

С. С. КУРЕННОВ, канд. техн. наук, доц., НАУ им. Н.Е. Жуковского
«ХАИ», Харьков

МОДЕЛИРОВАНИЕ КЛЕЕВОГО СЛОЯ В СОЕДИНЕНИИ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИМ УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ

Предложена аналитическая модель расчета напряженно-деформированного состояния трехслойной балки с податливым соединительным слоем, который моделируется двухпараметрическим упругим основанием. Несущие слои рассматриваются как балки Тимошенко.

Ключевые слова: клеевое соединение, касательные напряжения, нормальные напряжения, многослойная модель.

Введение. Существует несколько математических моделей односрезного клевого соединения, позволяющих получить аналитическое решение.

Исторически первой и наиболее простой является *модель Фолькерсена*. Более строгий подход предложен в классической работе *Голанда и Рейсснера* [1]. *Харт-Смит* обобщил этот подход на вязкоупругое и нелинейно-упругое поведение клеевой прослойки [2]. Модель Голанда и Рейсснера использована для расчета соединений с трещинами в клее и слоями разной длины [3, 4]. Одномерные модели соединений развиты на произвольное число слоев [5] и для учета температурных деформаций [6].

В моделях Фолькерсена, Голанда и Рейсснера касательные напряжения в клее достигают максимума на краях, что физически невозможно, поскольку внешний край соединительного слоя имеет свободную границу. Чтобы исключить данный недостаток, в работе [7] предложено считать нормальные напряжения в клее линейно изменяющимися по толщине шва, чтобы удовлетворить уравнениям равновесия клеевой прослойки. В настоящей работе соединительный (клеевой) слой рассматривается как двухпараметрическое упругое основание, которое способное перераспределять нагрузку, согласно модели *В.З. Власова, П.Л. Пастернака, М.М. Филоненко - Бородича* [8]. При таком подходе линейное изменение нормальных напряжений по толщине шва [7] заменяется ступенчатым, однако при этом более точно учитывается влияние поперечных перемещений на напряжения.

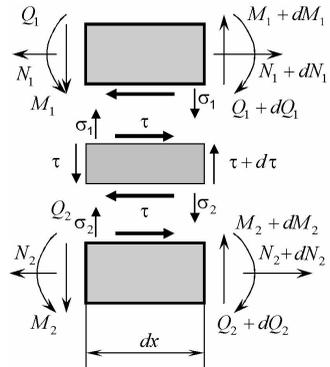


Рис. 1 – Напряжения и усилия в слоях.

Построение решения. На рис. 1. показаны силовые факторы, действующие на элементы соединения.

Уравнения равновесия слоев имеют вид:

$$\frac{dN_1}{dx} = -\tau; \quad \frac{dQ_1}{dx} = \sigma_1; \quad \frac{dM_1}{dx} = Q_1 - \frac{\delta_1}{2} \tau; \quad (1)$$

$$\frac{dN_2}{dx} = \tau; \quad \frac{dQ_2}{dx} = -\sigma_2; \quad \frac{dM_2}{dx} = Q_2 - \frac{\delta_2}{2} \tau; \quad (2)$$

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\delta_0}, \quad (3)$$

где N_i, Q_i, M_i – соответственно продольные, поперечные усилия и погонный изгибающий момент в i -ом несущем слое; τ, σ_i – касательные и нормальные напряжения в клеевом слое; δ_1, δ_2 – толщина 1-го и 2-го несущего слоя; δ_0 – толщина клеевого слоя.

Запишем соотношения теории упругости:

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{N_i}{B_i} + \alpha_i \Delta T; \quad D_i \frac{d\varphi_i}{dx} = M_i; \quad \frac{dw_i}{dx} + \varphi_i = \frac{Q_i}{H_i}, \quad (4)$$

где u_i, w_i, φ_i – соответственно продольные, поперечные перемещения и угол поворота сечения i -го несущего слоя; B_i, D_i, H_i – соответственно жесткости на растяжение-сжатие, изгиб и сдвиг, которые для однородных слоев имеют вид

$$B_i = E_i \delta_i, \quad D_i = \frac{\delta_i^3}{12} E_i, \quad H_i = \frac{5}{6} G_i \delta_i,$$

E_i – модули упругости, G_i – модули сдвига слоев; α_i – коэффициенты линейного температурного расширения; ΔT_i – разность температуры формирования и эксплуатации.

