

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

СЕРІЯ «ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
ДО ПРОВЕДЕННЯ  
практичних занять з вищої математики за темою  
«ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ»**

для студентів усіх спеціальностей  
факультетів МТ, МБ, ЕМБ, Е, АП, ТОР та ТНР, КІТ.

Харків 2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

СЕРІЯ «ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
ДО ПРОВЕДЕННЯ  
практичних занять з вищої математики за темою  
«ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ»**

для студентів усіх спеціальностей  
факультетів МТ, МБ, ЕМБ, Е, АП, ТОР та ТНР, КІТ.

Затверджено  
редакційною-видавничою  
радою університету,  
протокол № 1 від 04.06.14

Харків  
НТУ «ХП»  
2014

Методичні вказівки до проведення практичних занять за темою «Визначений інтеграл та його застосування» для студентів усіх спеціальностей факультетів МТ, МБ, ЕМБ, Е, АП, ТОР та ТНР, КІТ / уклад. І.І. Цехмістро. – Х. : НТУ «ХП», 2014. – 28 с.

Укладач І. І. Цехмістро

Рецензент О. Л. Григор'єв, д-р техн. наук, проф. НТУ «ХП»

Кафедра вищої математики

## Вступ

У методичних вказівках наведено задачі за темою «Визначений інтеграл та його застосування» для п'яти практичних занять, передбачених діючою робочою навчальною програмою з вищої математики для студентів усіх спеціальностей факультетів МТ, МБ, ЕМБ, Е, АП, ТОР та ТНР, КІТ.

Кожне практичне заняття складається з чотирьох частин. У першій частині сформульовані теоретичні питання, відповіді на які є необхідним мінімумом для успішного засвоєння матеріалу. У другій частині наведено завдання, що рекомендовані для розв'язання на практичних заняттях. У третій частині зібрані завдання для самостійної роботи студента. Четверта частина має посилання на літературу, з вказівками на завдання, які студент може також розв'язати для закріплення знань. Також у методичних вказівках наведено варіанти модульної контрольної роботи.

## Практичне заняття 1

### ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ЗА ДОПОМОГОЮ ФОРМУЛИ НЬЮТОНА – ЛЕЙБНІЦЯ. МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЗАМІНОЮ ЗМІННОЇ ІНТЕГРУВАННЯ. МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

#### Контрольні питання

1. Означення інтегральної суми функції  $f(x)$  на відрізку  $[a,b]$ .
2. Означення визначеного інтеграла.
3. Властивості визначеного інтеграла:
  - 3.1. Властивість збереження знаку підінтегральної функції визначеним інтегралом.
  - 3.2. Властивість лінійності визначеного інтеграла відносно підінтегральної функції.
  - 3.3. Властивість адитивності визначеного інтеграла щодо проміжку інтегрування.
  - 3.4. Теорема про оцінку визначеного інтеграла.
  - 3.5. Теорема про середнє значення.
  - 3.6. Теорема про інтегрування нерівностей.
4. Визначений інтеграл як функція верхньої змінної межі інтегрування. Теорема про її похідну.
5. Формула Ньютона – Лейбніця.
6. Формула заміни змінної у визначеному інтегралі.
7. Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

#### Задачі

##### 1.1 Обчислити інтеграли:

$$1. \int_1^2 \left( 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx. \quad 2. \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} dx. \quad 3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx. \quad 4. \int_0^1 \frac{x^2 + \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx.$$

**Відповіді:** 1.  $8 - \sqrt{2}$ . 2. 0. 3.  $\ln \frac{3}{2}$ . 4.  $1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{32}$ .

**1.2.** Обчислити інтеграли, застосовуючи відповідну заміну змінної:

1.  $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ . 2.  $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$ . 3.  $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$ . 4.  $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx$ .

**Відповіді:** 1.  $\frac{\pi}{2}$ . 2.  $\frac{\pi}{6}$ . 3.  $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ . 4.  $\frac{\sqrt{3}}{72}$ .

**1.3.** Обчислити інтеграли за формулою інтегрування частинами:

1.  $\int_0^2 x \cdot e^{x+1} dx$ . 2.  $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx$ . 3.  $\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$ . 4.  $\int_0^1 (3x^2 - 1) \operatorname{arctg} x dx$ .

**Відповіді:** 1.  $e^3 + e$ . 2.  $-\frac{\pi}{2}$ . 3.  $\frac{\pi}{2}$ . 4.  $\ln 2 - \frac{1}{2}$ .

**1.4.** Знайти середнє значення функції  $y = f(x)$  на відрізку  $[a, b]$ :

1.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{8+2x-x^2}}$ ,  $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ . 2.  $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ ,  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ .

**Відповіді:** 1.  $\frac{\pi}{9}$ . 2.  $\sqrt{3} - \frac{3\ln 2}{\pi}$ .

**1.5.** Оцінити визначений інтеграл:

1.  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ . 2.  $\int_0^3 \ln(x^2 - 2x + 2) dx$ .

**Відповіді:** 1.  $0 \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leq 1$ . 2.  $0 \leq \int_0^3 \ln(x^2 - 2x + 2) dx \leq 3\ln 5$ .

### Задачі для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

$$1. \int_1^2 \frac{dx}{2x+3} \quad 2. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5} \quad 3. \int_0^1 \frac{4x^5+9x^3+2x-\arctg^4 2x}{1+4x^2} dx.$$

$$4. \int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1} \quad 5. \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} \quad 6. \int_0^4 x^3 \sqrt{x^2+9} dx.$$

$$7. \int_0^{\pi/3} \cos^3 x \cdot \sin 2x dx. \quad 8. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^4 x dx. \quad 9. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4-7 \operatorname{tg} x}{2+3 \operatorname{tg} x} dx.$$

$$10. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4+\sqrt{\sin x}} dx. \quad 11. \int_0^1 x e^{-x} dx. \quad 12. \int_1^3 (x^2-1) \ln x dx.$$

$$13. \int_0^1 x \cdot \arctg x dx. \quad 14. \int_0^{\pi} (1-8x^2) \cos 4x dx. \quad 15. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx.$$

16. Знайти середнє значення функції  $f(x) = x \log_3 x$  на відрізку  $[1,3]$ .

17. Знайти середнє значення функції  $f(x) = x^2 \sqrt{4-x^2}$  на відрізку  $[0,1]$ .

18. Знайти середнє значення функції  $f(x) = \frac{x \cos x}{\sin^3 x}$  на відрізку  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

19. Оцінити визначений інтеграл  $\int_1^4 \left(4-x-\frac{4}{x^2}\right) dx$ .

20. Оцінити визначений інтеграл  $\int_{-2}^2 (x+2)e^{1-x} dx$ .

**Відповіді:**      1.  $\ln \sqrt{\frac{7}{5}}$ .      2.  $\arctg 3 - \arctg 2$ .      3.  $\frac{5}{4} - \frac{\arctg^5 2}{10}$ .

4.  $\ln \frac{3}{2}$ .      5.  $2 - \ln 2$ .      6. 282,4.      7.  $\frac{31}{80}$ .      8.  $\frac{2}{3} + \frac{\pi}{12}$ .

$$\begin{array}{llll}
9. \ln \frac{25}{8} - \frac{\pi}{4}. & 10. 2 - 8 \ln \frac{5}{4}. & 11. -\frac{2}{e} + 1. & 12. 6 \ln 3 - \frac{8}{9}. \\
13. \frac{\pi - 2}{4}. & 14. -\pi. & 15. \frac{e^\pi - 2}{5}. & 16. \frac{9}{4} - \frac{1}{\ln 3}. \\
17. \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}. & 18. \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}. & 19. -3 \leq \int_1^4 \left( 4 - x - \frac{4}{x^2} \right) dx \leq -\frac{3}{4}. & \\
20. 0 \leq \int_{-2}^2 (x+2)e^{1-x} dx \leq 4e^2. & & & 
\end{array}$$

### Література:

[3], гл. 7, с. 356–369.

[4], р. 6, с. 138–141.

## Практичне заняття 2

### ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ПЛОСКИХ ФІГУР В ДЕКАРТОВІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

#### Контрольні питання

1. Обчислення площі плоскої фігури, що обмежена лініями  $y = f(x)$ ,  $(f(x) \geq 0)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$ .
2. Обчислення площі плоскої фігури, що обмежена лініями  $x = \varphi(y)$ ,  $(\varphi(y) \geq 0)$ ,  $y = c$ ,  $y = d$ ,  $x = 0$ .
3. Обчислення площі плоскої фігури, що обмежена лініями  $y = f(x)$ ,  $(f(x) \leq 0)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$ .
4. Обчислення площі плоскої фігури, що обмежена лініями  $x = \varphi(y)$ ,  $(\varphi(y) \leq 0)$ ,  $y = c$ ,  $y = d$ ,  $x = 0$ .
5. Обчислення площі плоскої фігури, що обмежена лініями  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$ ,  $(f_2(x) \geq f_1(x))$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ .

6. Обчислення площі плоскої фігури, що обмежена лініями  $x = \varphi_1(y)$ ,  $x = \varphi_2(y)$ ,  $(\varphi_2(y) \geq \varphi_1(y))$ ,  $y = c$ ,  $y = d$ .

