МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
„ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ТА
МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Харків 2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
„ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

О. Є. КОНОВАЛЕНКО, М. А. ТКАЧУК

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ТА
МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

Харків
НТУ «ХПІ»
2018

УДК 519.2(075.8)

ББК В 171я73-1+В 172я73-1

К 64

Рецензенти:

Г.Г. Асєєв, д-р техн. наук, проф., зав. каф. інформаційних технологій ХДАК

О.В. Устиненко, канд. техн. наук, доцент НТУ «ХПІ»

Коноваленко О.Є.

К 64 Теорія ймовірностей та математична статистика: навч.-метод. посіб. / О.Є. Коноваленко, М.А. Ткачук – Х. : НТУ «ХПІ», 2018. – 94 с.

ISBN

Навчально-методичний посібник містить перелік основних тем, які входять до програми курсу, методичні вказівки, індивідуальні розрахункові завдання, приклади розв'язання типових задач.

Призначено для студентів спеціальності «Прикладна механіка». Посібник може бути використаний для всіх спеціальностей, до програми навчання яких входить курс «Теорія ймовірностей та математична статистика», усіх форм навчання.

Табл. 7. Іл. 18. Бібліогр. 8.

УДК 519.2(075.8)
ББК В 171я73-1+В 172я73-1

ISBN

П Е Р Е Д М О В А

У сучасних умовах переходу до інформаційного суспільства теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика стають одними з найважливіших інструментів управління на всіх його рівнях. Курс «Теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика» належить до фундаментальних дисциплін бакалаврської підготовки за інженерно-технічними напрямками.

Кожна математична теорія стає більш зрозумілою та доступною, якщо її вдається застосувати для розв’язання практичних задач. Метою даного посібника є освоєння студентами теоретичних та методичних знань, набуття ними практичного досвіду розв’язання задач, внаслідок чого студенти повинні знати аналітичні можливості методів збирання та обробки даних, суть узагальнюючих характеристик, які доводиться використовувати в аналітичній роботі, визначати доцільність застосування того чи іншого методу в аналізі конкретного процесу, аналізувати одержані результати та робити обґрунтовані висновки. Він може бути використаний студентами як денної, так і заочної форми навчання різних спеціальностей, до навчальної програми яких входить вивчення “Теорії ймовірностей та математичної статистики”.

У посібнику стисло викладається необхідний теоретичний матеріал та наводяться формули, які потрібні для розв’язання задач. Кожна задача має 31 варіант. Як еталонний розв’язаний нульовий варіант. Всі задачі різних варіантів однотипні. Числові дані наведені в таблицях або знаходяться за номером варіанта V та задані у вигляді вибірок. При вивченні курсу студент розв’язує свій варіант з набору задач.

Глава I

Елементи теорії ймовірностей

§ 1. Випадкові події

1. Подія. Математична наука, що вивчає загальні закономірності випадкових явищ незалежно від їх конкретної природи та надає методи кількісної оцінки впливу випадкових факторів на різноманітні явища, називається **теорією ймовірностей.**

Основою наукового дослідження в теорії ймовірностей є експеримент та спостереження. Експерименти можуть давати різні результати залежно від того комплексу умов, в яких вони відбуваються. Результати експерименту можна характеризувати кількісно та якісно. Якісною характеристикою результату експерименту є **подія**. Кількісна характеристика результату експерименту, яка може набувати одне з можливих значень, заздалегідь невідомо яке саме, називається **випадковою величиною.**

Отже, подією (або "випадковою подією") називається всілякий факт, який в результаті експерименту може статися, а може й не статися. Події прийнято позначати великими літерами латинської абетки. Сукупність всіх подій $\Omega = \{\omega\}$ називається множиною (або простором) події. Будемо вважати, що простір Ω кінцевий або лічений.

Якщо при всіх експериментах подія, яка розглядається, настає завжди, вона називається **достовірною**. Наприклад, при підриві осколкового снаряда достовірною подією є руйнування оболонки.

Якщо при всіх експериментах подія, що розглядається, не настає ніколи, вона називається **неможливою**. Наприклад, при відсутності струму в електричній мережі неможливою подією є загоряння лампочки.

Повною групою подій називається кілька таких подій, що в результаті експерименту неодмінно станеться хоча б одна з них. Наприклад, коли експеримент складається з двох пострілів по мішені, події A_1 – жодного влучання, A_2 – одне влучання та A_3 – два влучання складають повну групу подій.

Декілька подій у даному експерименті називаються **несумісними**, якщо ніякі два з них не можуть статися одночасно.

Наприклад, коли кидають монету, то події A_1 – поява герба та A_2 – поява цифри є несумісними.

Декілька подій у даному експерименті називаються **рівноможливими**, якщо за умов симетрії експерименту не має підстав вважати будь-яке з них більш можливим, ніж інші. Наприклад, якщо кидають гральну кость, подія F_1 – поява не менше трьох очків та F_2 – поява не більше чотирьох очків є рівноможливими.

Якщо декілька подій: 1) складають повну групу; 2) несумісні; 3) рівноможливі, вони називаються випадками (або "шансами").

Випадок називається **сприятливим події**, якщо поява цього випадку спричиняє появу події.

2. Відношення між подіями. При розробці апарату та методики дослідження випадкових подій в теорії ймовірностей дуже важливо встановити відношення між подіями. Ці відношення можна розглядати як відношення між відповідними підмножинами множини подій Ω.

1. **Послідовність**: $A \subset B$, якщо за здійсненням події A настає здійснення події B, або подія A спричиняє подію B.
2. **Рівність**: $A=B$, якщо одночасно виконуються умови $A \subset B$ та $B \subset A$.
3. **Сума**: $A \bigcup B$ виконується тоді, коли відбувається хоча б одна з цих подій.
4. **Добуток**: $A \bigcap B$ виконується тоді, коли відбуваються обидві події (і A, і B).
5. **Різниця**: $A \setminus B$ виконується тоді, коли подія A відбувається, а подія B не відбувається.
6. **Протилежність**: протилежна подія $\overline{A} = \Omega \setminus A$ відбувається тільки тоді, коли не відбувається подія А. Правильним є й таке твердження: $\overline{\overline{A}} = A$.

3. Класична ймовірність. Чисельна міра можливості настання події називається його **ймовірністю**. **Класична ймовірність** події A визначається як відношення кількості випадків, що сприяють події *A(m)*, до загальної кількості випадків *(n)*:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.1)$$

Ймовірність неможливої події F: $P(F) = 0$; *ймовірність достовірної події* $\Omega: P(\Omega) = 1$, *а ймовірність довільної випадкової події A* знаходиться між 0 та 1: $0 < P(A) < 1$.

При класичному визначенні ймовірності не завжди можна визначити числа m та n для обчислення ймовірностей подій, і тому безпосередньо користуватися формулою (1.1) не вдається. У таких випадках уводять поняття геометричної ймовірності, тобто ймовірності влучення точки в область (відрізок, частину площини, частину тіла й т.п.). Нехай, наприклад, на площині є деяка область *G* й у ній утримується інша область *g*. Потрібно знайти ймовірність того, що точка, узята на удачу в області *G*, потрапить в область *g*. При цьому вираженні «точка, узята на удачу в області *G*» надається такий зміст: ця точка може потрапити в будь-яку точку області *G*. Імовірність влучення точки в яку-небудь частину області *g* пропорційна мірі *(mes)* цієї частини (довжині, площі, об'єму й т.п.) і не залежить від її розташування й форми:

$$P = \frac{mesg}{mesG}.$$

Ймовірність суми подій $A \cup B$ визначається за формулою

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (1.2)$$

Якщо події несумісні, формула (1.2) спрощується та набуває вигляд:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (1.3)$$

Цю формулу можна узагальнити на випадок суми будь-якої кількості несумісних подій. Враховуючи, що $A \cup \overline{A} = \Omega$, з формули (1.3) одержимо

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \quad (1.4)$$

Якщо події *A* та *B* залежні, має сенс говорити про умовну ймовірність $P(A/B)$ події *A* за умови, що подія *B* вже сталася.

Коли події незалежні, умовна ймовірність дорівнює звичайній ймовірності $P(A/B) = P(A)$.

Ймовірність добутку подій $A \cap B$ виражається формулою:

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) \text{ або } P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A). \quad (1.5)$$

Коли події незалежні, формула (1.5) набуває вигляду:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \quad (1.6)$$

Формулу (1.6) можна узагальнити на будь-яку кількість незалежних подій.

Якщо подія A залежить від подій (гіпотез) повної системи подій $B = \{B_1, B_2, \ldots B_n\}$, ймовірність події A обчислюється за формулою повної ймовірності

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i) \cdot P(B_i). \quad (1.7)$$

У цьому випадку разом зі здійсненням події A відбувається одна і тільки одна подія з системи B.

Коли подія A сталася, можна обчислити умовну ймовірність того, що разом з подією A здійснюється гіпотеза B_i:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A/B_i)}{P(A)}, \quad (1.8)$$

де $P(A)$ – повна ймовірність події A. Одержану формулу називають формулою Бейєса. За допомогою формули (1.8) можна після експерименту уточнити ймовірність здійснення гіпотези B_i. Сума ймовірностей B_i повинна дорівнювати одиниці.

4. Поняття комбінаторики. При розв'язанні задач теорії ймовірностей часто використовують такі поняття комбінаторики: *перестановка, сполучення* та *розміщення*, а також *правило додавання* та *правило множення*.

Нехай задана множина N, що складається з n об'єктів. Всілякі послідовності з усіх n об'єктів називаються **перестановками.** Загальна кількість P_n різноманітних перестановок із n об'єктів обчислюється за формулою

$$P_n = n!, \quad (1.9)$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, при цьому вважають, що $0! = 1$.

Сполученнями називають підмножини множини N. Загальна кількість різних сполучень C_n^m з n об'єктів по m обчислюється за формулою

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}\ . \tag{1.10}$$

Розміщеннями називають упорядковані послідовності об'єктів підмножин множини N. Загальна кількість розміщень A_n^m з n об'єктів по m обчислюють за формулою

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\ldots(n-m+1). \tag{1.11}$$

Правило множення. Якщо необхідно виконати послідовно будь-які k дій, які можна виконати відповідно $n_1, n_2, \ldots n_k$ засобами, то всі k дій разом можна виконати $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ засобами.

Правило додавання. Якщо дві взаємовиключні дії можуть виконуватися відповідно m або n засобами, то виконати одну з цих дій можна $m + n$ засобами.

Запитання для самоперевірки

1. Які події називаються випадковими? Наведіть приклади.
2. Які події утворюють повну групу несумісних подій? Наведіть приклади.
3. Яка подія називається сумою або об'єднанням кількох подій?
4. Яка подія називається добутком або суміщенням кількох подій?
5. Сформулюйте класичне визначення ймовірності події. В яких межах змінюється ймовірність події?
6. Чому дорівнює сума ймовірностей несумісних подій, що утворюють повну групу?
7. Чому дорівнює сума ймовірностей несумісних подій?
8. Яка ймовірність називається умовною?
9. Чому дорівнює добуток ймовірностей?

10. За якою формулою обчислюється повна ймовірність? Для розв'язання яких задач застосовується формула ймовірності гіпотез?

Робота 1

Завдання

1. Переписати текст задачі, замінюючи всі параметри їх значеннями для варіанта, що розв'язується.
2. Визначити експеримент та події.
3. З'ясувати, які формули потрібно застосувати для розв'язання задачі. Обчислення провести, по можливості, точно.

Задача 1.1. Кидають дві монети. Обчислити ймовірність того, що:

1) на обох монетах з'явиться "герб";
2) хоча б на одній монеті з'явиться "герб";
3) на жодній монеті не з'явиться "герб".

Кидають три монети. Обчислити ймовірність того, що:

4) на всіх монетах з'явиться "герб";
5) хоча б на одній монеті з'явиться "герб";
6) тільки на двох монетах з'явиться "герб";
7) тільки на одній монеті з'явиться "герб";
8) тільки на одній монеті не з'явиться "герб".

Кидають чотири монети. Обчислити ймовірність того, що:

9) на всіх монетах з'явиться "герб";
10) хоча б на одній монеті з'явиться "герб";
11) тільки на одній монеті з'явиться "герб";
12) тільки на двох монетах з'явиться "герб";
13) тільки на трьох монетах з'явиться "герб";
14) на жодній монеті не з'явиться "герб".

Кидають гральну кость. Обчислити ймовірність того, що на верхній грані з’явиться:

15) “1” або “6”;
16) парне число очок.

Кидають дві гральні кості. Обчислити ймовірність того, що на верхніх гранях з’являться такі числа очок:

17) тільки парні;
18) одне парне, друге непарне;
19) сума яких парна;
20) сума яких непарна;
21) сума яких більша за їх добуток;
22) сума яких менше шести;
23) сума яких більше восьми.

Кидають три гральні кості. Обчислити ймовірність того, що на верхніх гранях з’являться такі числа очок:

24) тільки парні;
25) одне парне, інші непарні;
26) сума яких парна;
27) сума яких непарна;
28) всі однакові;
29) всі різні;
30) сума яких ділиться на чотири;
0) сума яких ділиться на п’ять.

Задача 1.2. Слово складене з карток, на кожній з яких написана одна літера. Потім картки змішують та виймають без повертання по одній. Обчислити ймовірність того, що букви виймають у порядку заданого слова.

Слова за варіантами:

0)	МАТЕМАТИКА	11)	ПІДПРОГРАМА	22)	НАПІВПРОВІДНИК
1)	ПРОГРАМА	12)	ПРОЦЕДУРА	23)	ТРАНЗИСТОР
2)	СПЕЦІАЛІСТ	13)	ПРИСВОЮВАННЯ	24)	ІНТЕГРАЛ

3) ПРОГРАМУВАННЯ
4) ІНФОРМАТИКА
5) СТАТИСТИКА
6) ПОДІЯ
7) ВИПАДКОВІСТЬ
8) ЙМОВІРНІСТЬ
9) АЛГОРИТМ
10) МЕНЕДЖЕР
14) УМОВА
15) ПРОЦЕСОР
16) МОНІТОР
17) ОБЛАДНАННЯ
18) ПЕРФОСТРІЧКА
19) ПЕРФОКАРТА
20) КОРИСТУВАЧ
21) ДОКУМЕНТ
25) КАЛЬКУЛЯТОР
26) ОПЕРАЦІЯ
27) АРИФМЕТИКА
28) РОЗМІЩЕННЯ
29) СПОЛУЧЕННЯ
30) СУКУПНІСТЬ

Задача 1.3. Застосовуючи поняття геометричної ймовірності розв'язати таку задачу.

1. У точці C, положення якої на телефонній лінії AB довжини l_0 рівноможливе, відбувся розрив. Визначити ймовірність того, що точка C знаходиться від A на відстані, більшій l.

2. На відрізок довжиною ℓ поставлена точка ділення. Визначити ймовірність того, що менший відрізок має довжину більшу, ніж l/3 ℓ.

3. Промінь локатора переміщається в горизонтальній площині зі сталою кутовою швидкістю. Яка ймовірність того, що ціль буде виявлена локатором у кутовому секторі величини 60°, якщо поява цілі по будь-якому напрямку однаково можлива?

4. В окружність вписується прямокутник. Яка ймовірність, що його висота більше довжини основи?

5. На осі абсцис графіка функції $y = \sin x$ навмання береться точка. Яка ймовірність того, що ордината графіка в цій точці більша 0,5?

6. Комп'ютер випадковим образом генерує число x із проміжку $[-\pi; \pi]$. Яка ймовірність того, що $\sin x < \cos x$?

7. В окружності радіуса R проводяться вертикальні хорди. Яка ймовірність того, що довжина на удачу взятої хорди виявиться менше радіуса?

8. Шматок дроту довжиною 20 см був зігнутий у на удачу обраній точці. Після цього, перегнувши дріт ще у двох місцях (не ламаючи його), зробили прямокутну рамку. Знайти ймовірність того, що площа отриманої рамки не перевершує 21 см^2.

9. В окружність радіуса R вписаний правильний трикутник. Усередину кола кидається точка. Знайти ймовірність того, що точка потрапить у середину трикутника.

10. Яка ймовірність, не цілячись, потрапити нескінченно малою пулею в прути квадратних ґрат, якщо товщина прутів дорівнює d, відстань між їхніми осями дорівнює a $(d < a)$.

11. Монета радіуса r $(2r < a)$ випадковим образом кидається на стіл, розграфлений на квадрати зі стороною a. Знайти ймовірність того, що монета не перетне ні однієї сторони квадрата.

12. Із проміжку [0; 2] навмання вибирається два числа. Яка ймовірність того, що їхній добуток більше 2?

13. Яка ймовірність того, що сума двох на удачу взятих відрізків, довжина кожного з яких не перевершує a, буде більше a ?

14. У квадрат $0 \le X \le 1$, $0 \le Y \le 1$ навмання кидається точка $M(x, y)$.Знайти ймовірність того, що $\min(x, y) \le a$, якщо $a \in (0; 1]$.

15. Усередині квадрата з вершинами (0; 0), (1; 0), (1; 1), (0; 1) на удачу вибирається точка $M(x, y)$. Знайти ймовірність того, що: а) $\max(x, y) < a$;

б) $xy < a$, якщо $0 < a \le 1$.

16. Для довільно взятих чисел $a, b \in [0; 2]$ обчислюється визначник $D = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & b \end{vmatrix}$. Яка ймовірність, що $D > 0$?

17. Комп'ютер згенерував два числа із проміжку [–1; 2]. Яка ймовірність того, що їхня сума більша 1, а добуток менше 1?

18. Параметри a, b можуть набувати будь-які значення із проміжку [−1; 1]. Знайти ймовірності таких подій: A = {корні квадратного тричлена $x^2 + 2ax + b$ дійсні}, B = {корні квадратного тричлена $x^2 + 2ax + b$ позитивні}.

19. На відрізку довжини a поставили дві точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними менша $a/3$?

20. Два приятелі домовилися зустрітися протягом години. Перший, що прийшов, чекає 10 хв., а потім іде. Яка ймовірність того, що зустріч відбудеться?

21. У будь-який момент часу із проміжку тривалістю T рівноможливі надходження в приймач двох сигналів. Визначити ймовірність того, що проміжок часу між сигналами буде менше t.

22. У випадкові моменти часу із проміжку тривалістю T включаються передавач і приймач. Тривалість переданого сигналу t_1, час роботи приймача t_2. Яка ймовірність, що переданий сигнал буде виявлений?

23. Два теплоходи повинні підійти до того самого причалу протягом доби. Визначити ймовірність того, що одному з теплоходів прийдеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки одного теплохода 1год., іншого – 2 год.

24. Із проміжку [0; 3] навмання вибираються три числа. Яка ймовірність того, що їхня сума менше 3?

25. Стрижень довжиною a довільним образом розламується на три частини. Знайти ймовірність того, що із цих частин можна скласти трикутник. Зауваження: трикутник можна скласти із трьох відрізків, якщо сума довжин двох будь-яких з них більше довжини третього, а різниця довжин – менше довжини третього.

26. На відрізку L довжиною 20 см поміщений менший відрізок довжиною 10 см. Знайти ймовірність того, що точка, на удачу поставлена на більший відрізок, потрапить також і на менший відрізок. Передбачається, що ймовірність влучення точки на відрізок пропорційна довжині відрізка й не залежить від його розташування.

27. У коло радіуса R поміщене менше коло радіуса r. Знайти ймовірність того, що точка, на удачу кинута у велике коло, потрапить також й у мале коло. Передбачається, що ймовірність влучення точки в коло пропорційна площі кругу й не залежить від його розташування.

28. На площині накреслені дві концентричні окружності, радіуси яких

5 й 10 см відповідно. Знайти ймовірність того, що точка, кинута на удачу у велике коло, потрапить також й у кільце, утворене побудованими окружностями. Передбачається, що ймовірність влучення точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури й не залежить від її розташування.

29. На площину, розграфлену паралельними прямими, що відстоять друг від друга на відстані 6 см, на удачу кинуте коло радіусом 1 см. Знайти ймовірність того, що коло не перетне ні однієї із прямих. Передбачається, що ймовірність влучення точки на відрізок пропорційна довжині відрізка й не залежить від його розташування.

30. У сигналізатор надходять сигнали від двох пристроїв, причому надходження кожного із сигналів можливо в будь-який момент проміжку часу тривалістю T. Моменти надходження сигналів незалежні один від іншого. Сигналізатор спрацьовує, якщо різниця між моментами надходження сигналів менше t ($t < T$). Знайти ймовірність того, що сигналізатор спрацює за час T, якщо кожен із пристроїв надішле по одному сигналу**.**

Задача 1.4. В лотереї розігрується 500 білетів. Серед них K виграшів по 50 гривень, H виграшів по 20 гривень, M виграшів по 10 гривень, P виграшів по 5 гривень. Хтось купує один білет. Обчислити ймовірність:

а) виграти не менше 10 гривень;

б) будь-якого виграшу.

Значення параметрів K, H, M, P за варіантами наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
K	5	5	6	6	7	4	8	6	4	5	7	8	6	4	8	5
H	6	6	5	5	4	5	6	7	7	6	4	6	5	6	6	6
M	4	5	4	5	4	4	5	4	4	5	4	4	4	4	5	5
P	2	3	2	3	2	2	3	4	2	3	2	3	3	3	2	4

Продовження таблиці 1

Вариант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
K	7	5	6	5	6	6	6	8	6	5	6	5	6	6	4
H	4	7	5	7	7	8	5	6	7	7	7	7	8	7	7
M	5	4	5	5	5	5	5	5	4	4	6	5	5	5	4
P	3	3	2	4	3	4	4	3	3	2	3	3	3	2	2

Задача 1.5. Пристрій складається з трьох незалежних елементів, що працюють безвідмовно T год. відповідно з ймовірностями P_1, P_2, P_3. Обчислити ймовірність того, що за час T вийде з ладу:

а) тільки один елемент;

б) хоча б один елемент.

