ymovirnisnoyi teoriy [Imaging of numbers by positive Lüroth series: fundamentals of topological and metric, fractal, and probability theories]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky* [Scientific Journal of M. P. Dragomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2008, no. 9, pp. 200-211.

12. Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J. Metric properties of alternating Lüroth series. *Portugal. Math.* 1991, vol. 48, no. 3, pp. 319–325.

13. Khvorostina Yu. V. Kontseptual'ni osnovy doslidzhennya rozpodiliv vypadkovykh velychyn, pov"yazanykh zi znakozminnymy ryadamy Lyurota [Conceptual bases of studying distribution of random variables associated with alternating Lüroth series]. *Fizyko-matematychna osvita* [Physical and Mathematical Education]. 2015, issue. 2, pp. 73–81. – Available at : http://nbuv.gov.ua/UJRN/fmo_2015_2_11 (accessed : 12.05.19)

14. Numerical constants. – Available at : http://www.numericana.com/answer/constants.htm (accessed : 12.04.19).

15. Erdös P., Graham R. *Old and new problems and results in combinatorial number theory*. Geneve : Monographies de l'EnseignementMath, 1980, no. 28. 128 p.

16. Prats'ovytyy M. V. Dvosymvol'ni systemy zobrazhennya (koduvannya) diysnykh chysel [Two-symbol representation systems (coding) of real numbers] *Students'ki fizyko-matematychni etyudy* [Students' sketches in physics and mathematics]. 2010, no. 9, pp. 6–16.

Received (надійшла) 17.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Токмакова Ірина Анатоліївна (Токмакова Ирина Анатольевна, Tokmakova Iryna Anatoliyivna) – старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (099) 630-07-43; e-mail: irina777111@ukr.net.

УДК 519.6

N. V. CHEREMSKAYA

DEPENDENCE OF PROGNOSIS AND FILTRATION FAILURE ON DIFFERENT VALUES OF PARAMETERS FOR SOME CLASSES OF NON-STATIONARY RANDOM SEQUENCES

The article continues the study of estimates of random functions at a future moment of time, linear with respect to the values of pre-histories of processes. The article considers the dependence of the mean square of the forecast error of a random sequence on the last value at different values of the parameters. For non-stationary random sequences, even with correlation functions of the simplest form, such studies haven't been conducted. To obtain representations of correlation functions, a Hilbert approach is used to calculate correlation functions as scalar products in the corresponding Hilbert space. Investigations of the dependence of the mean square of the prediction error of a random sequence on the last value at various values of the parameters discussed in the article can be used to simulate filtration and prognosis processes in real systems in the case of non-stationary random signals.

Key words: correlation function, mathematical expectation, prognosis and filtering of non-stationary random sequences and processes, mean square error.

Н. В. ЧЕРЕМСЬКА

ЗАЛЕЖНІСТЬ ПОМИЛКИ ПРОГНОЗУ І ФІЛЬТРАЦІЇ ВІД РІЗНИХ ЗНАЧЕНЬ ПАРАМЕТРІВ ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Продовжуються дослідження оцінок випадкових функцій в майбутній момент часу, лінійних відносно значень передісторій процесів. У статті розглядається залежність середнього квадрату помилки прогнозу випадкової послідовності за останнім значенням при різних значеннях параметрів. Для нестаціонарних випадкових послідовностей, навіть з кореляційними функціями найпростішого вигляду, такі дослідження не проводились. Для отримання зображень кореляційних функцій використовується гільбертів підхід, який дозволяє обчислювати кореляційні функції як скалярні добутки у відповідному гільбертовому просторі. Дослідження залежності середнього квадрату помилки прогнозу випадкової послідовності за останнім значенням при різних значеннях параметрів, яка була розглянута в статті, може бути використано для моделювання процесів фільтрації та прогнозу в реальних системах у випадку нестаціонарних випадкових сигналів.

Ключові слова: кореляційна функція, математичне очікування, прогноз та фільтрація нестаціонарних випадкових послідовностей і процесів, середня квадратична помилка.

Н. В. ЧЕРЕМСКАЯ

ЗАВИСИМОСТЬ ОШИБКИ ПРОГНОЗА И ФИЛЬТРАЦИИ ОТ РАЗНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Продолжается исследование оценок случайных функций в будущий момент времени, линейных относительно значений предысторий процессов. В статье рассматривается зависимость среднего квадрата ошибки прогноза случайной последовательности по последнему значению при различных значениях параметров. Для нестационарных случайных последовательностей, даже с корреляционными функциями простейшего вида, такие исследования не проводились. Для получения представлений корреляционных функций используется гильбертов подход, позволяющий вычислять корреляционные функции как скалярные произведения в соответствующем гильбертовом пространстве. Исследование зависимости среднего квадрата ошибки прогноза случайной последовательности по последнему значению при различных значениях параметров, рассмотренное в статье, может быть использовано для моделирования процессов фильтрации и прогноза в реальных системах в случае нестационарных случайных сигналов.

