УДК 539.3.01

Э. Б. КУЛИЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГОВОЙ ПОЛОСТЬЮ, ПРИ ДЕЙСТВИИ КУСОЧНО-РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ НА ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ

В представленной статье решена неоднородная задача для полуплоскости с круговой полостью при действии равномерно-распределенной нагрузки на прямолинейной границе полуплоскости. Задача решена методами теории функций комплексного переменного (теория рядов Лорана, метод Н. И. Мусхелешвили) в сочетании с проекционным методом Бубнова-Галеркина. В конечном итоге, при конкретных физических и геометрических параметрах двухсвязной неоднородной полуплоскости представлена численная реализация полученных решений и построены эпюры окружных напряжений для нулевого и первого приближений.

Ключевые слова: неоднородная полуплоскость, комплексные потенциалы, ряды Лорана, метод последовательных приближений, окружные напряжения.

Введение. Развитие современного строительства тесно связано с методами определения и исследования напряженно-деформированного состояния конструкций и сооружений.

Как известно, развитие городского транспортного строительства также связано с проектированием и строительством подземных сооружений и тоннелей. Проектирование и строительство подземных сооружений и тоннелей в свою очередь обуславливает усовершенствование существующих и создание новых методов расчета подобных сооружений.Как показывает практика эксплуатации подземных сооружений,реальные конструкции существенно отличаются от расчетной.В связи с этим, актуальным направлением в теории сооружений является разработка и внедрение в инженерную практику методов и алгоритмов,которые учитывали бы реальные физико-механические свойства материала вокруг тоннеля.Следует отметить,что определение напряженнодеформированного состояния многосвязной неоднородной полуплоскости,моделирующей тоннели,представляет практический интерес для инженерного проектирования конструкций и сооружений.Учет неоднородности породы массива полуплоскости ,представленный в виде изменяющегося по глубине массива полуплоскости модуля деформации, более реально отражает свойства материала вокруг тоннеля.

Постановка задачи и решение

В данной статье рассматривается плоская задача для неоднородной полуплоскости, ослабленная круговой полости, при действии кусочно-распределенной нагрузки на прямолинейной границе полуплоскости. Двухсвязная область неоднородной полуплоскости извне ограничена прямолинейной границей L_0, а изнутри – круговым контуром L_1, расположенный с эксцентриситетом h. На определенном участке прямолинейной границы L_0 действует равномерно-распределенная нагрузка P (рис. 1).

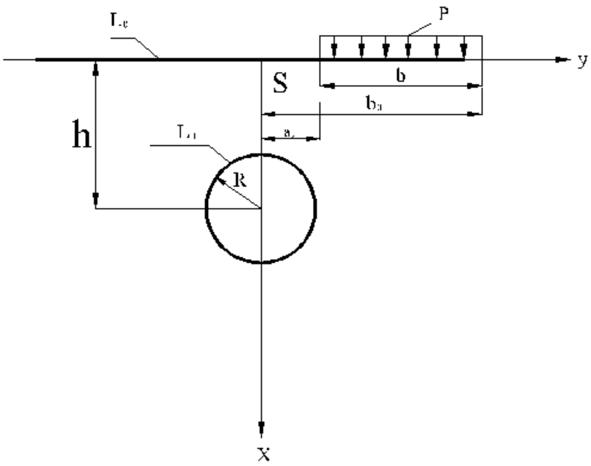

Рис. 1 – Схема участка прямолинейной границы L_0, на которую действует равномерно-распределенная нагрузка

Плоская неоднородная задача решается методом последовательных приближений при помощи пары комплексных потенциалов:

$$\phi(z)=\sum_{n=0}^{N}\phi_n(z);\quad \chi(z)=\sum_{n=0}^{N}\chi_n(z)\,. \tag{1}$$

В нулевом приближении решается однородная упругая задача с заданной внешней нагрузкой.

Для однородной упругой задачи комплексные потенциалы $\varphi_0(z)$ и $\chi_0(z)$ представим в виде [2]:

$$\begin{aligned}\phi_0(z)&=\frac{iP}{2\pi}\left[\left(z-b_0\right)\ln\left(z-b_0\right)-\left(z-a_0\right)\ln\left(z-a_0\right)\right]+\\&+\phi_0^*(z)+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(0)}\left(\frac{R}{z-h}\right)^k\end{aligned}\ , \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\chi_0(z)&=\frac{iP}{2\pi}\left[\left(z-\bar b_0\right)\ln\left(z-b_0\right)-\left(z-\bar a_0\right)\ln\left(z-a_0\right)\right]+\\&+\chi_0^*(z)+\sum_{k=1}^{\infty}A_k^{(0)}\left(\frac{R}{z-h}\right)^k\end{aligned}\ . \tag{3}$$