Значення параметрів обчислити за формулами:

$$k = |14{,}9 - V| : 100\ ^{*};$$

$P_1 = 1 - k$; $P_2 = 0{,}9 - k$; $P_3 = 0{,}85 - k$.

Задача 1.6. В бібліотеці підручники з теорії ймовірності займають дві полиці. На першій – K підручників у твердій та L у м'якій обкладинці; на другій – M підручників у твердій та N у м'якій обкладинці. Бібліотекар бере з першої полиці P підручників, з другої полиці – Q підручників. Обчислити ймовірність того, що серед узятих бібліотекарем книжок:

а) всі книжки у твердій обкладинці;

б) тільки три у твердій обкладинці;

в) хоча б одна у твердій обкладинці.

Значення параметрів K, L, M, N, P та Q за варіантами наведені у таблиці 2.

Таблиця 2

Варіант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
K	6	5	4	7	5	5	5	5	6	6	6	6	3	3	3	3
L	4	5	5	3	4	6	7	8	3	5	6	7	8	7	6	5
M	5	4	5	6	7	7	6	7	5	5	5	5	5	6	6	6
N	7	8	8	3	4	3	4	5	6	3	5	4	7	4	5	6
P	3	2	2	3	1	3	2	4	3	2	4	2	2	3	1	4
Q	2	2	3	1	4	2	2	1	3	2	1	3	3	3	4	1

Продовження таблиці 2

Варіант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
K	3	5	4	4	4	4	4	4	4	7	7	7	7	7	7
L	4	3	9	8	7	6	5	4	3	2	4	5	6	7	8
M	6	4	7	7	8	7	7	7	7	4	8	4	4	4	8
N	7	9	3	4	3	5	6	7	8	8	5	6	7	4	5
P	2	2	3	2	4	2	3	3	1	4	3	2	3	1	3
Q	2	3	3	3	1	2	2	3	4	1	3	2	2	4	3

[*] Тут і надалі літерою V позначений номер варіанту

Задача 1.7. В урні міститься K чорних та білих кульок, до них додають L білих кульок. Після цього випадково виймають з урни M кульок. Обчислити ймовірність того, що всі вийняті кульки білі.

Вважається, що всі можливі припущення про первинний склад урни рівноможливі. Значення параметрів K, L, та M за варіантами наведені у таблиці 3.

Таблиця 3

Варіант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
K	4	3	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	3	3
L	2	4	3	2	4	4	4	3	3	3	4	4	4	4	4	4
M	3	4	4	3	4	2	3	2	3	4	2	3	4	5	2	3

Продовження таблиці 3

Варіант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
K	3	3	3	3	3	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
L	4	5	5	5	5	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4
M	5	2	3	4	5	2	3	4	5	2	3	4	5	2	3

Задача 1.8. У першій урні K білих та L чорних кульок, а в другій – M білих та N чорних кульок. З першої урни випадково виймають P кульок та кладуть у другу урну. Після цього з другої урни також випадково виймають R кульок. Обчислити ймовірність того, що всі кульки, вийняті з другої урни, білі.

Значення параметрів K, L, M, N, P та R за варіантами наведені у таблиці 4.

Таблиця 4

Варіант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
K	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6
L	6	5	4	3	2	3	4	5	6	7	8	8	7	6	5	4
M	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	3	3	3	3
N	8	7	6	5	4	3	5	4	6	7	8	9	3	4	5	6
P	3	2	3	2	3	3	4	2	3	2	3	3	4	3	4	4
R	4	3	3	4	4	2	3	4	3	4	3	4	3	2	3	2

Продовження таблиці 4

Варіант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
K	6	6	3	3	3	3	3	3	3	7	7	7	7	7	7
L	3	2	2	3	4	5	6	7	8	2	3	4	5	6	7
M	3	3	6	6	6	6	6	6	6	2	2	2	2	2	2
N	7	8	8	7	6	5	4	3	2	8	6	5	4	3	2
P	3	3	2	2	3	3	2	3	3	2	2	3	3	2	2
R	3	4	4	3	3	4	5	2	3	3	2	2	4	2	3

Задача 1.9. У піраміді стоять R гвинтівок, серед них L з оптичним прицілом. Стрілець, що стріляє з гвинтівки з оптичним прицілом, може вразити мішень з ймовірністю P_1, а якщо він стрілятиме з гвинтівки без оптичного прицілу – з ймовірністю P_2. Обчислити ймовірність того, що стрілець вразить мішень, стрілятиме з випадково взятої гвинтівки.

Значення параметрів обчислюються за формулами:

$$k = |14 - V| : 100,$$

$$P_1 = 0{,}95 - k, \quad P_2 = 0{,}6 - k, \quad R = 5 + k \cdot 100, \quad L = \begin{cases} 3, & V \le 14 \\ 4, & V > 14 \end{cases}.$$

Задача 1.10. На складі фірми з продажу комп'ютерів є монітори трьох фірм-виробників у кількості M_1, M_2 та M_3 відповідно, які можуть безвідмовно працювати до кінця гарантійного строку з ймовірностями відповідно P_1, P_2 та P_3. Для комплектації виробу працівник фірми бере випадково один з моніторів. Обчислити ймовірність того, що підключений та безвідмовно працюючий до кінця гарантійного строку монітор поставлений відповідно першою, другою або третьою фірмою-виробником.

Значення параметрів обчислюються за формулами:

$$k = |14 - V|,$$

$$P_1 = 0{,}99 - k/100, \; P_1 = 0{,}9 - k/100, \; P_1 = 0{,}85 - k/100,$$

$$M_1 = k + 5, \; M_2 = 20 - k, \; M_2 = 25 - k.$$

Розв'язання задач варіанта 0

Задача 1.1. Кидають три гральні кості. Обчислити ймовірність того, що на верхніх гранях з'явиться число очок, сума яких ділиться на п'ять.

Розв'язання. Визначимо експеримент та його результат, тобто елементарну подію. Експериментом є кидання трьох гральних костей; результатом – одне з сполучень очок 1, …, 6 на верхніх гранях трьох костей.

Подія A, що розглядається, – сума очок на трьох костях ділиться на п'ять. Ймовірність події A обчислимо за допомогою формули (1.1):

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Загальну кількість елементарних подій n можна визначити за правилом множення. На кожній гральній кості 6 граней і всі вони можуть сполучатися зі всіма гранями інших костей. Отже, одержимо $n = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Кількість елементарних подій m, що входять до складу події A або сприяють події A, можна знайти, якщо виписати всілякі результати експериментів та залишити лише ті з них, для яких сума очок на всіх трьох костях ділиться на п'ять.

Можна спростити роботу, записавши всілякі результати кидання перших двох костей та поєднати з ними відповідне значення кількості очок, що випали на третій кості.

Маємо:

113	145	221	253	325	361	433	465	541	613	645
122	154	226	262	334	366	442	514	546	622	654
131	163	235	311	343	415	451	523	555	631	663
136	212	244	316	352	424	456	532	564	636	

У результаті отримаємо: $P(m) = 43$, отже, $P(A)=43/216$.

Відповідь. $P(A)=\dfrac{43}{216}$.

Задача 1.2. Слово "МАТЕМАТИКА" складено з карток, на кожній з яких написана одна літера. Потім картки змішують та виймають без повернення по одній. Обчислити ймовірність того, що картки виймають у порядку заданого слова.

Розв'язання. Експеримент полягає у вийманні карток з літерами у випадковому порядку без повернення. Елементарною подією є отримана послідовність літер. Подія A – одержання потрібного слова "МАТЕМАТИКА". Елементарні події – це перестановки з 10 літер, отже, за формулою (1.9) маємо $n = 10!$ Деякі літери в слові "МАТЕМАТИКА" повторюються (М – 2 рази, А – 3 рази, Т – 2 рази), тому можливі перестановки, які не змінюють слова. Їх число дорівнює $m = 2!\cdot 3!\cdot 2! = 24$.

Таким чином, $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{24}{10!}=\dfrac{1}{151200}$.

Відповідь. $P(A)=\dfrac{1}{151200}$.

Задача 1.3. У середині еліпса $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ розташоване коло $x^2+y^2=9$.

Знайти імовірність влучення точки в кільце, обмежене еліпсом і колом.

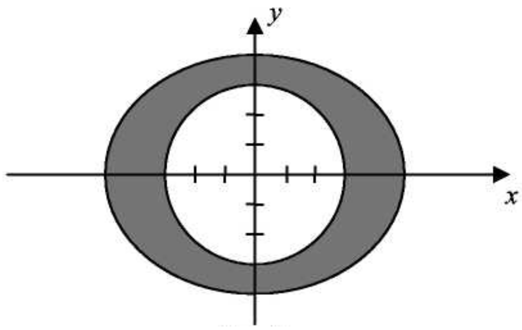
Розв'язання. Нехай подія A – влучення точки в кільце.

Тоді $P(A)=S_{\text{кіл}}/S_{\text{ел}}$, де

$$S_{\text{кіл}}=S_{\text{ел}}-S_{\text{кола}}=\pi ab-\pi r^2 .$$

Оскільки $a = 5$, $b = 4$, $r = 3$,

$$P(A)=\frac{20\pi-9\pi}{20\pi}=\frac{11}{20}=0{,}55.$$



Відповідь. $P(A)=0{,}55$.

Примітка. У випадку класичного визначення ймовірність неможливої події дорівнює нулю. Справедливе й зворотне твердження, тобто якщо ймовірність події дорівнює нулю, то подія неможлива. При геометричному ж визначенні ймовірності зворотне твердження не має місця. Імовірність влучення кинутої точки в одну певну точку області G дорівнює нулю, однак ця подія може відбутися, отже, не є неможливою.

Задача 1.4. В лотереї розігрується 500 білетів. Серед них 5 виграшів по 50 грн., 6 виграшів по 20 грн., 4 виграші по 10 грн. та 2 виграші по 5 грн. Хтось купує один білет. Обчислити ймовірність

а) виграшу не менше 10 грн.;

б) будь-якого виграшу.

Розв'язання. Експериментом є придбання лотерейного білета. Загальна кількість елементарних подій n дорівнює 500.

а) A_1 – виграш складає не менше 10 гривень.

Ця подія складається з трьох несумісних подій.

B_1 – виграш склав 10 грн.;

B_2 – виграш склав 20 грн.;

B_3 – виграш склав 50 грн.

$$A_1 = B_1 \cup B_2 \cup B_3.$$

Оскільки події B_1, B_2, B_3 несумісні, можна застосувати формулу (1.3).

Маємо:

$$P(A_1) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3);$$

$$m_1 = 4;\ \ m_2 = 6;\ \ m_3 = 5;$$

$$P(B_1) = \frac{4}{500}; \quad P(B_2) = \frac{6}{500}; \quad P(B_3) = \frac{5}{500}.$$

$$P(A_1) = \frac{4}{500} + \frac{6}{500} + \frac{5}{500} = \frac{15}{500} = \frac{3}{100} = 0{,}03.$$

б) $A2$ – придбали виграшний білет.

Ця подія складається з чотирьох несумісних подій: B_1, B_2, B_3 та

B_4 – виграш склав 5 грн., тобто

$$A_2 = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4.$$

Згідно з формулою (1.3) $P(A_1) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4)$. Оскільки $P(B_1)$, $P(B_2)$ та $P(B_3)$ ми вже обчислили в пункті а), необхідно визначити лише $P(B_4)$:

$$m_4 = 2 \Rightarrow \quad P(B_4) = \frac{m_4}{n} = \frac{2}{500}.$$

$$P(A_2) = \frac{4}{500} + \frac{6}{500} + \frac{5}{500} + \frac{2}{500} = \frac{17}{500} = 0{,}034.$$

Відповідь. $P(A_1) = 0{,}03$; $P(A_2) = 0{,}034$.

Задача 1.5. Пристрій складається з трьох незалежних елементів, що працюють безвідмовно T год. з ймовірностями 0,851, 0,751 та 0,701 відповідно.

Обчислити ймовірність того, що за проміжок часу T вийде з ладу:

а) тільки один елемент;

б) хоча б один елемент.

Розв'язання. Експеримент, тобто роботу за час T, необхідно розглянути на двох рівнях: на рівні пристрою в цілому та на рівні елементів. Елементарні події визначати не потрібно, оскільки їх ймовірності надані.

а) A_1 – за час T виходить з ладу тільки один елемент;

B_1 – перший елемент виходить з ладу;

B_2 – другий елемент виходить з ладу;

B_3 – третій елемент виходить з ладу;

$\overline{B}_1$ – перший елемент працює бездоганно;

$\overline{B}_2$ – другий елемент працює бездоганно;

$\overline{B}_3$ – третій елемент працює бездоганно.

$$A_1 = \left(B_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3\right) \cup \left(\overline{B}_1 \cap B_2 \cap \overline{B}_3\right) \cup \left(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap B_3\right).$$

Враховуючи незалежність елементів пристрою, несумісність подій B_i і $\overline{B}_i$ та формули (1.3) і (1.6), одержимо таку формулу:

$$P(A_1) = P(B_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(\overline{B}_3) + P(\overline{B}_1) \cdot P(B_2) \cdot P(\overline{B}_3) + P(\overline{B}_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(B_3).$$

З початкових умов

$$P(\overline{B}_1) = 0{,}851; \quad P(\overline{B}_2) = 0{,}751; \quad P(\overline{B}_3) = 0{,}701,$$

а за формулою (1.4) одержимо

$$P(B_1) = 0{,}149; \quad P(B_2) = 0{,}249; \quad P(B_3) = 0{,}299.$$

Таким чином,

$$P(A_1) = 0{,}149 \cdot 0{,}751 \cdot 0{,}701 + 0{,}851 \cdot 0{,}249 \cdot 0{,}701 + 0{,}851 \cdot 0{,}751 \cdot 0{,}299 = 0{,}418;$$

б) A_2 – за час T виходить з ладу хоча б один елемент.

Тут подія A_2 зазначена словами "хоча б один" і пряме розв'язання звичайно приводить до складних обчислень. Простіше спочатку знайти ймовірність протилежної події, а вже потім за формулою (1.4) обчислити ймовірність шуканої події. Отже, використаємо протилежну подію:

$\overline{A}_2$ – за проміжок часу T всі елементи працюють безвідмовно.

$$\overline{A}_2 = \overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3 .$$

$$P\left(\overline{A}_2\right) = P\left(\overline{B}_1\right) \cdot P\left(\overline{B}_2\right) \cdot P\left(\overline{B}_3\right) = 0{,}851 \cdot 0{,}751 \cdot 0{,}701 = 0{,}448;$$

$$P\left(A_2\right) = 1 - P\left(\overline{A}_2\right) = 1 - 0{,}448 = 0{,}552 .$$

Відповідь. $P\left(A_1\right) = 0{,}418; \quad P\left(A_2\right) = 0{,}552$.

Задача 1.6. У бібліотеці підручники з теорії ймовірності займають дві полиці. На першій – 6 книжок у твердій та 4 – у м’якій обкладинці, а на другій – 5 книжок у твердій та 7 у м’якій обкладинці. Бібліотекар бере з першої полиці 3 підручники, а з другої – 2. Обчислити ймовірність того, що серед узятих бібліотекарем підручників:

а) всі книги у твердій обкладинці;

б) тільки три книги у твердій обкладинці;

в) хоча б одна у твердій обкладинці.

Розв’язання. Книжки знімають з обох полиць незалежно. Експериментами є зняття книжок з першої та другої полиць. Елементарними подіями будуть поєднання по 3 або 2 з 10 або 12 книжок відповідно.

а) A_1 – всі зняті з полиць книжки у твердій обкладинці. Визначимо для кожної полиці всі можливі події:

B_1 – з першої полиці зняли 3 підручники у твердій обкладинці;

B_2 – з першої полиці зняли 2 підручники у твердій та 1 у м’якій обкладинці;

B_3 – з першої полиці зняли 1 підручник у твердій та 2 у м’якій обкладинці;

B_4 – з першої полиці зняли 3 підручники у м’якій обкладинці;

C_1 – з другої полиці зняли 2 підручники у твердій обкладинці;

C_2 – з другої полиці зняли 1 підручник у твердій та 1 у м’якій обкладинці;

C_3 – з другої полиці зняли 2 підручники у твердій обкладинці;

Отже, $A_1 = B_1 \cap C_1$, звідкіля, враховуючи незалежність та несумісність подій, одержимо

$$P(A_1) = P(B_1) \cdot P(C_1).$$

Обчислимо кількість елементарних подій n_1 та n_2 для першої та другої подій відповідно. Маємо

$$n_1 = C_{10}^3 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120, \quad n_2 = C_{12}^2 = \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 66.$$

Кількість кожної з елементарних подій дорівнює:

B_1: $m_{11} = C_6^3 = \dfrac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$; C_1: $m_{21} = C_5^2 = \dfrac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10$;

B_2: $m_{12} = C_6^2 \cdot C_4^1 = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 60$; C_2: $m_{22} = C_5^1 \cdot C_7^1 = 5 \cdot 7 = 35$;

B_3: $m_{13} = C_6^1 \cdot C_4^2 = \dfrac{6 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 1 \cdot 2} = 36$; C_3: $m_{23} = C_7^2 = \dfrac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21$;

B_4: $m_{14} = C_4^3 = 4$.

Отже, $$P(A_1) = \frac{20}{120} \cdot \frac{10}{66} = \frac{5}{198};$$

б) A_2 – серед знятих з полиць підручників тільки три в твердій обкладинці. У цьому випадку

$$A_2 = (B_1 \cap C_3) \cup (B_2 \cap C_2) \cup (B_3 \cap C_1);$$

$$P(A_2) = P(B_1) \cdot P(C_3) + P(B_2) \cdot P(C_2) + P(B_3) \cdot P(C_1);$$

$$P(A_2) = \frac{20}{120} \cdot \frac{21}{66} + \frac{60}{120} \cdot \frac{35}{66} + \frac{36}{120} \cdot \frac{10}{66} = \frac{48}{132} = \frac{4}{11};$$

в) A_3 – серед знятих книжок є хоча б одна у твердій обкладинці.

Оскільки подія A_3 зазначена словами “хоча б одна”, потрібно перейти до протилежної події. $\overline{A_3}$ – серед знятих книжок немає жодної у твердій обкладинці.

Тоді $\overline{A_3} = B_4 \cap C_3$;

$$P(\overline{A_3}) = P(B_4) \cdot P(C_3) = \frac{4}{120} \cdot \frac{21}{66} = \frac{7}{660};$$

$$P(A_3) = 1 - P(\overline{A}_3) = 1 - \frac{7}{660} = \frac{653}{660}.$$

Відповідь. $P(A_1) = \dfrac{5}{198}$; $\quad P(A_2) = \dfrac{4}{11}$; $\quad P(A_3) = \dfrac{653}{660}$.

Задача 1.7. В урні 4 чорні і білі кульки. До них додають 2 білі кульки. Після цього з урни випадково виймають 3 кульки. Обчислити ймовірність того, що всі вийняті кульки білі. Вважати, що всі можливі припущення про первісний склад урни рівноможливі.

Розв'язання. У задачі мають місце два види експериментів: спочатку задається первинний склад урни, а потім випадково виймають 3 кульки, причому результат другого експерименту залежить від результату першого. Тому застосуємо формулу повної ймовірності (1.7).

Подія A – випадково виймають 3 білі кульки. Ймовірність цієї події залежить від первинного складу кульок в урні. Отже, розглянемо події:

B_1 – в урні були 4 білі кульки;

B_2 – в урні були 3 білі та 1 чорна кулька;

B_3 – в урні були 2 білі та 2 чорні кульок;

B_4 – в урні були 1 біла та 3 чорні кульки;

B_5 – в урні були 4 чорні кульки;

Отже, формула повної ймовірності матиме такий вигляд:

$$P(A) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) + P(A/B_3) \cdot P(B_3) + \\ + P(A/B_4) \cdot P(B_4) + P(A/B_5) \cdot P(B_5).$$

Події B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, утворюють повну систему подій, тому

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 = \Omega.$$

Застосовуючи формулу (1.3), одержимо

$$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = 1.$$

За умовою задачі всі ці ймовірності рівноможливі.

Отже,

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = P(B_5) = \frac{1}{5}.$$

Загальна кількість елементарних подій

$$n = C_6^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Визначимо умовні ймовірності події A за різних умов.

При B_1: в урні 6 білих кульок, отже,

$$m_1 = C_6^3 = 20, \quad P(A/B_1) = \frac{20}{20} = 1.$$

При B_2: в урні 5 білих та 1 чорна кулька, отже,

$$m_2 = C_5^3 = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10, \quad P(A/B_2) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

При B_3: в урні 4 білі та 2 чорні кульки, отже,

$$m_3 = C_4^3 = 4, \quad P(A/B_3) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

При B_4: в урні 3 білі та 3 чорні кульки, отже,

$$m_4 = C_3^3 = 1, \quad P(A/B_4) = \frac{1}{20}.$$

При B_5: в урні 2 білі та 4 чорні кульки, отже

$$m_5 = 0, \quad P(A/B_5) = 0.$$

$$P(A) = 1 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} =$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{20 + 10 + 4 + 1}{20} = \frac{1}{5} \cdot \frac{35}{20} = \frac{7}{20}.$$

Відповідь. $P(A) = \frac{7}{20}$.

