УДК 629.7.05

Ю.А. ПЛАКСІЙ, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»;
Ю.О. КУЗНЄЦОВ, канд. техн. наук, доц., НВП «Хартрон-Аркос», Харків

ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ОРІЄНТАЦІЇ В БІНС ЗА РАХУНОК СПЕЦІАЛЬНОЇ ОРГАНІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ

Розглядається практична задача підвищення точності визначення орієнтації в безплатформених інерціальних навігаційних системах. Запропонована нова схема обчислень кватерніона орієнтації алгоритмом низького порядку, коли обчислення ведуться паралельно на двох часових сітках з різними кроками. При цьому застосовується принцип Рунге і поняття фактичного порядку алгоритму визначення кватерніона повороту, основане на практичних оцінках. Введення поняття фактичного порядку алгоритму дозволяє відстежити існуючий зв'язок між величиною квазікоординат, що поступають на вхід алгоритму на кроці обчислень, і фактичною точністю визначення орієнтації. На еталонній моделі регулярної прецесії твердого тіла показано, що така організація обчислень забезпечує суттєве підвищення точності визначення орієнтації.

Ключові слова: кватерніон, орієнтація, еталонна модель, квазікоординати, дрейф.

Вступ і постановка задачі. Розглядається задача визначення орієнтації в безплатформених інерціальних навігаційних системах (БІНС), коли первинна інформація про обертання об'єкта поступає в автономний обчислювач на такті у вигляді *квазікоординат* [1]

$$\theta_{ni}^{*} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i dt \ \ (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

де ω_i – проекції вектора абсолютної кутової швидкості об'єкта $\vec{\omega}(t)$ на осі зв'язаної системи координат. В автономному обчислювачі на кожному такті $[t_n, t_{n+1}]$ формується кватерніон

$$\Lambda_n^* = \Lambda_{n-1}^* \circ \Delta\Lambda_n^*, \tag{2}$$

де $\Lambda_n^* = \Lambda^*(t_n)$, $\Lambda_{n-1}^* = \Lambda^*(t_{n-1})$ – кватерніони орієнтації в моменти часу t_n та t_{n-1} відповідно; $\Delta\Lambda_n^* = \Delta\Lambda(\theta_{ni}^*)$ – кватерніон повороту на такті $[t_{n-1}, t_n]$, виражений в термінах квазікоординат (1); $\circ$ – знак кватерніонного множення.

В умовах, коли існують певні обмеження на завантаження автономного обчислювача на такті, звичайно застосовують алгоритми визначення кватерніонів орієнтації низького порядку, що використовують тільки перші скінченні різниці вектора позірного повороту

$$\vec{\theta}(t) = \int_0^t \vec{\omega}(t) dt .$$

Такі алгоритми можуть функціонувати в умовах, коли величина кроку обчислень кватерніона орієнтації є нестабільною внаслідок специфіки фор-

© Ю. А. Плаксій, Ю. О. Кузнєцов, 2014

мування циклограми обчислень на такті, бо в цьому випадку вони не потребують спеціальної процедури формування скінченних різниць вектора позірного повороту. Підвищення точності визначення орієнтації, в умовах, коли застосовується базовий алгоритм низького порядку, є актуальною практичною задачею. В роботі [2] для цих цілей запропонована *реверсивна* схема обчислень. В роботі [3] розглянуті деякі реверсивні схеми визначення кватерніона орієнтації в БІНС для різних випадків первинної інформації про обертання твердого тіла. На основі еталонної моделі регулярної прецесії отримані оцінки точності реверсивних схем у вигляді похибки дрейфу і похибки норми. Показано, що реверсивна схема, застосована для алгоритму першого порядку, дає меншу похибку дрейфу, ніж базовий алгоритм першого порядку, але гіршу, ніж похибка дрейфу для алгоритму другого порядку. Також показано, що ефективне застосування реверсивної схеми обмежено алгоритмом першого порядку.