Ключевые слова: корреляционная функция, математическое ожидание, прогноз и фильтрация нестационарных случайных последовательностей и процессов, средняя квадратическая ошибка.

Introduction. The tasks of predicting the values of random processes (sequences) for known values in the past or the allocation of a signal on the background of random noise are partial but very important tasks of the general theory of linear transformations of a random signal. Solving the extrapolation problem with partial views of the correlation function, which is calculated for various cases of the spectrum of a non-self-directed bounded operator A, can be used for modeling the filtration processes and prognosis in real systems in the case of non-stationary random signals.

Analysis of recent research. A large number of articles [1, 2, 3, 7 – 10] deal with the prognosis and filtering of non-stationary random sequences. These articles mainly consider the prognosis and filtering of stationary random sequences on the basis of the theory of functions of a complex variable and some classes of functional spaces, or by the approach proposed by *Kalman,* which leads to a rather complicated recurrence procedure. Construction of the optimal filter by a finite number of random sequence values encounters significant difficulties associated with the need to calculate explicit determinants of the $n-$th order of a special form. Therefore, the complexity of such calculations and the bulkiness of explicit formulas did not contribute to a significant advance in solving this problem. Researches carried out in [5, 6, 7] allow us to construct simple prognostic algorithms for non-stationary random functions.

Formulation of the problem. The article continues the study of evaluations of random functions at a future time point, linear in the values of the prehistory of processes. In the article the dependence of the mean square of the prediction error of a random sequence on the last value is considered at various values of parameters. For non-stationary random sequences, even with the correlation functions of the simplest form, such researches haven't been conducted.

Mathematical model. In article [11] the mean square of the prognosis error of a random sequence by the last value is obtained, which is zero order extrapolation: $\hat{\xi}(n+\theta)=\xi(n)$. The mean square of the error σ^2 in this case has the form:

$$\sigma^2(n,\theta)=Me^2=K(n+\theta,n+\theta)-2K(n+\theta,n)+K(n,n), \tag{1}$$

where $K(n,m)$ is the correlation function of the random sequence.

Let us consider a non-stationary random sequence with a spectrum that consists of one point of the complex plane λ_1, $|\lambda_1|<1$. This is the case of non-stationary dissipative random sequence [12]. Then $K(n,m)=\sum_{\tau=0}^{\infty}\Phi(n+\tau)\overline{\Phi(m+\tau)}$,

where $\Phi(n)=C\Lambda_1(n)$, and

$$\Lambda_1(n)=-\frac{1}{2\pi i}\sqrt{1-|\lambda_1|^2}\oint_{\gamma}\frac{\lambda^n}{\lambda-\lambda_1}d\lambda=\sqrt{1-|\lambda_1|^2}\lambda_1^{\,n}.$$

By skipping simple calculations for $K(n,m)$, we get the expression:

$$K(n,m)=|C|^2(1+|\lambda_1|)\lambda_1^n\overline{\lambda_1^m}. \tag{2}$$

Another image for $K(n,m)$ can be obtained by using the trigonometric form of a complex number λ_1: $\lambda_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $\quad r_1<1$:

$$K(n,m)=|C|^2(1+r_1)r_1^{n+m}\left(\cos(n-m)\varphi_1+i\sin(n-m)\varphi_1\right). \tag{3}$$

If we take advantage of the fact that $\operatorname{Re}K(n,m)=K_1(n,m)$ is also a correlation function [14], then we obtain from (3):

$$K_1(n,m)=|C|^2(1+r_1)r_1^{n+m}\cos(n-m)\varphi_1. \tag{4}$$

Formula (4) is an image for the correlation function of a non-stationary dissipative $\left(\lim_{\tau\to\infty}K(n+\tau,m+\tau)=0\right)$ random sequence. In this case, the prognosis error (1) takes the form:

$$\sigma^2(n,\theta)=|C|^2(1+r_1)r_1^{2n}\left(r_1^{2\theta}-2r_1^{\theta}\cos\theta\varphi_1+1\right). \tag{5}$$

From (5) we have that $\sigma^2(n,0)=0$ for $\theta=0$, and $\sigma^2(n,\infty)=|C|^2(1+r_1)r_1^{2n}$ for $\theta=\infty$. That is, as in the general case, for $\theta=\infty$ the error of the prognosis depends on the last moment of time and is not constant, as in the case of stationary random sequences. However, with $n\to\infty$ $\sigma^2(n,\infty)\to 0$.