Задача 1.8. У першій урні 5 білих та 6 чорних кульок, в другій урні – 4 білих та 8 чорних кульок. З першої урни випадково виймають 3 кульки та кладуть в другу урну. Після цього з другої урни також випадково виймають 4 кульки. Обчислити ймовірність того, що всі кульки, вийняті з другої урни, білі.

Розв'язання. У цій задачі експеримент також відбувається в два етапи: спочатку випадково виймають кульки з першої урни та опускають їх у другу, а потім випадково виймають кульки з другої урни.

Розглянемо події:

A – кульки, вийняті з другої урни, білі;

B_1 – з першої урни виймають 3 білі кульки;

B_2 – з першої урни виймають 2 білі та 1 чорну кульку;

B_3 – з першої урни виймають 1 білу та 2 чорні кульки;

B_4 – з першої урни виймають 3 чорні кульки.

Застосуємо формулу (1.7):

$$P(A) = P(A/B_1)\cdot P(B_1) + P(A/B_2)\cdot P(B_2) + P(A/B_3)\cdot P(B_3) + P(A/B_4)\cdot P(B_4).$$

Кількість елементарних подій на першому етапі дорівнює

$$n_1 = C_{11}^3 = \frac{9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3} = 165,$$

а на другому етапі

$$n_2 = C_{15}^4 = \frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 13\cdot 7\cdot 15.$$

При B_1: $\quad m_1 = C_5^3 = \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = 10, \quad P(B_1) = \frac{10}{165} = \frac{2}{33};$

$$m_2 = C_7^4 = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 35 \Rightarrow P(A/B_1) = \frac{35}{13\cdot 7\cdot 15}.$$

При B_2: $\quad m_1 = C_5^2\cdot C_6^1 = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 1} = 60, \quad P(B_2) = \frac{60}{165} = \frac{12}{33};$

$$m_2 = C_6^4 = \frac{5\cdot 6}{1\cdot 2} = 15 \Rightarrow P(A/B_2) = \frac{15}{13\cdot 7\cdot 15}.$$

При B_3: $\quad m_1 = C_5^1\cdot C_6^2 = \frac{5\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 1\cdot 2} = 75, \quad P(B_3) = \frac{75}{165} = \frac{15}{33};$

$$m_2 = C_5^4 = 5 \Rightarrow P(A/B_3) = \frac{5}{13\cdot 7\cdot 15}.$$

При B_4: $\quad m_1 = C_6^3 = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 20, \quad P(B_4) = \frac{20}{165} = \frac{4}{33};$

$$m_2 = C_4^4 = 1 \Rightarrow P(A/B_4) = \frac{1}{13 \cdot 7 \cdot 15}.$$

$$P(A) = \frac{2}{33} \cdot \frac{35}{13 \cdot 7 \cdot 15} + \frac{12}{33} \cdot \frac{15}{13 \cdot 7 \cdot 15} + \frac{15}{33} \cdot \frac{15}{13 \cdot 7 \cdot 15} +$$
$$+ \frac{4}{33} \cdot \frac{1}{13 \cdot 7 \cdot 15} = \frac{70 + 180 + 75 + 4}{33 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 15} = \frac{329}{33 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 15} = \frac{47}{6435}.$$

Відповідь. $P(A) = \frac{47}{6435}$.

Задача 1.9. У піраміді стоять 19 гвинтівок, з них 3 з оптичним прицілом. Стрілець, який стріляє з гвинтівки з оптичним прицілом, може влучити в мішень з ймовірністю 0,81, а якщо він стрілятиме з гвинтівки без оптичного прицілу, – з ймовірністю 0,46. Обчислити ймовірність того, що стрілець влучить в мішень, коли стрілятиме з випадково взятої гвинтівки.

Розв'язання. У цій задачі першим експериментом є випадковий вибір гвинтівки, другим – стрільба по мішені. Розглянемо такі події:

A – стрілець влучить у мішень;

B_1 – стрілець візьме гвинтівку з оптичним прицілом;

B_2 – стрілець візьме гвинтівку без оптичного прицілу.

Застосуємо формулу повної ймовірності (1.7). Маємо

$$P(A) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2).$$

Якщо врахувати, що гвинтівки вибирають по одній, одержимо

$n = C_{19}^1 = 19$ і відповідно $m_1 = C_3^1 = 3$ (для B_1) та $m_2 = C_{16}^1 = 16$ (для B_2); таким чином, $P(B_1) = \frac{3}{19}$, $P(B_2) = \frac{16}{19}$.

Умовні ймовірності надані в умові задачі:

$$P(A/B_1) = 0{,}81 \text{ та } P(A/B_2) = 0{,}46.$$

Отже, $$P(A) = 0{,}81 \cdot \frac{3}{19} + 0{,}46 \cdot \frac{16}{19} = 0{,}515.$$

Відповідь. $P(A) = 0{,}515$.

Задача 1.10. На складі фірми з продажу комп'ютерів є монітори трьох фірм-виробників у кількості 19, 6 та 11 шт. відповідно, які можуть безвідмовно працювати до кінця гарантійного строку з ймовірностями 0,85, 0,76 та 0,71 відповідно. Для комплектації виробу працівник фірми бере випадково один із моніторів. Обчислити ймовірність того, що підключений та безвідмовно працюючий до кінця гарантійного строку монітор поставлений відповідно першою, другою або третьою фірмою-виробником.

Розв'язання. Першим експериментом є вибір монітора, другим – робота монітора під час гарантійного строку. Розглянемо такі події:

A – монітор працює безвідмовно до кінця гарантійного строку;

B_1 – працівник фірми візьме монітор з продукції 1-ї фірми-виробника;

B_2 – працівник фірми візьме монітор з продукції 2-ї фірми-виробника;

B_3 – працівник фірми візьме монітор з продукції 3-ї фірми-виробника;

Ймовірність події A обчислюємо за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) + P(A/B_3) \cdot P(B_3).$$

Умовні ймовірності надані в умові задачі:

$$P(A/B_1) = 0{,}85; \quad P(A/B_2) = 0{,}76; \quad P(A/B_3) = 0{,}71.$$

Аналогічно попередній задачі обчислимо ймовірності:

$$P(B_1) = \frac{19}{36} = 0{,}528; \quad P(B_2) = \frac{6}{36} = 0{,}167; \quad P(B_3) = \frac{11}{36} = 0{,}306;$$

$$P(A) = 0{,}85 \cdot \frac{19}{36} + 0{,}76 \cdot \frac{6}{36} + 0{,}71 \cdot \frac{11}{36} = 0{,}792.$$

За формулою Бейєса (1.8) обчислимо умовні ймовірності подій (гіпотез) B_i:

$$P(B_1/A) = \frac{0{,}528 \cdot 0{,}85}{0{,}792} = 0{,}566;$$

$$P(B_2/A) = \frac{0{,}167 \cdot 0{,}76}{0{,}792} = 0{,}160;$$

$$P(B_3/A) = \frac{0{,}306 \cdot 0{,}71}{0{,}792} = 0{,}274.$$

Відповідь. $P(B_1/A) = 0{,}566$; $P(B_2/A) = 0{,}160$; $P(B_3/A) = 0{,}274$.

§ 2. Випадкові величини

1. Повторні дослідження. Припустимо, що подія A настає в результаті n незалежних експериментів, до того ж у кожному експерименті ймовірність події A стала та дорівнює p. Результатом кожного експерименту може бути або подія A, або подія $\overline{A}$. Останнє відбувається з ймовірністю $q = 1 - p$.

Якщо розглядати всі n експериментів як один, його результатом буде добуток подій A та $\overline{A}$. Маючи на увазі незалежність вихідних експериментів, важлива не послідовність подій а кількість повторень події A. Частоту події A позначимо k, $0 < k < n$. Тоді ймовірність появи події A k разів обчислюють за *формулою Бернуллі*.

$$P_k = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \tag{1.12}$$

Якщо потрібно обчислити ймовірність для всіх значень k, $0 < k < n$, можна застосувати рекурентну формулу, за допомогою якої P_k обчислюється за значенням P_{k-1}:

$$P_k = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} \cdot P_{k-1},\ k = 1,\ \ldots,\ n. \tag{1.13}$$

Тоді P_0 слід обчислювати за формулою (1.12), яка при $k = 0$ має вигляд $P_0 = q^n$, а всі інші P_k – за формулою (1.13). При великих значеннях n та k обчислення за формулою Бернуллі достатньо громіздкі і, крім того, на практиці зазвичай така висока точність непотрібна. Тому розроблені достатньо точні наближені методи обчислення ймовірності P_k.

Іноді необхідно знайти найімовірнішу частоту, тобто частоту, що має максимальну ймовірність. Найімовірніша частота знаходиться в інтервалі $np - q \le k \le np + p$. Довжина цього інтервалу дорівнює одиниці, тому, якщо межі інтервалу – цілі числа, маємо дві найімовірніші частоти, а в протилежному випадку – тільки одну.

2. Формули Мавра – Лапласа та Пуассона. Замість формули Бернуллі (1.12) можна застосувати **локальну теорему Мавра – Лапласа:**

якщо при n незалежних експериментах подія A відбувається зі сталою ймовірністю P, яка не дуже близька до нуля або одиниці (0<P<1), то при достатньо великій кількості експериментів n ймовірність того, що подія A станеться k разів, приблизно дорівнює

$$P_n(k) \approx \frac{f(x)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, \qquad (1.14)$$

де $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$.

Функція $f(x)$ – парна $\left(f(-x) = f(x)\right)$ і набуває тільки додатні значення (рис. 1).

Для неї укладені таблиці (див. додаток 1). Оскільки графік функції симетричний відносно осі ординат, таблиці укладені тільки для додатних значень аргументу.

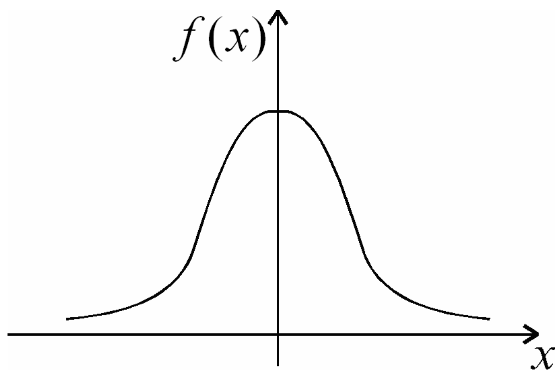


Рисунок 1

Якщо ймовірність p реалізації події A близька до нуля, то потрібно застосувати **теорему Пуассона**, яка в цьому випадку дає більшу точність:

якщо при n незалежних експериментах подія A відбувається з ймовірністю p, близькою до 0, *то при достатньо великому n ймовірність здійснення події A k разів приблизно дорівнює*

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \qquad (1.15)$$

де $\lambda = n \cdot p$.

Часто потрібно знайти ймовірність того, що частота появи події A знаходиться в деякому інтервалі. Цю проблему дозволяє розв’язати **інтегральна теорема Мавра – Лапласа:**

якщо в n незалежних експериментах подія A відбувається зі сталою ймовірністю p, яка відмінна від 0 *та* 1, *то при достатньо великому n ймовірність того, що частота події A знаходиться в інтервалі* [*a, b*], *приблизно дорівнює*

$$P_n\left(a \le k \le b\right) \approx \Phi\left(x_2\right) - \Phi\left(x_1\right), \tag{1.16}$$

де $\Phi\left(x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt$, $x_1 = \dfrac{a - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{b - np}{\sqrt{npq}}$.

Функція $\Phi\left(x\right)$ є інтегралом від функції $f\left(x\right)$ (див. формулу (1.14)) і набуває значення в інтервалі [0, 1], при цьому $\Phi\left(-\infty\right) = 0$; $\Phi\left(\infty\right) = 1$ та $\Phi\left(0\right) = 0{,}5$. Для функції $\Phi\left(x\right)$ укладені таблиці (див. додаток 2). Для від’ємних аргументів значення функції можна одержати з тієї ж таблиці:

$$\Phi\left(-x\right) = 1 - \Phi\left(x\right). \tag{1.17}$$

Розглянемо таку задачу. У *n* незалежних експериментах подія *A* відбувається зі сталою ймовірністю *p*. Знайти ймовірність того, що відносна частота k/n події *A* відрізняється від ймовірності події *A* за абсолютною величиною не більше, ніж на $\varepsilon > 0$. Розв’язання цієї задачі зводиться до застосування інтегральної формули Мавра – Лапласа (1.16), за допомогою якої для цієї задачі одержимо формулу:

$$P_n\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1. \tag{1.18}$$

3. Поняття випадкової величини. ***Випадковою величиною X*** називають величину, яка набуває випадково деяке значення з сукупності своїх значень, її закон розподілення може бути заданий функцією розподілення

$$F\left(x\right) = P\left(X < x\right). \tag{1.19}$$

Функція розподілення $F\left(x\right)$ – не спадаюча, безперервна ліворуч функція, визначена на всій числовій осі, при цьому $F\left(-\infty\right) = 0$ та $F\left(\infty\right) = 1$. Випадкові величини звичайно позначають останніми літерами латинського алфавіту: *X, Y, Z*.

Практично випадкову величину можна одержати, якщо подіям з повної групи подій зіставити матеріальні числа. Сукупність цих чисел утворює сукупність значень випадкової величини. За сукупностями значень розрізняють випадкові величини двох видів: дискретні та безперервні.

Дискретною випадковою величиною називається така величина, кількість можливих значень якої або скінченна, або нескінченна лічильна множина (множина, елементи якої можуть бути занумеровані). Тобто дискретна – це така випадкова величина, значеннями якої є тільки окремі точки числової осі. Розглянемо кілька прикладів дискретної випадкової величини.

1. Частота влучання при трьох пострілах.

Можливі значення випадкової величини x, що виражають частоту влучання при трьох пострілах:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{2}{3}, \quad x_4 = 1.$$

2. Кількість дефектних виробів у партії з n штук.

Якщо позначити через x випадкову кількість дефектних виробів, можливі значення цього числа будуть такі:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = n.$$

3. Кількість викликів, що надходять на телефонну станцію протягом доби.

При цьому випадкова величина x може набувати такі значення:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad \ldots$$

4. Кількість пострілів до першого влучання в ціль.

У даному разі випадкова величина x може набувати нескінченну, але лічильну множину значень:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad \ldots$$

Закон розподілення дискретної випадкової величини x можна визначити за допомогою ряду розподілення, заданого у вигляді такої таблиці:

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P	P_1	P_2	P_3	…	P_n

У першому рядку цієї таблиці вказані всі значення x_i дискретної випадкової величини x, а в другому – ймовірності P_i прийняття випадковою величиною відповідних значень x_i.

Сума всіх ймовірностей дорівнює одиниці. На базі ряду розподілення можна одержати *функцію розподілення дискретної випадкової величини X*. Ця функція виражається формулою:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P_i. \tag{1.20}$$

Формулу (1.20) можна записати у вигляді, що наочно ілюструє безперервність ліворуч функції розподілення:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ \ x \le x_1, \\ P_1, \ x_1 < x \le x_2, \\ P_1 + P_2, \ x_2 < x \le x_3, \\ \dots \ \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} P_i, \ x_{n-1} < x \le x_n, \\ 1, \ x > x_n. \end{cases} \tag{1.21}$$

Графік функції розподілення дискретної випадкової величини являє собою східчасту лінію (рис. 2).

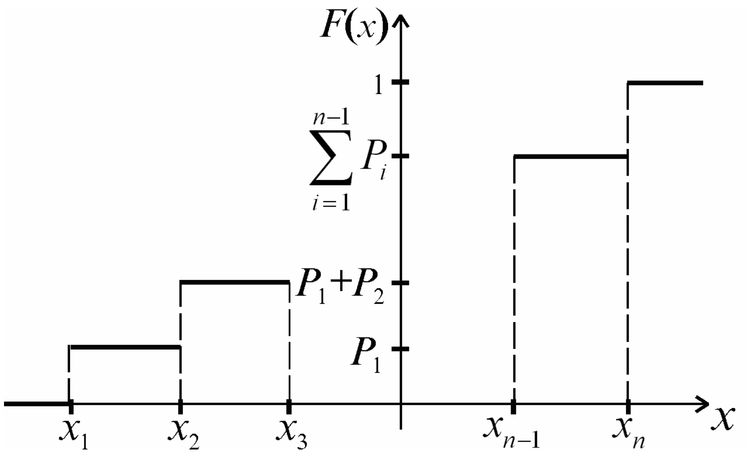


Рисунок 2

Безперервною випадковою величиною називається така величина, можливі значення якої безперервно заповнює деякий інтервал (скінченний або не-скінченний). Зрозуміло, кількість можливих значень безперервної випадкової величини нескінченна.

Приклади безперервної випадкової величини.

1. Випадкове відхилення за дальністю точки падіння снаряда від цілі. Оскільки снаряд може впасти у будь-яку точку інтервалу, обмеженого границями розсіювання снарядів, всі числа з цього інтервалу будуть можливими значеннями випадкової величини X – відхилення точки падіння снаряда від цілі.

2. Помилка при вимірюванні дальності радіолокатором.

3. Час безвідмовної роботи радіодеталей.

4. Діаметр обробленої втулки та т. п.

Закон розподілення безперервної випадкової величини задається або *функцією розподілення*, або *функцією густини ймовірності*. Функція розподілення безперервної випадкової величини x задається інтегралом

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \cdot dx, \tag{1.22}$$

де $f(x) > 0$ – функція густини ймовірності.

Графік цієї функції завжди охоплює фігуру, площа якої дорівнює одиниці. Це витікає з властивості функції розподілення: $F(\infty) = 1$, отже,

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = 1. \tag{1.23}$$

Формула (1.22) визначає площу під графіком функції $f(x)$ в інтервалі $(-\infty, x]$ (рис. 3).

Якщо задані два значення x_1 та x_2 безперервної випадкової величини $X(x_1 < x_2)$, ймовірність того, що X набуває значення в інтервалі $[x_1, x_2]$, дорівнює

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx. \tag{1.24}$$

Це можна довести за допомогою формул (1.19) та (1.22).

Нерівність $f(x_1) > f(x_2)$ означає, що при достатньо великій кількості експериментів поблизу точки x_1 опиниться більше значень випадкової величини X, ніж навколо точки x_2.

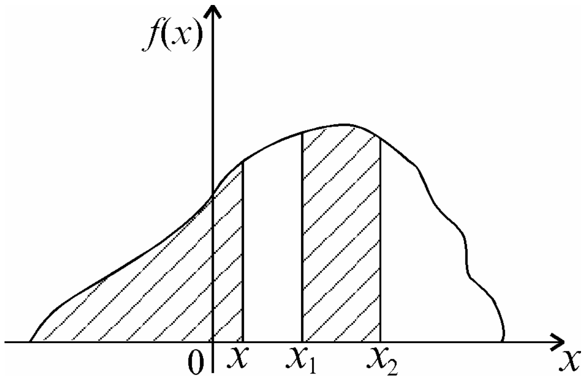


Рисунок 3

Отже, чим більше значення функції густини ймовірності, тим більша ймовірність того, що випадкова величина прийме значення поблизу цієї точки (але не обов'язково в самій точці).

З формули (1.22) випливає, що

$$f(x) = F'(x). \qquad (1.25)$$

Випадкові величини X та *Y незалежні*, якщо для всіх пар чисел (x, y) незалежні і відповідні події $(X < x)$ та $(Y < y)$.

4. Числові характеристики випадкової величини. Ми вже знаємо, що закон розподілення повністю характеризує випадкову величину. Знаючи закон розподілення можна вказати, де розташовуються можливі значення випадкової величини і яка ймовірність її появи в тому чи іншому інтервалі.

Але при розв'язанні багатьох практичних задач нема потреби характеризувати випадкову величину повністю, достатньо мати лише загальне уявлення, вказати деякі характерні риси закону розподілення. У теорії ймовірностей для загальної характеристики випадкової величини використовують величини, що носять назву числової характеристики випадкової величини. Їх основне призначення – у стислій формі виявити найбільш суттєві особливості того чи іншого розподілення.

1. Математичне очікування. Математичне очікування є важливою характеристикою положення випадкової величини – $M(X)$. Математичне очікування іноді називають просто середнім значенням випадкової величини.

Математичним очікуванням дискретної випадкової величини х називається сума добутків всіх можливих значень випадкової величини на ймовірності цих значень.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \ , \qquad (1.26)$$

де x_i – значення дискретної випадкової величини, p_i – ймовірність того, що випадкова величина набуде значення x_i, *n* – кількість значень випадкової величини, яке може дорівнювати і ∞, але ряд (1.26) повинен абсолютно збігатися.

Математичним очікуванням безперервної випадкової величини Х, можливі значення якої належать відрізку [*a, b*], називають визначений інтеграл

$$M(X) = \int_{a}^{b} x \cdot f(x) \cdot dx , \qquad (1.27)$$

де $f(x)$ – функція густини ймовірності випадкової величини.

Якщо можливі значення безперервної випадкової величини *X* належать всій осі *x*,

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx , \qquad (1.28)$$

і цей інтеграл збігається абсолютно.

Математичне очікування безперервної випадкової величини має такі властивості, спільні для дискретних та безперервних випадкових величин:

1) $M(C) = C$, *якщо С – стала, тобто середнє значення сталої величини дорівнює сталій;*
2) $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$, *тобто сталу можна виносити з-під знака математичного очікування;*
3) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$, *тобто середнє значення суми випадкових величин дорівнює сумі середніх значень випадкових величин;*
4) *якщо випадкова величина* $x \geq 0$, *то і математичне очікування* $M(X) \geq 0$;

5) якщо випадкові величини X та Y незалежні, то $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, тобто математичне очікування добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку математичних очікувань випадкових величин.