В даній роботі запропонована нова схема обчислень, суть якої в тому, що процес визначення орієнтації ведеться обраним алгоритмом низького порядку паралельно на двох часових сітках. Для отримання розрахункових формул застосовується *принцип Рунге* і поняття *фактичного порядку* алгоритму визначення кватерніона повороту.

Фактичний порядок алгоритму визначення кватерніона повороту. Кватерніон повороту на n-му такті обчислень $\Delta\Lambda_n^* = (\Delta\lambda_{n0}^*, \Delta\lambda_{n1}^*, \Delta\lambda_{n2}^*, \Delta\lambda_{n3}^*)$, який застосовується в алгоритмі визначення орієнтації (2), звичайно отриманий, як наближення N-го порядку частинного розв'язку кватерніонного кінематичного рівняння

$$\dot{\Lambda} = 2\Lambda \circ \omega \tag{3}$$

на інтервалі $[t_{n-1}, t_n]$ з початковою умовою $\Lambda(0) = (1, 0, 0, 0)^T$ [1], де $\omega = (0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Як зазначено в [4], в умовах чисельної реалізації в автономному обчислювачі формальний математичний порядок N алгоритму визначення кватерніона повороту $\Delta\Lambda_n^*$ не завжди реалізується, при цьому алгоритм N-го порядку забезпечує таку ж точність визначення орієнтації, як і алгоритм $(N-1)$-го порядку. Для дослідження фактичної точності алгоритмів визначення орієнтації в умовах практичної реалізації в автономному обчислювачі використаємо введене в [4] поняття *фактичного порядку* алгоритму визначення кватерніона повороту, зв'язавши точність алгоритму з величиною відповідних квазікоординат на такті. Для цього в [4] була запропонована *практична оцінка* точності алгоритму у вигляді

$$\left|\Delta\lambda_{nj}^* - \Delta\lambda_{nj}\right| = \alpha_{nj}\theta_n^{*N_{nj}}, \; j = \overline{0,3}, \tag{4}$$

де $\theta_n^* = \sqrt{\theta_{n1}^{*2} + \theta_{n2}^{*2} + \theta_{n3}^{*2}}$, $\Delta\lambda_{nj}$ – еталонне значення параметра. В правій частині (4) величина N_{nj} – це максимально можливий порядок θ_n^*, при якому на даному такті забезпечується виконання умови $\theta_n^* < \alpha_{nj} < 1$. У відповідності до прийнятої методики оцінювання фактичної точності алгоритму далі на кожному такті обчислюється мінімальний з максимально можливих порядків N_{nj}:

$$N_n = \min_j N_{nj} .$$

Зрештою фактичний (реалізований) порядок алгоритму визначається як:

$$N_f = \min_n N_n - 1 . \qquad (5)$$

Методична доцільність введення поняття фактичного порядку алгоритму полягає в тому, що воно дозволяє прослідити існуючий зв'язок між величиною квазікоординат на такті, що поступають на вхід алгоритму, з точністю визначення орієнтації цим алгоритмом.

Схема обчислень кватерніона орієнтації на двох регулярних часових сітках. Скористаємось принципом Рунге [5] для регулярних сіток з метою отримання грубих оцінок метода чисельного інтегрування кінематичного рівняння (3) в умовах первинної інформації (1), для цього проведемо обчислення кватерніона орієнтації паралельно на двох сітках часу. Позначимо: Λ_n^* – кватерніон, отриманий на основній сітці з постійним кроком Δt; Γ_{2n}^* – кватерніон, отриманий на допоміжній сітці з постійним кроком $2\Delta t$ при початкових умовах $\Lambda_0^* = \Gamma_0^*$. Вважаємо, що фактичний порядок N_f обраного метода чисельного інтегрування попередньо знайдений на основі практичних оцінок за допомогою еталонної моделі. Припустимо, що в умовах малих поворотів на кожному кроці обчислень похибка метода є постійною і дорівнює

$$A\theta_n^{*(N_f+1)},$$

а самі похибки є адитивними. Тоді для обчислень з кроком Δt в цих умовах маємо:

$$\Lambda_{2n} = \Lambda_{2n}^* + 2nA\theta_n^{*(N_f+1)},\ n = 1, 2, \ldots , \qquad (6)$$

