

В.О. БЕРЕЖНИЙ, ст. викладач кафедри ГМКГ, НТУ «ХПІ», Харків
М.В. МАТЮШЕНКО, к.т.н., доцент кафедри ГМКГ, НТУ «ХПІ», Харків
Г.В. ФЕДЧЕНКО, к.т.н., доцент кафедри ГМКГ, НТУ «ХПІ», Харків

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ЭВОЛЬВЕНТНОГО ПРЯМОЗУБОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

Розглядається динамічна модель для евольвентної циліндричної прямозубої передачі. З системи диференціальних рівнянь динамічної системи отримані рівняння визначення амплітудно-частотних характеристик зубчастої передачі.

A dynamic model is examined for cylindrical spur gears. From the system of differential equalizations of the dynamic system equalizations of determination of gain-frequency characteristics of gearing are got.

Введение. Современные механизмы с зубчатыми передачами работают при повышенных скоростях и нагрузках, в связи, с чем возрастает их динамическая напряжённость. Цилиндрическое эвольвентное прямозубое зацепление является характерным источником возникновения колебаний, поэтому процессам возбуждения колебаний в механизмах с прямозубыми передачами и посвящается данное теоретическое исследование [1, 2].

Постановка задачи. Цель работы – получить математическую модель динамики одноступенчатой цилиндрической эвольвентной прямозубой передачи на основе уравнений Лагранжа с учетом жесткости зубьев и валов, которая в дальнейшем будет использована для исследования изменения собственных частот системы при воздействии на жесткость зубьев.

Разработка динамической модели для эвольвентных цилиндрических прямозубых передач. В общем виде зубчатая передача представляет собой четырёхмассовую динамическую модель (Рис.1). Где: I_1 – момент инерции *двигателя*; I_4 – момент инерции *исполнительного механизма*; $I_{ш}$ и $I_{к}$ – моменты инерции *шестерни* и *колеса*; C_1 и C_4 – крутильные жесткости соединительных *валов*; $c_{ш}^3$ и $c_{к}^3$ – жесткости зубьев *шестерни* и *колеса* передачи; C_3 – жесткость зацепления передачи, где $C_3 = c_{ш}^3 + c_{к}^3$.

Геометро-кинематическая модель четырёхмассовой системы определяется четырьмя обобщенными координатами:

φ_1, φ_4 – углы поворота *ведущей* и *ведомой* присоединенных масс;
 $\varphi_{ш}, \varphi_{к}$ – углы поворота *шестерни* и *колеса* соответственно.

Для принятой динамической модели, определенной четырьмя обобщенными координатами запишем дифференциальные уравнения движения. Для этого воспользуемся уравнением Лагранжа II рода [4]:

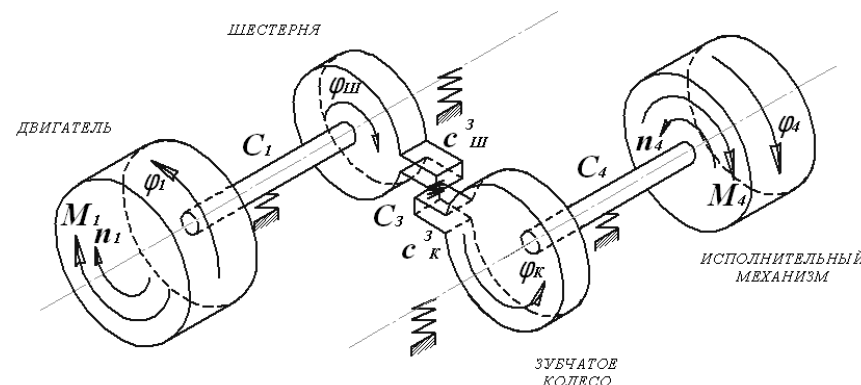


Рис.1. Динамическая модель цилиндрического эвольвентного прямозубого зацепления.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1)$$

где T – кинетическая энергия системы; Π – потенциальная энергия системы; Q_i – обобщенная сила, соответствующая i -той обобщенной координате; q_i – i -тая обобщенная координата; $\dot{q}_i$ – скорость i -той обобщенной координаты.