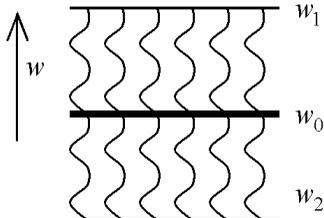


Рис. 2 – Модель клеевого слоя.

Клеевой слой моделируется упругими элементами, изображенными на рис. 2 в виде пружинок, и мембраной, поперечные перемещения которой w_0 .

Данная модель упругого основания предложена в 50-х годах М.М. Филоненко - Бородичем и эквивалентна моделям упругих оснований с двумя коэффициентами постели В.З. Власова и П.Л. Пастернака [8]. Температурными деформациями клея пренебрегаем ввиду его относительно малой толщины. Нормальные напряжения в клее согласно данной модели имеют вид:

$$\sigma_i = (-1)^i k_1 (w_0 - w_i) - (-1)^i k_2 \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} - \frac{d^2 w_i}{dx^2} \right), \quad (5)$$

где $i = 1, 2$; k_1, k_2 – два коэффициента постели, которые могут быть вычислены следующим образом [8]:

$$k_1 = 2E_0 \left[\delta_0 (1 - \mu_0^2) \right]^{-1}, \quad k_2 = \frac{E_0 \delta_0}{12(1 + \mu_0)}.$$

Здесь E_0 и μ_0 – модуль Юнга и коэффициент Пуассона клеевого слоя.

Касательные напряжения в клеевом слое обусловлены продольным смещением внутренних сторон несущих слоев и его относительным сдвигом:

$$\tau = \frac{G_0}{\delta_0} \left(u_1 - u_2 - \frac{\delta_1}{2} \varphi_1 - \frac{\delta_2}{2} \varphi_2 \right) + G_0 \frac{dw_0}{dx}, \quad (6)$$

где G_0 – модуль сдвига соединительно слоя.

Число дифференциальных уравнений (1) – (6) можно уменьшить, если принять

$$N_1(x) + N_2(x) = F,$$

где $F = \text{const}$.

Исключим из (3) напряжения и, используя формулы (1), (2), (4), получаем:

$$\frac{d^2 M_1}{dx^2} + \frac{d^2 M_2}{dx^2} + \left(\frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_2}{2} + \delta_0 \right) \frac{d^2 N_1}{dx^2} = 0. \quad (7)$$

Дифференцируя (6), и используя (1)-(4), получаем:

$$\delta_0 \frac{d^2 w_0}{dx^2} + N_1 \sum_{i=1}^2 \frac{1}{B_i} - \sum_{i=1}^2 \frac{\delta_i}{2} \frac{M_i}{D_i} - \frac{\delta_0}{G_0} \frac{d^2 N_1}{dx^2} = \frac{F}{B_2} - \alpha_1 \Delta T_1 + \alpha_2 \Delta T_2. \quad (8)$$

Далее, уравнение (3), используя (5), (1) и исключая производные от перемещений при помощи (4), можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & 2 \frac{k_2}{k_1} \frac{d^4 w_0}{dx^4} - 2 \frac{d^2 w_0}{dx^2} - \frac{k_2}{k_1 H_1} \frac{d^4 M_1}{dx^4} + \left(\frac{k_2}{k_1 D_1} + \frac{1}{H_1} \right) \frac{d^2 M_1}{dx^2} - \frac{M_1}{D_1} - \\ & - \frac{k_2}{k_1 H_2} \frac{d^4 M_2}{dx^4} + \left(\frac{k_2}{k_1 D_2} + \frac{1}{H_2} \right) \frac{d^2 M_2}{dx^2} - \frac{M_2}{D_2} + \\ & + \left(\frac{\delta_0}{k_1} - \frac{k_2}{2k_1} \left(\frac{\delta_1}{H_1} + \frac{\delta_2}{H_2} \right) \right) \frac{d^4 N_1}{dx^4} + \left(\frac{\delta_1}{2H_1} + \frac{\delta_2}{2H_2} \right) \frac{d^2 N_1}{dx^2} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Сложим уравнения (5) и, исключив производные от поперечных перемещений слоев при использовании (4), получаем четвертое уравнение:

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{k_2}{H_1}\right) \frac{d^4 M_1}{dx^4} - \left(\frac{k_1}{H_1} + \frac{k_2}{D_1}\right) \frac{d^2 M_1}{dx^2} + \frac{k_1}{D_1} M_1 - \left(1 + \frac{k_2}{H_2}\right) \frac{d^4 M_2}{dx^4} + \\
& \quad + \left(\frac{k_1}{H_2} + \frac{k_2}{D_2}\right) \frac{d^2 M_2}{dx^2} - \frac{k_1}{D_2} M_2 + \\
& \quad + \frac{1}{2} \left(\delta_1 + \frac{k_2 \delta_1}{2H_1} - \delta_2 - \frac{k_2 \delta_2}{2H_2}\right) \frac{d^4 N_1}{dx^4} - \frac{k_1}{2} \left(\frac{\delta_1}{H_1} - \frac{\delta_2}{H_2}\right) \frac{d^2 N_1}{dx^2} = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Из уравнения (8) выразим $d^2 w_0 / dx^2$ и, исключая вторую и четвертую производную w_0 в уравнении (9), получаем систему трех дифференциальных уравнений относительно M_1 , M_2 и N_1 .

Введем вектор

$$\vec{\mathbf{X}} = (M_1 \quad M_2 \quad N_1)^T$$

и запишем полученную систему в матричном виде:

$$\mathbf{A}_4 \frac{d^4 \vec{\mathbf{X}}}{dx^4} + \mathbf{A}_2 \frac{d^2 \vec{\mathbf{X}}}{dx^2} + \mathbf{A}_0 \vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{R}}, \tag{11}$$

где коэффициенты матриц \mathbf{A}_i ($i = 4, 2, 0$) могут быть получены из уравнений (7) – (10). Коэффициенты этих матриц не приводим в связи с их громоздким видом и легкостью нахождения.

В правой части системы (11) используется вектор

$$\vec{\mathbf{R}} = \left(0; \quad \frac{2}{\delta_0} \left(\frac{F}{B_2} - \alpha_1 \Delta T_1 + \alpha_2 \Delta T_2 \right); \quad 0 \right)^T.$$

Общее решение системы однородных уравнений (11) ищем в виде суперпозиции базисных решений:

$$\vec{\mathbf{X}}_0 = C e^{\lambda x} \vec{\mathbf{h}},$$

где λ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\det(\mathbf{A}_4 \lambda^4 + \mathbf{A}_2 \lambda^2 + \mathbf{A}_0) = 0. \tag{12}$$

Равенство (12) является алгебраическим уравнением 10 степени с четными степенями до 2 включительно. Следовательно, общее решение системы (11) имеет вид:

$$\vec{\mathbf{X}}_0 = \sum_{i=1}^8 C_i e^{\lambda_i x} \vec{\mathbf{h}}_i + C_9 \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + C_{10} x \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где

$$a_1 = \frac{D_2}{D_1}, \quad a_2 = \frac{B_1 B_2 (2\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)}{2D_1 (B_1 + B_2)} \quad \text{и} \quad b = \frac{B_1}{B_1 + B_2} (F + \alpha_2 \Delta T_2 - \alpha_1 \Delta T_1).$$

Векторы $\vec{\mathbf{h}}_i$, соответствующие корням λ_i уравнения (12), находятся из уравнения

$$(\mathbf{A}_4 \lambda_i^4 + \mathbf{A}_2 \lambda_i^2 + \mathbf{A}_0) \vec{\mathbf{h}}_i = 0;$$

они определяются с точностью до константы и представляют собой нетривиальное решение данной системы однородных линейных уравнений.