де Λ_{2n} – точний розв'язок кінематичного рівняння. Для обчислень з кроком $2\Delta t$ по допоміжній сітці отримаємо, що

$$\Lambda_{2n} = \Gamma_{2n}^* + nA(2\theta_n^*)^{(N_f+1)},\ n = 1, 2, \ldots . \qquad (7)$$

Прирівнюючи праві частини (6) і (7), отримаємо оцінку похибки чисельного метода на кроці обчислень Δt у вигляді:

$$A\theta_n^{*(N_f+1)} = (\Lambda_{2n}^* - \Gamma_{2n}^*)/(2^{N_f+1}n - 2n) . \qquad (8)$$

Враховуючи оцінку (8), на парних тактах обчислень по основній сітці знайдемо корегуючий кватерніон K_{2n}^* у вигляді:

$$K_{2n}^* = (\Lambda_{2n}^* - \Gamma_{2n}^*)/(2^{N_f} - 1) . \qquad (9)$$

В результаті на кожному парному такті обчислень на основній сітці можна провести корегування кватерніона орієнтації Λ_n^* за формулою:

$$\Lambda_{2n}^{**} = \Lambda_{2n}^* + K_{2n}^* , \qquad (10)$$

де Λ_{2n}^{**} – скорегований кватерніон.

Після отримання скорегованого кватерніона орієнтації Λ_{2n}^{**} для проведення подальших обчислень на основній та допоміжній сітках треба покласти

$$\Lambda_{2n}^{*} = \Lambda_{2n}^{**};\ \Gamma_{2n}^{*} = \Lambda_{2n}^{**},\ n = 1, 2, \ldots . \tag{11}$$

Чисельний експеримент. В якості еталонної моделі обертання твердого тіла розглянемо *модель регулярної прецесії* [6], що включає в себе аналітичні вирази для квазікоординат:

$$\theta_{ni}^{*} = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1}),\ i = 1, 2, 3, \tag{12}$$

де $\theta_1(t) = 2a\sin\alpha_1\cos(\alpha_1 + \psi)/k$, $\theta_2(t) = -2a\sin\alpha_1\sin(\alpha_1 + \psi)/k$, $\theta_3(t) = \omega_{30}t$ – компоненти вектора позірного повороту $\vec{\theta}(t)$, яким відповідає точний кватерніон орієнтації $\Lambda(t_n)$ з компонентами:

$$\lambda_0(t_n) = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - r\sin\alpha_1\sin\alpha_2;\ \lambda_1(t_n) = a\sin\alpha_2\cos(\alpha_1 + \psi)/\nu;$$

$$\lambda_2(t_n) = -a\sin\alpha_2\sin(\alpha_1 + \psi)/\nu;\ \lambda_3(t_n) = \sin\alpha_1\cos\alpha_2 + r\cos\alpha_1\sin\alpha_2, \tag{13}$$

де позначено $a = (\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2)^{1/2}$, $k = (1 - \xi_2)\omega_{30}$, $\xi_2 = I_3/I_1$, $\cos\psi = \omega_{10}/a$, $\sin\psi = -\omega_{20}/a$, $\nu = (a^2 + \xi_2^2\omega_{30}^2)^{1/2}$, $r = \xi_2\omega_{30}/\nu$, $\alpha_1 = 0{,}5kt_n$, $\alpha_2 = 0{,}5\nu t_n$, $\omega_{i0} = \omega_i(0)$, I_1, I_3 – моменти інерції твердого тіла $(I_1 = I_2)$.

В якості похибки алгоритмів будемо розглядати похибку дрейфу [1], яка, на відміну від похибки норми кватерніона орієнтації Λ_n^{*}, є неусувною.