Consider the dependence of the prognosis error (5) with different values of the parameters assuming $|C|^2=1$.

The graphs for the dependence of the prognosis error (5) on r_1 are shown in fig. 1, fig. 2, fig. 3.

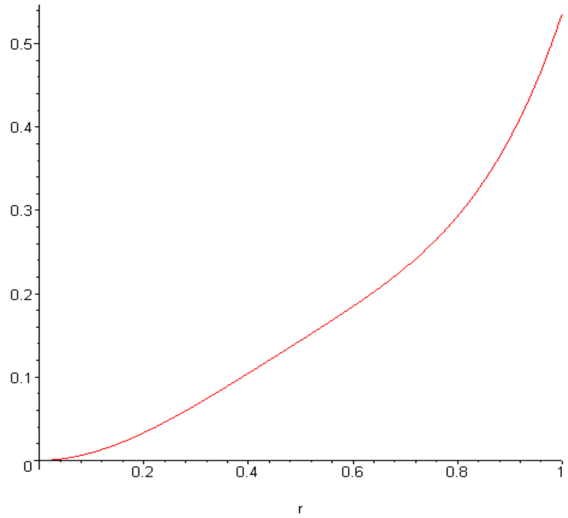

Fig. 1 – Dependence of prognosis error (5) on r_1 at
$n = 1, \quad \theta = 1, \quad \varphi_1 = 0$.

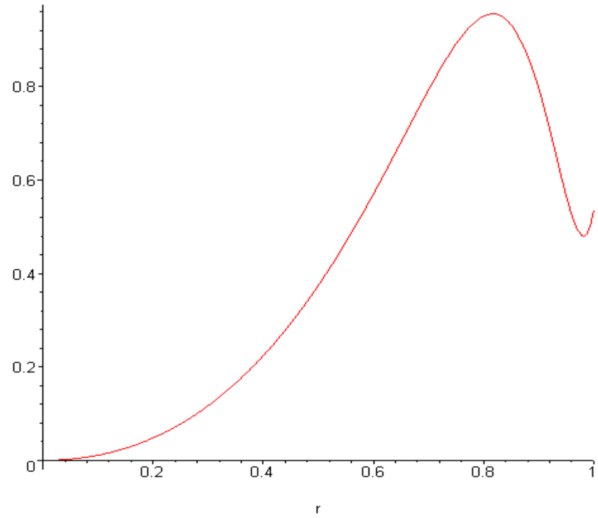

Fig. 2 – Dependence of prognosis error (5) on r_1 at
$n = 1, \quad \theta = 10, \quad \varphi_1 = 0$.

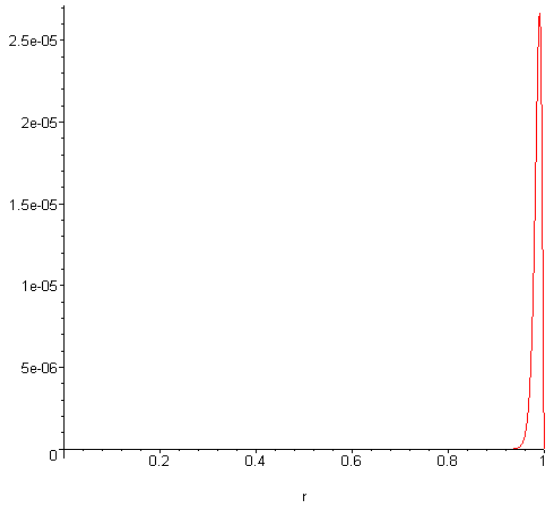

Fig. 3 – Dependence of prognosis error (5) on r_1 at
$n = 100, \quad \theta = 1, \quad \varphi_1 = 0$.

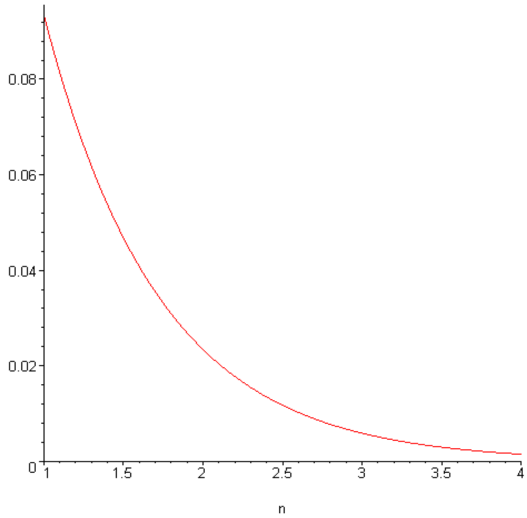

Fig. 4 – Dependence of prognosis error (5) on n at
$r = 0.5, \quad \theta = 1, \quad \varphi_1 = 0$.