Запишем кинетическую энергию исходной системы

$$2T = I_1 \dot{\varphi}_1^2 + I_{ш} \dot{\varphi}_{ш}^2 + I_{к} \dot{\varphi}_{к}^2 + I_4 \dot{\varphi}_4^2. \quad (2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) &= I_1 \ddot{\varphi}_1, & \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= 0, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_4} \right) &= I_4 \ddot{\varphi}_4, & \frac{\partial T}{\partial \varphi_4} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{ш}} \right) &= I_{ш} \ddot{\varphi}_{ш}, & \frac{\partial T}{\partial \varphi_{ш}} &= 0, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{к}} \right) &= I_{к} \ddot{\varphi}_{к}, & \frac{\partial T}{\partial \varphi_{к}} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Потенциальная энергия системы:

$$2\Pi = C_1 (\varphi_1 - \varphi_{ш})^2 + C_3 (\varphi_{ш} R_{ш} - \varphi_{к} R_{к})^2 + C_4 (\varphi_{к} - \varphi_4)^2 \quad (4)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} &= +C_1 (\varphi_1 - \varphi_{ш}), & \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{ш}} &= -C_1 (\varphi_1 - \varphi_{ш}) + C_3 R_{ш} (\varphi_{ш} R_{ш} - \varphi_{к} R_{к}), \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_4} &= -C_4 (\varphi_{к} - \varphi_4), & \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{к}} &= -C_3 R_{к} (\varphi_{ш} R_{ш} - \varphi_{к} R_{к}) + C_4 (\varphi_{к} - \varphi_4). \end{aligned} \quad (5)$$

Обобщенные силы найдены как частные производные по обобщенным координатам из выражения для виртуальной работы (Рис.2)

$$A = -\varphi_1 M_1 + \varphi_4 M_4, \quad (6)$$

Тогда

$$Q_{\varphi_1} = \frac{\partial A_{\varphi_1}}{\partial \varphi_1} = -M_1, \quad Q_{\varphi_4} = \frac{\partial A_{\varphi_4}}{\partial \varphi_4} = +M_4. \quad (7)$$

Воспользовавшись уравнением Лагранжа, запишем дифференциальные уравнения движения приведенной системы:

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1(\varphi_1 - \varphi_{ш}) = -M_1 \\ I_{ш} \ddot{\varphi}_{ш} - C_1(\varphi_1 - \varphi_{ш}) + C_3 R_{ш}(\varphi_{ш} R_{ш} - \varphi_{\kappa} R_{\kappa}) = 0, \\ I_{\kappa} \ddot{\varphi}_{\kappa} - C_3 R_{\kappa}(\varphi_{ш} R_{ш} - \varphi_{\kappa} R_{\kappa}) + C_4(\varphi_{\kappa} - \varphi_4) = 0 \\ I_4 \ddot{\varphi}_4 - C_4(\varphi_{\kappa} - \varphi_4) = +M_4 \end{cases} \quad (8)$$

Полученная система дифференциальных уравнений второго порядка (8) описывает вынужденные колебания рассмотренной эквивалентной динамической модели зубчатой передачи и позволяет исследовать влияние на колебательный процесс основных геометрических, кинематических и динамических параметров линейной модели [5].

Решение дифференциальной системы ищем в виде

$$\begin{cases} \varphi_1 = A_1 \cos \omega t \\ \varphi_{ш} = A_2 \cos \omega t \\ \varphi_{\kappa} = A_3 \cos \omega t \\ \varphi_4 = A_4 \cos \omega t \end{cases} \quad (9)$$

Свободные колебания соответствуют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} A_1 \omega^2 - A_1 = 0 \\ A_1 \omega^2 - A_1 + (A_2 \omega^2 - A_2) = 0 \\ A_2 \omega^2 - A_2 + (A_3 \omega^2 - A_3) = 0 \\ A_3 \omega^2 - A_3 + (A_4 \omega^2 - A_4) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

или

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \omega^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Следовательно определитель (12) равен нулю, т.е.

$$A = \begin{vmatrix} \omega^2 - 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \omega^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

В результате раскрытия данного определителя, получается частотное уравнение, корни которого соответствуют главным частотам свободных колебаний системы, совершающей крутильные колебания.