7. Обчислення площі плоскої фігури, якщо крива  $y = f(x)$  задана параметричними рівняннями  $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta. \end{cases}$

### Задачі

**2.1.** Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

1.  $y = x^2 + 2$ ,  $x = -3$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ .

2.  $x = (y - 2)^3$ ,  $x = 4y - 8$ .

3.  $y = \ln x$ ,  $y = -2$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$ .

4.  $y^2 = x + 3$ ,  $y^2 = 5 - x$ .

5.  $y = \arcsin x$ ;  $y = -\frac{\pi}{2}$ ;  $x = 0$ .

6.  $xy = 1$ ,  $y = x$ ,  $x = 5$ .

7.  $y = e^x$ ,  $x = -2$ ,  $x = 1$ ,  $y = 3$ .

8.  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$ ,  $y \geq x$ ,  $x \geq 0$ .

9.  $y = \frac{25}{x^2}$ ;  $y = 0$ ,  $y = 1$ ,  $-7 \leq x \leq 7$ .

**Відповіді:** 1.  $\frac{52}{3}$ . 2. 8. 3.  $3 \ln 3 + 2$ . 4.  $\frac{64}{3}$ . 5. 1. 6.  $12 - \ln 5$ .

7.  $9 - e + e^{-2}$ . 8.  $\frac{\pi}{2}$ . 9.  $\frac{90}{7}$ .

**2.2.** Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані параметричними рівняннями:

1.  $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases}$

$$2. \begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 4 \sin t, x = 3\sqrt{3}, (x \geq 3\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), y = 3, (y \geq 3, 0 \leq x \leq 4\pi). \end{cases}$$

**Відповіді:**      1.  $6\pi$ .      2.  $4\pi - 6\sqrt{3}$ .      3.  $3\sqrt{3}$ .

### Задачі для самостійної роботи

Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

1.  $y = x^2 + 1, x = -4, x = -2, y = 0$ .

2.  $y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3$ .

3.  $y = \ln x, y = 2, x = 7$ .

4.  $y = -(x - 2)^2, y = x - 4$ .

5.  $xy = 6, x + y - 7 = 0$ .

6.  $x = 4 - y^2, x = y^2 - 2y$ .

7.  $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$ .

8.  $y = \sqrt{2 - x^2}, y = x^2$ .

9.  $y = \sqrt{8 - x^2}, y = x (y \leq x), y = 0$ .

10.  $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), (0 \leq x \leq 8\pi). \end{cases}$

11.  $\begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t, y = 2, (y \geq 2). \end{cases}$

12.  $\begin{cases} x = 24 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, x \geq 9\sqrt{3}. \end{cases}$

**Відповіді:** 1.  $\frac{62}{3}$ . 2. 9. 3.  $7\ln 7 + e^2 - 21$ . 4. 4,5; 5.  $17,5 - 6\ln 6$ .

6.  $\frac{31}{3}$ . 7.  $e + e^{-1} - 2$ . 8.  $\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}$ . 9.  $\pi$ . 10.  $48\pi$ . 11.  $12\pi - 9\sqrt{3}$ .

12.  $3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$ .

**Література:**

[3], гл. 7, с. 369–378.

[4], р. 6, с. 141–143.

**Практичне заняття 3**

**ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ПЛОСКИХ ФІГУР В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ  
КООРДИНАТ.**

**ОБЧИСЛЕННЯ ДОВЖИНИ ДУГИ ЛІНІЇ**

**Контрольні питання**

1. Полярна система координат.
2. Обчислення площі криволінійного сектору, обмеженого кривою, що задана у полярних координатах рівнянням  $\rho = \rho(\varphi)$ , і променями  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$  ( $\alpha < \beta$ ).
3. Обчислення довжини дуги лінії, що задана рівнянням  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ .
4. Обчислення довжини дуги лінії, що задана рівнянням  $x = \varphi(y)$ ,  $c \leq y \leq d$ .
5. Обчислення довжини дуги лінії, що задана параметричними рівняннями 
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta. \end{cases}$$
6. Обчислення довжини дуги лінії, що задана рівнянням у полярних координатах  $\rho = \rho(\varphi)$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ .

### Задачі

**3.1.** Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

1.  $\rho = 2 \sin 3\varphi$ .

2.  $\rho = 2(1 - \cos 2\varphi)$

3.  $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ .

4.  $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$ .

5.  $\rho = 2 - \sin 3\varphi$

**Відповіді:** 1.  $\pi$ . 2.  $6\pi$ . 3.  $4$ . 4.  $6\pi$ . 5.  $\frac{9\pi}{2}$ .

**3.2.** Обчислити довжини дуг кривих, що задані рівняннями:

1.  $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ ,  $1 \leq x \leq 9$ .