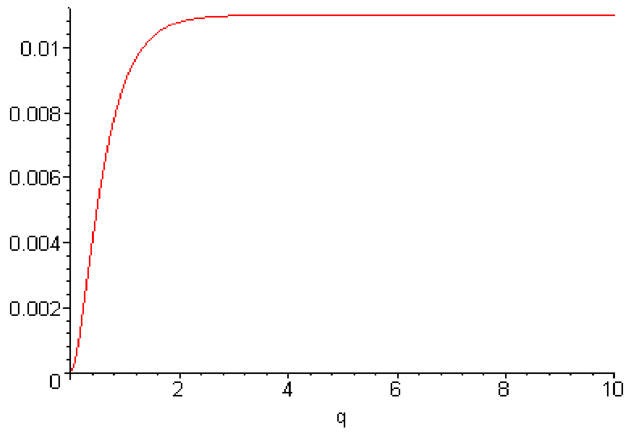

Fig. 5 – Dependence of prognosis error (5) on θ at
$r = 0.1, \quad n = 1, \quad \varphi_1 = 0$.

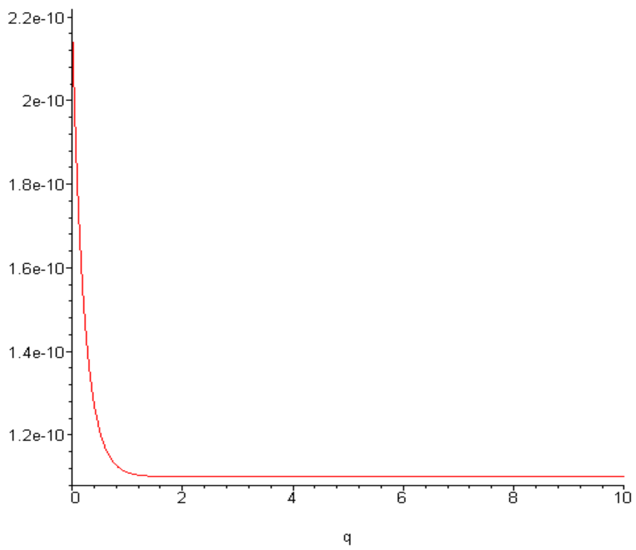

Fig. 6 – Dependence of prognosis error (5) on θ at
$r = 0.1, \quad n = 5, \quad \varphi_1 = \pi / 2$.

The dependence on n of expression (5) at different values of other parameters has virtually the same character. The graph of this dependence is shown in fig. 4

The dependence on the stage of the prognosis θ significantly changes with different parameters. The graph of this dependence is shown in fig. 5 – 8.

We now discuss an example of a prognosis by the last value of a non-stationary random process. Let $\xi(t)$ be dissipative random process of the first rank non-stationarity with a discrete complex spectrum [12].

Consider the case when the spectrum consists of one point $\{\lambda_1\} = \left\{\alpha_1 + i\frac{\beta_1^2}{2}\right\}$.

Then $K(t, s) = \int_0^\infty \Phi(t+\tau)\overline{\Phi(s+\tau)}\,d\tau, \quad \Phi(t) = C_1 e^{i\lambda_1 t}$. It's easy to get an expression for $K(t, s)$:

$$K(t, s) = \frac{|C_1|^2}{\beta_1^2} e^{i\alpha_1(t-s)-\frac{\beta_1^2}{2}(t+s)}, \tag{6}$$

and that means,

$$K_1(t, s) = \operatorname{Re} K(t, s) = \frac{|C_1|^2}{\beta_1^2} e^{-\frac{\beta_1^2}{2}(t+s)} \cos\alpha_1(t-s).$$

The mean square of error (1) takes the form

$$\sigma^2(t, \theta) = Me^2 = \frac{|C_1|^2}{\beta_1^2} e^{-\beta_1^2 t}\left(e^{-\beta_1^2\theta} - 2e^{-\frac{\beta_1^2}{2}\theta}\cos\alpha_1\theta + 1\right). \tag{7}$$

