lambda\,; \quad \kappa = \frac{1}{3} \cdot \langle v \rangle \cdot \lambda \cdot \rho \cdot c_V\,; \qquad \eta = \frac{1}{3} \cdot \langle v \rangle \cdot \lambda \cdot \rho\,,$$

а зв'язок між ними (1.35):

$$\eta = D\rho, \qquad \kappa = \eta c_V = D\rho c_V\,.$$

1) Визначимо відношення коефіцієнтів дифузії $D = \frac{1}{3} \cdot \langle v \rangle \cdot \lambda$. Для цього необхідно знайти $\langle v \rangle$ – середню арифметичну швидкість теплового руху молекул, яка знаходиться по формулі (1.18) $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$, і довжину вільного пробігу (1.27)

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma \cdot n} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^{2} \cdot n}\,.$$

Концентрація молекул, що входить у вираз для довжини вільного пробігу, визначається через параметри стану газів згідно формули (1.8):

$$n = \frac{p}{k\ T}\,.$$

Тоді коефіцієнт дифузії

$$D=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\cdot\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}}\cdot\frac{kT}{\pi d^2 p}.$$

Знайдемо відношення коефіцієнтів дифузії, враховуючи, що тиск, температура та діаметр молекул двох речовин однакові:

$$\frac{D_{CO_2}}{D_{N_2}}=\sqrt{\frac{\mu_{N_2}}{\mu_{CO_2}}}.$$

Молярні маси вуглекислого газу $\mu_{CO_2}=0,044$ кг/моль та азоту $\mu_{N_2}=0,028$ кг/моль, тому відношення коефіцієнтів дифузії

$$\frac{D_{CO_2}}{D_{N_2}}=\sqrt{\frac{0,028}{0,044}}=\sqrt{0.64}=0,8.$$

2) Для визначення відношення коефіцієнтів в'язкості, скористаємося зв'язком між коефіцієнтами для явищ переносу (1.35). Оскільки $\eta=D\rho$, то для знаходження в'язкості потрібно коефіцієнт дифузії помножити на густину газу, яку можна визначити з рівняння Менделєєва – Клапейрона (1.9), узявши до уваги, що $R=kN_A$ (1.7):

$$\eta=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}}\cdot\frac{kT}{\pi d^2 p}\cdot\frac{p\mu}{RT}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{RT\mu}{\pi}}\cdot\frac{1}{\pi d^2 N_A}.$$

З огляду на це, відношення коефіцієнтів в'язкості

$$\frac{\eta_{CO_2}}{\eta_{N_2}}=\sqrt{\frac{\mu_{CO_2}}{\mu_{N_2}}}=\sqrt{\frac{0,044}{0,028}}=\sqrt{1,57}=1,25.$$

3) Для визначення коефіцієнта теплопровідності потрібно коефіцієнт в'язкості помножити на питому теплоємність c_V при постійному об'ємі $c_V=\frac{i}{2}\cdot\frac{R}{\mu}$. Тоді

$$\kappa = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{RT\mu}{\pi}} \cdot \frac{1}{\pi d^2 N_A} \cdot \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{\mu} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{ik}{\pi d^2}.$$

В цьому випадку, окрім відмінності в молярних масах, необхідно враховувати й різну структуру молекул вуглекислого газу та азоту, яка визначає число ступенів свободи молекул.

Молекула азоту складається з двох атомів і має 5 ступенів свободи, а молекула вуглекислого газу складається з трьох атомів, але є виключенням, тому її число ступенів свободи також складає 5 (див. таблицю 1.1). Тоді відношення теплопровідностей

$$\frac{\kappa_{CO_2}}{\kappa_{N_2}} = \sqrt{\frac{\mu_{N_2}}{\mu_{CO_2}}} \cdot \frac{i_{CO_2}}{i_{N_2}} = \sqrt{\frac{0,028}{0,044}} \cdot \frac{5}{5} = 0,8.$$

Задача 17

Яка кількість тепла втрачається щогодини через вікно за рахунок теплопровідності повітря, що знаходиться між рамами? Площа кожної рами 4 м^2, відстань між рамами 30 см. Температура приміщення 18 °С, температура зовнішнього простору складає –20°С. Діаметр молекул повітря прийняти рівним 0,3 нм, температуру повітря між рамами вважати рівною середньому арифметичному температур приміщення та зовнішнього простору. Тиск повітря складає 760 мм. рт. ст.