2.  $x = 1 + \arcsin y - \sqrt{1-y^2}$ ,  $0 \leq y \leq \frac{3}{4}$ .

3. 
$$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq \pi.$$

4.  $\rho = 6(1 + \cos \varphi)$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0$ .

**Відповіді:** 1.  $\frac{52}{3}$ ; 2.  $\sqrt{2}$ ; 3.  $\frac{\pi^3}{3}$ ; 4.  $12\sqrt{2}$ .

### Задачі для самостійної роботи

Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

1.  $\rho = 3 \cos 3\varphi$ .

2.  $\rho = 2 \sin 2\varphi$ .

3.  $\rho = 2(1 + \cos 2\varphi)$ .

4.  $\rho = \sqrt{\sin 2\varphi}$ .

5.  $\rho = 3(1 + \sin \varphi)$ .

6.  $\rho = 2 - \cos 2\varphi$

**Відповіді:** 1.  $\frac{9\pi}{4}$ . 2.  $\pi$ . 3.  $6\pi$ . 4. 1. 5.  $\frac{27\pi}{2}$ . 6.  $\frac{9\pi}{2}$ .

Обчислити довжини дуг кривих, що задані рівняннями:

1.  $y = \frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}$ ,  $2 \leq x \leq 8$

2.  $y = -\ln(\cos x)$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ .

3.  $x = 1 - \ln(y^2 - 1)$ ,  $3 \leq y \leq 4$ .

4.  $x = 2 - e^y$ ,  $\ln\sqrt{3} \leq y \leq \ln\sqrt{8}$ .

5.  $\begin{cases} x = R(\cos t + t \sin t), \\ y = R(\sin t - t \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$ .

6.  $\begin{cases} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 5 \sin^2 t, \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

7.  $\rho = 3(1 + \sin \varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

8.  $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

**Відповіді:** 1.  $\frac{56}{3}$ . 2.  $\ln\sqrt{3}$ . 3.  $1 + \ln\frac{6}{5}$ . 4.  $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ .

5.  $\frac{\pi^2 R}{2}$ . 6.  $\sqrt{50}$ . 7.  $6\sqrt{2}$ . 8.  $\frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$ .

**Література:**

[3], гл. 7, с. 378–383, 387–390.

[4], р. 6, с. 141–147.

## Практичне заняття 4

### ОБЧИСЛЕННЯ ОБ'ЄМІВ ТІЛ ОБЕРТАННЯ. ОБЧИСЛЕННЯ ОБ'ЄМІВ ТІЛ ЗА ВІДОМИМИ ПЛОЩАМИ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПЕРЕРІЗІВ.

#### Контрольні питання

1. Обчислення об'єму тіла, отриманого при обертанні навколо осі  $OX$  криволінійної трапеції, що обмежена лініями  $y = f(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$ .
2. Обчислення об'єму тіла, отриманого при обертанні навколо осі  $OY$  криволінійної трапеції, що обмежена лініями  $x = \varphi(y)$ ,  $y = c$ ,  $y = d$ ,  $x = 0$ .
3. Обчислення об'єму тіла, отриманого при обертанні навколо осі  $OX$  фігури, що обмежена лініями  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$ ,  $(0 \leq f_1(x) \leq f_2(x))$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ .
4. Обчислення об'єму тіла, отриманого при обертанні навколо осі  $OY$  фігури, що обмежена лініями  $x = \varphi_1(y)$ ,  $x = \varphi_2(y)$ ,  $(0 \leq \varphi_1(y) \leq \varphi_2(y))$ ,  $y = c$ ,  $y = d$ .
5. Обчислення об'єму тіла за відомими площами паралельних перерізів.

#### Задачі

**4.1.** Обчислити об'єми тіл, отриманих при обертанні навколо осі  $OX$  фігур, що обмежені лініями:

1.  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$ .

2.  $2y = x^2$ ,  $2x + 2y - 3 = 0$ .

3.  $x = \sqrt{1 - y^2}$ ,  $y = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ .

**Відповіді:** 1.  $\frac{16\pi}{15}$ . 2.  $\frac{272\pi}{15}$ . 3.  $\frac{19\pi}{48}$ .

**4.2.** Обчислити об'єми тіл, отриманих при обертанні навколо осі  $OY$  фігур, що обмежені лініями:

1.  $y = \ln x$ ,  $y = 2$ ,  $y = 5$ ,  $x = 0$ .

2.  $x = 1 - y^2$ ,  $x = 9 - 9y^2$ .

3.  $y = (x + 2)^2$ ,  $y = 9x$ ,  $x = 0$ .