Для построения АЧХ нужно знать закон возмущений M_1 и M_4 . Если принять, где p - частота возмущения, то решение ищут в виде:

$$\begin{cases} M_1 = B_1 \cos pt \\ M_4 = B_4 \cos pt \end{cases} \quad (13) \quad \begin{cases} \varphi_1 = A_1 \cos pt \\ \varphi_{ш} = A_2 \cos pt \\ \varphi_{\kappa} = A_3 \cos pt \\ \varphi_4 = A_4 \cos pt \end{cases}, \quad (14)$$

Подставив (7) и (8) в (1) получено

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \omega^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M_1 \\ 0 \\ 0 \\ M_4 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$B_1 = \begin{vmatrix} M_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + c_3 R_2^2 - I_2 p^2 & c_3 R_2 R_3 & 0 \\ 0 & c_3 R_2 R_3 & c_4 + c_3 R_3^2 - I_3 p^2 & -c_4 \\ -M_4 & 0 & -c_4 & c_4 - I_4 p^2 \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$B_2 = \begin{vmatrix} c_1 - I_1 p^2 & M_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & c_3 R_2 R_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_4 + c_3 R_3^2 - I_3 p^2 & -c_4 \\ 0 & -M_4 & -c_4 & c_4 - I_4 p^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} c_1 - I_1 p^2 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_3 R_2^2 - I_2 p^2 & c_3 R_2 R_3 & 0 \\ 0 & c_3 R_2 R_3 & c_4 + c_3 R_3^2 - I_3 p^2 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 - I_4 p^2 \end{vmatrix}$$

$$B_3 = \begin{vmatrix} c_1 - I_1 p^2 & -c_1 & M_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_3 R_2^2 - I_2 p^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 R_2 R_3 & 0 & -c_4 \\ 0 & 0 & -M_4 & c_4 - I_4 p^2 \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$B_3 = \begin{vmatrix} c_1 - I_1 p^2 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_3 R_2^2 - I_2 p^2 & c_3 R_2 R_3 & 0 \\ 0 & c_3 R_2 R_3 & c_4 + c_3 R_3^2 - I_3 p^2 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 - I_4 p^2 \end{vmatrix}$$

$$B_4 = \begin{vmatrix} c_1 - I_1 p^2 & -c_1 & 0 & M_1 \\ -c_1 & c_1 + c_3 R_2^2 - I_2 p^2 & c_3 R_2 R_3 & 0 \\ 0 & c_3 R_2 R_3 & c_4 + c_3 R_3^2 - I_3 p^2 & 0 \\ 0 & 0 & -c_4 & -M_4 \end{vmatrix}$$

$$B_4 = \begin{vmatrix} c_1 - I_1 p^2 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_3 R_2^2 - I_2 p^2 & c_3 R_2 R_3 & 0 \\ 0 & c_3 R_2 R_3 & c_4 + c_3 R_3^2 - I_3 p^2 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 - I_4 p^2 \end{vmatrix}$$

В результате решения устанавливают функции амплитуды вынужденных колебаний B_1, B_1, B_2, B_3, B_4 от частоты возмущения p и строят соответствующие АЧХ.

Выводы. Данная динамическая модель позволяет исследовать колебательные процессы в цилиндрической эвольвентной прямозубой передаче.

Список литературы:

1. *Абрамов Б.М.* Колебания прямозубых зубчатых колёс. – Харьков, ХГУ, 1968, 175с.
2. *Петрусович А.И.* Динамические нагрузки в зубчатых передачах с прямозубыми колёсами. – М.: АН СССР, 1956. – 134с.
3. *Кириченко А.Ф., Воронцова Д.В., Бережной В.А.* Геометро-кинematicкая модель динамики прямозубых эвольвентных передач с учётом модификации зубьев. // Вестник науки и техники. // Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», ТОВ «Харьковский дом науки и техники» – Харьков: ТОВ «ХДНТ», 2006. – Вып.1-2 (24-25).- С.11-17.
4. *Бережной В.А.* О выборе расчётной динамической модели для эвольвентных цилиндрических прямозубых передач. Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПІ», 2010. – Вип.27.- С.44-48.

Поступила в редакцию 10.06.2012

V.O. BEREZHNIY, M.V.MATYUSHENKO, G.V. FEDCHENKO
DYNAMIC MODEL FOR CYLINDRICAL SPUR GEARS