Здесь $\phi_0^*(z)$ и $\chi_0^*(z)$ комплексные функции, голоморфные в полуплоскости, определяются методом Мусхелишвили [1] из граничного условия на прямолинейной границе L_0 полуплоскости [4, 6]:

$$\phi_0\left(t_0\right)-2\bar t_0\cdot\overline{\phi_0'\left(t_0\right)}+\overline{\chi_0(t)}=P\cdot t_0\quad\left(a_0\le t_0\le b_0\right) \tag{4}$$

и

$$\phi_0\left(t_0\right)-2\bar t_0\cdot\overline{\phi_0'\left(t_0\right)}+\overline{\chi_0(t)}=0\quad\left(t_0\le a_0;\,t_0\le b_0\right)$$

Здесь $t_0=-\bar t_0$ – аффиксы точек контура L_0.

Подставляя (2) и (3) в граничное условие на L_0 (4) и применяя метод Мусхелишвили, получим выражения для комплексных функций $\phi_0^*(z)$ и $\chi_0^*(z)$:

$$\begin{aligned}\phi_0^*(z)&=\sum_{k=1}^{\infty}2k\cdot a_k^{(0)}(-1)^{k+1}\left[\left(\frac{R}{z+h}\right)^k-\frac{h\cdot R^k}{(z+h)^{k+1}}\right]-\\&-\sum_{k=1}^{\infty}A_k^{(0)}(-1)^k\left(\frac{R}{z+h}\right)^k\end{aligned} \tag{5}$$

$$\chi_0^*(z)=-\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(0)}(-1)^k\left(\frac{R}{z+h}\right)^k+2z\cdot\phi_0^{*\prime}(z)\,. \tag{6}$$

Далее, подставляя заранее преобразованые $\varphi_0(z)$ и $\chi_0(z)$ по граничным значениям $\left(\frac{R}{t_1-h}\right)$ на L_1:

$$\phi_0\left(t_1\right)+\left(t_1-\bar t_1\right)\cdot\overline{\phi_1'\left(t_1\right)}+\chi_0\left(t_1\right)=0\,, \tag{7}$$

и сравнивая выражения при одинаковых степенях переменной $\left(\frac{R}{t_1-h}\right)$, получим две группы бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно искомых неизвестных коэффициентов $a_k^{(0)}$ и $A_k^{(0)}$ (k =1, m). Далее, в последующих приближения определяются комплексные потенциалы $\varphi_n(z)$ и $\chi_n(z)$ ($n\geq1$), из граничного условия на L_1:

$$\phi_n\left(t_1\right)+\left(t_1-\bar t_1\right)\cdot\overline{\phi_n'\left(t_n\right)}+\overline{\chi_n(t)}=IG_{n-1}\left(t_1,\bar t_1\right),\quad n\ge1\,. \tag{8}$$

Здесь, t_1 – аффиксы точек контура L_1; выражение $IG_{n-1}\left(t_1,\bar t_1\right)$ имеет вид [3], [5]:

$$\begin{aligned}&IG_{n-1}\left(z,\bar z\right)=\\&=\int_0^z\mathrm{Re}\left[B_1G_{n-1}+\int_0^{\bar z}B_2G_{n-1}d\bar z+\int_0^{z}B_3G_{n-1}dz+\int_0^{z}dz\int_0^{\bar z}B_4G_{n-1}d\bar z\right]dz=0\end{aligned}\ . \tag{9}$$

Таким образом, используя полученные значения комплексных потенциалов $\varphi_0(z)$ и $\chi_0(z)$ для нулевого приближения, последовательно из граничного условия (8) и выражения (9) определяются все последующие значения комплексных потенциалов $\varphi_n(z)$ и $\chi_n(z)$ ($n\geq1$). После определения комплексных потенциалов $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ по известным формулам [1] в характерных точках двухсвязной неоднородной полуплоскости определяются компоненты окружных напряжений.

Следует отметить, что в качестве примера выбрана неоднородность вида

$$E=E_0^{\alpha(z+\bar z)};\quad \alpha=\frac{\delta}{2h};\quad 0<\alpha<1\,, \tag{10}$$

ν = const – коэффициент Пуассона

$$B_1 = -2\alpha; \quad B_2 = \frac{1-\nu}{2}\alpha^2; \quad B_3 = \frac{1+\nu}{2}\alpha^2; \quad B_4 = 0 \,. \quad (11)$$

При следующих геометрических и физико-механических параметрах:

a_0 = -5 м; b_0 = 250 м; P= 0,04 МПа;

α = 0,1; h =3 м; R = 1м.