2. Дисперсія. Для характеристики випадкової величини недостатньо знати лише числові характеристики положення, оскільки тому ж самому математичному очікуванню може відповідати багато випадкових величин, різних не тільки за своїми значеннями, але й за їх характером та природою. Значення випадкових величин, що розглядаються на практиці, завжди більше або менше коливаються навколо середнього значення. Це явище називається розсіюванням величини навколо її середнього значення. Розсіювання випадкової величини характеризують *дисперсія* та *середнє квадратичне відхилення*.

Дисперсією випадкової величини називається математичне очікування квадрата відхилення величини від її математичного очікування

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \tag{1.29}$$

Якщо звернути увагу на властивості середнього значення, можна привести цю формулу до вигляду

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2. \tag{1.30}$$

Дисперсія дискретної випадкової величини обчислюється (опираючись на формули (1.27), (1.29) та (1.30)) за такою формулою:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i, \tag{1.31}$$

або

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - (M(X))^2. \tag{1.32}$$

Аналогічно згідно з формулами (1.28)–(1.30) одержимо формули для обчислення дисперсії безперервної випадкової величини:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x)dx, \tag{1.33}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - (M(X))^2 . \qquad (1.34)$$

Дисперсія має властивості, які можна довести на підставі властивостей середнього значення:

1) $D(C) = 0$: *дисперсія сталої величини дорівнює нулю;*
2) $D(X) \geq 0$: *дисперсія завжди ненегативна;*
3) $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$: *сталу можна винести з-під знака дисперсії, якщо попередньо піднести її до квадрата;*
4) $D(C + X) = D(X)$: *зміна випадкової величини на сталу не змінює її дисперсії;*
5) $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$: *дисперсія суми або різниці незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих випадкових величин.*

3. Середнє квадратичне відхилення. Дисперсія випадкової величини є дуже зручною характеристикою розсіювання. Але їй бракує наочності, оскільки вона має розмірність квадрата випадкової величини. Характеристикою, розмірність якої співпадає з розмірністю випадкової величини, є середнє квадратичне відхилення.

Середнім квадратичним відхиленням називається квадратний корінь з дисперсії.

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} . \qquad (1.35)$$

4. Моменти випадкової величини. Узагальненням основних числових характеристик випадкових величин є поняття моментів випадкової величини. Сама назва "момент" запозичена з механіки, де це поняття застосовується для опису розподілення мас.

У теорії ймовірностей розрізняють моменти двох видів: початкові та центральні.

Початковим моментом k-го порядку випадкової величини X називають математичне очікування величини X^k*, тобто*

$$\nu_k = M\left[X^2\right]. \tag{1.36}$$

Для дискретної випадкової величини початковий момент – це сума

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \cdot p_i \,,$$

а для безперервної – інтеграл

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)dx \,.$$

З початкових моментів особливе значення має момент першого порядку, який являє собою математичне очікування випадкової величини. Початкові моменти вищих порядків головним чином застосовуються при обчисленні центральних моментів.

Центральним моментом k-го порядку випадкової величини X називають математичне очікування величини $(X - M(X))^k$

$$\mu_k = M\left[(X - M(X))^k\right]. \tag{1.37}$$

Для дискретної випадкової величини центральний момент – це сума

$$\mu_k = \sum (x_i - M(X))^k \cdot p_i \,,$$

а для безперервної – інтеграл виду

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k \cdot f(x)dx \,.$$

Центральний момент першого порядку завжди дорівнює нулю, центральний момент другого порядку – це дисперсія випадкової величини.

Центральний момент третього порядку характеризує асиметрію (“скривленість”) розподілення, а момент четвертого порядку – гостровершинність або плосковершинність розподілення.

5. Рівномірне розподілення. Випадкова величина *X*, що має рівномірне розподілення, набуває значення в інтервалі [*a, b*], її функція густини ймовірності $f(x)$ у цьому інтервалі стала.

З умови (1.23) можна визначити цю сталу та записати функцію густини ймовірності рівномірного розподілення:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases} \tag{1.38}$$

Функцію розподілення можна знайти за формулою (1.22):

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{x-b}, & a<x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases} \tag{1.39}$$

Графіки функції густини ймовірності $f(x)$ та функції розподілення $F(x)$ рівномірного розподілення показані на рис. 4, 5.

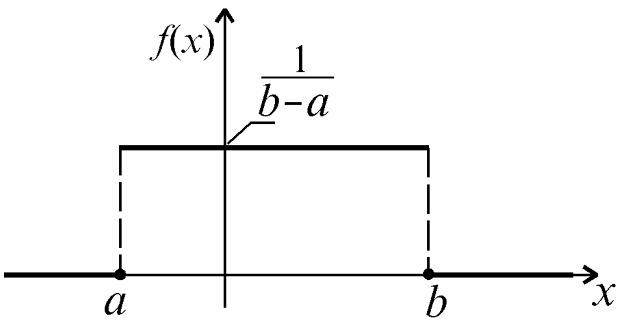


Рисунок 4

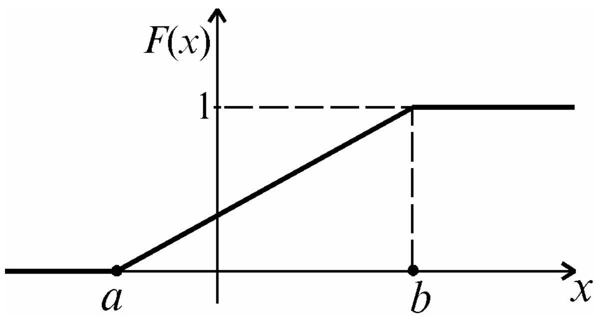


Рисунок 5

Випадкову величину, що має рівномірне розподілення, ми зустрічаємо у вимірювальній практиці коли округляємо показники вимірювальних приладів до цілих поділок шкал. Помилка округлення показників до найближчої цілої поділки є випадковою величиною, яка може приймати будь-яке значення між двох сусідніх поділок зі сталою густиною ймовірності.

Математичне очікування $M(X)$ одержимо за формулою (1.28): $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$, а дисперсію $D(X)$ – за формулою (1.34), $D(X)=\dfrac{b-a}{12}$.

6. Біномне розподілення. Випадкову величину, що має біномне розподілення, можна отримати при повторних незалежних дослідженнях. Значеннями випадкової величини x є частоти події A при незалежних дослідженнях, тобто цілі числа з інтервалу $[0, n]$. Це означає, що випадкова величина з біномним розподілом дискретна.

Ймовірність кожного значення обчислюється за формулою Бернуллі (1.12). Згідно з формулою (1.20) можна записати функцію розподілення біномної випадкової величини:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sum\limits_{k<x} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, & 0 < x \le n, \\ 1, & x > n. \end{cases} \tag{1.40}$$

Параметрами біномного розподілення є n та p. Математичне очікування біномного розподілення $M(X) = n \cdot p$ та дисперсія $D(X) = n \cdot p \cdot q$.

7. Розподілення Пуассона. Випадкова величина, що має розподілення Пуассона, набуває значення 0, 1, 2, …, n, крім того, ймовірність p_k того, що вона набуває значення $k \ge 0$, обчислюється за формулою Пуассона (1.15). Її функція розподілення визначається відношенням

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sum\limits_{k<x} \dfrac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, & 0 < x \le n, \\ 1, & x > n, \end{cases} \tag{1.41}$$

де $\lambda = \text{const}, \quad \lambda > 0$.

Параметром розподілення є величина λ. Цьому параметру дорівнюють і математичне очікування, і дисперсія.

8. Нормальне розподілення. Серед розподілень безперервних випадкових величин центральне місце займає нормальний закон (закон Гаусса). Цей закон дуже поширений на практиці. Він виявляється в усіх випадках, коли випадкова величина X є результатом взаємодії великої кількості факторів, кожен з яких незначно впливає на величину X і не можна вказати достеменно який з них впливає більше за інші. Прикладами випадкових величин, що мають нормальне розподілення, будуть: відхилення дійсних розмірів деталей, що обробляються на верстаті, від номінальних розмірів, відхилення при стрільбі та ін.

Головна особливість, яка виділяє нормальний закон серед інших законів, полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються всі інші закони розподілення.

Нормально розподілена випадкова величина може набувати будь-які значення в інтервалі $(-\infty, +\infty)$ та має функцію густини ймовірності

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{1.42}$$

де μ та σ – параметри розподілення, до того ж $\sigma > 0$.

Як показують дослідження функції $f(x)$, вона визначена на всій числовій осі, всі її значення не негативні, при $|x| \to \infty$ значення функції зменшуються $f(x) \to 0$, тобто ось x є асимптотою функції $f(x)$. Максимуму функція $f(x)$ досягає в точці $x = \mu$ і дорівнює він $\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$. Точки перегину функції $x_1 = \mu - \sigma$ та $x_2 = \mu + \sigma$.

При зміні значення μ графік функції $f(x)$ "жорстко" переміщується вздовж осі x (рис. 6).

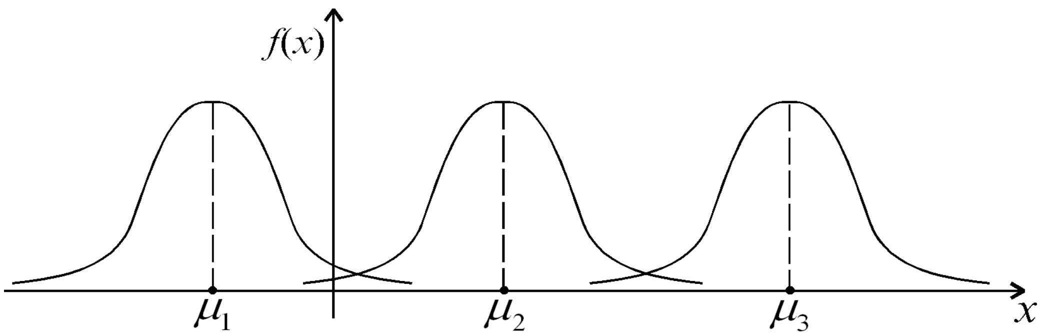


Рисунок 6

При зміні значення σ змінюється загальний вигляд графіка: при збільшенні значення σ у m раз максимальне значення функції зменшується в m раз і графік "витягається" в обидва боки вздовж осі x. При зменшенні значення σ

все відбувається в зворотному напрямку (рис. 7).

Опираючись на формули (1.22) та (1.42), одержимо функцію розподілення

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (1.43)$$

За параметрами нормального розподілення обчислюються і всі числові характеристики: $M(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$, σ є середнім квадратичним відхиленням.

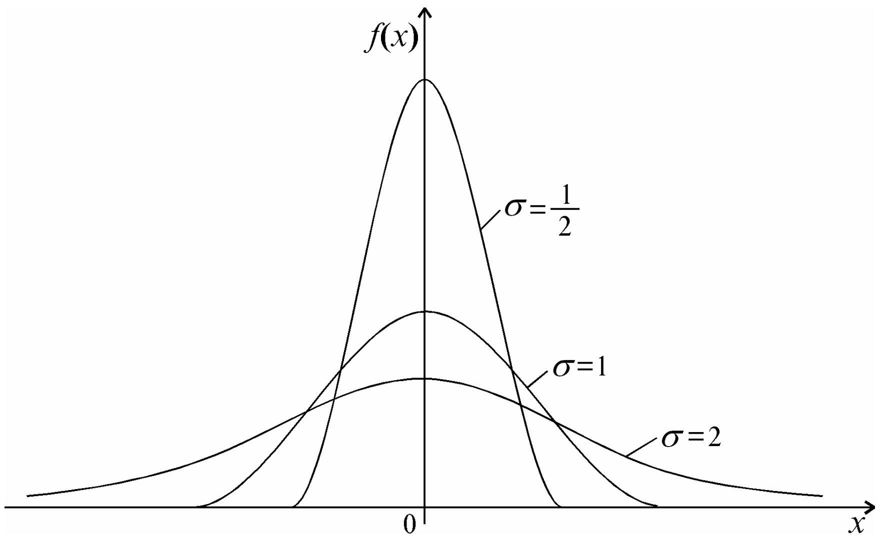


Рисунок 7

Особливе значення серед нормальних розподілень має *нормоване нормальне розподілення* з параметрами 0 та 1. Якщо підставити $\mu = 0$ та $\sigma = 1$ до формул (1.42) та (1.43), одержимо вже знайомі формули для $f(x)$ та $\Phi(x)$ (1.14) та (1.16). Для цих функцій, як ми вже знаємо, укладені таблиці. Від довільного нормального розподілення можна перейти до нормованого розподілення, перетворивши змінні величини.

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}. \quad (1.44)$$

Нормально розподілені випадкові величини застосовують при розв’язанні двох типів задач.

Перша задача: знайти ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X набуває значення в інтервалі $[a, b]$. Цю ймовірність обчислюють за формулою

$$P(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right), \qquad (1.45)$$

де $\Phi(x)$ – функція розподілення нормованого нормального розподілення.

Друга задача: обчислити ймовірність того, що випадкова величина з нормальним розподіленням відрізняється від свого середнього значення μ за абсолютною величиною не більше ніж на ε:

$$P\left(|X-\mu| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1. \qquad (1.46)$$

Ця формула випливає з (1.45).

Якщо $\varepsilon = \sigma$, то за формулою (1.46) одержимо P= 0,68268; якщо $\varepsilon = 2\sigma$, то P= 0,95450; якщо $\varepsilon = 3\sigma$, то $P = 0{,}99730 \approx 1$. Таким чином, нормально розподілена випадкова величина практично не набуває значень, які відрізнялися б від середнього значення за абсолютною величиною більше ніж на 3σ. Це твердження називають *правилом "трьох сигм"*.

Запитання для самоперевірки

1. Яку величину називають випадковою величиною?
2. Дати визначення дискретної та безперервної випадкових величин. Навести приклади.
3. Що називається законом розподілення випадкової величини?
4. Дати визначення функції розподілення. Перелічити властивості цієї функції.
5. Дати визначення густини розподілення ймовірності.
6. Що називається математичним очікуванням дискретної та безперервної величини?
7. Дати визначення дисперсії випадкової величини та перелічити її властивості.
8. Що називається початковим моментом k-го порядку, центральним мо-

ментом k-го порядку?

9. Яке розподілення ймовірностей називають біномним? Чому дорівнюють математичне очікування та дисперсія цього розподілення?
10. Яке розподілення випадкової величини називають нормальним? Як за параметрами розподілення визначити математичне очікування, дисперсію та середнє квадратичне відхилення?

Робота 2

Завдання

1. Переписати текст задачі, замінюючи всі параметри їх значеннями для варіанта, що розв'язується.
2. Визначити початкові дані та необхідні розрахункові формули.
3. Виконати розрахунки.
4. Якщо потрібно, то побудувати графіки.

Задача 2.1. У кожному з n незалежних експериментів подія A відбувається зі сталою ймовірністю p. Обчислити всі ймовірності p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, де k – частота події A. Побудувати графік ймовірностей p_k. Визначити найімовірнішу частоту.

Значення параметрів n та p визначати за формулами:

$$n = \begin{cases} 11, & v \le 10, \\ 10, & 10 < v \le 20, \\ 9, & v > 20, \end{cases} \qquad\qquad p = 0{,}3 + \frac{v}{100}.$$

Задача 2.2. В кожному з n незалежних експериментів подія A відбувається зі сталою ймовірністю p. Обчислити ймовірність того, що подія A відбувається:

а) менше ніж L разів;

б) точно G разів;

в) більше ніж F, але менше ніж M разів;

г) більше ніж R разів.

Значення параметрів n, p, G, L, M, F та R обчислюються за такими формулами:

$$n = 500 + v \cdot 10; \qquad p = 0{,}4 + \frac{v}{100};$$

$$G = 220 + v \cdot 10; \qquad L = G - 30;$$

$$M = G + 20 + v; \qquad F = G - 40 + v; \qquad R = G + 15.$$

Задача 2.3. На телефонній станції помилкове з’єднання відбувається з ймовірністю *p*. Знайти ймовірність того, що серед *n* з’єднань має місце:

а) точно *G* помилкових з’єднань;

б) менше ніж *L* помилкових з’єднань;

в) більше ніж *M* помилкових з’єднань.

Значення параметрів p, n, G, L та *M* обчислюються за формулами:

$$D = v \cdot 100 + 200; \qquad P = \frac{1}{D}; \qquad S = \text{залишок}\left(\frac{v}{7}\right) + 1;$$

$$n = S \cdot D; \qquad G = \text{залишок}\left(\frac{v}{5}\right) + 1;$$

$$L = \text{залишок}\left(\frac{v}{6}\right) + 3; \qquad M = \text{залишок}\left(\frac{v}{8}\right) + 2.$$

Задача 2.4. У кожному з *n* незалежних експериментів подія *A* відбувається зі сталою ймовірністю *p*. Обчислити ймовірність того, що відносна частота k/n цієї події відрізняється від ймовірності *p* за абсолютною величиною не більше ніж на ε.

Значення параметрів $n,\ p,\ \varepsilon$ обчислюються за формулами:

$$n = 600 - v \cdot 10; \qquad p = 0{,}85 - \frac{v}{100}; \qquad \varepsilon = 2\left(0{,}0055 - \frac{v}{10000}\right).$$

Задача 2.5. Випадкова величина *X* задана рядом розподілення

X	x_1	x_2	x_3	x_4
P	p_1	p_2	p_3	p_4

Знайти функцію розподілення $F(x)$ випадкової величини X та побудувати її графік. Обчислити для X її математичне очікування $M(X)$ та дисперсію $D(X)$.

Значення параметрів $x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3, p_4$ обчислюються за формулами:

$$R = \text{залишок}\left(\frac{v}{4}\right) + 2;$$

$$x_1 = v + 3; \quad x_2 = x_1 + R; \quad x_3 = x_2 + R; \quad x_4 = x_3 + 2R;$$

$$p_1 = \frac{1}{R+5}; \quad p_2 = \frac{1}{R+3}; \quad p_3 = \frac{41 + 33R + R^2 - R^3}{(R+3)(R+5)(8-R)}; \quad p_4 = \frac{1}{8-R}.$$

Задача 2.6. Випадкова величина X задана функцією густини ймовірності

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax, & 0 < x \le k, \\ 0, & x > k, \end{cases}$$

де a – невідома стала, яку потрібно попередньо обчислити.

Знайти функцію розподілення $F(x)$ випадкової величини x. Побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$. Обчислити для X математичне очікування $M(X)$ та дисперсію $D(X)$, моду *Mo*, медіану *Me*.

Значення параметра k обчислити за формулою: $k = 2 + v$.

Задача 2.7. Випадкова величина X задана функцією розподілення

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x/k, & 0 < x \le k, \\ 1, & x > k. \end{cases}$$

Знайти функцію густини ймовірності $f(x)$, математичне очікування $M(X)$ та дисперсію $D(X)$.

Значення параметра k визначається за формулою $k = 3+v$.

Задача 2.8. Задана нормально розподілена випадкова величина X. Знайти ймовірність того, що ця випадкова величина набуває значення:

а) в інтервалі $[a, b]$;

б) менше K;

в) більше L;

г) що відрізняється від свого середнього значення не більше ніж на ε.

Значення параметрів μ, σ, a, b, K, L та ε обчислюють за формулами:

$$\mu = v, \quad \sigma = \text{залишок}\left(\frac{v}{8}\right) + 2, \quad S = \text{залишок}\left(\frac{v}{5}\right) + 1,$$

$$a = v - S, \quad b = v + 2S, \quad K = v - S, \quad L = v + 2S, \quad \varepsilon = S.$$

Задача 2.9. Зріст чоловіків певної вікової групи розподілений нормально з математичним очікуванням μ та середнім квадратичним відхиленням σ. Яку частку костюмів k-го зросту необхідно передбачити в загальному обсязі виробництва для цієї вікової групи.

Зріст визначається такими межами:

Зріст k	1	2	3	4
межі в см	від 158 до 164	від 164 до 170	від 170 до 176	від 176 до 182

Значення параметрів μ, σ та k наведені в таблиці 5.

Таблиця 5

Номер вар.	μ	σ	k	Номер вар.	μ	σ	k	Номер вар.	μ	σ	k
1	180	9	4	11	158	9	2	21	167	7	3
2	175	8	3	12	145	6	1	22	165	4	2
3	170	4	3	13	148	3	1	23	177	5	4
4	168	7	1	14	153	8	1	24	172	4	3
5	150	5	1	15	161	9	3	25	155	5	1
6	178	6	3	16	160	4	2	26	178	1	4
7	166	3	2	17	155	8	2	27	156	2	1
8	173	4	4	18	174	7	4	28	180	3	4
9	171	5	3	19	157	6	2	29	162	5	1
10	169	7	2	20	176	3	3	30	173	3	3

Розв’язання задач варіанта 0

Задача 2.1. У кожному з 11 незалежних експериментів подія *A* відбувається зі сталою ймовірністю 0,3. Обчислити всі ймовірності p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, 11$, де k – частота події *A*. Побудувати графік ймовірності p_k. Обчислити найімовірнішу частоту.

Задано. $n = 11,\ p = 0{,}3,\ q = 1 - p = 0{,}7$.

Знайти. $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{11}$ та k.

Розв’язання. Застосуємо формулу Бернуллі (1.12) та формулу (1.13). Значення p_0 обчислюємо за першою формулою, всі інші p_k – за другою.

