УДК 519.6:330.43

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків;
М.В. АРТЮХ, аспірантка, УІПА, Харків

ВИРОБНИЧА ФУНКЦІЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ЕЛАСТИЧНОСТІ, ПОБУДОВАНА НА ОСНОВІ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ КОБА-ДУГЛАСА

Запропоновано метод математичного моделювання економічних процесів за допомогою узагальнення формули Коба-Дугласа, в якому виробнича функція має змінні частинні коефіцієнти еластичності.

Предложен метод математического моделирования экономических процессов с помощью обобщенной формулы Кобба – Дугласа, в которой производственная функция имеет переменные частные коэффициенты эластичности.

In this paper the method of mathematical modeling of economic processes using generalized formulas Kob-Douglas production function which has a variable partial elasticity's.

Вступ. В теорії економіко-математичного аналізу розглядаються *виробничі функції Коба-Дугласа*, *Солоу*, *з постійною еластичністю заміни* (CES) тощо. В цих функціях використовується поняття *сталої еластичності заміни факторів*. Але при проведенні більш глибокого математичного аналізу даних виробництва можна побачити, що існують важливі з практичної точки зору економічні процеси, в яких коефіцієнти еластичності відповідних їм виробничих функцій є не сталими, а функціями одного або всіх аргументів, від яких залежить виробнича функція.

Аналіз останніх досліджень. Як відомо, виробнича функція Коба-Дугласа має такий вигляд:

$$Y = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}, \tag{1}$$

де Y – обсяг продукції; K – основний капітал; L – робоча сила; α, β – коефіцієнти еластичності факторів виробництва. Ця виробнича функція широко використовується в економіко-математичному аналізі завдяки відносній простоті функціональної залежності і є достатньо універсальною. Але вона має деякі обмеження: не дозволяє забезпечити задану точність відновлення економічного процесу при фіксованому числі даних маркетингового дослідження. Нижче ми показуємо, що виробнича функція, яка відповідає даним маркетингового дослідження, наведеного в статті *Коба-Дугласа*, взагалі кажучи, не відповідають формулі, яку використовував *Коб* і *Дуглас*, оскільки в даній роботі ми показуємо, що даним, якими користувалися Коб і Дуглас більш адекватно відповідає формула зі змінними коефіцієнтами еластичності. Тому для більш точного аналізу виробництва виникає необхідність модифікувати функцію Коба-Дугласа.

Постановка задачі. В даній статті пропонується новий вираз для виробничої функції і метод знаходження параметрів, які входять в цю функцію, за допомогою даних економіки США за 1899 – 1922рр., наведених в статті Коба-Дугласа [1], дивись також [2] (табл. 1). Основною характерною відмінністю запропонованої в даній роботі виробничої функції є те, що її частинні коефіцієнти еластичності можуть бути функціями обох факторів L та K.

Таблиця

Експериментальні дані Коба-Дугласа.

Рік	Обсяг виробництва	Робоча сила	Капітал
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	118	122
1903	124	123	131
1904	122	116	138
1905	143	125	149
1906	152	133	163
1907	151	138	176
1908	126	121	185
1909	155	140	198
1910	159	144	208
1911	153	145	216
1912	177	152	226
1913	184	154	236
1914	169	149	244
1915	189	154	266
1916	225	182	298
1917	227	196	335
1918	223	200	366
1919	218	193	387
1920	231	193	407
1921	179	147	417
1922	240	161	431

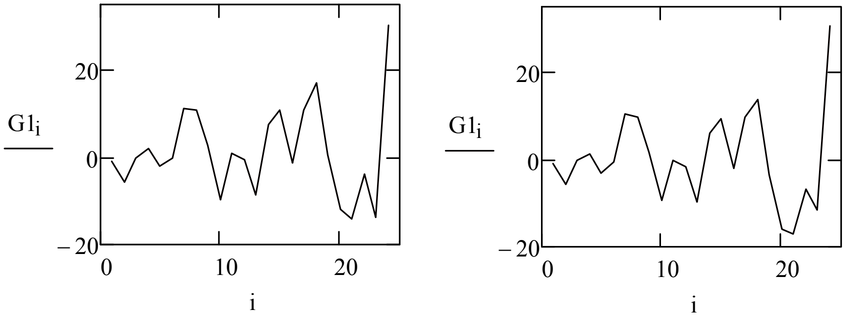
У формулі (1) Коб і Дуглас припускали, що $\alpha + \beta = 1$, тобто $Y = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha}$, і отримали $A = 1,01$; $\alpha = 0,75$; $\beta = 0,25$, тобто

$$Y = 1,01 \cdot L^{0,75} \cdot K^{0,25}. \qquad (2)$$

Якщо ж не вимагати, щоб $\alpha + \beta = 1$, то в результаті отримаємо за методом найменших квадратів $A = 0,795$; $\alpha = 0,828$; $\beta = 0,223$. Тобто отримаємо таку функцію:

$$Y = 0,795 \cdot L^{0,828} \cdot K^{0,223}. \qquad (3)$$

Згідно цих даних в моделі отримали такі відхилення розрахункових значень обсягів виробництва від фактичних, як показано на рис. 1, де i – роки,



а *б*

Рисунок 1 – Графіки відхилення розрахункового обсягу виробництва від фактичного: для функції (2) – *а* , для функції (3) – *б* .

