

В.М. ГУСЯТИН, канд. техн. наук, ХНУРЭ,
В.Н. СИДОРОВ, ХНУРЭ

ОПИСАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ М-КОМПОНЕНТНЫХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В СИСТЕМАХ ВИЗУАЛИЗАЦИИ

Пропонується модель опису багатокomпонентних газодинамічних об'єктів, що дозволяє визначати параметри об'єкта в будь-який момент часу в будь-якій області простору. Результати можуть бути використані при розробці систем візуалізації реального часу для авіаційних і космічних тренажерів.

The model of the description of the multicomponent gas dynamic objects, allowing to determine parameters of object at any moment in any area of space is offered. Results can be used at system engineering visualization real time for aviation and space simulators.

Постановка проблеми. При формировании изображения в системах синтеза визуальной обстановки значительное внимание уделяется отображению различных газодинамических как природных, так и искусственных явлений (например, марево нагретого воздуха, газовая струя реактивного двигателя и др.), большинство из которых представляют собой многокомпонентную среду. Адекватное отображение этих явлений в системах визуализации значительно повышает реалистичность получаемого изображения и помогает приблизить режим обучения пилота на тренажере к большей реальности.

Анализ литературы. В настоящее время визуализация таких явлений как дым, пар сводится к визуальной их имитации [1 – 3], что в значительной мере затрудняет как описание самих объектов, так и расчет их взаимодействия с окружающей средой. В статье рассматривается метод описания газодинамического объекта, базирующийся на моделировании физических процессов, которые протекают в нем. В соответствии с методом возможно определение параметров газодинамического поля в любой момент времени в любой области пространства. Метод является многокомпонентной интерпретацией «метода крупных частиц», который изложен в [4 – 6].

Цель статьи – разработка метода описания многокомпонентных газодинамических объектов с целью последующей их визуализации.

Метод крупных частиц применительно к m -компонентному газодинамическому объекту. Основная идея «метода крупных частиц» состоит в расщеплении по физическим процессам исходной нестационарной системы уравнений Эйлера, записанной в форме законов сохранения [4 – 6].

Среда здесь моделируется системой из жидких крупных частиц. Расчет каждого временного шага (вычислительного цикла) в свою очередь разбивается на три этапа:

1. Эйлеров этап, когда пренебрегаем всеми эффектами, связанными с перемещением содержимого i, j -ой ячейки расчетной сетки (потока массы через границы ячейки нет). Учитываем эффекты ускорения жидкости лишь за счет давления; здесь для крупной частицы определяются промежуточные значения искомых параметров потока $\overline{\varphi}(\overline{u}, \overline{v}, \overline{E})$ (рассмотрен двумерный случай, \overline{u} и \overline{v} – скорости по соответствующим осям, \overline{E} – энергия ячейки).

2. Лагранжев этап, где при движении жидкости вычисляются потоки массы через границы эйлеровых ячеек.

3. Заключительный этап – определяются в новый момент времени окончательные значения газодинамических параметров потока $\varphi(u, v, E, \rho)$ (ρ – плотность вещества в ячейке) на основе законов сохранения массы, импульса и энергии для каждой ячейки и всей системы в целом на фиксированной расчетной сетке.

Для описания многокомпонентной среды первый этап «метода крупных частиц» разбивается на три пункта:

- 1) вычисление общего давления смеси газов в ячейках координатной сетки;
- 2) вычисление промежуточных значений скорости;
- 3) вычисление промежуточных значений энергии ячеек координатной сетки.

Исходя из этого, для первого этапа имеем следующие соотношения. Давление вычисляется как сумма парциальных давлений [7] всех компонентов смеси. Таким образом, для двухкомпонентной среды получаем:

$$p = p_1 + p_2, \quad (1)$$

где p – общее давление смеси газов; p_1, p_2 – парциальные давления первой и второй составляющих газодинамического объекта.

Для m -компонентной среды имеем:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_k + \dots + p_m, \quad (2)$$

где p_1, p_2, p_k, p_m – парциальные давления составляющих газодинамического объекта; m – количество компонентов в многокомпонентной среде.