Для формули (1.13) обчислюємо сталий множник

$$\frac{p}{q} = \frac{0{,}3}{0{,}7} = 0{,}4285714,\ p_0 = C_{11}^0 \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{11} = 0{,}7^{11} = 0{,}0197732.$$

Результати обчислень запишемо в таблицю. Якщо обчислення правильні, повинна виконуватися рівність $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$.

k	$\frac{n-k+1}{k}$	p_k	k	$\frac{n-k+1}{k}$	p_k
0	–	0,0197732	7	5/7	0,0173282
1	11/1	0,0932168	8	4/8	0,0037131
2	10/2	0,1997503	9	3/9	0,0005304
3	9/3	0,2568218	10	2/10	0,0000454
4	8/4	0,2201330	11	1/11	0,0000017
5	7/5	0,1320798			
6	6/6	0,0566056	$\sum$		0,9999994

За найденими значеннями ймовірностей побудуємо їх графік (рис. 8).

За заданими даними обчислимо найімовірнішу частоту:

$$np - q \le k \le np + p,$$

$$np - q = 11 \cdot 0{,}3 - 0{,}7 = 3{,}3 - 0{,}7 = 2{,}6.$$

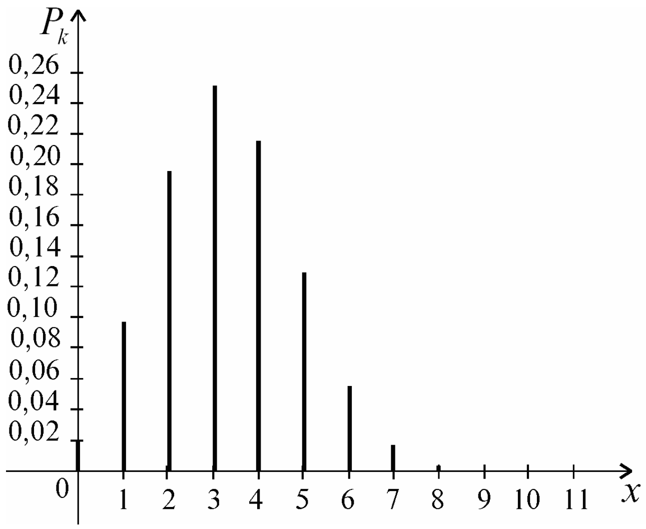


Рисунок 8

Отже, найімовірніша частота $k = 3$, як було отримано раніше, значення p_3 є максимальним.

Задача 2.2. У кожному з 500 незалежних експериментів подія A відбувається зі сталою ймовірністю 0,4. Знайти ймовірність того, що подія A відбувається:

а) менше 190 разів;

б) точно 220 разів;

в) більше ніж 180 разів та менше 240 разів;

г) більше ніж 235 разів.

Розв'язання.

а) *задано*: $n = 500, \quad p = 0{,}4, \quad a = 0, \quad b = 190$;

знайти: $P_{500}(k < 190)$.

Застосуємо інтегральну теорему Мавра – Лапласа (формула (1.16)).

Знаходимо: $\sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{120} \approx 10{,}95$

$$P_{500}(k < 190) = P_{500}(0 < k < 190) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}; \; x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}.$$

$$x_1 = \frac{0 - 500 \cdot 0{,}4}{10{,}95} = -18{,}26; \quad x_2 = \frac{190 - 500 \cdot 0{,}4}{10{,}95} = -0{,}913.$$

$$P_{500}(k < 190) = \Phi(-0,913) - \Phi(-18,26) = 0,1814.$$

б) *задано*: $n = 500, \quad p = 0,4, \quad k = 220;$

знайти $P_{500}(220)$.

Застосуємо локальну теорему Мавра – Лапласа (формула (1.14)):

$$P_{500}(220) \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npq}}, x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}},$$

$$x = \frac{220 - 500 \cdot 0,4}{10,95} = 1,82; \qquad f(1,82) = 0,07614;$$

$$P_{500}(220) = \frac{0,07614}{10,95} = 0,00692.$$

в) *задано*: $n = 500, \quad p = 0,4, \quad a = 180, \quad b = 240;$

знайти: $P_{500}(180 < k < 240)$.

Застосовуємо інтегральну теорему Мавра – Лапласа.

$$x_1 = \frac{180 - 500 \cdot 0,4}{10,95} = -1,83; \quad \Phi(-1,83) = 0,0336;$$

$$x_2 = \frac{240 - 500 \cdot 0.4}{10,95} = 3,65; \quad \Phi(3,65) = 0,9998;$$

$$P_{500}(180 < k < 240) = \Phi(3,65) - \Phi(-1,83) = 0,9662.$$

г) *задано*: $n = 500, \quad p = 0,4, \quad a = 235, \quad b = 500;$

знайти: $P_{500}(235 < k < 500)$.

Аналогічно пунктам а) та в), використаємо теорему Мавра – Лапласа.

$$x_1 = \frac{235 - 500 \cdot 0,4}{10,95} = 3,19; \qquad x_1 = \frac{500 - 500 \cdot 0,4}{10,95} = 27,4;$$

$$\Phi(x_1) = 0,99929; \qquad \Phi(x_2) = 1$$

$$P_{500}(235 < k < 500) = \Phi(27,4) - \Phi(3,19) = 0,0007.$$

Задача 2.3. На телефонній станції помилкове з’єднання відбувається з ймовірністю $\frac{1}{200}$. Знайти ймовірність того, що серед 200 з’єднань станеться:

а) точно 1 помилкове з’єднання;

б) менше ніж 3 помилкові з’єднання;

в) більше ніж 2 помилкові з’єднання.

Оскільки ймовірність події дуже мала, використовуємо формулу Пуассона (1.15).

Розв’язання.

а) *задано*: $n = 200, \quad p = \frac{1}{200}, \quad k = 1$;

знайти: $P_{200}(1)$.

Одержимо $\lambda = n \cdot p = 200 \cdot \frac{1}{200} = 1$,

$$P_{200}(1) \approx \frac{\lambda}{1!} \cdot e^{-\lambda}, \qquad P_{200}(1) = 0{,}3679 \text{ (див. додаток 5).}$$

б) *задано*: $n = 200, \quad p = \frac{1}{200}, \quad k < 3$;

знайти: $P_{200}(k < 3)$.

Маємо $\lambda = 1$,

$$P_{200}(k < 3) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) = 0{,}3679 + 0{,}3679 + 0{,}1839 = 0{,}9197.$$

в) *задано*: $n = 200, \quad p = \frac{1}{200}, \quad k > 2$;

знайти: $P_{200}(k > 2)$.

Перейдемо до протилежної події та використаємо попередній результат.

$$P_{200}(k > 2) = 1 - P_{200}(k \le 2) = 1 - P_{200}(k < 3) = 1 - 0{,}9197 = 0{,}0803.$$

Задача 2.4. У кожному з 600 незалежних експериментів подія A відбувається зі сталою ймовірністю 0,85. Знайти ймовірність того, що відносна частота $k/600$ цієї події відрізняється від ймовірності 0,85 за абсолютною величиною не більше ніж на 0,011.

Розв'язання.

Задано: $n = 600, \quad p = 0{,}85 \quad \varepsilon = 0{,}011.$

Знайти: $P_{600}\left(\left|\frac{k}{600} - 0{,}85\right| < 0{,}011\right).$

Розв'язуємо цю задачу, застосовуючи формулу (1.18). Маємо

$$P_{600}\left(\left|\frac{k}{600} - 0{,}85\right| < 0{,}011\right) = 2\Phi\left(0{,}011 \cdot \sqrt{\frac{600}{0{,}85 \cdot 0{,}15}}\right) - 1 =$$
$$= 2\Phi(0{,}75) - 1 = 2 \cdot 0{,}77337 - 1 = 0{,}54674.$$

Задача 2.5. Випадкова величина X задана рядом розподілення

X	3	5	7	11
P	0,14	0,2	0,49	0,17

Знайти функцію розподілення $F(x)$ випадкової величини X та побудувати її графік. Обчислити математичне очікування $M(X)$ та дисперсію $D(X)$.

Функцію розподілення знаходимо за формулами (1.20) та (1.21) для дискретних випадкових величин:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3, \\ 0{,}14, & 3 < x \le 5, \\ 0{,}34, & 5 < x \le 7, \\ 0{,}83, & 7 < x \le 11, \\ 1, & x > 11. \end{cases}$$

Графік функції розподілення $F(x)$ показаний на рис 9.

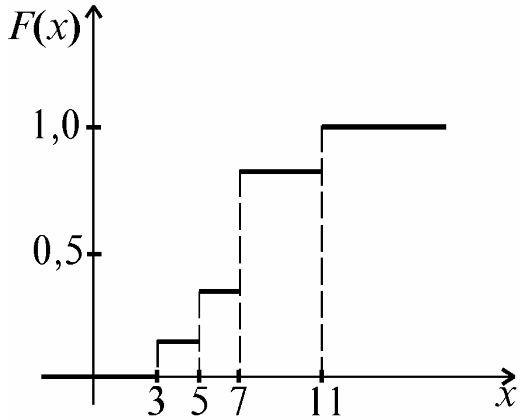


Рисунок 9

Математичне очікування $M(X)$ обчислюють за формулою (1.27):

$$M(X) = 3 \cdot 0{,}14 + 5 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}49 + 11 \cdot 0{,}17 = 6{,}72.$$

Для знаходження дисперсії застосуємо формули (1.30) та (1.32):

$$M(X^2) = 3^2 \cdot 0{,}14 + 5^2 \cdot 0{,}2 + 7^2 \cdot 0{,}49 + 11^2 \cdot 0{,}17 = 50{,}84,$$

$$D(X) = 50{,}84 - 6{,}72^2 = 5{,}6816.$$

Задача 2.6. Випадкова величина *X* задана функцією густини ймовірності

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілення $F(x)$ випадкової величини *X*. Побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$. Обчислити математичне очікування $M(X)$ та дисперсію $D(X)$.

Розв'язання.

Задано: $f(x)$.

Знайти: $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$.

Попередньо обчислимо невідому сталу *a*. Для цього згадаємо властивості функції розподілення:. Отже, згідно з формулою (1.23) маємо:

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{+\infty} f(x)dx = \left.\frac{ax^2}{2}\right|_0^2 = 1.$$

Звідкіля $2a = 1 \;\Rightarrow\; a = \dfrac{1}{2}.$

Враховуючи отриманий результат, функція розподілення $F(x)$ (див. формулу (1.22)) має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Побудуємо графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$ (рис. 10 та 11).

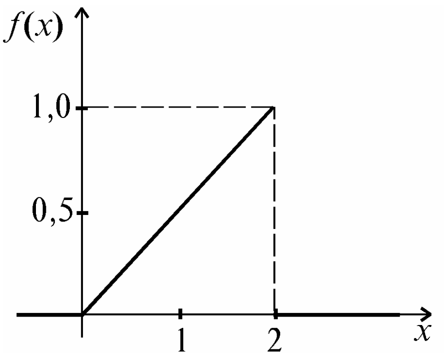


Рисунок 10

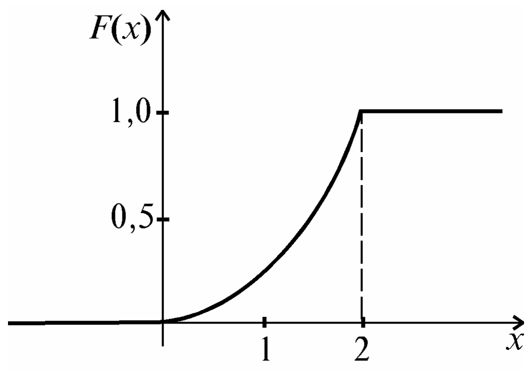


Рисунок 11

Математичне очікування $M(X)$ обчислюємо за формулою (1.28):

$$M(X)=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}dx=\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2=\frac{8}{6}=1\frac{1}{3}.$$

Для знаходження дисперсії X застосуємо формулу (1.34):

$$M(X)=\int_0^2 x^2\cdot\frac{x}{2}dx=\left.\frac{x^4}{8}\right|_0^2=\frac{16}{8}=2;$$

$$D(X)=2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}.$$

Оскільки модою називається те значення випадкової величини, яке зустрічається частіше за все, тобто має максимальну ймовірність (для дискретної випадкової величини) або максимум функції гущини ймовірності в даній точці (у випадку безперервної випадкової величини), то з графіка (рис. 10) видно, що $f(x)$ досягає максимуму в точці $x=2$, а значить $Mo = 2$.

Медіана Me ділить область значень випадкової величини на дві рівні за ймовірністю частини, тобто $P(X<Me)=1/2$ та $P(X>Me)=1/2$. Отже, для знаходження медіани Me необхідно розв'язати рівняння $x^2/4=1/2$, або $x^2=2$. Маємо $x=\pm\sqrt{2}$. Випадкова величина визначена тільки на інтервалі $[0,2]$, отже $Me=\sqrt{2}=1{,}414$.

Задача 2.7. Випадкова величина X задана функцією розподілення

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x}{3}, & 0<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Знайти функцію густини ймовірності $f(x)$, обчислити математичне очікування $M(x)$ та дисперсію $D(X)$.

Розв’язання.

Задано: $F(x)$.

Знайти: $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$.

Функцію густини ймовірності обчислюємо за формулою (1.25).

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{3}, & 0 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Подальше розв’язання задачі аналогічне попередньому. Математичне очікування $M(X)$ обчислюємо за формулою (1.28):

$$M(X) = \int_0^3 x \cdot \frac{1}{3}\ dx = \left.\frac{x^2}{6}\right|_0^3 = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

$$M(X) = \int_0^3 x^2 \cdot \frac{1}{3}\ dx = \left.\frac{x^3}{9}\right|_0^3 = \frac{27}{9} = 3.$$

Для знаходження дисперсії X застосуємо формулу (1.34):

$$D(X) = 3 - 2{,}25 = 0{,}75.$$

Задача 2.8. Задана нормально розподілена випадкова величина *X*. Знайти ймовірність того, що ця випадкова величина набуває значення:

а) в інтервалі [–1, 2];

б) менше –1;

в) більше 2;

г) що відрізняється від свого середнього значення не більше ніж на 1.

Розв’язання. У перших трьох випадках застосовуємо формулу (1.45), а в четвертому – формулу (1.46).

а) *задано*: $\mu = 0$, $\sigma = 2$, $a = -1$, $b = 2$;
знайти: $P(-1 \le X \le 2)$.

Маємо

$$P(-1 \le X \le 2) = \Phi\left(\frac{2-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-0}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0{,}5) =$$

$$= \Phi(1) - 1 + \Phi(0{,}5) = 0{,}84134 - 1 + 0{,}69146 = 0{,}53280.$$

б) *задано*: $\mu = 0, \quad \sigma = 2, \quad a = -\infty, \quad b = -1$;

знайти: $P(X \le -1)$.

Одержимо

$$P(X \le -1) = P(-\infty < X \le -1) = \Phi\left(\frac{-1-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-0}{2}\right) =$$

$$= \Phi(-0{,}5) - \Phi(-\infty) = 1 - \Phi(0{,}5) - 0 = 1 - 0{,}69146 = 0{,}30854.$$

в) *задано*: $\mu = 0, \quad \sigma = 2, \quad a = 2, \quad b = \infty$;

знайти: $P(X \ge 2)$.

Маємо

$$P(X \ge 2) = P(2 \le X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2-0}{2}\right) =$$

$$= \Phi(\infty) - \Phi(1) = 1 - 0{,}84134 = 0{,}1586.$$

г) *задано*: $\mu = 0, \quad \sigma = 2, \quad \varepsilon = 1$;

знайти: $P(|X - 0| \le 1)$.

Одержимо

$$P(|X - 0| \le 1) = 2\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 2 \cdot 0{,}69146 - 1 = 0{,}38292.$$

Задача 2.9. Зріст чоловіків певної вікової групи розподілений нормально з математичним очікуванням μ = 165 см та середнім квадратичним відхиленням σ = 5 см. Яку частку костюмів 3-го зросту необхідно передбачити в загальному обсязі виробництва для цієї вікової групи (3-й зріст – 170–176 см)?

Розв'язання. Нехай X – зріст в сантиметрах представника заданої вікової групи. Тоді частка p – чоловіків із зростом 170–176 см буде розраховуватись за формулою (1.45):

$$p = P(a \le X \le b) = P(170 \le X \le 176) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{176-165}{5}\right) - \Phi\left(\frac{170-165}{5}\right) = \Phi(2,2) - \Phi(1),$$

де Φ*(x)* – функція розподілення випадкової величини *X*. З умов задачі ми знаємо, що ця величина розподілена нормально, тому застосовуємо функцію Лапласа:

$$p = \Phi(2,2) - \Phi(1) = 0,4861 - 0,3413 = 0,1448\,.$$

Відповідь. Частка костюмів 3-го зросту повинна складати приблизно 14,5 % від їх загальної кількості.

Глава II

Математична статистика

§ 3. Первинна обробка вибірок

1. Генеральна сукупність та вибірка. Сукупність об'єктів або, точніше, сукупність значень якихось ознак об'єктів, називається *генеральною сукупністю*. Основним завданням математичної статистики є дослідження ймовірностних властивостей сукупності. Сюди можна віднести: розробку методів збору та групування статистичних даних; оцінку невідомої ймовірності події; оцінку невідомого розподілення або оцінку параметрів розподілення, вид якого відомий; перевірку статистичних гіпотез про вид розподілення або про величину параметрів розподілення.

Але повне дослідження генеральної сукупності неекономне або практично неможливе. Наприклад, при перевірці електричних лампочок однією з якісних властивостей є час роботи (до згоряння). Аналогічна ситуація має місце при перевірці якості консервів, снарядів та ін. Крім того, загальна перевірка генеральної сукупності потребує великих матеріальних витрат. Тому загальні дослідження проводять рідко. Наприклад, загальний перепис населення проводять приблизно раз на 10 років.

Як правило, з генеральної сукупності роблять вибірку, тобто досліджують тільки деякі її об'єкти. За допомогою вибірки оцінюють генеральну сукупність за ймовірностними властивостями.

Для того щоб оцінки були вірогідними, вибірка повинна бути *представницькою*, тобто її ймовірностні властивості повинні співпадати або бути близькими до властивостей генеральної сукупності.

Представницьку вибірку можна отримати, якщо об'єкти для досліджування обирати випадково, тобто гарантувати всім об'єктам генеральної сукупності однакову ймовірність підпадати досліджуванню. Крім того, припустимо, що всі вибірки отримані з генеральної сукупності випадково.

Випадково обраний об'єкт після перевірки потрібної ознаки можна повернути (*повторна вибірка*) або не повернути (*безповторна вибірка*) до генеральної сукупності. У першому випадку отримаємо більш незалежну та представницьку вибірку.

Часто під генеральною сукупністю розуміють піддослідну випадкову величину. Для випадкової величини при сталих умовах виконують експерименти. Сукупність одержаних результатів (значень) теж називають вибіркою і обробляють статистичними методами. В обох випадках методи обробки вибірки аналогічні.

При дослідженні об'єктів можна фіксувати або заміряти значення одного або декількох ознак. Відповідно говорять про *одновимірні, двовимірні, тривимірні* і т.п. вибірки.

2. Варіаційний ряд. Вибір об'єкта з генеральної сукупності та вимірювання значення властивості називається статистичним спостереженням. Результати спостережень фіксують у протоколі спостережень у порядку їх появи.

Вибірка буде більш наочною, якщо всі її елементи упорядкувати за зростанням або зменшенням. Але у вибірці одне й те саме значення (варіант) може зустрічатися декілька разів, тому доцільно результати записати у вигляді таблиці, в першій колонці якої знаходяться можливі значення (варіанти) x_i генеральної сукупності (або випадкової величини) *X,* а в другій – числа n_i, тобто частоти появи *i*-го значення. Таку таблицю називають *варіаційною таблицею* або *варіаційним рядом*.

Для створення варіаційного ряду необхідно:

1) знайти мінімальне ($x_{\min}$) та максимальне ($x_{\max}$) значення вибірки;
2) в перший стовпчик таблиці записати варіанти значень випадкової величини (генеральної сукупності), починаючи з $x_{\min}$ і закінчуючи $x_{\max}$;
3) продивитись по одному всі елементи вибірки в протоколі спостережень та відмітити кожне значення у відповідному варіанті в другому стовпчику таблиці;

4) підрахувати кількість відміток для кожного варіанта та записати відповідне число n_i;
5) підрахувати кількість елементів у вибірці (об'єм вибірки) *n*, яке повинне дорівнювати

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i , \tag{2.1}$$

де *m* – кількість варіантів у варіаційному ряді. Якщо умова (2.1) не виконана, потрібно повторити всі пункти, починаючи з третього.

Якщо кількість варіантів *m* дуже велика або близька до об'єму вибірки, доцільно складати *варіаційний ряд за інтервалами значень генеральної сукупності*.

Варіаційний ряд за інтервалами значень можна отримати за допомогою наведеного вище алгоритму, де в другому пункті належить заповнити перший стовпчик таблиці інтервалами значень генеральної сукупності. Всі інтервали обирають однакової довжини таким чином, щоб $x_{\min}$ увійшло до першого, а $x_{\max}$ – до останнього інтервалу. Звичайно початок інтервалу входить в інтервал, а його кінець – не входить. В останніх пунктах алгоритму необхідно слово "варіант" замінити словом "інтервал".