Таким образом, получив M_1, M_2, N_1 , используя (13), из формул (1) и (2) находим τ, Q_i, σ_i . Интегрируя выражения (4) и вводя соответствующие константы интегрирования, находим перемещения несущих слоев u_i, w_i, φ_i . Перемещения w_0 находим, интегрируя уравнение (6).

Модельная задача. В качестве примера расчета рассмотрим соединение, изображенное на рис. 3. У первого слоя скользящая заделка справа, у второго слоя жесткая заделка слева. Конструкция статически не определена. Первый слой нагружен усилием F .

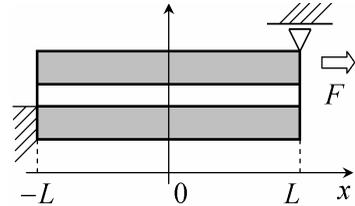


Рис. 3 – Схема закрепления.

Краевые условия имеют вид:

$$N_1(-L) = Q_1(-L) = M_1(-L) = 0; \quad N_1(L) = F; \quad w_1(L) = M_1(L) = 0;$$

$$Q_2(L) = M_2(L) = 0; \quad u_2(-L) = w_2(-L) = \varphi_2(-L) = 0, \quad \tau(-L) = \tau(L) = 0.$$

В итоге получаем 13 краевых условий.

Недостающие 4 условия находим из уравнений (5), которые, очевидно, должны обращаться в тождества при подстановке решений. Для этого приравниваются коэффициенты при x и свободные члены слева и справа равенства (остальные слагаемые тождественно обращаются в ноль).

Рассмотрим соединение, имеющее следующие параметры:

$$E_1 = 70 \text{ ГПа}, \quad G_1 = 25,9 \text{ ГПа}, \quad \delta_1 = 2 \text{ мм}, \quad E_2 = 210 \text{ ГПа}, \quad G_2 = 5,4 \text{ ГПа},$$

$$\delta_2 = 1,5 \text{ мм}, \quad \alpha_1 = 22,2 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad \alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad L = 20 \text{ мм}, \quad G_0 = 0,9 \text{ ГПа},$$

$$E_0 = 2,7 \text{ ГПа}, \quad \delta_0 = 0,3 \text{ мм}.$$

На рис. 4 показано распределение касательных напряжений в клеевом шве, при $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 0$ и $F = 1$, вычисленное по предложенной модели (график *a*) и по модели Фолькерсена (график *б*).

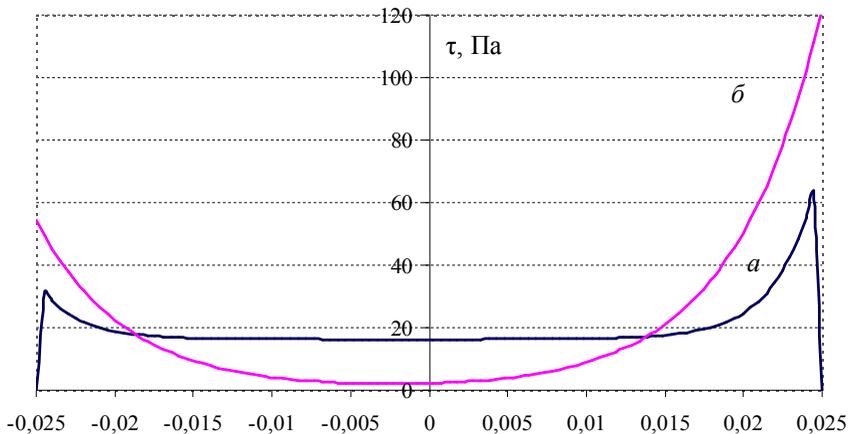


Рис. 4 – Касательные напряжения в клее по предложенной модели (а) и модели Фолькерсена (б).

Рассмотрим касательные и нормальные температурные напряжения в клее при $F = 0$, $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 1$ К.

Графики напряжений показаны на рис. 5.