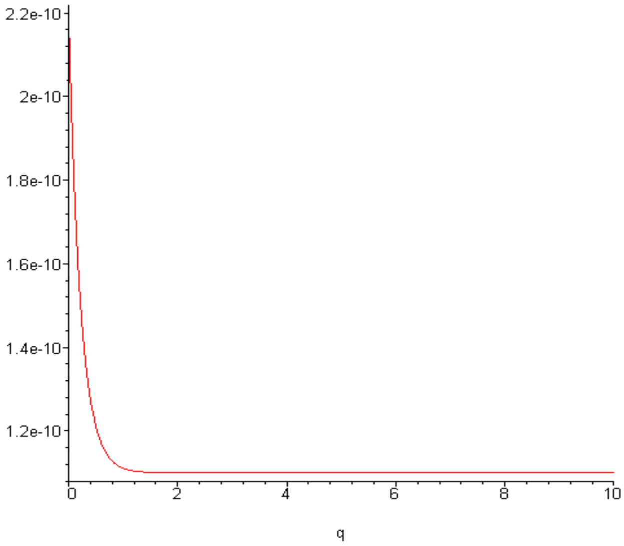

Fig. 7 – Dependence of prognosis error (5) on θ at $r = 0.1, \quad n = 10, \quad \varphi_1 = \pi/3$.

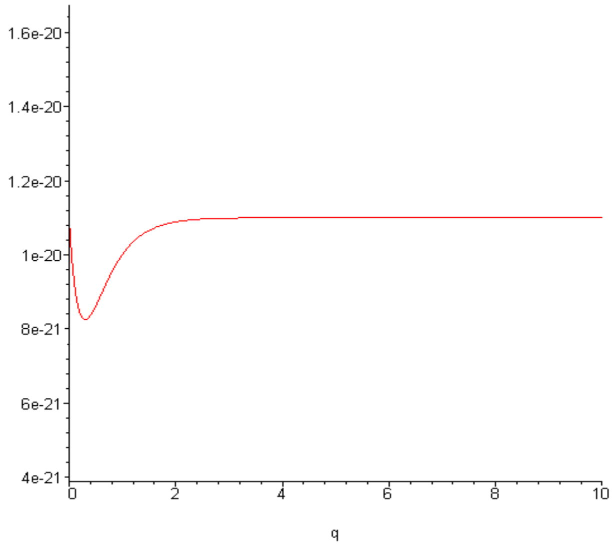

Fig. 8 – Dependence of prognosis error (5) on θ at $r = 0.1, \quad n = 5, \quad \varphi_1 = \pi/2$.

From here $\sigma^2(t, 0) = 0$, and $\sigma^2(t, +\infty) = \frac{|C_1|^2}{\beta_1^2} e^{-\beta_1^2 t}$, that is at $\theta = \infty$ the prognosis error depends on the last moment of time. At $t \to \infty$ $\sigma^2(t, +\infty) \to 0$, because the multiplier $e^{-\beta_1^2 t}$ is nonnegative and does not depend on t $\sigma^2(t, 0) = 0$.

Consider the dependence of the mean squared error (7) on various parameters, assuming that $|C_1|^2 = 1$. We carry out an asymptotic analysis of this formula for $r \to 1-0$ and $r \to 0$ $(|r| < 1)$. Let $\theta = 1, \quad \beta_1^2 = 1-\varepsilon, \varepsilon \to 0, \quad t = 1$. Then expression (7) takes the form: $\sigma^2(t, \theta) = \frac{1}{1-\varepsilon} e^{\varepsilon-1}\left(e^{\varepsilon-1} - 2e^{\frac{\varepsilon-1}{2}}\cos\alpha_1 + 1\right)$. After simple transformations we get

$$\sigma^2(t, \theta) = e^{-2} - 2e^{-\frac{3}{2}}\cos\alpha_1 + e^{-1} + \varepsilon\left(3e^{-2} - 5e^{-\frac{3}{2}}\cos\alpha_1 + 2e^{-1}\right). \tag{8}$$

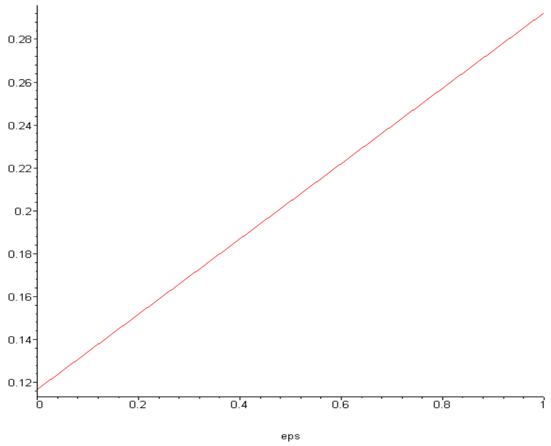

Fig. 9 – Dependence of average square error (8) on ε at $\alpha_1 = \pi/6$.