3. Графіки варіаційних рядів. При побудові графіків зазвичай використовують відносні частоти або частості $\frac{n_i}{n}$. Сума частостей повинна дорівнювати одиниці:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} = 1. \tag{2.2}$$

Використовують два види графіків варіаційних рядів: *полігон та гістограма*. Якщо варіаційний ряд складений за значеннями, то полігон викреслюють з відрізків, які з'єднують точки з координатами x_i та відповідні частості $\frac{n_i}{n}$. При побудові гістограми над кожним значенням x_i будують прямокутник, висота якого пропорційна відповідній частості $\frac{n_i}{n}$. Приклади полігону та гістограми надані на с. 76 (рис. 16 та 17).

Якщо варіаційний ряд складений за інтервалами, як x_i необхідно розглядати середини інтервалів.

4. Емпірична функція розподілення. Кожна генеральна сукупність має функцію розподілення $F(x)$ (див. формулу (1.19)), яка зазвичай невідома. За вибіркою можна знайти емпіричну функцію розподілення $F^*(x)$. Процес пошуку емпіричної функції розподілення $F^*(x)$ аналогічний процесу пошуку функції розподілення $F(x)$ дискретної випадкової величини X (див. формули (1.20) та (1.21)):

$$F^*(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n}, \tag{2.3}$$

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ \frac{n_1}{n}, & x_1 < x \le x_2, \\ \frac{n_1 + n_2}{n}, & x_2 < x \le x_3, \\ \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{m-1} \frac{n_i}{n}, & x_{m-1} < x \le x_m, \\ 1, & x > x_m. \end{cases} \tag{2.4}$$

Значеннями емпіричної функції розподілення $F^*(x)$ (див. (2.4)) є так звані *накопичені частоти*. Графік емпіричної функції розподілення будують так само, як і графік функції розподілення $F(x)$ дискретної випадкової величини.

Якщо варіаційний ряд складений за інтервалами значень і як "представника" інтервалу беруть його середину, то емпірична функція складається так само, як за варіаційним рядом за значенням. Але як представника інтервалу можна брати і правий кінець інтервалу. Об'єднуючи відрізками точки, координатами яких є праві кінці інтервалів та накопичені частості відповідних інтервалів, одержимо ламану лінію, яка є дуже гарним наближенням графіка функції розподілення безперервної випадкової величини. Такий графік буде точний, якщо всі значення в кожному інтервалі розподілені рівномірно. Аналітичний вид цієї функції доволі складний.

5. Числові характеристики вибірки

5.1. Среднє арифметичне. *Середнє арифметичне* $\overline{x}$ визначається за формулою

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i , \qquad (2.5)$$

де x_i – елементи вибірки, n – об’єм вибірки.

Якщо об’єм вибірки невеликий та x_i не дуже великі, розрахунок “вручну” за цією формулою не викликає труднощів. Якщо об’єм вибірки великий, потрібно застосовувати комп’ютер.

Якщо складений варіаційний ряд, то необхідно використати таку формулу:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i , \qquad (2.6)$$

де x_i – варіанти випадкової величини; n_i – відповідні частоти; m – кількість варіантів; n – об’єм вибірки.

Для спрощення розрахунків існує така формула:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i - c}{k}}{n} \cdot k + c , \qquad (2.7)$$

де x_i, n_i, m, та n мають той же зміст, що і у попередній формулі; k – крок таблиці, тобто інтервал між сусідніми варіантами; c – довільна стала (але для спрощення необхідно обрати варіант, що має максимальну частоту).

У результаті при обчисленнях доводиться мати справу з доволі малими числами. Формулу (2.7) застосовують у випадку, коли варіаційний ряд має сталий крок таблиці k, коли крок змінний – застосовують формулу (2.6).

Якщо варіаційний ряд складений за інтервалами значень, як x_i у формулах (2.6) та (2.7) використовують середини інтервалів.

Розрахунки за формулами (2.5) та (2.6) можна спростити, якщо перетворити змінні величини $y_i = x_i - c$, де стала c обирається поблизу середини інтервалу, в якому знаходяться всі значення вибірки. Таким чином, нові значення варіантів y_i одержані як відхилення старих варіантів від “штучного нуля” c, тобто вони доволі малі за абсолютною величиною. Формули (2.5) та (2.6) набувають вигляд:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c) + c; \qquad (2.5a)$$

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i - c)n_i + c. \qquad (2.6a)$$

5.2. Дисперсія вибірки. Дисперсію вибірки позначимо $\overline{S}^2$. Для обчислення дисперсії $\overline{S}^2$ вибірки наведемо формули, які аналогічні формулам для обчислення середнього арифметичного:

$$\overline{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \overline{x}^2; \qquad (2.8)$$

$$\overline{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 n_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 n_i - \overline{x}^2; \qquad (2.9)$$

$$\overline{S}^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2 n_i}{n}k^2 - (\overline{x} - c)^2. \qquad (2.10)$$

Для спрощення розрахунків формули (2.8) та (2.9) можна перетворити таким чином:

$$\overline{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 - (\overline{x} - c)^2; \qquad (2.8a)$$

$$\overline{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i - c)^2 n_i - (\overline{x} - c)^2. \qquad (2.9a)$$

5.3. Стандартне відхилення. Стандартне або середнє квадратичне відхилення визначається як квадратний корінь з дисперсії: $\overline{S} = \sqrt{\overline{S}^2}$.

§ 4. Теорія оцінок

1. Поняття оцінки. Генеральні сукупності характеризуються деякими сталими числовими характеристиками розподілення. За вибірками можна знайти оцінки цих характеристик. Внаслідок випадковості вибірки значення оцінок тієї самої числової характеристики, обчислені за різними вибірками генеральної сукупності, бувають, зазвичай, різними.

Позначимо невідомий параметр розподілення, тобто числову характеристику генеральної сукупності *x*, через θ, а оцінку невідомого параметра – через T_n. Оцінка T_n – функція від вибірки. Наприклад, якщо необхідно оцінити середнє значення $\theta = \mu$ нормального розподілення, то можна використати такі оцінки:

- ✓ x_1 – перший елемент вибірки. На практиці часто так і роблять, деяку величину вимірюють тільки один раз і цей результат використовують як значення цієї величини;
- ✓ $(x_{\max} + x_{\min})/2$ – середнє арифметичне максимального та мінімального елементів вибірки;
- ✓ $\overline{x}$ – середнє арифметичне.

Щоб з'ясувати яка з оцінок краща, потрібно знати основні властивості (види) оцінок.

2. Незміщені оцінки. *Незміщеною* називають оцінку T_n, середнє значення якої дорівнює самому параметру θ, який оцінюють:

$$M(T_n) = \theta . \qquad (2.11)$$

Якщо ця умова не виконується, то оцінку називають зміщеною, при цьому зміщення обчислюють як різницю $M(T_n) - \theta$.

Інші властивості оцінок у цьому посібнику не розглядаються.

Незміщеною оцінкою математичного очікування μ є середнє арифметичне $\bar{x}$.

Аналогічно, за допомогою вибіркової дисперсії $\bar{S}^2$ можна оцінити дисперсію σ^2.

Виявляється, що вибіркова дисперсія $\bar{S}^2$ є *зміщеною оцінкою дисперсії* σ^2:

$$M\left(\bar{S}^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2, \tag{2.12}$$

тобто $\sigma^2 - \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2$. Звідси видно, що при $n \to \infty$ зміщення прагне до нуля. Отже, при достатньо великому об'ємі вибірки *n* вибіркову дисперсію можна наближено приймати за незміщену оцінку дисперсії σ^2.

Для оцінки дисперсії, незміщеної при малому об'ємі вибірки, застосовують *виправлену дисперсію*

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\bar{S}^2. \tag{2.13}$$

3. Довірчий інтервал. Оцінки T_n невідомого параметра θ, які розглянуті вище, називають *точковими*, оскільки вони визначають одне значення, одну точку на числовій осі. Всі точкові оцінки параметрів розподілення генеральної сукупності обчислюють за вибірками, але через випадковість вибірок *оцінки є випадковими величинами*, що відрізняються від сталого дійсного значення параметра θ. Позначимо Δ $(\Delta > 0)$ точність оцінки, тоді

$$|\theta - T_n| \le \Delta.$$

Оцінка буде тим точніша, чим менше Δ. Кожну точність можна одержати з деякою ймовірністю (*надійністю*):

$$P(|\theta - T_n| \le \Delta) = \gamma. \tag{2.14}$$

Якщо перетворити цей вираз, отримаємо

$$P(-\Delta \le \theta - T_n \le \Delta) = \gamma$$

або

$$P(T_n - \Delta \le \theta < T_n + \Delta) = \gamma \,. \tag{2.15}$$

Умова (2.15) означає, що інтервал $[T_n - \Delta, \quad T_n + \Delta]$ накриває значення параметра θ із заданою *довірчою ймовірністю* γ. Точність оцінки Δ фактично визначає *довжину довірчого інтервалу* (2Δ). Довірча ймовірність γ, як правило, задається значенням, близьким до одиниці, наприклад, 0,95; 0,98; 0,99 і т.п.

Довірча ймовірність γ, точність оцінки Δ та об'єм вибірки n зв'язані між собою. Якщо визначені дві величини, тим самим буде визначена і третя.

§ 5. Статистичні гіпотези

1. Поняття статистичної гіпотези. *Статистичною гіпотезою* називають будь-яке твердження про вигляд або властивості розподілення, які зустрічаються в експерименті випадкової величини. Гіпотези про невідомий параметр θ розподілення бувають прості та складні; проста гіпотеза стверджує, що параметр θ має одне конкретне значення ($\theta = \theta_0$), а складна гіпотеза стверджує, що параметр θ має значення із сукупності значень ($\theta < \theta_0$, $\theta > \theta_0$, $\theta \ne \theta_0$).

Гіпотезу, що перевіряємо, позначимо H_0. Зазвичай формулюють і альтернативну гіпотезу H_1, що спростовує або виключає основну гіпотезу H_0. Таким чином, в результаті перевірки можна прийняти тільки одну з гіпотез H_0 або H_1, відхиляючи в той же час іншу.

Гіпотезу перевіряють на основі вибірки, отриманої з генеральної сукупності. Через випадковість вибірки в результаті перевірки можуть виникати помилки і прийматися неправильні рішення. Можливі помилки першого та другого роду.

Помилка першого роду виникає тоді, коли відхиляється правильна гіпотеза H_0. При *помилці другого роду* приймають невірну гіпотезу H_0. Таким чином, за одними вибірками приймається правильне рішення, а за іншими неправильне.

Рішення приймається за значенням деякої функції вибірки, що називається *статистикою* або *статистичною характеристикою.* Множину значень цієї статистики можна розподілити на дві неперетинні підмножини:

– підмножина значень статистики, при яких приймається (не відхиляється) гіпотеза H_0, називається *допустимою областю* (*областю прийняття гіпотези*);

– підмножина значень статистики, при яких відхиляється гіпотеза H_0 і приймається гіпотеза H_1, називається *критичною областю.*

При перевірці гіпотез необхідно зменшити ймовірність прийняття неправильних рішень. *Допустима ймовірність помилки першого роду* позначається через α і називається *рівнем значущості.* Значення α зазвичай мале. Але зменшення ймовірності помилки першого роду призводить до збільшення ймовірності помилки другого роду β.

Статистика обирається таким чином , щоб ймовірності α і β були мінімальними. Будемо завжди вважати гіпотезу, що перевіряється H_0 простою, тобто розподілення статистики при правильній гіпотезі H_0 відоме. При визначенні критичної області статистики застосовують рівень значущості α та враховують вид альтернативної гіпотези H_1.

Основна гіпотеза H_0 про значення невідомого параметра θ розподілення виглядає так:

$$H_0 : \theta = \theta_0 .$$

Альтернативна гіпотеза H_1 може при цьому мати такий вигляд:

$$H_1 : \theta \neq \theta_0, H_1 : \theta < \theta_0, H_1 : \theta > \theta_0.$$

Відповідно можна отримати *лівобічну, правобічну* або *двобічну критичні області.* Граничні точки критичних областей визначають за таблицями розподілення статистики. Критичні області показані на рис. 12: *а* – лівобічна, *б* – правобічна, *в* – двобічна.

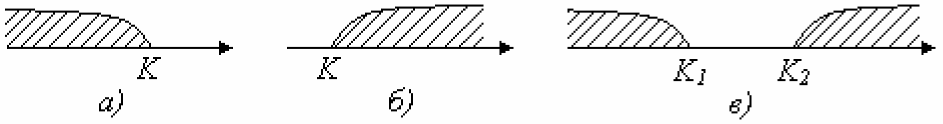


Рисунок 12

Перевірка статистичної гіпотези включає такі етапи:

1) формулювання гіпотез H_0 та H_1;

2) вибір статистики та задавання рівня значущості α;

3) визначення за таблицями по рівню значущості α та по альтернативної гіпотезі H_1;

4) обчислення за вибіркою значення статистики;

5) порівняння значення статистики з критичною областю;

6) прийняття рішення: якщо *значення статистики не входить до критичної області,* то приймається гіпотеза H_0 та відхиляється гіпотеза H_1, а *якщо входить в критичну область,* то відхиляється гіпотеза H_0, а приймається гіпотеза H_1.

Іноді має сенс перед визначенням альтернативної гіпотези H_1, виконати етап 4), де для отримання значення статистики потрібно обчислити незміщені оцінки параметрів генеральної сукупності. Наприклад, якщо перевіряється гіпотеза $H_0: \mu \neq 5$ та незміщена оцінка середнього значення $\overline{x}$ = 7,2, то мають сенс тільки такі альтернативні гіпотези H_1: $H_1: \mu = 5,\ H_1: \mu > 5$.

Результати перевірки статистичної гіпотези необхідно інтерпретувати так: *якщо прийняли гіпотез H_1*, то можна вважати її *доведеною,* а *якщо прийняли гіпотезу H_0,* то визнали, *що гіпотеза H_0, не суперечить результатам спостережень.* Однак цю властивість, крім гіпотези H_0, може мати ще декілька інших гіпотез. А отже, слід пам'ятати, що *приймаючи гіпотезу H_0, потрібно проводити додаткові дослідження.*

2. Гіпотеза про середнє значення нормального розподілення при відомому σ. Будемо вважати, що генеральна сукупність має нормальне розподілення $X \in N(\mu, \sigma)$, де значення σ відомо. *При рівні значущості α* необхідно перевірити гіпотезу H_0: $\mu = \mu_0$. Як альтернативну можна використати одну з таких гіпотез $H_0: \mu \neq \mu_0,\ H_0: \mu < \mu_0,\ H_0: \mu > \mu_0$. Як статистику використаємо випадкову величину

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}, \qquad (2.16)$$

яка при істинній гіпотезі H_0 має *нормоване нормальне розподілення* $Z \in N(0,1)$.

Критичну область визначаємо за допомогою таблиці функції розподілення (див. додаток 2).

Якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1: \mu < \mu_0$, то використовуємо лівобічну критичну область (рис. 13), яка задовольняє такій умові:

$$P(Z < -z_\alpha) = \Phi(-z_\alpha) = \alpha . \qquad (2.17)$$

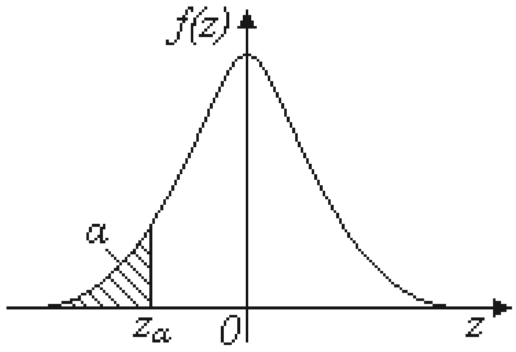


Рисунок 13

Таблиці укладені тільки для додатних значень аргументу, тому з таблиці знайдемо z_α, враховуючи, що $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$. Отже, критична область – це множина таких *Z*, для яких

$$Z < -z_\alpha . \qquad (2.18)$$

Якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1: \mu > \mu_0$, то використовуємо правобічну критичну область (рис. 14), яка задовольняє такій умові:

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha . \qquad (2.19)$$

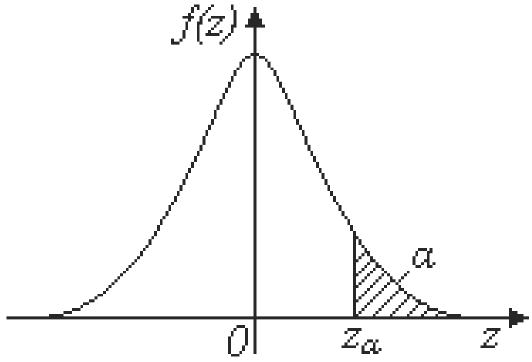


Рисунок 14

З таблиці знайдемо z_α, враховуючи, що

$$P(Z < z_\alpha) = \Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha . \qquad (2.20)$$

Отже, критична область – це множина таких *Z*, для яких

$$Z > z_\alpha . \qquad (2.21)$$

При альтернативній гіпотезі, яка має вигляд $H_1: \mu \neq \mu_0$, то використовуємо двобічну критичну область (рис. 15), яка задовольняє такій умові:

$$P(|Z| > z_\alpha) = \alpha . \qquad (2.22)$$

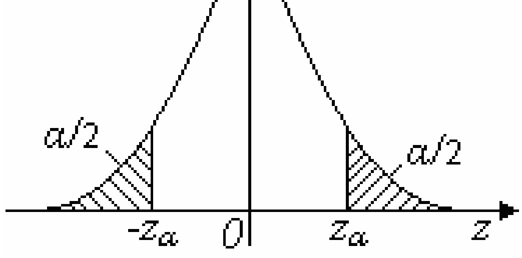


Рисунок 15

Враховуючи визначення абсолютної

величини, знаходимо

$$P(Z < z_\alpha) = P(Z > z_\alpha) = \alpha / 2.$$

За формулами (2.19) та (2.20) отримуємо умову використання таблиці:

$$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha / 2. \tag{2.23}$$

Таким чином, критична область має вигляд $|Z| > z_\alpha$.

Для обчислення значення статистики за формулою (2.16) залишається тільки за вибіркою знайти середнє арифметичне $\overline{x}$.

4. Гіпотеза про середнє значення нормального розподілення при невідомому *σ*. Будемо вважати, що генеральна сукупність має нормальне розподілення $X \in N(\mu, \sigma)$, але тепер значення σ невідоме. В такому випадку як статистику використовують випадкову величину

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}, \tag{2.24}$$

яка при істинній гіпотезі H_0 має *t – розподілення Стьюдента з кількістю ступенів вільності n* – 1*,* де *n* – об'єм вибірки.

Критичні області визначаються таким же чином, як і в попередньому пункті, але використання таблиці *t* – розподілення Стьюдента простіше, бо вона складена якраз для визначення критичних областей. При знаходженні лівобічної або правобічної критичних областей застосовують верхню «голівку» таблиці, а для двобічної – нижню.

Запитання для самоперевірки

1. Назвіть основні задачі математичної статистики.
2. Назвіть основні параметри математичної статистики.
3. Що називається варіаційним рядом?
4. Що називається емпіричною функцією розподілення?
5. Що таке полігон та гістограма?
6. Назвіть числові характеристики статистичного розподілення.
7. Яка оцінка параметру називається незміщеною?

8. Яка оцінка для математичного очікування буде незміщеною? Назвіть незміщену оцінку для дисперсії.
9. Що називається довірчим інтервалом та довірчою ймовірністю?
10. Чому дорівнює довжина довірчого інтервалу?

Робота 3

Задача 3.1. За вибіркою *A* (додаток 3) розв’язати такі завдання:

– скласти варіаційний ряд;
– обчислити відносні частоти та накопичені частості;
– побудувати графіки варіаційного ряду (полігон та гістограму);
– скласти емпіричну функцію розподілення;
– побудувати графік емпіричної функції розподілення;
– обчислити середнє арифметичне $\overline{x}$, дисперсію $\overline{S}^2$, стандартне відхилення $\overline{S}$.

Задача 3.2. Для стовпчиків *X*, *Y* та *Z* вибірки *C* (додаток 3) обчислити числові характеристики $(\overline{x}, \overline{S}^2, \overline{S})$. За бажанням можна скласти варіаційні ряди за значеннями.

Задача 3.3. Обчислити незміщені оцінки параметрів генеральної сукупності $\overline{x}, S^2, S$ за вибірками *A* та *C* (додаток 3), використовуючи результати, отримані у попередніх задачах.

Задача 3.4. Вибірка, що складається з $S = K + L + M$ виробів, містить *K* бракованих. Оцінити долю браку по всій партії товару, якщо вона містить $N = L * 100$ виробів. Значення параметрів *K*, *L*, *M* наведені в таблиці 6.

Задача 3.5. При підбитті підсумків року на двох машинобудівних заводах проведене вибіркове обстеження виконання плану робітниками (на I-му заводі обстежено $K * 100$ робітників, на II-му заводі $L * 100$). Було встановлено, що робітники I-го заводу виконують місячні плани в середньому на (100 + *M*) % при середньоквадратичному відхилені *P* %, а робітного II-го заводу виконували місячні плани на (100 + *Q*) % при середньоквадратичному відхилені *R* %.

Чи можна на підставі результатів цього обстеження стверджувати, що середньомісячне виконання планового завдання робітниками одного з заводів вище, ніж другого?

Якщо так, то при якому рівні значущості?

Вважати, що розподілення виконання плану за місяцями і робітниками – нормальне. Вибірки по заводам – незалежні. Значення параметрів *K*, *L*, *M*, *Q*, *P*, *R* наведені в таблиці 7.