Используя уравнение Менделеева-Клапейрона, для двухкомпонентной среды получаем:

$$p = \left(\frac{m_1}{M_1} \cdot T_1 + \frac{m_2}{M_2} \cdot T_2 \right) \cdot \frac{R}{V}, \quad (3)$$

где p – общее давление смеси газов; m_1, m_2 – соответствующие массы первой и второй компонент газодинамического объекта, находящиеся в одной

ячейке координатной сетки в «методе крупных частиц»; M_1, M_2 – соответствующие молярные массы компонент; T_1, T_2 – соответствующие температуры первой и второй компонент; R – газовая постоянная; V – объем ячейки координатной сетки.

Для m -компонентной среды имеем:

$$p = \left(\frac{m_1}{M_1} T_1 + \frac{m_2}{M_2} T_2 + \dots + \frac{m_k}{M_k} T_k + \dots + \frac{m_m}{M_m} T_m \right) \frac{R}{V}, \quad (4)$$

где p – общее давление смеси газов; m_1, m_2, m_k, m_m – соответствующие массы компонент газодинамического объекта, находящиеся в одной ячейке координатной сетки в «методе крупных частиц»; M_1, M_2, M_k, M_m – соответствующие молярные массы компонент; T_1, T_2, T_k, T_m – соответствующие температуры компонент; R – газовая постоянная; V – объем ячейки координатной сетки.

Для второго этапа вычисление промежуточных скоростей и энергии выполняется для каждого компонента многокомпонентной среды. При этом учитывается, что суммарное давление воздействует на весь объем ячейки координатной сетки. Для простоты изложения формул рассмотрим двухкомпонентную среду и плоский случай. Вычисления для m -компонентной среды аналогичны приведенным за исключением того, что выполняются для m компонент.

$$\begin{aligned} (\bar{u}_{i,j}^n)_1 &= (u_{i,j}^n)_1 - \frac{P_{i+1/2,j}^n - P_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} \frac{\Delta t}{(\rho_{i,j}^n)_1 + (\rho_{i,j}^n)_2}; \\ (\bar{v}_{i,j}^n)_1 &= (v_{i,j}^n)_1 - \frac{P_{i,j+1/2}^n - P_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} \frac{\Delta t}{(\rho_{i,j}^n)_1 + (\rho_{i,j}^n)_2}; \\ (\bar{E}_{i,j}^n)_1 &= (E_{i,j}^n)_1 - \left[\frac{(P_{i+1/2,j}^n)_1 (u_{i+1/2,j}^n)_1 - (P_{i-1/2,j}^n)_1 (u_{i-1/2,j}^n)_1}{\Delta x} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(P_{i,j+1/2}^n)_1 (v_{i,j+1/2}^n)_1 - (P_{i,j-1/2}^n)_1 (v_{i,j-1/2}^n)_1}{\Delta y} \right] \frac{\Delta t}{(\rho_{i,j}^n)_1}; \\ (\bar{u}_{i,j}^n)_2 &= (u_{i,j}^n)_2 - \frac{P_{i+1/2,j}^n - P_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} \frac{\Delta t}{(\rho_{i,j}^n)_1 + (\rho_{i,j}^n)_2}; \\ (\bar{v}_{i,j}^n)_2 &= (v_{i,j}^n)_2 - \frac{P_{i,j+1/2}^n - P_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} \frac{\Delta t}{(\rho_{i,j}^n)_1 + (\rho_{i,j}^n)_2}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
(\bar{E}_{i,j}^n)_2 = (E_{i,j}^n)_2 - & \left[\frac{(P_{i+1/2,j}^n)_2 (u_{i+1/2,j}^n)_2 - (P_{i-1/2,j}^n)_2 (u_{i-1/2,j}^n)_2}{\Delta x} + \right. \\
& \left. + \frac{(P_{i,j+1/2}^n)_2 (v_{i,j+1/2}^n)_2 - (P_{i,j-1/2}^n)_2 (v_{i,j-1/2}^n)_2}{\Delta y} \right] \frac{\Delta t}{(\rho_{i,j}^n)_2},
\end{aligned} \tag{5}$$