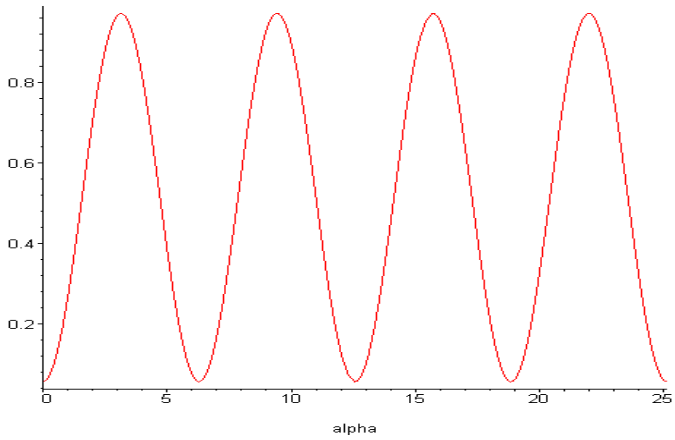

Fig. 10 – Dependence of average square error (8) on α_1 at $\varepsilon = 0.01$.

The dependence of the mean square of error (8) on ε is linear (fig. 9).

The graphs of dependence mean squared error (8) on α_1 differ from each other only by amplitude. The amplitude grows with ε (fig. 10).

Similarly, we consider the asymptotic behavior for small β_1^2 .

After simple transformations we get $\sigma^2(t,\theta) = \dfrac{2(1-\cos\alpha_1)}{\beta_1^2} + (3\cos\alpha_1 - 2)$. Considering the dependence of this expression on β_1^2 at different values of the angle α_1 we have actually the same graphs (fig. 11).

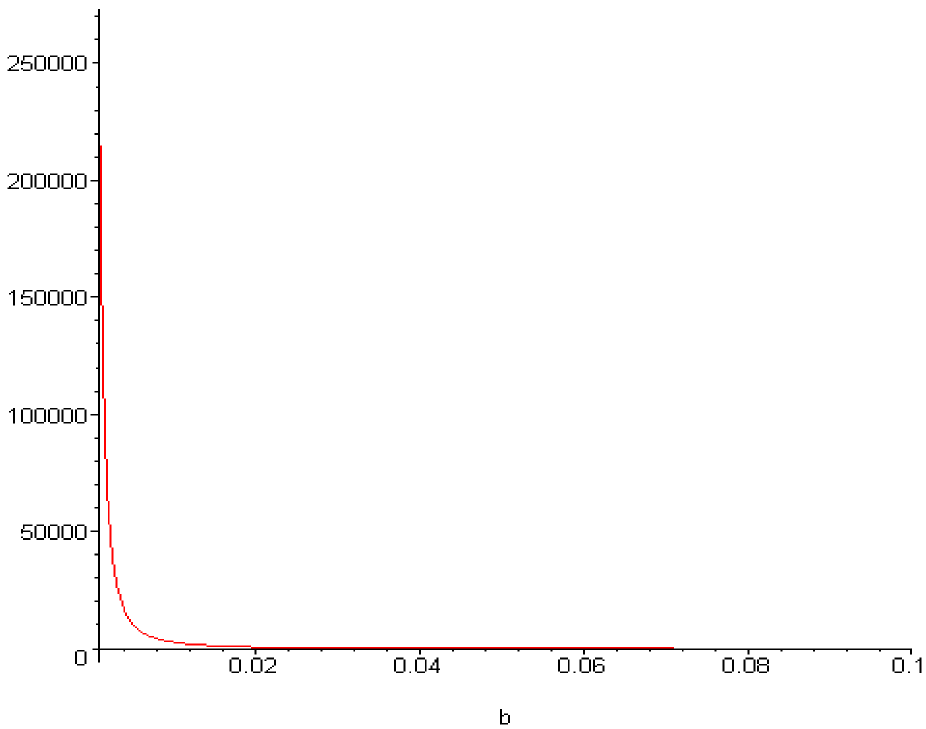

Fig. 11 – Dependence of $\sigma^2(t,\theta) = \dfrac{2(1-\cos\alpha_1)}{\beta_1^2} + (3\cos\alpha_1 - 2)$ on β_1^2 at $\alpha_1 = \pi/6$ /

The graphs of the dependence of this expression on α_1 differ from each other only by amplitude. The amplitude decreases as β_1^2 grows. For example, the graph for $\beta_1^2 = 0.001$ is shown in fig. 12.