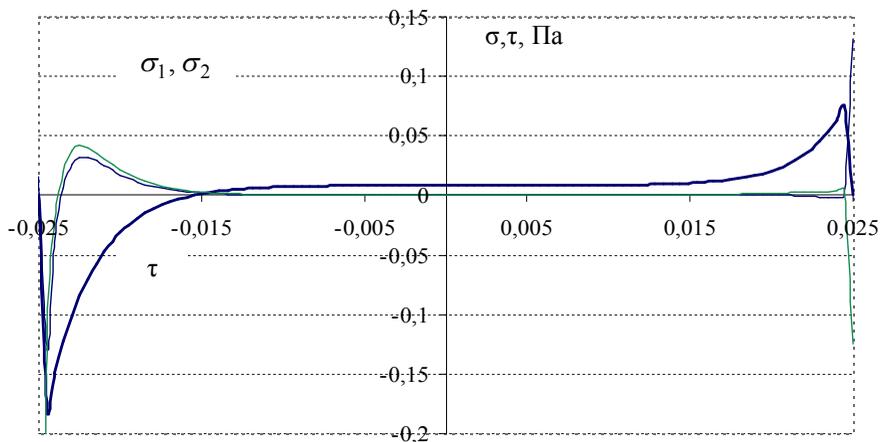


Рис. 5 – Температурные напряжения в клее.

Выводы. Расчеты показывают, что касательные напряжения, вычисляемые по предложенной модели, близки к напряжениям, даваемым теорией Го-

ланда и Рейсснера, и отличаются лишь в малой зоне около края соединения на расстояниях от него порядка толщины клеевой прослойки.

Нормальные напряжения на концах соединения значительно отличаются от напряжений, находимых по классической теории Голанда и Рейсснера. Эти напряжения могут даже отличаться знаком на разных сторонах клеевой прослойки. Внутри же области склейки σ_1 и σ_2 практически совпадают.

Для тонких клеевых прослоек влияние второй производной от упругой линии и второго коэффициента постели также незначительно, однако оно может оказаться существенным при расчете сэндвич-панелей с относительно большой толщиной соединительного слоя, особенно при дискретном нагружении одного из несущих слоев.

Список литературы: 1. *Goland M., Reissner E.* The stresses in Cemented Joints // J. App. Mech. – Vol. 11. – 1944, A11-A27. 2. *Hart-Smith, L.J.*, *Adhesive-Bonded. Single-Lap Joints* / Douglas Aircraft Co., NASA Langley Report CR 112236, 1973. 3. *Luo Q., Tong L.* Fully-coupled nonlinear analysis of single lap adhesive joints // International Journal of Solids and Structures. – Vol. 44. – 2007. – pp. 2349-2370. 4. *L.F.M. Da Silva* (Ed). Modeling of Adhesively Bonded Joints / Springer, 2008. – 335 p. 5. *Ржаницын А.Р.* Составные стержни и пластины. – М.: Стройиздат, 1986. – 316 с. 6. *Chen W.T., Nelson C.W.* Thermal stress in bonded joints. IBM Journal of Research and Development, 23 (2), 1979. – p. 179-188. 7. *Артюхин Ю. П.* Модифицированная теория Голанда–Рейсснера склеенных пластин // Исслед. по теор. пластин и оболочек, 11, Изд-во Казанского ун-та, – Казань, 1975, С. 136–148. 8. *Пастернак П.Л.* Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели – М.: Госстройиздат, 1954.

Поступила в редколлегию 14.06.12

УДК 624.072.45

Моделирование клеевого слоя в соединении двухпараметрическим упругим основанием / С. С. Куреннов // Вісник НТУ «ХП». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХП». – 2012.– №54(960). – С.112-118. – Бібліогр.: 8 назв.

Запропоновано аналітичну модель розрахунку напружено-деформованого стану тришарової балки з податливим пружним з'єднувальним шаром, який моделюється як двохпараметрична пружна основа. Зовнішні шари розглядаються як балки Тимошенко.

Ключові слова: клеевое з'єднання, дотичні напруги, нормальні напруги, багатопарова модель.

Here is considered an analytical model for calculating of the the stress-strained state of the three layer beam with compliant bonding layer, which is modeled by a two-parameter elastic base. The bearing layers are considered as beams of Timoshenko.

Key words: adhesive bonding, shear stress, normal stress, multi-model.