где $(u_{i,j}^n)_1, (v_{i,j}^n)_1$ – скорости первой компоненты на начало n -й итерации относительно соответствующих осей координат; $(\bar{u}_{i,j}^n)_1, (\bar{v}_{i,j}^n)_1$ – промежуточные значения скоростей первой компоненты газодинамического объекта по соответствующим осям координат; $P_{i+1/2,j}^n, P_{i-1/2,j}^n, P_{i,j+1/2}^n, P_{i,j-1/2}^n$ – давление двухкомпонентной среды на границах ячейки; $(\rho_{i,j}^n)_1$ – плотность первой компоненты в соответствующей ячейке координатной сетки; $(E_{i,j}^n)_1$ – значение энергии первой компоненты на момент начала n -й итерации; $(\bar{E}_{i,j}^n)_1$ – промежуточное значение энергии первой компоненты; $\Delta x, \Delta y$ – линейные размеры ячейки координатной сетки; Δt – квант времени итерации; i, j – индексы ячейки координатной сетки для которой производятся вычисления.

Для второй компоненты формат величин аналогичен.

Расчет второго и третьего этапов «метода крупных частиц» производится аналогично конечным разностям однокомпонентного случая [6] за исключением того, что вычисления должны проводиться применительно к каждой из компонент многокомпонентной среды.

Как и при описании первого этапа ограничимся двухкомпонентной средой и плоским случаем.

Тогда второй этап метода крупных частиц имеет вид:

$$\begin{aligned}
(\Delta M_{i+1/2,j}^n)_1 = & \begin{cases} (\rho_{i,j}^n)_1 \frac{(\bar{u}_{i,j}^n)_1 + (\bar{u}_{i+1,j}^n)_1}{2} \Delta y \Delta t, & \text{если } (\bar{u}_{i,j}^n)_1 + (\bar{u}_{i+1,j}^n)_1 > 0, \\ (\rho_{i+1,j}^n)_1 \frac{(\bar{u}_{i,j}^n)_1 + (\bar{u}_{i+1,j}^n)_1}{2} \Delta y \Delta t, & \text{если } (\bar{u}_{i,j}^n)_1 + (\bar{u}_{i+1,j}^n)_1 < 0, \end{cases} \\
(\Delta M_{i,j+1/2}^n)_1 = & \begin{cases} (\rho_{i,j}^n)_1 \frac{(\bar{v}_{i,j}^n)_1 + (\bar{v}_{i,j+1}^n)_1}{2} \Delta y \Delta t, & \text{если } (\bar{v}_{i,j}^n)_1 + (\bar{v}_{i,j+1}^n)_1 > 0, \\ (\rho_{i,j+1}^n)_1 \frac{(\bar{v}_{i,j}^n)_1 + (\bar{v}_{i,j+1}^n)_1}{2} \Delta y \Delta t, & \text{если } (\bar{v}_{i,j}^n)_1 + (\bar{v}_{i,j+1}^n)_1 < 0, \end{cases}
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta M_{i+1/2,j}^n)_2 &= \begin{cases} (\rho_{i,j}^n)_2 \frac{(\bar{u}_{i,j}^n)_2 + (\bar{u}_{i+1,j}^n)_2}{2} \Delta y \Delta t, & \text{если } (\bar{u}_{i,j}^n)_2 + (\bar{u}_{i+1,j}^n)_2 > 0, \\ (\rho_{i+1,j}^n)_2 \frac{(\bar{u}_{i,j}^n)_2 + (\bar{u}_{i+1,j}^n)_2}{2} \Delta y \Delta t, & \text{если } (\bar{u}_{i,j}^n)_2 + (\bar{u}_{i+1,j}^n)_2 < 0, \end{cases} \\
(\Delta M_{i,j+1/2}^n)_2 &= \begin{cases} (\rho_{i,j}^n)_2 \frac{(\bar{v}_{i,j}^n)_2 + (\bar{v}_{i,j+1}^n)_2}{2} \Delta y \Delta t, & \text{если } (\bar{v}_{i,j}^n)_2 + (\bar{v}_{i,j+1}^n)_2 > 0, \\ (\rho_{i,j+1}^n)_2 \frac{(\bar{v}_{i,j}^n)_2 + (\bar{v}_{i,j+1}^n)_2}{2} \Delta y \Delta t, & \text{если } (\bar{v}_{i,j}^n)_2 + (\bar{v}_{i,j+1}^n)_2 < 0, \end{cases}
\end{aligned} \tag{6}$$

где $(\Delta M_{i+1/2,j}^n)_1$, $(\Delta M_{i,j+1/2}^n)_1$, $(\Delta M_{i+1/2,j}^n)_2$, $(\Delta M_{i,j+1/2}^n)_2$ – потоки масс первой и второй газовой компоненты через границы ячейки.