As in the case of the sequence considered above, when $\theta = 0$ the error is zero, when $t \to \infty$ the error monotonically goes to zero, and at $\theta \to 0$ it goes to zero as well, but oscillates. More general extrapolation formulas for nonstationary random sequences are obtained in [13].

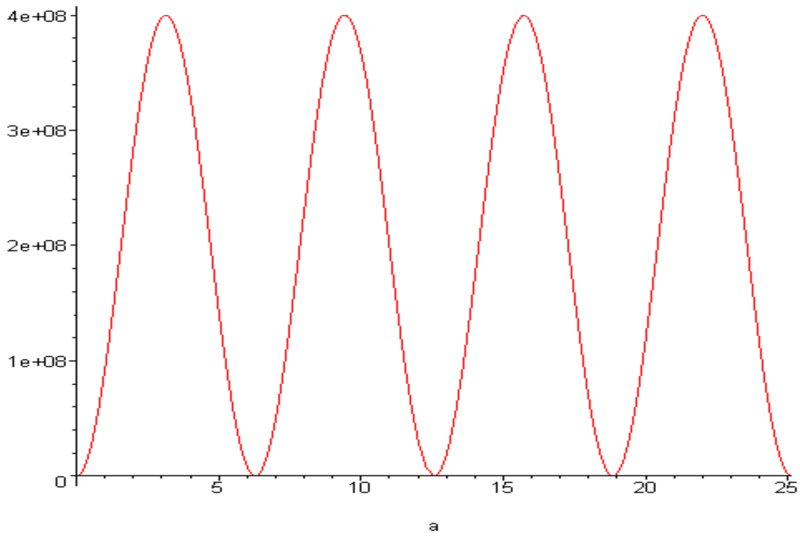

Fig. 12 – Dependence of $\sigma^2(t,\theta)=\dfrac{2(1-\cos\alpha_1)}{\beta_1^2}+(3\cos\alpha_1-2)$ on α_1 at $\beta_1^2=0.001$.

Conclusions. Thus, unlike in the case of stationary signals, the mean square prediction error depends not only on the prediction step, but also on the last moment of time. In addition, for asymptotically fading signals, the error goes to zero, and for the increasing ones – to the infinity. The dependence of the mean square of the prediction error of a random sequence on the last value at different values of parameters, which is considered in the article, can be used for the analysis of statistically non-stationary signals. This is promising in solving many applications, for which the unsteadiness of the data is significant.

Bibliography

1. *Яглом А. М.* Введение в теорию стационарных случайных функций // УМН. – 1952. –Том 1. – Вып. 5 (51). – С. 3 – 168.
2. *Jazwinski A. H.* Stochastic Processes and Filtering Theory. – New York and London : Academic Press, 1970. – 376 p.
3. *Медич Дж.* Статистически оптимальные линейные оценки и управление. – М. : Энергия, 1973. – 440 с.
4. *Шаронова Н. В.*, *Черемская Н. В.* Корреляционная теория одного класса неоднородных случайных полей // Вестник Херсонского технического университета. – 2004. – № 1 (19). – С. 343 – 348.
5. *Черемская Н. В.* Последовательности в гильбертовом пространстве бесконечного ранга нестационарности // Вісник Харківського університету. Сер. : Математика, прикладна математика і механіка. – 1999. – № 444. – С. 157 – 161.
6. *Черемская Н. В.* Об одном классе нестационарных случайных последовательностей // Вестник НТУ «ХПИ». Сб. научн. тр.. Сер. : Системный анализ, управление и информационные технологии. – Харьков, 2003. – № 18. – С. 122 – 130.
7. *Козуляев П. А.* К вопросу об экстраполяции стационарных процессов // Доклады Академии Наук СССР. – 1947. – Том LVI. – № 9. – С. 903 – 905.
8. *Козуляев П. А.* К проблемам интерполяции и экстраполяции стационарных последовательностей // Доклады Академии Наук СССР. – 1941. – Том XXX. – № 1. – С. 13 – 17.
9. *Балакришнан А. В.* Теория фильтрации Калмана. – М. : Мир, 1988. – 168 с.
10. *Браммер К.*, *Зиффлинг Г.* Фильтр Калмана – Бьюси. – М. : Наука, 1982. – 199 с.
11. *Cheremskaya N. V.* Developing algorithms of optimal forecasting and filtering for some classes of nonstationary random sequences // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 3 (1279). – С. 139 – 145.
12. *Лившиц М. С.*, *Янцевич А. А.* Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Харьков : Изд-во ХГУ, 1971. – 160 с.
13. *Шаронова Н. В.*, *Черемская Н. В.* Об оптимальном прогнозе и фильтрации одного класса нестационарных случайных последовательностей // Вестник НТУ «ХПИ». Сб. научн. тр.. Сер. : Системный анализ, управление и информационные технологии. – Харьков, 2004. – № 45. – С. 93 – 100.
14. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1962. – 719 с.