**Відповіді:** 1.  $\frac{\pi}{2}(e^{10} - e^4)$ . 2.  $\frac{256\pi}{3}$ . 3.  $\frac{7\pi}{6}$ .

**4.3.** Обчислити об'єм тіла за відомими площами паралельних перерізів:

1. Обчислити об'єм тіла, обмеженого циліндрами  $x^2 + y^2 = 9$  та  $x^2 + z^2 = 9$ .

2. Обчислити об'єм прямого конуса, основою якого є еліпс з півосями  $a = 3$  і  $b = 2$ , а висота дорівнює 4.

**Відповіді:** 1. 144. 2.  $8\pi$ .

### Задачі для самостійної роботи

Обчислити об'єми тіл, отриманих при обертанні навколо осі  $OX$  фігур, що обмежені лініями:

1.  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $(0 \leq x \leq \pi)$ .

2.  $y = x - x^2$ ,  $y = 0$ .

3.  $xy = 4$ ,  $2x + y - 6 = 0$ .

4.  $y = 2 - x^2$ ,  $y = x^2$ .

**Відповіді:** 1.  $\frac{\pi^2}{2}$ . 2.  $\frac{\pi}{30}$ . 3.  $\frac{4\pi}{3}$ . 4.  $\frac{16\pi}{3}$ .

Обчислити об'єми тіл, отриманих при обертанні навколо осі  $OY$  фігур, що обмежені лініями:

1.  $y = \ln x$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$ .

2.  $y = 2 - \frac{x^2}{2}, x + y = 2.$

3.  $x^2 - y^2 = 4, y = -2, y = 2.$

4.  $y = x^3, y = 2 - x, x = 0.$

**Відповіді:** 1.  $\frac{\pi}{2}(e^2 - 1).$  2.  $\frac{4\pi}{3}.$  3.  $\frac{64\pi}{3}.$  4.  $\frac{14\pi}{15}.$

Обчислити об'єм тіла за відомим площами паралельних перерізів:

1. Обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдом  $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$  і

площиною  $z = 1.$

2. Обчислити об'єм кулі  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$

**Відповіді:** 1.  $\sqrt{2}\pi.$  2.  $\frac{4\pi R^3}{3}.$

**Література:**

[3], гл. 7, с. 383–387.

[4], р. 6, с. 147–148.

## Практичне заняття 5

НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ ПЕРШОГО ТА ДРУГОГО РОДУ.  
ДОСЛІДЖЕННЯ НА ЗБІЖНІСТЬ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПЕРШОГО  
ТА ДРУГОГО РОДУ.

Контрольні питання

1. Означення невластного інтеграла першого роду.
2. Геометричний зміст невластного інтеграла першого роду.
3. Означення невластного інтеграла другого роду.
4. Геометричний зміст невластного інтеграла другого роду.
5. Ознаки збіжності невластних інтегралів першого роду.
6. Дослідження збіжності  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}.$
7. Ознаки збіжності невластних інтегралів другого роду.

8. Дослідження збіжності  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ .

### Задачі

5.1. Дослідити на збіжність невласні інтеграли першого роду:

$$1. \int_1^{\infty} \ln \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx. \quad 2. \int_2^{\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} dx. \quad 3. \int_0^{\infty} \frac{dx}{7 + 8x + 8x^5}.$$

**Відповіді:** 1. Збігається. 2. Розбігається. 3. Збігається.

5.2. Обчислити невласні інтеграли першого роду або довести їх розбіжність:

$$1. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}. \quad 2. \int_{-\infty}^0 xe^x dx. \quad 3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}.$$

**Відповіді:** 1.  $\frac{\pi}{12}$ . 2.  $-1$ . 3. Розбігається.

5.3. Дослідити на збіжність невласні інтеграли другого роду:

$$1. \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}. \quad 2. \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x} - 1}. \quad 3. \int_1^2 \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}} dx.$$

**Відповіді:** 1. Розбігається. 2. Збігається; 3. Збігається абсолютно.

5.4. Обчислити невласні інтеграли другого роду або довести їх розбіжність:

$$1. \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2} dx. \quad 2. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}. \quad 3. \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln 2 dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}.$$

**Відповіді:** 1. Розбігається. 2. 0. 3. 1.

### Задачі для самостійної роботи

Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1.  $\int_1^{\infty} \frac{(1+x^2)}{x^3} dx$ .   2.  $\int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$ .   3.  $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$ .   4.  $\int_{1/3}^{\infty} \frac{\pi dx}{(1+9x^2) \operatorname{arctg}^2 3x}$ .

5.  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{(x^2-4x) \ln 5}$ .   6.  $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$ .   7.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$ .