На рис. 1, *а, б* представлені графіки залежностей від часу похибки дрейфу для алгоритму першого порядку з кватерніоном повороту [1]

$$\Delta\lambda_{n0}^{*} = 1;\ \Delta\lambda_{ni}^{*} = 0{,}5\theta_{ni}^{*},\ i = 1, 2, 3 \tag{14}$$

і похибки дрейфу для двосіткової схеми обчислень, застосованої для базового алгоритму першого порядку (14). Результати отримані на еталонній моделі регулярної прецесії (12), (13) для співвідношення моментів інерції $\xi_2 = 12/35$ і

$$\vec{\omega}(0) = (0{,}032; 0{,}021; \text{-}0{,}045)\ \text{рад/с} \tag{15}$$

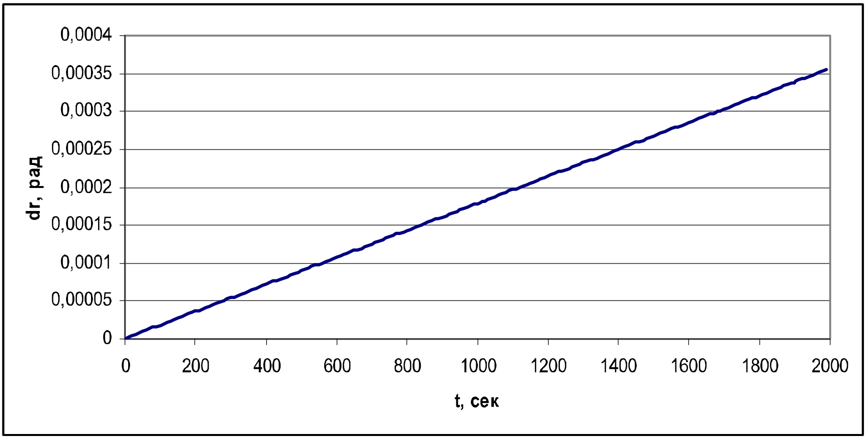
на проміжку часу $[0; 2000]$ с з кроком обчислень по основній сітці $\Delta t = 0{,}1$ с. Видно, що алгоритм обчислення кватерніона орієнтації із застосуванням двох часових сіток забезпечує суттєве покращення оцінки похибки дрейфу визначення орієнтації в порівнянні до базового алгоритму.

Досліджено при цьому, що фактичний порядок базового алгоритму визначення кватерніона повороту (14) на регулярній прецесії при початкових умовах (15) на одиницю перевищує його формальний математичний порядок, тобто в цьому випадку $N_f = 2$ і формула (9) для корегуючого кватерніона приймає вигляд

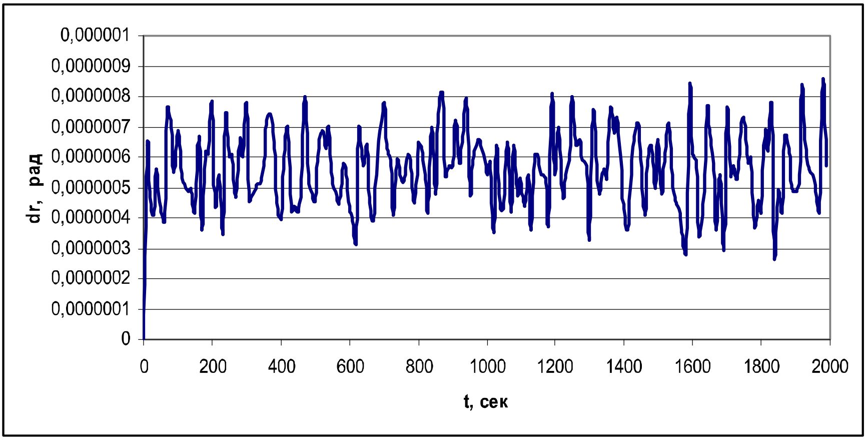
$$K_{2n}^{*} = (\Lambda_{2n}^{*} - \Gamma_{2n}^{*})/3 . \tag{16}$$