References (transliterated)

1. Yaglom A. M. Vvedeniye v teoriyu statsionarnykh sluchaynykh funktsiy [Introduction to the theory of stationary random functions]. *UMN*. 1952, vol. 1, no. 5 (51), pp. 3–168.
2. Jazwinski A. H. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. New York and London, Academic Press, 1970. 376 p.
3. Medich Dzh. *Statisticheski optimal'nye lineynye otsenki i upravleniye* [Statistically optimal linear estimates and control]. Moscow, Energiya Publ., 1973. 440 p.
4. Sharonova N. V., Cheremskaya N. V. Korrelyatsionnaya teoriya odnogo klassa neodnorodnykh sluchaynykh poley [Correlation theory of a class of inhomogeneous random fields]. *Vestnik Khersonskogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of the Kherson Technical University]. 2004, no. 1 (19), pp. 343–348.
5. Cheremskaya N. V. Posledovatel′nosti v gyl′bertovom prostranstve beskonechnogo ranga nestatsyonarnosti [Sequences in a Hilbert Space of Infinite Rank of Nonstationarity]. *Visnyk Kharkivs'kogo universytetu. Ser. : Matematyka, prykladna matematyka i mekhanika* [Bulletin of the Kharkiv University. Series : Mathematics, applied mathematics, and mechanics]. 1999, no. 444, pp. 157–161.

6. Cheremskaya N. V. Ob odnom klasse nestatsionarnykh sluchaynykh posledovatel'nostey [On a class of nonstationary random sequences]. *Vestnik NTU "KhPI". : Sb. nauchn. tr.. Ser. : Systemnyy analiz, upravlenie i informatsionnye tekhnologii* [Bulletin of the NTU “KhPI”. Collection of scientific papers. Series : System analysis, control, and information technologies]. Kharkov, 2003, no. 18, pp. 122–130.

7. Kozulyaev P. A. K voprosu ob ekstrapolyatsii statsionarnykh protsessov [To the question of extrapolation of stationary processes]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the Academy of Science of the USSR]. 1947, vol. LVI, no. 9, pp. 903–905.

8. Kozulyayev P. A. K problemam interpolyatsii i ekstrapolyatsii statsionarnykh posledovatel'nostey [To the problems of interpolation and extrapolation of stationary sequences]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the Academy of Science of the USSR]. 1941, vol. XXX, no. 1, pp. 13–17.

9. Balakrishnan A. V. *Teoriya fil'tratsii Kalmana* [Kalman's theory of filtration]. Moscow, Mir publ., 1988. 168 p.

10. Brammer K., Ziffling G. *Fil'tr Kalmana – B'yusi* [Kalman-Bucy's filter]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 199 p.

11. Cheremskaya N. V. Developing algorithms of optimal forecasting and filtering for some classes of nonstationary random sequences. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2018, no. 3 (1279), pp. 139–145.

12. Livshits M. S., Yantsevich A. A. *Teoriya operatornykh uzlov v gil'bertovykh prostranstvakh* [Theory of operator nodes in Hilbert spaces]. Kharkov, Izd-vo KhGU Publ., 1971. 160 p.

13. Sharonova N. V., Cheremskaya N. V. Ob optimal'nom prognoze i fil'tratsii odnogo klassa nestatsionarnykh sluchaynykh posledovatel'nostey [On the optimal prediction and filtration of a class of non-stationary random sequences]. *Vestnik NTU "KhPI". : Sb. nauchn. tr.. Ser. : Systemnyy analiz, upravlenie i informatsionnye tekhnologii* [Bulletin of the NTU “KhPI”. Collection of scientific papers. Series : System analysis, control, and information technologies]. Kharkov, 2004, no. 45, pp. 93–100.

14. Loeyv M. *Teoriya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow, Izd-vo inostr. lit-ry Publ., 1962. 719 p.

Received (надійшла) 06.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Черемська Надія Валентинівна (Черемская Надежда Валентиновна, Cheremskaya Nadezhda Valentinovna) **–** кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 225-15-44; e-mail: cheremskaya66@gmail.com.