Третий этап «метода крупных частиц». Уравнения этого этапа представляют собой законы сохранения массы M , импульса P и полной энергии E , записанные для данной ячейки в разностной форме:

$$\begin{aligned}
(M^{n+1})_1 &= (M^n)_1 + \sum (\Delta M_{\text{гр}}^n)_1; \\
(P^{n+1})_1 &= (P^n)_1 + \sum (\Delta P_{\text{гр}}^n)_1; \\
(E^{n+1})_1 &= (E^n)_1 + \sum (\Delta E_{\text{гр}}^n)_1; \\
(M^{n+1})_2 &= (M^n)_2 + \sum (\Delta M_{\text{гр}}^n)_2; \\
(P^{n+1})_2 &= (P^n)_2 + \sum (\Delta P_{\text{гр}}^n)_2; \\
(E^{n+1})_2 &= (E^n)_2 + \sum (\Delta E_{\text{гр}}^n)_2.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $(\Delta M_{\text{гр}}^n)_1$ – масса первой компоненты газодинамического объекта, которая пересекла за время Δt одну из границ рассматриваемой ячейки; суммирование производится по всем сторонам ячейки. Аналогичным образом понимаются $\sum (\Delta P_{\text{гр}}^n)_1$ и $\sum (\Delta E_{\text{гр}}^n)_1$.

Для второй компоненты расчет величин аналогичен.

Таким образом, по завершению расчетов третьего этапа мы получаем распределение параметров газодинамического поля на момент времени $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, то есть на конец итерации. Полученные на третьем этапе значения являются исходными для вычислений параметров поля на следующей итерации «метода крупных частиц».

Сходимость предложенного метода и корректность построения конечных разностей проверена моделированием двухкомпонентной среды с помощью разработанного авторами прикладного программного обеспечения. Результаты моделирования совпадают с теоретическим описанием физических процессов.

Моделирование проводилось на декартовой координатной сетке размерностью $160 \times 160 \times 220$. Линейные размеры ячеек координатной сетки составляли 0,1 м. В соответствии с критерием устойчивости метода [6] квант времени взят 0,0001 с. При проведении моделирования в течение 60000 итераций неустойчивости метода не выявлено, что говорит о том, что при выбранном соотношении линейных размеров и кванта времени метод не расходится. Следовательно, можно использовать один критерий устойчивости метода как для однокомпонентной, так и для многокомпонентной сред в областях дозвуковых течений.

Выводы. Предложен метод описания многокомпонентных газодинамических сред с целью использования результатов в системах визуализации. Создано прикладное программное обеспечение, подтверждающее правильность перехода к конечным разностям. Определены критерии устойчивости «метода крупных частиц» для многокомпонентных сред. Дальнейшим развитием предложенной работы является построение моделей физико-химических газодинамических объектов, подобных, например, горению веществ.

Список литературы: 1. *Foley J.D., van Dam A., Feiner S.K., Hughes J.F.* Computer Graphics (principles and practice) by Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1996. – 1175 p. 2. *Иванов В.П., Батраков А.С.* Трехмерная компьютерная графика. – М.: Радио и связь, 1995. – 224 с. 3. *Мартинес Ф.* Синтез изображений. – М.: Радио и связь, 1990. – 192 с. 4. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 401 с. 5. *Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. – М.: Наука. 1982. – 500 с. 6. *Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.* Метод «крупных частиц» для задач газовой динамики. Инф. бюл. СО АН СССР "Численные методы механики сплошной среды", 1970. – Т. 1. – С. 27. 7. *Матвеев А.Н.* Молекулярная физика: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высшая школа. 1981. – 400 с.

Поступила в редакцию 15.04.2006