Дослідити на збіжність невласні інтеграли:

8.  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x+3x^3+6x^6}$ .   9.  $\int_2^{\infty} \frac{2+\sin x+\ln x}{\sqrt{x}} dx$ .   10.  $\int_1^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{1+x\sqrt[3]{x}} dx$ .

Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

11.  $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$ .   12.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ .   13.  $\int_4^6 \frac{dx}{x^2-6x+5}$ .   14.  $\int_0^1 \frac{xdx}{1-x^4}$ .

15.  $\int_{1/3}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx$ .   16.  $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}$ .   17.  $\int_0^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x} dx$ .

Дослідити на збіжність невласні інтеграли:

18.  $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$ .   19.  $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x dx}{\sqrt{x}}$ .   20.  $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^4}$ .

**Відповіді:**   1. Розбігається.   2.  $-\frac{1}{2}$ .   3. Розбігається..   4.  $\frac{2}{3}$ .

5.  $\frac{7}{4}$ .   6.  $\frac{1}{2}$ .   7.  $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ .   8. Збігається.   9. Розбігається.   10. Збігається.

11. Розбігається.   12. Розбігається.   13. Розбігається.   14. Розбігається.

15. Розбігається.   16. 2.   17. Розбігається.   18. Збігається.

19. Збігається.   20. Розбігається.

### Література:

[3], гл. 7, с. 395–408.

[4], р. 6, с. 148–149.

## МОДУЛЬНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА

### Варіант 1

1. Обчислити інтеграл  $\int_0^{\pi/2} (x+3)\sin x dx$ .
2. Знайти середнє значення функції  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$  на відрізку  $[3,8]$ .
3. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями  $y = \frac{4}{x}$ ,  $y = x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ ;
4. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі  $OX$  фігури, що обмежена лініями  $y = 4\sin x$ ,  $y = 2\sin x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .
5. Обчислити невластний інтеграл  $\int_0^{+\infty} e^{-4x} dx$ .

### Варіант 2

1. Обчислити інтеграл  $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}$ .
2. Знайти середнє значення функції  $f(x) = xe^{-2x}$  на відрізку  $[0,1]$ .
3. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями  $y = e^{-x}$ ,  $y = x^2 + 2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$ ;
4. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі  $OY$  фігури, що обмежена лініями  $y = x^2$ ,  $2y = 1 + x^2$ .
5. Обчислити невластний інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$ .

### Варіант 3

1. Обчислити інтеграл  $\int_0^{\pi/6} x \cos 3x dx$ .
2. Знайти середнє значення функції  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+3x}}$  на відрізку  $[0,5]$ .
3. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями  $x = y^2 - 4y + 4$ ,  $x + 2y - 4 = 0$ .
4. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі  $OX$  фігури, що обмежена лініями  $2x - x^2 - y = 0$ ,  $2x^2 - 4x + y = 0$ .
5. Обчислити невластний інтеграл  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + 16}}$ .

### Варіант 4

1. Обчислити інтеграл  $\int_0^1 \frac{3^x}{3 + 9^x} dx$ .
2. Знайти середнє значення функції  $f(x) = (x+1)e^{2x}$  на відрізку  $[-1,0]$ .
3. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями  $y^2 + 2y + x^2 = 0$ ,  $y = x$ .
4. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі  $OY$  фігури, що обмежена лініями  $y = x^2 + 1$ ,  $y = x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .
5. Обчислити невластний інтеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$ .

### Варіант 5

1. Обчислити інтеграл  $\int_1^2 (x-1) \ln x dx$ .
2. Знайти середнє значення функції  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$  на відрізку  $[1, e^3]$ .
3. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями  $x = 4 - (y-1)^2$ ,  $x = (y-2)^2 - 1$ ;
4. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі  $OX$  фігури, що обмежена лініями  $x = \sqrt{y-2}$ ,  $x = \sqrt{2-y}$ ,  $x = 2$ .
5. Обчислити невластний інтеграл  $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{(4-x) \cdot x}}$ .

### Варіант 6

1. Обчислити інтеграл  $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$ .
2. Знайти середнє значення функції  $f(x) = x^2 e^{3x}$  на відрізку  $[0, 1]$ .
3. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$ ,  $y = 4$ ;
4. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі  $OY$  фігури, що обмежена лініями  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 2 - x$ ,  $x = 0$ .
5. Обчислити невластний інтеграл  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$ .

## ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

1. Формула Ньютона – Лейбніця:  $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$  .

2. Заміна змінної:  $\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)dt \\ \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$  .

3. Інтегрування частинами:  $\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$  .