Таблиця 6

Номер вар.	*K*	*L*	*M*	Номер вар.	*K*	*L*	*M*	Номер вар.	*K*	*L*	*M*
1	9	7	8	11	8	7	4	21	7	4	9
2	5	4	6	12	3	5	2	22	7	7	7
3	8	8	8	13	9	9	9	23	6	6	6
4	6	9	2	14	4	5	4	24	9	3	8
5	7	9	7	15	5	4	3	25	8	6	8
6	6	7	7	16	7	7	6	26	4	4	9
7	8	3	8	17	5	7	6	27	7	8	7
8	3	7	7	18	7	6	5	28	5	8	6
9	8	7	9	19	2	5	3	29	9	5	7
10	6	4	5	20	5	3	8	30	4	2	7

Таблиця 7

Номер вар.	*K*	*L*	*M*	*P*	*Q*	*R*	Номер вар.	*K*	*L*	*M*	*P*	*Q*	*R*
1	2	3	4	5	3	2	11	6	6	6	4	5	7
2	5	4	6	3	5	2	12	4	5	4	7	9	5
3	7	4	9	3	6	5	13	9	3	8	3	8	9
4	7	7	7	5	6	8	14	5	4	3	6	3	5
5	9	9	9	8	9	3	15	6	7	7	9	5	8
6	6	9	2	8	5	7	16	4	4	9	5	7	2
7	9	7	8	5	7	6	17	5	7	6	9	7	8
8	8	7	4	4	6	4	18	7	8	6	4	4	4
9	3	5	2	8	6	8	19	7	5	7	8	6	9
10	8	8	8	7	8	4	20	6	8	9	7	8	6

Продовження таблиці 7

Номер вар.	*K*	*L*	*M*	*P*	*Q*	*R*	Номер вар.	*K*	*L*	*M*	*P*	*Q*	*R*
21	2	3	4	5	3	2	26	6	6	6	4	5	7
22	5	4	6	3	5	2	27	4	5	4	7	9	5
23	7	4	9	3	6	5	28	9	3	8	3	8	9
24	7	7	7	5	6	8	29	5	4	3	6	3	5
25	9	9	9	8	9	3	30	6	7	7	9	5	8

Розв’язання задач варіанта 0

Задача 3.1. Спочатку розв’яжемо задачу за вибіркою *A*:

2	4	2	4	3	3	3	2	0	6	1	2	3	2	2	4	3	3	5	1
0	2	4	3	2	2	3	3	1	3	3	3	1	1	2	3	1	4	3	1
7	4	3	4	2	3	2	3	3	1	4	3	1	4	5	3	4	2	4	5
3	6	4	1	3	2	4	1	3	1	0	0	4	6	4	7	4	1	3	

Розв’язання. Знаходимо: $x_{\min} = 0$ та $x_{\max} = 7$. Розмах (7 – 0 + 1 = 8) доволі малий, тому складаємо варіаційний ряд за значеннями. Всі відносні частоти обчислюємо з однаковою точністю.

x_i	n_i	n_i/n	Накопичені частості
0	4	0,0506	0,0506
1	13	0,1646	0,2152
2	14	0,1772	0,3924
3	24	0,3038	0,6962
4	16	0,2025	0,8987
5	3	0,0380	0,9367
6	3	0,0380	0,9747
7	2	0,0253	1,0000
$\sum$	79	1,0000	–

При побудові графіків зображаємо на осі *x* значення від 0 до 7 і на осі n_i/n – значення від 0 до 0,3 (рис. 16 – полігон варіаційного ряду вибірки *A* та рис. 17 – гістограма варіаційного ряду вибірки *A*).

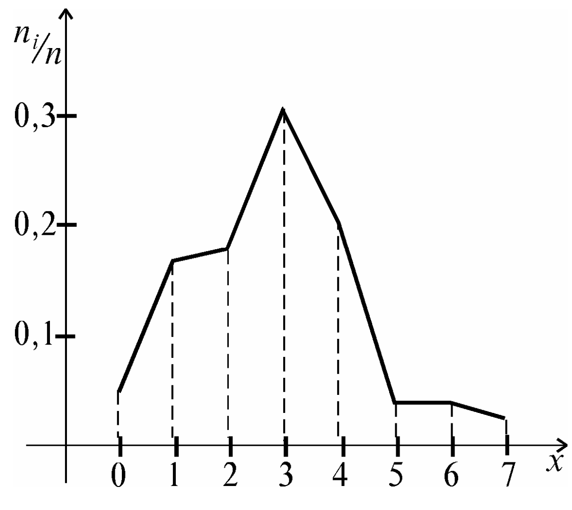


Рисунок 16

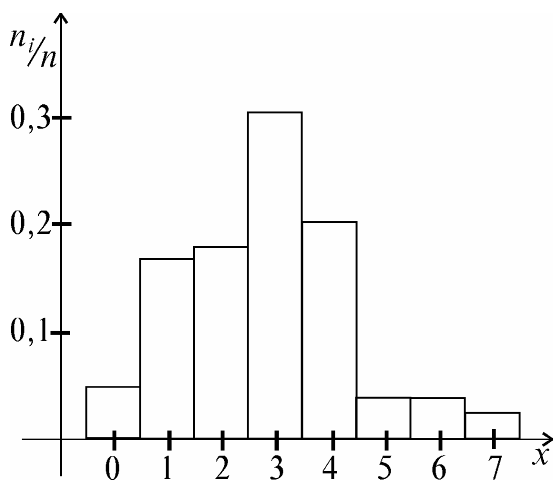


Рисунок 17

Емпіричну функцію розподілення $F^*(x)$ знаходимо, використовуючи формулу (2.4) та накопичені частості:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}0506 & 0 < x \le 1, \\ 0{,}2152, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}3924, & 2 < x \le 3, \\ 0{,}6962, & 3 < x \le 4, \\ 0{,}8987, & 4 < x \le 5, \\ 0{,}9367, & 5 < x \le 6, \\ 0{,}9747, & 6 < x \le 7 \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$

При побудові графіка $F^*(x)$ відкладаємо значення функції в інтервалі від 0 до 1.

Обчислення сум для середнього арифметичного та дисперсії за формулами (2.7) та (2.10) та за варіаційним рядом оформляємо як таблицю.

За максимальною частотою визначаємо $c = 3$, а крок таблиці $k = 1$.

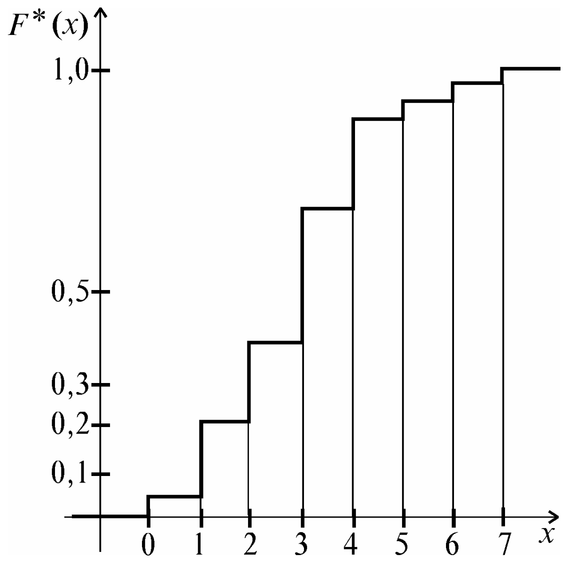


Рисунок 18

Далі за формулою (2.7) обчислюємо середнє арифметичне

$$\bar{x} = \frac{-13}{79} \cdot 1 + 3 = -0{,}16 + 3 = 2{,}84$$

і за формулою (2.10) – дисперсію

$$\bar{S}^2 = \frac{189}{79} \cdot 1 - (2{,}84 - 3)^2 =$$

$$= 2{,}3924 - 0{,}0256 = 2{,}3668.$$

Стандартне відхилення

$$\bar{S} = \sqrt{2{,}3668} = 1{,}54.$$

x_i	n_i	$\frac{x_i - c}{k}$	$\frac{x_i - c}{k} n_i$	$\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2$	$\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2 n_i$
0	4	–3	–12	9	36
1	13	–2	–26	4	52
2	14	–1	–14	1	14
3	24	0	0	0	0
4	16	1	16	1	16
5	3	2	6	4	12
6	3	3	9	9	27
7	2	4	8	16	32
$\sum$	79	–	–13	–	189

Задача 3.2

X: 73 69 72 72 65 67 56 70 63 64 70 67 60 63 80 71 74 68 65 73

Y: –291 –270 –279 –282 –254 –264 –216 –276 –248 –253 –276 –262 –234 –243 –313 –278 –292 –271 –256 –291

Z: 577 548 575 573 519 530 443 555 502 506 554 535 478 495 635 564 583 534 518 574

Розв'язання. За заданими вибірками видно, що немає сенсу складати варіаційний ряд за значеннями, тому що у вибірці мало елементів, що повторюються. Для розрахунків використовуємо формули (2.5) та (2.6) або (2.5*а*) та (2.6*а*). У даному випадку необхідно віддати перевагу останнім формулам, оскільки при розрахунках прийдеться мати справу з меншими величинами.

Розрахунки оформлюємо як таблицю.

x_i	$(x_i - c)$	$(x_i - c)^2$	y_i	$(y_i - c)$	$(y_i - c)^2$	z_i	$(z_i - c)$	$(z_i - c)^2$
73	3	9	–291	–41	1681	577	27	729
69	–1	1	–270	–20	400	548	–2	4
72	–2	4	–279	–29	841	575	25	625
72	–2	4	–282	–32	1024	573	23	529
65	–5	25	–254	–4	16	519	–31	961
67	–3	9	–264	–14	196	530	–20	400
56	–14	196	–216	34	1156	443	–107	11449
70	0	0	–276	–26	676	555	5	25
63	–7	49	–248	–2	4	502	–48	2304
64	–6	36	–253	–3	9	506	–44	1936
70	0	0	–276	–26	676	554	4	16
67	–3	9	–262	–12	144	535	–15	225
60	–10	100	–234	16	256	478	–72	5184
63	–7	49	–243	7	49	495	–55	3025
80	10	100	–313	–63	3969	635	85	7225
71	1	1	–278	–28	784	564	14	196
74	4	16	–292	–42	1764	583	33	1089
68	–2	4	–271	–21	441	534	–16	256
65	–5	25	–256	–6	36	518	–32	1024
73	3	9	–291	–41	1681	574	24	576
$\sum$	–38	646	$\sum$	–349	15803	$\sum$	–202	37778

Маємо: $X_{\min} = 56$, $X_{\max} = 80$, $c = 70$, $n = 20$,

$$\overline{X} = \frac{-38}{20} + 70 = -1{,}9 + 70 = 68{,}1.$$

$$\overline{S}_x^2 = \frac{646}{20} - (68{,}1 - 70)^2 = 32{,}3 - 1{,}9^2 = 32{,}3 - 3{,}61 = 28{,}69;$$

$$\overline{S}_x = \sqrt{28{,}69} = 5{,}36;$$

$$Y_{\min} = -313,\ Y_{\max} = -216,\ c = -250,\ n = 20;$$

$$\overline{Y} = \frac{-349}{20} - 250 = -17{,}45 - 250 = -267{,}45;$$

$$\overline{S}_y^2 = \frac{15803}{20} - (-267{,}45 + 250)^2 = 790{,}15 - 304{,}50 = 485{,}65;$$

$$\overline{S}_y = \sqrt{485{,}65} = 22{,}0;$$

$$Z_{\min} = 443,\ Z_{\max} = 635,\ c = 550,\ n = 20;$$

$$\overline{Z} = \frac{-202}{20} + 550 = -10{,}1 + 550 = 539{,}9;$$

$$\overline{S}_z^2 = \frac{37778}{20} - (539{,}9 - 550)^2 = 1888{,}9 - 102{,}01 = 1786{,}89;$$

$$\overline{S}_z = \sqrt{1786{,}89} = 42{,}3.$$

Задача 3.3. При розв'язанні задачі 3.1 для вибірки A була отримана незміщена оцінка середнього значення $\overline{x} = 2{,}84$, а також вибіркова дисперсія $\overline{S}^2 = 2{,}3668$.

Розв'язання. За формулою (2.13) знаходимо незміщені оцінки дисперсії та стандартного відхилення:

$$n = 79,\ S^2 = \frac{79}{78} \cdot 2{,}3668 = 2{,}3971,\ S = \sqrt{2{,}3971} = 1{,}55.$$

За результатами задачі 3.2:

$$n = 20,\ \overline{x} = 68{,}1,\ S_x^2 = \frac{20}{19} \cdot 28{,}29 = 29{,}779,\ S_x = \sqrt{29{,}779} = 5{,}457;$$

$$n = 20,\ \overline{y} = -267{,}45,\ S_y^2 = \frac{20}{19} \cdot 485{,}65 = 511{,}21,\ S_y = \sqrt{511{,}21} = 22{,}61;$$

$$n = 20,\ \overline{z} = 539{,}9,\ S_z^2 = \frac{20}{19} \cdot 1786{,}89 = 1880{,}94,\ S_z = \sqrt{1880{,}94} = 43{,}37.$$

Задача 3.4. Вибірка, що складається з 30 виробів, містить 6 бракованих. Оцінити долю браку по всій партії товару, якщо вона містить 300 виробів.

Розв'язання. Як відомо, незміщеною та обґрунтованою оцінкою генеральної долі *p* є вибіркова доля, яка дорівнює $\theta = \dfrac{6}{30} = 0,2$.

Для уточнення цієї оцінки необхідно обчислити її середню помилку Δ. Середня помилка оцінки повторної вибірки дорівнює

$$\Delta_{\text{повт}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},$$

де *p* – генеральна доля. Оскільки *p* невідома (ми її й оцінюємо), то замінюємо *p* на її оцінку *θ*. Тоді

$$\Delta_{\text{повт}} = \sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}} = \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{30}} = \sqrt{0,0053} = 0,073.$$

Вибіркова доля також є найкращою оцінкою генеральної долі і безповторної вибірки, але середня помилка обчислюється за формулою

$$\Delta_{\text{безповт}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}.$$

Замінимо *p* на *θ*:

$$\Delta_{\text{безповт}} = \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{30}\left(1-\frac{30}{300}\right)} = \sqrt{0,0053 \cdot 0,9} = \sqrt{0,00477} = 0,069.$$

Отже, оцінка браку по всій партії дорівнює:

– повторна вибірка – $p = 0,2 \pm 0,073$,

– безповторна вибірка – $p = 0,2 \pm 0,069$.

Це означає, що доля браку в умовах задачі складає $19,7 \div 27,3$ % для повторної вибірки та $13,1 \div 26,9$ % для безповторної вибірки.

Задача 3.5. При підбитті підсумків року на двох машинобудівних заводах проведене вибіркове обстеження виконання плану робітниками (на I-му заводі обстежено 300 робітників, на II-му заводі 400). Було встановлено, що робітники I-го заводу виконують місячні плани в середньому на 106% при середньоквадратичному відхилені 8,3%, а робітного II-го заводу виконували місячні плани на 108% при середньоквадратичному відхилені 10,3%.

Чи можна на підставі результатів цього обстеження стверджувати, що середньомісячне виконання планового завдання робітниками одного з заводів вище, ніж другого?

Якщо так, то при якому рівні значущості?

Вважати, що розподілення виконання плану за місяцями і робітниками – нормальне.

Розв'язання. Позначимо потрібну нам генеральну ознаку X (для першого заводу) та Y (для другого заводу). Треба з'ясувати, суттєво чи ні відрізняються оцінки генеральних середніх $M(X)$ та $M(Y)$.

Дані вибіркового обстеження запишемо таким чином:

$$\bar{x} = 106, \quad D(X) = (8{,}3)^2,$$
$$\bar{y} = 108, \quad D(Y) = (10{,}3)^2.$$

Сформулюємо нульову та альтернативну (конкуруючу) гіпотези:

$$H_0 : M(X) = M(Y),$$
$$H_\alpha : M(Y) > M(X), \quad (\text{оскільки } \bar{y} > \bar{x}).$$

Середнє квадратичне відхилення відоме, тому запишемо статистику, враховуючи умови задачі:

$$Z = \frac{\bar{y} - \bar{x}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}},$$

де n, m – об'єм вибірки на I і II заводах. Обчислимо значення критерію, що спостерігається.

$$Z_{\text{набл}} = \frac{\bar{y} - \bar{x}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}} = \frac{108 - 106}{\sqrt{\frac{106}{400} + \frac{69}{300}}} = \frac{2}{\sqrt{0{,}265 + 0{,}23}} = \frac{2}{\sqrt{0{,}495}} \approx 2{,}84.$$

При заданому рівні значущості α критичне значення критерію знаходять із співвідношення:

$$\Phi(z_{\text{набл}}) = \frac{1-2\alpha}{2}, \quad \text{а отже,} \quad \alpha = \frac{1-2\Phi(z_{\text{набл}})}{2},$$

$$\alpha = \frac{1-2\Phi\left(2,84\right)}{2} = \frac{1-2\cdot 0,4977}{2} = 0,0023,$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа. Згідно з додатком 2 маємо $\Phi(2,84) = 0,4977$. Таким чином, приходимо до висновку, що $z_{\text{набл}} > z_{\text{кр}}$ при $0,0023 < \alpha \le 0,5$, тобто буде прийнята конкуруюча гіпотеза (див. додаток 4).

Отже, при рівні значущості $0,0023 < \alpha \le 0,5$ можна стверджувати, що середньомісячне виконання плану робітниками II заводу вище, ніж у робітників I заводу.

Додатки

ДОДАТОК 1

Функція густини ймовірності нормального розподілення

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29430	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20327	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	03292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01794
2,5	01753	01709	0667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00371	00358	00348	00337
3,1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3,2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3,3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3,4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3,5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3,6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3,7	00042	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00031	00030
3,8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3,9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014
4,0	00013	00009	00006	00004	00002	00002	00001	00001	00000	00000

Д О Д А Т О К 2

Функція розподілу нормального розподілення

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	50000	50399	50798	51197	51595	51994	52392	52790	53188	53586
0,1	53983	54380	54776	55172	55567	55962	56356	56749	57142	57535
0,2	57926	58317	58706	59095	59483	59871	60257	60642	61026	61409
0,3	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0,4	65542	65910	66276	66640	67003	67364	67724	68082	68439	68793
0,5	69146	69497	69847	70194	70540	70884	71226	71566	71904	72240
0,6	72575	72907	73237	73565	73891	74215	74537	74857	75175	75490
0,7	75804	76115	76424	76730	77035	77337	77637	77935	78230	78524
0,8	78814	79103	79389	79673	79955	80234	80511	80785	81057	81327
0,9	81594	81859	82121	82381	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1,0	84134	84375	84614	84850	85083	85314	85543	85769	85993	86214
1,1	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1,2	88493	88686	88877	89065	89251	89435	89617	89796	89973	90147
1,3	90320	90490	90658	90824	90988	91149	91308	91466	91621	91774
1,4	91924	92073	92220	92364	92507	92647	92786	92922	93056	93189
1,5	93319	93448	93574	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1,6	94520	94630	94738	94845	94950	95053	95154	95254	95352	95449
1,7	95543	95637	95728	95818	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1,8	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062
1,9	97128	97193	97257	97320	97381	97441	97500	97558	97615	97670
2,0	97725	97778	97831	97882	97932	97982	98030	98077	98124	98169
2,1	98214	98257	98300	98341	98382	98422	98461	98500	98537	98574
2,2	98610	98645	98679	98713	98745	98778	98809	98840	98870	98899
2,3	98928	98956	98983	99010	99036	99061	99086	99111	99134	99158
2,4	99180	99202	99224	99245	99266	99286	99305	99324	99343	99361
2,5	99379	99396	99413	99430	99446	99461	99477	99492	99506	99520
2,6	99534	99547	99560	99573	99585	99598	99609	99621	99632	99643
2,7	99653	99664	99674	99683	99693	99702	99711	99720	99728	99736
2,8	99744	99752	99760	99767	99774	99781	99788	99795	99801	99807
2,9	99813	99819	99825	99831	99836	99841	99846	99851	99856	99861
3,0	99865	99869	99874	99878	99882	99886	99889	99893	99896	99900
3,1	99903	99906	99910	99913	99916	99918	99921	99924	99926	99929
3,2	99931	99934	99936	99938	99940	99942	99944	99946	99948	99950
3,3	99952	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99962	99964	99965
3,4	99966	99968	99969	99970	99971	99972	99973	99974	99975	99976
3,5	99977	99978	99978	99979	99980	99981	99981	99982	99983	99983
3,6	99984	99985	99985	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989
3,7	99989	99990	99990	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992
3,8	99993	99993	99993	99994	99994	99994	99994	99995	99995	99995
3,9	99995	99995	99996	99996	99996	99996	99996	99996	99997	99997
4,0	99997	99998	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999

Д О Д А Т О К 3

Варіант 1

Вибірка *A*

0	4	2	0	5	1	1	3	0	2	2	4	3	2	3	3	0	4	5	1
3	1	5	2	0	2	2	3	2	2	2	6	2	1	3	1	3	1	5	4
5	5	3	2	2	0	2	1	1	3	2	3	5	3	5	2	5	2	1	1
2	3	4	3	2	3	2	4	2											

Вибірка *C*

X	67	68	70	76	80	87	75	79	79	73	86	78	79	67	79
Y	–201	–199	–206	–221	–238	–256	–222	–230	–234	–217	–253	–228	–230	–201	–237
Z	602	602	625	674	718	781	668	702	701	648	773	692	708	596	702

Варіант 2

Вибірка *A*

3	7	4	6	1	4	2	4	6	5	3	2	9	0	5	6	7	7	3	1
5	5	4	2	6	2	1	5	3	3	1	5	6	4	4	3	4	1	5	5
3	4	3	7	4	5	6	7	5	2	4	6	6	7	7	3	5	4	4	3
5	5	7	6	6	1														