Розв’язання

Відповідно до закону Фур'є (1.30) і з урахуванням того, що, $q = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, кількість теплоти, що переноситься унаслідок теплопровідності повітря, визначиться як

$$\Delta Q = -\kappa \cdot \frac{dT}{dx} \cdot S \cdot \Delta t,$$

де $\frac{dT}{dx}$ – градієнт температури, тобто зміна температури на одиниці довжини.

Якщо кінцева зміна температури відбувається на кінцевій відстані, то від диференціалів $\frac{dT}{dx}$ можна перейти до кінцевих приростів величин $\frac{\Delta T}{\Delta x}$. Тоді градієнт температури визначиться як відношення різниці температур T_1 і T_2 між рамами до відстані між ними:

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T_1 - T_2}{x}.$$

Коефіцієнт теплопровідності κ, виражений через параметри стану повітря, можна взяти із задачі 16:

$$\kappa = \frac{i}{3}\sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{k}{\pi d^2}.$$

Як видно з цієї формули, при атмосферному тиску (коли середня довжина вільного пробігу молекул значно менше розмірів посудини) теплопровідність κ не залежить від тиску.

Температура повітря між рамами згідно з умовами задачі:

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

Тоді шукана кількість теплоти

$$\Delta Q = -\frac{i}{3}\sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{k}{\pi d^2} \cdot \frac{T_1 - T_2}{x} \cdot \Delta S \cdot \Delta t.$$

Підставимо числові значення, взявши до уваги, що для повітря $i = 6,\ \mu = 0,029$ кг/моль, інтервал часу Δt = 1 год. = 3600 с, а температури $T_1 = 291$ К, $T_2 = 253$ К, $T = \dfrac{T_1 + T_2}{2} = 272$ К, $\Delta T = T_1 - T_2 = 38$ К.

$$\Delta Q = -\frac{6}{3} \cdot \sqrt{\frac{8,31 \cdot 272}{3,14 \cdot 0,029}} \cdot \frac{1,38 \cdot 10^{-23}}{3,14 \cdot 9 \cdot 10^{-20}} \cdot \frac{38}{0,3} \cdot 4 \cdot 3600 = -2,8 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

Таким чином, за 1 годину через раму втрачається 28 кДж теплоти. Знак «мінус» у відповіді свідчить про те, що перенесення енергії відбувається в напрямі, протилежному градієнту температури, тобто від шарів повітря з більшою температурою до шарів з меншою температурою.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Савельев И.В. Курс общей физики. – Т. 1. Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. – М. : Наука, 1987. – 432 с.

2. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики / В.С. Волькенштейн. – М. : Наука, 1990. – 400 с.

3. Чертов А.Г. Задачник по физике: учеб. пособ. / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М. : Высш. шк., 1981. – 496 с.

4. Иродов И.Е. Задачи по общей физике / И.Е. Иродов. – М. : Наука, 1988. – 416 с.

5. Фирганг Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики / Е.В. Фирганг. – М. : Высш. шк., 1978. – 351 с.

6. Мясников С.П. Пособие по физике / С.П. Мясников, Т.Н. Осанова. – М. : Высш. шк., 1988. – 399 с.

7. Російсько-український фізичний словник / В.В. Гейченко, О.З. Жмудський, П.П. Кузьменко, Є.Д. Майборода. – Харків : Основа, 1990 – 211 с.

8. Російсько-український словник наукової термінології: Математика. Фізика. Техніка. Науки про землю та космос / В.В. Гейченко, В.М. Завірюхіна, О.О. Зеленюк, В.Г. Коломієць, М.І. Кратко, В.В. Тельнюк-Адамчук, М.П. Хоменко. – К. : Наук. думка, 1998. – 892 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки до розв'язання задач за темою "Молекулярна фізика і термодинаміка. Частина I. Молекулярна фізика. Явища переносу" з курсу "Загальна фізика" українською мовою для студентів усіх спеціальностей та усіх форм навчання

Укладачі: БУРЛАКОВА Маргарита Всеволодівна
ВЕТЧИНКІНА Зоя Костянтинівна
ДЗЮБЕНКО Наталя Іванівна
ЛЮБЧЕНКО Олена Анатоліївна
ТАВРІНА Тетяна Володимирівна

Роботу до видання рекомендував проф. О.П. Сук
Відповідальний за випуск – проф. О.Г. Багмут

В авторській редакції

План 2010 р., поз. 25 / 59-10

Підп. до друку 22.03.2010. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 1,5. Обл.-вид. арк. 1,8.
Наклад 100 прим. Зам. №____ Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ "ХПІ"
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Друкарня НТУ "ХПІ". 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21