На рис. 2, *а, б* представлені оцінки похибки дрейфу для алгоритму визначення орієнтації першого порядку і відповідного алгоритму обчислення кватерніона орієнтації із застосуванням двосіткової схеми, які отримані на моделі (12), (13) при $\xi_2 = 12/35$ і початкових умовах

$$\vec{\omega}(0) = (-\,0{,}12; 0{,}21;\ -0{,}35)\ \text{рад/с}. \tag{17}$$



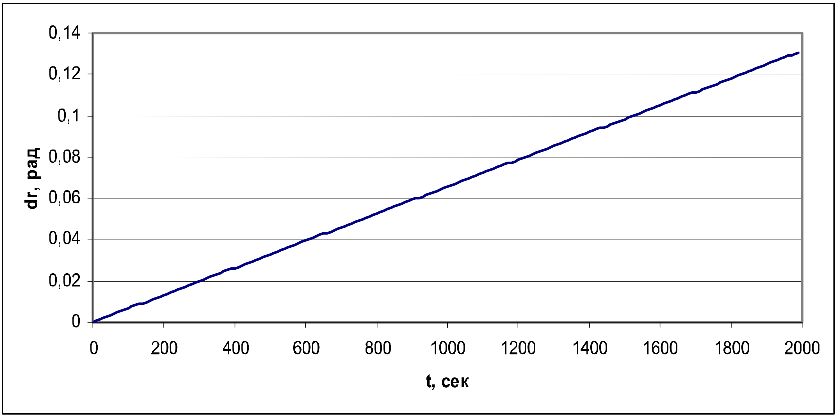
а



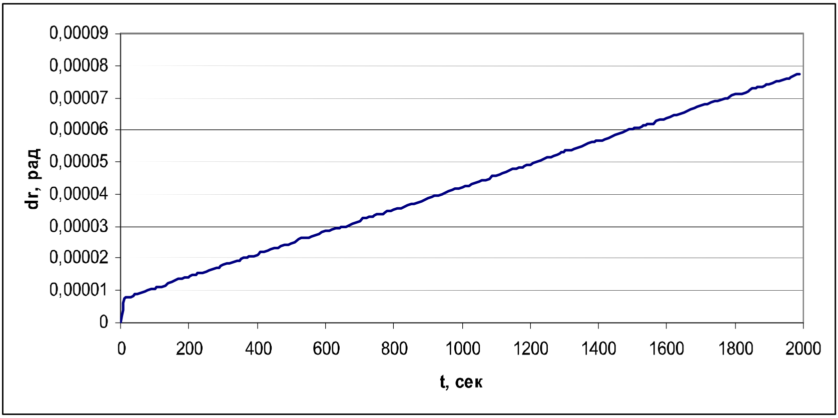
б

Рис. 1 – Оцінка похибки дрейфу, отримана на еталонній моделі регулярної прецесії при початкових умовах (15): *а* – для алгоритму першого порядку; *б* – для обчислень по двосітковій схемі

Чисельне моделювання проведено на проміжку часу $[0; 2000]$ с для обчислень по основній сітці з кроком $\Delta t = 0{,}1$ с. Як і у попередньому випадку, фактичний порядок алгоритму визначення кватерніона повороту для такого обертання становить $N_f = 2$, і теж має місце суттєве покращення оцінки похибки дрейфу у випадку застосування запропонованої двосіткової схеми обчислень.



а



б

Рис. 2 – Оцінка похибки дрейфу, отримана на еталонній моделі регулярної прецесії при початкових умовах (17): *а* – для алгоритму першого порядку; *б* – для обчислень по двосітковій схемі

Висновки. Запропонований новий метод визначення орієнтації в БІНС, заснований на паралельних обчисленнях відповідних кватерніонів орієнтації алгоритмом першого порядку з різними кроками на двох часових сітках. Метод використовує принцип Рунге і введене поняття фактичного порядку алгоритму визначення кватерніона повороту. На еталонній моделі регулярної прецесії для різних початкових умов показано, що така двосіткова схема обчислень забезпечує суттєве підвищення точності визначення орієнтації за оцінками похибки дрейфу.