Решена конкретная плоская задача для неоднородной двухсвязной полуплоскости при действии кусочно-равномерно распределенной нагрузки на прямолинейную границу полуплоскости. В точках круглой полости вычислены окружные напряжения σ_θ для нулевого и первого приближений, построены эпюры напряжений σ_θ (рис. 2, 3).

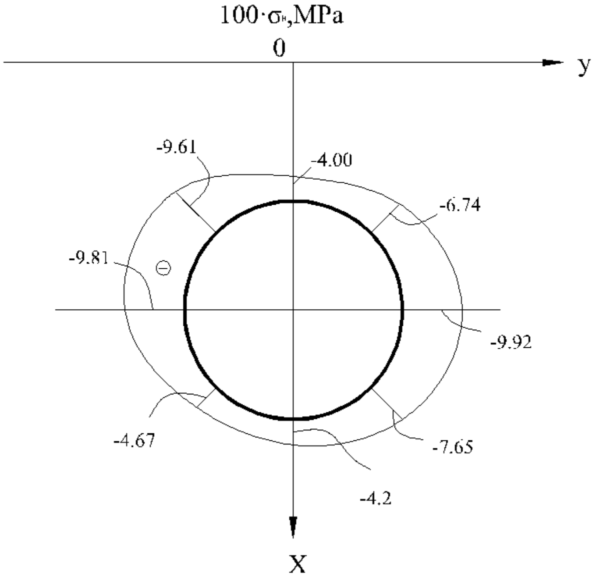

Рис. 2 – Эпюры напряжений σ_θ для нулевого и первого приближений

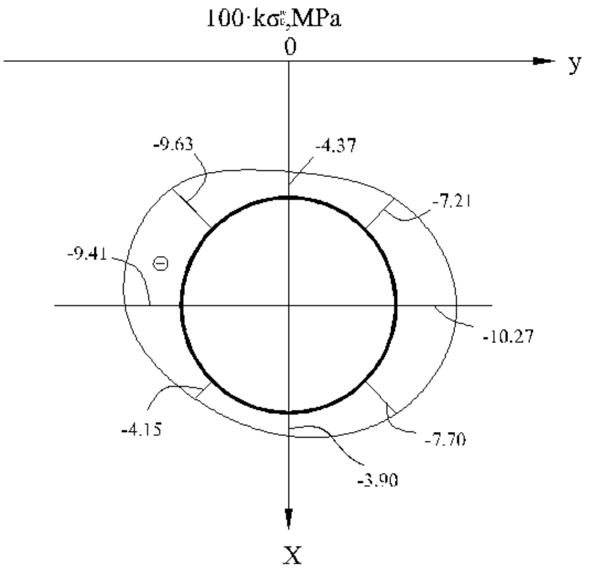

Рис. 3 – Эпюры напряжений σ_θ для нулевого и первого приближений

Выводы. В точках кругового отверстия, близкие к прямолинейной границе полуплоскости, наблюдается увеличение значений окружных напряжений при учете неоднородности среды массива полуплоскости.

Учет неоднородности среды массива полуплоскости позволяет в значительной степени более реально отражать картину распределения напряжений вокруг кругового отверстия полуплоскости.