4. Теорема про оцінку визначеного інтеграла: якщо  $m \leq f(x) \leq M$  на  $[a, b]$ , то  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$  .

5. Теорема про середнє значення: якщо  $f(x)$  неперервна на  $[a, b]$ , то існує така точка  $c \in (a, b)$ , що  $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ . Значення  $f(c)$  – середнє значення функції  $f(x)$  на відрізьку  $[a, b]$ .

6. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями  $y = f(x)$ ,  $(f(x) \geq 0)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$ :  $S = \int_a^b f(x)dx$  .

7. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями  $x = \varphi(y)$ ,  $(\varphi(y) \geq 0)$ ,  $y = c$ ,  $y = d$ ,  $x = 0$ :  $S = \int_c^d \varphi(y)dy$

8. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями  $y = f(x)$ ,  $(f(x) \leq 0)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$ :  $S = -\int_a^b f(x)dx$  .

9. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями  $x = \varphi(y)$ ,  $(\varphi(y) \leq 0)$ ,  $y = c$ ,  $y = d$ ,  $x = 0$ :  $S = -\int_c^d \varphi(y)dy$

10. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$ ,  $(f_2(x) \geq f_1(x))$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ :  $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$  .

**11.** Площа плоскої фігури, що обмежена лініями  $x = \varphi_1(y)$ ,  $x = \varphi_2(y)$ ,  
 $(\varphi_2(y) \geq \varphi_1(y))$ ,  $y = c$ ,  $y = d$ :  $S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) dy$ .

**12.** Площа плоскої фігури, якщо крива  $y = f(x)$  задана  
 параметричними рівняннями  $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$ :  $S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t) dt$ .

**13.** Площа криволінійного сектору, обмеженого кривою, що задана у  
 полярних координатах рівнянням  $\rho = \rho(\varphi)$ , і променями  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$   
 $(\alpha < \beta)$ :  $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$ .

**14.** Довжина дуги лінії, що задана рівнянням  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ :  
 $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ .

**15.** Довжина дуги лінії, що задана рівнянням  $x = \varphi(y)$ ,  $c \leq y \leq d$ :  
 $l = \int_c^d \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2} dy$ .

**16.** Довжина дуги лінії, що задана параметричними рівняннями  
 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$ :  $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ .

**17.** Довжина дуги лінії, що задана у полярних координатах рівнянням  
 $\rho = \rho(\varphi)$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ :  $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi$ .

**18.** Об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі  $OX$   
 криволінійної трапеції, що обмежена лініями  $y = f(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$ :  
 $V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ .

**19.** Об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі  $OY$   
 криволінійної трапеції, що обмежена лініями  $x = \varphi(y)$ ,  $y = c$ ,  $y = d$ ,  $x = 0$ :  
 $V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy$ .

**20.** Об'єм тіла, отриманого при обертання навколо осі  $OX$  фігури, що обмежена лініями  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$ ,  $(0 \leq f_1(x) \leq f_2(x))$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ .

$$V_x = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx.$$

**21.** Об'єм тіла, отриманого при обертання навколо осі  $OY$  фігури, що обмежена лініями  $x = \varphi_1(y)$ ,  $x = \varphi_2(y)$ ,  $(0 \leq \varphi_1(y) \leq \varphi_2(y))$ ,  $y = c$ ,  $y = d$ .

$$V_x = \pi \int_c^d (\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y)) dy.$$

**22.** Об'єм тіла за відомими площами паралельних перерізів обчислюється за формулою  $V = \int_a^b S(x) dx$ , де  $S(x)$  – площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною осі  $OX$ ,  $a \leq x \leq b$ .

**23.** Невласні інтеграл першого роду: а)  $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ ;

б)  $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$ ; в)  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx$ .

**24.** Ознаки збіжності невластних інтегралів першого роду:

а) Нехай функція  $y = f(x)$  неперервна на  $[a, \infty)$ . Тоді для будь-якого

$x_0 > a$  невластні інтеграли  $\int_a^\infty f(x) dx$  та  $\int_{x_0}^\infty f(x) dx$  збігаються або розбігаються

одночасно.

б) **Ознака порівняння.** Нехай при  $a \leq x < \infty$  виконується умова:

$0 \leq f(x) \leq g(x)$ . Тоді: якщо  $\int_a^\infty g(x) dx$  збігається, то збігається і інтеграл

$\int_a^\infty f(x) dx$ ; якщо  $\int_a^\infty f(x) dx$  розбігається, то розбігається і інтеграл  $\int_a^\infty g(x) dx$ .

**в) Гранична ознака порівняння.** Нехай  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$ , де  $f(x)$  та

$g(x)$  неперервні знакосталі функції, тоді невластні інтеграли  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  та

$\int_a^{\infty} g(x)dx$  збігаються або розбігаються одночасно.