Список літератури: **1.** *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М.: Наука, – 1992. – 280 с. **2.** *Ткаченко А. И.* Повышение точности вычисления кинематических параметров // Кибернет. и вычисл. техн. – К., – 1973. – Вып. 19.– С. 117 – 121. **3.** *Плаксій Ю.А.* Підвищення точності реверсивних схем алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації // Вісник НТУ «ХПІ», – №37. –2013. – С. 130 – 140. **4.** *Плаксий Ю.А.* О фактическом порядке и областях эффективного применения алгоритмов определения ориентации в БИНС // Вестник Харьк. гос. политехн. унив. – 1999. – Вып. 57. – С. 87 – 90. **5.** *Демидович В.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.* Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. – М.: Наука, – 1967. – 368 с. **6.** *Плаксий Ю.А.* Аналитические оценки точности алгоритмов определения ориентации в кватернионах для случая регулярной прецессии объекта // Вестник Харьк. политехн. ин-та, – № 2. – Вып. 11. – 1992. – С. 79 – 83.

Bibliography (transliterated): 1. Branec, V. N., and I. P. Shmyglevskij. *Vvedenie v teoriju besplatformennyh inercial'nyh navigacionnyh sistem.* Moscow: Nauka, 1992. Print. **2.** Tkachenko, A. I. "Povyshenie tochnosti vychislenija kinematicheskih parametrov." *Kibernet. i vychisl. tehn.* Vol. 19. Kyiv, 1973. 117–121. Print. **3.** Plaksij, Ju. A. "Pidvishhennja tochnosti reversivnyh shem algoritmiv viznachennja kvaternioniv orijentacii'." *Visnyk NTU «KhPI».* No. 37. Kharkiv: NTU «KhPI», 2013. 130–140. Print. **4.** Plaksij, Ju. A. "O fakticheskom porjadke i oblastjah jeffektivnogo primenenija algoritmov opredelenija orientacii v BINS." *Vestnik Har'k. gos. politehn. univ.* Vol. 57. 1999. 87–90. Print. **5.** Demidovich, V. P., I. A. Maron and Je. Z. Shuvalova. *Chislennye metody analiza. Priblizhenie funkcij, differencial'nye i integral'nye uravnenija.* Moscow: Nauka, 1967. Print. **6.** Plaksij, Yu. A. "Analiticheskie ocenki tochnosti algoritmov opredelenija orientacii' v kvaternionah dlja sluchaja reguljarnoj precessii' ob"ekta." *Vestnik Har'k. politehn. in-ta.* No. 2. Vol. 11. 1992. 79–83. Print.

Надійшла (received) 01.08.2014

УДК 517.95:519.63:532.5

І.М. ПРИСЯЖНЮК, канд. техн. наук, доц., РДГУ, Рівне;
Ю.Є. КЛИМЮК, канд. техн. наук, доц., РДГУ, Рівне;
О.В. ПРИСЯЖНЮК, аспірант, РДГУ, Рівне

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНО-ДИФУЗІЙНОГО МАСОПЕРЕНОСУ В ДВОПОРИСТИХ БАГАТОШАРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Сформовано математичну модель процесу однокомпонентного конвективно-адсорбційно-дифузійного масопереносу в нанопористому багатошаровому середовищі за умов превалювання конвективної складової процесу над іншими складовими. Побудовано алгоритм асимптотичного розвинення розв'язків відповідної модельної просторової нелінійної сингулярно збуреної крайової задачі у багатошаровому кусково-однорідному водонасиченому двопористому середовищі – криволінійному паралелепіпеді, що розділяється на підобласті еквіпотенціальними поверхнями. Наведено результати комп'ютерних розрахунків, що дозволяють оцінити вплив фізико-хімічних характеристик процесу на розподіл забруднень в області.

Ключові слова: конвективно-дифузійне масоперенесення, нанопористі мікрочастинки, багатошарове середовище.

Вступ. Суттєво покращити показники очищення технологічних потоків дозволяє застосування багатошарових середовищ, кожен шар яких складається з різних за розміром та фізико-хімічними характеристиками мікрочас-

© І. М. Присяжнюк, Ю. Є. Климюк, О. В. Присяжнюк, 2014