Список литературы: **1.** *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / *Н. И. Мусхелишвили*. – Москва: «Наука», 1966. – 707 с. **2.** *Фотиева, Н. Н.* Аналитические методы расчета обделок тоннелей мелкого заложения. Подземное строительство России на рубеже XXI века [Текст] / *Н. Н. Фотиева* // Труды Юбилейной научно-практической конференции 15–16 марта, 2000. – С. 123–132. **3.** *Ломакин, В. А.* Теория упругости неоднородных тел [Текст] / *В. А. Ломакин.* – М.: Изд. МГУ, 1976. – 367 с. **4.** *Космодамианский, А. С.* Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами [Текст] / *А. С. Космодамианский*. – Киев, 1979. – 226 с. **5.** *Мишику, М.* Решение при помощи теории функций комплексного переменного статической плоской задачи теории упругости для неоднородных изотропных тел [Текст] / *М. Мишику, Р. Теодосиу* // Прикладная математика и механика. – 1966. – Т. 30, Вып. 2. – С. 379–387. **6.** *Chen, Y. Z.* Solution for hole problems of elastic half-plane with gravity force using boundary integral equation [Text] / *Y. Z. Chen, Z. X. Wang* // International Journal of Rock Mechanics, Mining Sciences, 48. – 2011. – P. 520–526. **7.** *Chen, Y. Z.* Solution for hole problems of elastic half-plane with gravity force using boundary integral equation [Text] / *Y. Z. Chen, Z. X. Wang* // International Journal of Rock Mechanics, Mining Sciences, 48. – 2011. – P. 520–526. **8.** *Dejole, A.* A boundary integral method for multiple circular holes in an elastic half-plane [Text] / *A. Dejole, S. G. Mogilevskaya, S. L. Crouch* // Engineering Analysis with. Boundary Elements. Vol. 30, Issue 6. – 2006. – P. 450–464. **9.** *Kratochvili, J.* Asymptotic analysis of the unteraction of a finite number of holes in an elastic plane or half-planeş [Text] / J. Kratochvili, Becker Wilfried // Procş Applş Mech. – 2011. – 11. – P. 237–238. **10.** *Kuo, Chang-Hung.* Contact stress analysis of an elastic half-plane containing multiple inclusions [Text] / *Kuo Chang-Hung* // International Journal of Solids and Structures. – 2008. – Vol. 45, Issue 16. – P. 4562–4573. **11.** *Lee, J. K.* Elastic analysis of a half-plane containing an inclusion and a void using a mixed volume and boundary integral equation method [Text] / *J. K. Lee, A. Mal* // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2011. – Vol. 35, Issue 7. – P. 915–924.

Bibliography (transliterated): **1.** *Mushelishvili, N. I.* (1966). Nekotorye osnovnye zadachi matemati-cheskoj teorii uprugosti. Moscow: «Nauka», 707. **2.** *Fotieva, N. N.* (2000). Analiticheskie metody rascheta obdelok tonnelej melkogo zalozhenija. Podzemnoe stroitel'stvo Rossii na rubezhe XXI veka. Trudy Jubilejnoj nauchno-prakticheskoj konferencii 15–16 marta, 123–132. **3.** *Lomakin, V. A.* (1976). Teorija uprugosti neodnorodnyh tel. Moscow: Izd. MGU, 367. **4.** *Kosmodamianskij, A. S.* (1979). Ploskaja zadacha teorii uprugosti dlja plastin s otverstijami, vyrezami i vystupami. Kiev, 226. **5.** *Mishiku, M., Teodosiu, R.* (1966). Reshenie pri pomoshhi teorii funkcij kompleksnogo peremennogo staticheskoj ploskoj zadachi teorii uprugosti dlja neodnorodnyh izotropnyh tel. Prikladnaja matematika i mehanika, T. 30, V. 2, 379–387. **6.** *Chen, Y. Z., Wang, Z. X.* (2011). Solution for hole problems of elastic half-plane with gravity force using boundary integral equation. International Journal of Rock Mechanics, Mining Sciences, 48, 520–526. **7.** *Chen, Y. Z., Wang, Z. X.* (2011). Solution for hole problems of elastic half-plane with gravity force using boundary integral equation. International Journal of Rock Mechanics, Mining Sciences, 48, 520–526. **8.** *Dejole, A., Mogilevskaya, S. G., Crouch, S. L.* (2006). A boundary integral method for multiple circular holes in an elastic half-plane. Engineering Analysis with. Boundary Elements, Vol. 30, Issue 6, 450–464. **9.** *Kratochvili, J., Becker Wilfried.* (2011). Asymptotic analysis of the unteraction of a finite number of holes in an elastic plane or half-planeş. Procş Applş Mech., 11, 237–238. **10.** *Kuo, Chang-Hung.* (2008). Contact stress analysis of an elastic half-plane containing multiple inclusions. International Journal of Solids and Structures, Vol. 45, Issue 16, 4562–4573. **11.** *Lee, J. K., Mal, A.* (2011). Elastic analysis of a half-plane containing an inclusion and a void using a mixed volume and boundary integral equation method. Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 35, Issue 7, 915–924.

Поступила (received) 16.10.2015

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Кулиев Этибар Бахтияр оглы – докторант, Азербайджанский архитектурно-строительный университет; кафедра "Дорожное строительство, мосты и тоннели; ул. Айны Султановой, 5, г. Баку, Азербайджан, AZ 1073.
Кулієв Етібар Бахтіяр огли – докторант, Азербайджанський архітектурно-будівельний університет; кафедра "Дорожнє будівництво, мости і тунелі; вул. Айни Султанової, 5, м Баку, Азербайджан, AZ 1073.
Guliyev Etibar Bakhtiyar oglu – PhD, Azerbaijan University of Architecture and Construction; Department "Road construction, bridges and tunnels; str. Ayna Sultanova, 5, Baku, Azerbaijan, AZ 1073.