Вибірка *C*

X	48	40	52	50	39	47	38	46	47	44	45	44	53	52	45
Y	99	83	106	107	79	100	80	96	98	97	92	90	108	107	96
Z	520	435	564	541	424	516	413	505	514	479	490	483	577	569	493

Варіант 3

Вибірка *A*

0	0	2	0	1	3	0	1	0	1	2	1	3	0	0	2	1	3	2	2
1	3	3	2	0	2	4	3	2	1	2	2	2	2	3	3	1	1	1	3
2	1	0	1	2	1	4	4	2	3	3	5	5	2	1	2	3	2	3	1
1	0	1	0	4	1	1	0	2	2	4	2	1	4	3	0	2	0	2	0
3	1																		

Вибірка *C*

X	58	57	46	54	67	60	53	57	41	58	43	55	40	67	57
Y	62	57	49	63	72	64	53	65	45	61	45	57	43	74	57
Z	513	510	406	476	602	538	467	507	362	513	384	488	358	601	511

Варіант 4

Вибірка *A*

3	3	1	0	0	3	3	5	3	0	0	4	1	5	1	6	5	4	7	4
5	3	3	0	2	3	1	4	1	2	4	3	4	5	4	0	5	6	6	3
5	4	1	3	3	6	3	1	1	5	2	3	5	3	3	4	1	5	6	1
3	3	3	5	6	1	2	1	3	4										

Вибірка *C*

X	62	71	67	66	67	70	64	66	78	65	63	59	69	71	59
Y	195	220	205	207	201	215	197	206	241	197	196	216	180	214	185
Z	486	566	531	520	534	558	510	523	622	511	501	549	471	558	466

Продовження додатку 3

Варіант 5

Вибірка *A*

0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	2	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	1	0	1

Вибірка *C*

X	31	28	30	23	25	25	25	27	31	25	28	25	30	28	28
Y	318	280	305	234	255	258	258	272	317	252	280	258	304	289	288
Z	–37	–36	–32	–30	–32	–33	–27	–28	– 40	–33	–31	–31	–39	–30	–34

Варіант 6

Вибірка *A*

4	10	7	6	3	7	8	7	4	7	10	7	3	9	3	1	5	8	10	11
6	5	7	6	3	8	4	3	8	4	10	6	8	7	8	7	7	7	4	6
7	10	4	4	0	5	4	4	8	5	5	10	7	3	8	5	6	6	6	3
5	7	8	5	7	10	9	10	8	2	3	6	9							

Вибірка *C*

X	93	91	92	90	90	94	90	97	95	94	91	93	95	97	87
Y	–270	–264	–269	–268	–262	–280	–263	–289	–278	–279	–265	–283	–252	–283	–285
Z	555	536	551	534	539	562	532	572	567	561	540	550	568	516	566

Варіант 7

Вибірка *A*

2	2	1	3	4	2	1	1	3	3	4	3	2	4	2	1	4	3	1	4
0	4	2	3	4	3	7	1	3	3	3	4	3	2	1	2	3	3	1	5
3	0	2	1	2	3	0	0	3	6	2	4	3	4	2	4	1	2	0	3
1	0	0	2																

Вибірка *C*

X	53	29	40	41	44	28	48	53	26	43	42	68	42	60	39
Y	–204	–110	–152	–161	–167	–109	–186	–203	–99	–168	–159	–266	–159	–237	–147
Z	309	169	230	238	259	158	283	316	149	256	251	401	242	355	334

Варіант 8

Вибірка *A*

8	4	4	7	5	5	5	3	10	2	3	6	7	6	10	6	7	7	6	10
7	6	8	10	7	7	9	1	3	4	7	4	4	5	4	9	6	5	9	5
6	5	6	4	7	2	5	7	6	7	3	8	8	7	4	7	5	7	6	6
5	6	6	6	12	5	11	8	1	10	10	9	1	4	5	6	8	4	10	8

Вибірка *C*

X	46	40	58	35	53	47	40	60	39	41	58	59	57	65	34
Y	279	245	354	212	323	285	240	361	235	246	357	361	343	390	208
Z	44	39	49	25	47	42	32	53	29	39	54	55	50	55	28

Продовження додатку 3

Варіант 9

Вибірка *A*

2	1	2	3	1	1	0	2	2	4	3	3	0	3	0	3	2	3	1	2
2	3	0	2	3	0	2	3	3	4	4	1	4	0	0	1	2	4	4	3
0	0	0	2	2	3	2	1	0	0	0	3	1	0	1	2	1	2	2	4
3	2	0	0	1	0	3	0	0	3	1	3	4	2	3	3	2	0	4	

Вибірка *C*

X	77	76	62	83	83	79	77	81	71	83	73	81	82	77	83
Y	605	632	554	594	612	556	679	629	582	611	626	703	650	655	577
Z	58	49	63	62	61	57	79	55	64	70	62	80	62	55	65

Варіант 10

Вибірка *A*

3	5	6	8	4	5	4	7	2	7	7	3	7	4	4	5	4	4	5	2
4	8	8	4	6	5	9	4	0	4	4	4	9	3	3	2	1	5	2	5
5	3	4	4	7	8	9	11	4	5	2	5	7	6	1	2	5	6	3	1
2	6	7	3	3	2	5	4	8	2	6	5	9	5	5	2	8	3	6	4

Вибірка *C*

X	71	73	69	73	68	67	69	80	77	74	78	68	73	64	67
Y	149	148	139	147	139	135	139	168	157	149	161	137	153	131	139
Z	561	577	545	574	540	535	544	634	615	584	615	535	580	506	530

Варіант 11

Вибірка *A*

4	5	6	1	1	6	2	2	8	4	5	5	4	2	3	4	7	5	4	7
3	3	4	4	3	8	4	3	5	5	2	1	4	3	5	1	4	3	3	3
1	0	2	2	1	7	5	2	6	2	1	1	8	4	5	4	1	4	5	9
5	5	4	4	6	1														

Вибірка *C*

X	11	9	12	10	7	8	9	9	11	13	9	9	10	13	7
Y	42	35	45	32	30	32	30	34	36	42	27	29	38	21	41
Z	58	45	64	58	33	46	46	50	63	70	52	49	77	32	50

Варіант 12

Вибірка *A*

11	6	7	8	7	3	7	3	3	12	7	9	12	5	10	4	7	2	7	7
4	5	11	5	5	6	4	5	8	9	8	12	5	6	7	10	11	9	13	9
3	8	11	9	7	12	6	6	14	11	9	8	14	6	4	10	8	4	6	8
3	6	6	7	7	6	10	11	3	11	8	5	8	11	11	6	11	7	8	7
12	5	5	9	5	7	10	5	7											

Вибірка *C*

X	41	40	41	40	41	42	42	40	40	41	40	39	41	41	40
Y	209	201	214	222	210	219	208	208	206	200	209	202	212	216	220
Z	270	266	274	278	278	263	283	257	279	267	264	284	257	278	276

Продовження додатку 3

Варіант 13

Вибірка *A*

1	0	1	1	1	2	0	2	1	0	0	0	1	0	3	2	1	1	1	0
0	0	1	1	0	2	0	3	1	2	1	3	2	1	0	0	1	0	1	1
0	2	3	1	0	3	1	1	1	2	1	1	0	0	1	1	3	0	2	3
2	1	1	0	4	2	2	1	1	2	0									

Вибірка *C*

X	60	54	67	57	66	58	63	58	70	59	62	51	61	71	70
Y	246	224	277	237	265	236	261	234	282	239	255	204	245	286	295
Z	297	264	332	381	324	286	308	282	343	290	309	250	304	351	324

Варіант 14

Вибірка *A*

6	6	5	6	11	8	7	4	4	8	3	2	3	9	7	6	9	5	8	8
7	10	8	6	9	9	10	3	10	5	7	6	8	9	9	3	8	4	11	4
6	9	2	8	7	7	7	8	4	3	6	12	10	2	3	8	6	8	2	3
8	8	7	6	9	4	4	7	6	9	6									

Вибірка *C*

X	57	67	43	60	55	59	59	54	49	47	62	56	49	55	50
Y	61	63	59	64	63	62	68	65	68	65	62	68	64	60	67
Z	420	509	435	469	449	450	437	422	463	455	472	448	443	462	484

Варіант 15

Вибірка *A*

2	0	1	2	0	0	2	2	1	1	0	0	0	0	1	2	0	4	0	0
1	0	4	1	1	0	2	1	0	0	2	1	1	1	1	0	1	1	0	3
1	2	1	0	1	2	1	2	3	0	2	4	0	0	0	3	0	2	0	2
2	2	1	1																

Вибірка *C*

X	80	85	77	85	77	93	78	74	78	86	75	79	93	84	82
Y	325	344	312	340	313	373	313	298	312	351	307	317	372	339	337
Z	232	254	224	252	221	272	230	220	225	257	217	227	274	250	243

Варіант 16

Вибірка *A*

5	4	4	4	5	0	3	7	2	2	3	0	5	6	3	4	6	1	2	5
3	2	3	6	6	2	3	1	7	2	3	2	2	5	2	0	2	2	6	1
3	6	7	7	2	0	4	6	1	1	6	7	1	3	4	6	6	3	2	1
7	2	5	4	2	3	4	5	6	6	5	3	2							

Вибірка *C*

X	25	47	42	38	30	30	32	38	34	34	41	37	39	36	29
Y	233	432	385	347	274	276	294	348	315	307	377	353	332	307	264
Z	–7	–6	–10	–1	–2	–6	–6	–5	–10	– 4	–9	–5	–7	–3	–10

Варіант 17

Вибірка *A*

8	4	11	7	7	5	8	9	6	7	1	6	5	8	7	4	8	4	6	5
7	4	8	7	4	3	2	8	5	0	4	7	6	3	5	7	2	6	6	5
8	1	8	6	6	8	8	9	6	8	7	5	12	5	3	9	7	7	8	3
7	9	6	5	4	4	4	7	7	4	5	9	5	9	3	4	4	8	5	1
10	6	1	7	8	6	7	9												

Вибірка *C*

X	20	15	16	16	10	15	23	15	17	17	17	19	16	11	13
Y	96	64	74	69	40	61	102	63	70	83	76	86	73	52	55
Z	134	94	110	101	67	102	153	93	105	102	109	119	102	64	75

Варіант 18

Вибірка *A*

5	3	3	3	5	4	5	3	3	4	2	1	5	2	4	0	2	2	3	2
1	3	3	1	2	4	6	6	4	1	2	4	3	1	5	2	4	6	3	8
4	5	1	1	2	0	2	3	3	2	4	2	1	2	3	1	2	4	3	0
6	3	1	4	3	7	1	1	0	2	3	1	1							

Вибірка *C*

X	56	48	52	50	51	51	53	49	50	51	59	52	51	52	47
Y	576	487	522	507	521	527	540	506	515	511	598	522	515	521	531
Z	–130	–113	–107	–107	–116	–104	–124	–108	–120	–110	–112	–119	–107	–100	–123

Варіант 19

Вибірка *A*

2	2	0	1	3	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	4	1	0	0
0	2	0	1	1	0	1	2	1	2	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	2	1	0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	1	1	0	0
0	0	0	2	1	1	1	1	3	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0

Вибірка *C*

X	34	53	41	50	21	51	40	46	50	48	28	55	60	48	45
Y	247	374	296	354	148	359	284	323	355	337	198	386	420	342	320
Z	161	255	200	243	99	245	194	222	242	233	136	271	294	231	218

Варіант 20

Вибірка *A*

7	8	4	0	4	6	5	4	3	2	4	8	6	2	2	5	3	6	6	5
5	3	5	6	7	8	9	5	2	5	4	5	6	6	3	6	5	3	4	5
10	3	7	5	3	3	3	7	5	3	4	9	2	1	4	4	4	2	4	3
4	4	5	5	3	7	5	3	2	6	2	4	4	4	0	6	1	3	4	4
5	4	8	3	5	4	11	9	9											

Вибірка *C*

X	27	30	29	28	30	32	30	30	29	30	27	32	30	29	31
Y	270	304	295	293	307	332	302	309	303	303	283	324	303	297	310
Z	–63	–76	–62	–69	–74	–82	–64	–72	–64	–66	–74	–67	–77	–80	–73

Продовження додатку 3

Варіант 21

Вибірка *A*

4	5	3	4	5	2	3	3	3	4	4	5	3	1	4	1	4	5	5	1
2	5	5	5	3	4	3	5	5	4	0	2	6	7	1	3	2	2	4	2
3	3	6	0	6	2	4	3	6	1	5	4	4	4	5	2	4	5	3	5
5	6	2	2	3	2	2	5	2	5	5	0	7	1	0	0	0	5	3	2
7	6	3	5	3															

Вибірка *C*

X	16	17	16	18	15	16	17	19	15	16	15	18	15	16	15
Y	110	121	96	112	98	111	120	128	99	98	95	127	96	106	108
Z	92	94	91	103	76	89	100	107	80	77	79	98	85	93	73

Варіант 22

Вибірка *A*

2	3	1	6	4	6	3	3	1	3	1	2	4	4	4	3	0	3	2	4
2	3	2	3	3	2	0	6	1	0	2	2	6	2	0	2	4	3	1	5
3	0	4	4	3	5	3	2	5	2	0	2	0	2	5	0	1	3	3	2
0	2	2	2	5															

Вибірка *C*

X	40	35	24	37	42	38	35	38	32	38	37	41	33	32	42
Y	169	147	115	160	168	153	159	162	146	154	167	182	139	128	178
Z	73	56	31	69	78	63	69	74	58	60	71	81	60	58	72

Варіант 23

Вибірка *A*

1	4	3	3	1	0	4	0	4	3	2	0	2	2	3	3	1	0	3	3
3	2	3	3	3	2	5	6	3	2	5	2	3	4	2	3	2	2	6	2
0	1	2	3	6	2	1	4	3	3	1	5	4	3	2	1	1	1	6	3
2	0	2	2	2	3														

Вибірка *C*

X	58	62	65	61	66	67	67	65	62	68	64	55	68	64	63
Y	122	138	137	133	132	143	137	131	142	138	143	114	136	130	143
Z	339	353	377	349	394	385	395	389	353	405	365	310	395	368	361

Варіант 24

Вибірка *A*

7	11	5	5	5	5	9	4	5	3	8	5	3	8	3	11	3	9	6	8
3	3	6	2	7	4	4	3	5	7	4	6	5	2	9	5	8	6	1	1
7	7	4	4	9	7	4	3	1	6	6	4	5	4	5	5	7	8	6	8
4	10	2	7	7	5	9	6	11	2	7	7	9	2	6	8				

Вибірка *C*

X	72	77	75	70	72	72	70	76	80	65	70	70	70	80	65
Y	721	788	755	719	434	725	717	779	800	662	710	718	702	804	655
Z	487	528	524	482	486	493	470	529	553	443	475	476	479	541	439

Продовження додатку 3

Варіант 25

Вибірка *A*

2	0	2	6	2	3	5	3	8	3	6	4	5	2	6	6	5	5	8	8
3	5	3	2	4	5	2	1	6	9	7	6	7	4	5	6	5	6	8	3
6	5	5	1	7	6	4	1	5	6	4	7	2	8	8	2	8	2	1	6
5	2	3	6	3	3	5	3	3	7	5	6	6	3	4	6	7	4	6	2
7	7	1	2	3	6	6	3	2	6	4	2	4	8						

Вибірка *C*

X	35	34	42	27	41	40	32	40	36	32	40	33	36	32	37
Y	181	187	218	145	206	204	172	219	197	173	211	177	187	179	185
Z	52	61	73	49	74	79	45	69	53	45	73	49	61	49	69

Варіант 26

Вибірка *A*

2	0	0	3	1	2	2	2	3	4	1	2	3	3	2	1	1	3	3	0
4	1	3	3	0	1	0	0	1	2	1	1	3	2	3	0	1	0	4	2
3	1	2	1	1	1	1	2	1	2	5	2	1	3	2	3	1	1	1	1
2	1	1	1	3	1	3	1	2	1	2	1	1	0	0	3	3	1	2	3

Вибірка *C*

X	90	92	90	90	86	90	89	89	88	90	90	90	88	89	90
Y	546	568	555	544	519	550	550	537	528	553	551	553	535	547	542
Z	–4	–11	–6	–11	–3	–3	–16	–19	–16	–15	–1	–4	–13	–11	–2

Варіант 27

Вибірка *A*

1	0	1	3	1	1	4	0	0	1	1	1	0	1	2	0	2	1	0	1
1	0	1	0	2	2	1	1	0	0	0	1	2	1	1	1	2	3	0	1
0	2	2	0	2	2	0	1	0	0	0	0	3	2	2	3	1	2	0	1
2	1	1	0	1	2	0	2	2	1	0	0	2	0	0	0	3	1	2	2
2	0	2	0	2	10	3	1	1	3										

Вибірка *C*

X	93	88	91	83	89	86	85	88	85	87	82	91	86	86	87
Y	298	281	283	254	271	260	262	275	265	277	256	280	263	264	279
Z	–194	–178	–199	–178	–188	–183	–175	–182	–188	–188	–183	–187	–179	–191	–176

Варіант 28

Вибірка *A*

0	1	0	1	0	0	1	3	1	1	1	0	3	0	2	0	0	0	0	1
1	1	1	3	2	0	0	1	4	1	0	0	0	2	0	1	2	1	2	0
1	2	1	0	0	1	0	1	1	0	2	1	1	2	0	1	0	0	0	2
1	2	0	1	1	1	2	0	0	2	4	1	2	3	0	0	0	2	0	4

Вибірка *C*

X	39	36	35	20	31	41	24	22	38	35	26	34	16	35	22
Y	242	235	228	136	204	249	160	140	229	213	172	207	98	225	141
Z	–82	–89	–72	– 41	–78	–83	–62	– 49	–88	–74	–65	–88	–52	–74	–57

Закінчення додатку 3

Варіант 29

Вибірка *A*

4	1	9	6	11	11	6	5	10	4	10	10	12	10	9	6	6	8	4	10
2	5	6	8	6	7	2	2	6	12	2	8	8	11	9	6	7	4	5	9
7	9	5	9	10	5	8	6	10	8	8	6	9	10	8	6	1	3	10	4
8	6	10	9	10	3	6	11												

Вибірка *C*

X	14	16	16	15	15	13	17	14	13	15	14	14	16	11	13
Y	86	86	80	80	88	74	86	80	79	92	77	81	87	71	81
Z	–26	–28	–33	–23	–17	–20	–26	–21	–26	–26	–16	–24	–31	–24	–18

Варіант 30

Вибірка *A*

4	6	0	2	1	3	3	1	2	5	3	1	2	2	4	4	4	3	2	5
2	5	1	2	3	0	3	0	5	1	2	1	3	0	4	0	2	2	1	0
5	1	4	2	4	2	1	3	1	0	6	1	2	1	4	2	2	0	2	4
2	2	1	2	2															

Вибірка *C*

X	92	81	92	93	108	78	98	99	90	93	92	76	90	90	87
Y	189	169	201	196	229	169	201	210	191	193	195	169	193	190	177
Z	173	156	183	175	200	137	193	186	172	177	178	140	173	170	154

Д О Д А Т О К 4

Критичні точки розподілу Стьюдента

Число ступенів вільності k	Рівень значущості α (двостороння критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,002	0,0002	0,001
1	6,31	12,70	31,82	63,70	318,30	637,00
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,90
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3.37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Рівень значущості α (одностороння критична область)					

Д О Д А Т О К 5

Значення функції $\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

k	λ=1	λ=2	λ=3	λ=4	λ=5	λ=6	λ=7	λ=8	λ=9	λ=10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

k	λ=0,1	λ=0,2	λ=0,3	λ=0,4	λ=0,5	λ=0,6	λ=0,7	λ=0,8	λ=0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1637	0,222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3276	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003

Література

1. Бобик, О. І. Теорія ймовірностей і математична статистика [Текст] : Підручник / О. І. Бобик, Г. І. Берегова, Б. І. Копитко. – К.: Професіонал, 2007. – 560 с.
2. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей [Текст] / Е. С. Вентцель. – 7-е изд., стер. – М. : Высшая школа, 2001. – 575 с.
3. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] / В. Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М. : Высшая школа, 2003. – 404 с.
4. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / В. Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М. : Высшая школа, 2003. – 479 с.
5. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей [Текст] / Б. В. Гнеденко. – Изд. 10-е, доп. – М. : Наука, 2011. – 488 с.
6. Кармелюк, Г.І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв’язування задач [Текст] : навч. посібник / Г. І. Кармелюк. – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 576 с.
7. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебник для вузов / Н. Ш. Кремер. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 573 с.
8. Мацкевич, И. П. Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / И. П. Мацкевич, Г. П. Свирид. – Мн. : Вышейшая школа, 1993. – 269 с.

Зміст

Навчальне видання

КОНОВАЛЕНКО ОЛЬГА ЄВГЕНІВНА
ТКАЧУК МИКОЛА АНАТОЛІЙОВИЧ

Теорія ймовірностей та математична статистика

Навчально-методичний посібник
для студентів спеціальності
«Прикладна механіка»

Роботу до видання рекомендував Маслієв В.Г.
Редактор Н.В. Верстюк

План 2012 р., п. 118
Підп. до друку 18.09.2013 р. Формат 60×84 1/16. Папір друк. №2
Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк.
Наклад 30 прим. Зам №______ Ціна договірна

Видавничий центр НТУ «ХПІ»
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21