**г) Достатня ознака збіжності невластного інтеграла від знакозмінної функції.** Якщо збігається інтеграл  $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ , то інтеграл

$\int_a^{\infty} f(x)dx$  збігається і називається абсолютно збіжним.

**25.** Невласний інтеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$  — збігається, якщо  $p > 1$  та розбігається, якщо  $p \leq 1$ .

**26.** Невласні інтеграли другого роду: а)  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ , де

$x = b$  — точка нескінченного розриву функції  $f(x)$ ;

б)  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ , де  $x = a$  — точка нескінченного розриву функції

$f(x)$ ; в)  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$ , де  $x = c$  — точка

нескінченного розриву функції  $f(x)$ .

**27.** Ознаки збіжності невластних інтегралів другого роду:

**а) Ознака порівняння.** Нехай функції  $y = f(x)$  і  $y = g(x)$  неперервні на  $[a, b)$ ,  $x = b$  — точка нескінченного розриву функцій  $f(x)$  та  $g(x)$  і

$0 \leq f(x) \leq g(x)$ . Тоді: якщо  $\int_a^b g(x)dx$  збігається, то збігається і інтеграл

$\int_a^b f(x)dx$ ; якщо  $\int_a^b f(x)dx$  розбігається, то розбігається і інтеграл  $\int_a^b g(x)dx$ .

**б) Гранична ознака порівняння.** Нехай  $f(x)$  та  $g(x)$  неперервні та знакосталі на  $[a, b)$ ,  $x = b$  – точка нескінченного розриву функцій  $f(x)$  та

$g(x)$  і  $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$ . Тоді невласні інтеграли  $\int_a^b f(x)dx$  та  $\int_a^b g(x)dx$

збігаються або розбігаються одночасно.

**в) Достатня ознака збіжності невласного інтеграла від знакозмінної функції.** Якщо  $x = b$  – точка нескінченного розриву функцій

$f(x)$  і збігається інтеграл  $\int_a^b |f(x)|dx$ , то інтеграл  $\int_a^b f(x)dx$  збігається і

називається абсолютно збіжним.

**28.** Невласний інтеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$  – збігається, якщо  $p < 1$  та

розбігається, якщо  $p \geq 1$ .

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М.: Наука, 1985. – 446 с.
2. Сборник индивидуальных заданий по высшей математики / под ред. А. П. Рябушко: В 3 ч. – Мн.: Выш. шк, 1991. – Ч. 2 – 352 с.
3. Высшая математика в примерах и задачах: учеб. пособие – В двух томах / сост. Ю. Л. Геворкян, Л. А. Балака и др. – Х.: НТУ «ХПИ», 2005. – т. 1 – 448 с.
4. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики: у 2 ч. – Ч. 1 / Н. О. Чікіна, І. В. Антонова, Л. О. Балака та ін.; за ред. Н. О. Чікіної. – Х.: Підручник НТУ «ХПИ», 2012. – 224 с.

## ЗМІСТ

Вступ.....	3
Практичне заняття 1. Обчислення визначеного інтеграла за допомогою формули Ньютона – Лейбніця. Метод інтегрування заміною змінної інтегрування. Метод інтегрування частинами.....	4
Практичне заняття 2. Застосування визначеного інтегралу для обчислення площі плоских фігур в декартовій системі координат.....	7
Практичне заняття 3. Обчислення площі плоских фігур в полярній системі координат. Обчислення довжини дуги лінії.....	10
Практичне заняття 4. Обчислення об'ємів тіл обертання. Обчислення об'ємів тіл за відомими площами паралельних перерізів .....	13
Практичне заняття 5. Невласні інтеграли першого та другого роду. Дослідження на збіжність невластних інтегралів першого і другого роду.....	15
Модульна контрольна робота .....	18
Довідковий матеріал.....	21
Список літератури .....	26

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до проведення практичних занять з вищої математики за темою  
«Визначений інтеграл та його застосування»  
для студентів усіх спеціальностей  
факультетів МТ, МБ, ЕМБ, Е, АП, ТОР та ТНР, КІТ

Укладач ЦЕХМІСТРО Ірина Іванівна

Відповідальний за випуск Ю. Л. Геворкян

Роботу до видання рекомендував проф. Л. В. Курпа  
В авторській редакції

План 2014 р., поз. 143

Підп. до друку 10.10.2014. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.  
Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. \_\_.  
Наклад 50 прим. Зам. № \_\_\_\_\_. Ціна договірна.

---

Видавничий центр НТУ «ХП». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.  
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.

---

Друкарня НТУ «ХП». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.