$G1_i$ – відхилення розрахункового обсягу виробництва від фактичного в кожному році.

Математична модель. Нижче припустимо, що виробнича функція зображується в наступному вигляді:

$$Y\left(L,K,a,b\right)=A\cdot L^{f\left(L,K,a\right)}\cdot K^{g\left(L,K,b\right)}, \tag{4}$$

де

$$f\left(L,K,a\right)=\sum_{i=0}^{M}\sum_{m=0}^{N}a_{im}\,\varphi_i\left(L\right)\varphi_m\left(K\right); \tag{5}$$

$$g\left(L,K,b\right)=\sum_{i=0}^{M}\sum_{m=0}^{N}b_{im}\,\varphi_i\left(L\right)\varphi_m\left(K\right); \tag{6}$$

$$\varphi_i\left(L\right)=L^i;\ \varphi_m\left(K\right)=K^m;$$

$A,\ a_{im},\ b_{im}$ – невідомі параметри (коефіцієнти); M, N – параметри.

Теорема. *Для знаходження невідомих* A, a_{im}, b_{im} *з умов*

$$Y_p\left(L_p,K_p,a,b\right)=A\cdot L_p^{f\left(L_p,K_p,a\right)}\cdot K_p^{g\left(L_p,K_p,b\right)},\quad p=\overline{1,Q};\ Q=24 \tag{7}$$

методом найменших квадратів

$$j\left(C\right)=\sum_{p=1}^{Q}\left(A\cdot L_p^{f\left(L_p,K_p,a\right)}\cdot K_p^{g\left(L_p,K_p,b\right)}-Y_p\right)^2\to\min_{A,\,a_{im},\,b_{im}}$$

матриця невідомих коефіцієнтів

$$C=\left[\ln A\ a_{00}\ a_{10}\ a_{01}\ ...\ a_{MN}\ b_{00}\ b_{10}\ b_{01}\ ...\ b_{MN}\right]$$

визначається за формулою:

$$C=\left(B\cdot B^{T}\right)^{-1}\cdot B\cdot Y1,$$

де B *– матриця з* Q *рядками наступного вигляду*:

$$B_{p}=\Big[1\quad \ln L_{p}\quad \left(\ln L_{p}\right)L_{p}\quad \left(\ln L_{p}\right)K_{p}\quad \ldots$$

$$\ldots\left(\ln L_{p}\right)K_{p}^{M}L_{p}^{N}\quad \ln K_{p}\quad \left(\ln K_{p}\right)L_{p}\quad \left(\ln K_{p}\right)K_{p}\quad \ldots\quad \left(\ln K_{p}\right)K_{p}^{M}L_{p}^{N}\Big]^{T}$$

а $Y1_{p}=\ln Y_{p}$, $p=\overline{1,Q}$, *що отримується, якщо*

$$f\left(L,K,a\right)=a_{00}+a_{10}L+a_{01}K+a_{11}LK+\ldots+a_{MN}L^{M}K^{N},$$

$$g\left(L,K,b\right)=b_{00}+b_{10}L+b_{01}K+b_{11}LK+\ldots+b_{MN}L^{M}K^{N}.$$

*Доведення***.** Прологарифмувавши вираз (4), підставимо в нього вирази (5) та (6). Отримаємо:

$$\ln Y=\ln A+\left(\ln L\right)\cdot f\left(L,K,a\right)+\left(\ln K\right)\cdot g\left(L,K,b\right).$$

Підставляємо в цю рівність значення K_{p}, L_{p}, Y_{p} :

$$\ln Y_{p}=\ln A+\left(\ln L_{p}\right)\cdot f\left(L_{p},K_{p},a\right)+\left(\ln K_{p}\right)\cdot g\left(L_{p},K_{p},b\right),\ p=\overline{1,Q}. \qquad (8)$$

Систему (8) можна переписати у наступному вигляді:

$$jj\left(C\right)=$$

$$=\sum_{p=1}^{Q}\left(\ln A+\left(\ln L_{p}\right)\cdot f\left(L_{p},K_{p},a\right)+\left(\ln K_{p}\right)\cdot g\left(L_{p},K_{p},b\right)-\ln Y_{p}\right)^{2}\rightarrow \min_{\ln A,\ a_{im},\ b_{im}}$$

або у більш детальному вигляді

$$\ln A+\sum_{i=0}^{M}\sum_{m=0}^{N}a_{im}\left(\ln L_{p}\right)L_{p}^{i}K_{p}^{m}+\sum_{i=0}^{M}\sum_{m=0}^{N}b_{im}\left(\ln K_{p}\right)L_{p}^{i}K_{p}^{m}=\ln Y_{p}=Y1_{p}, \qquad (9)$$

$$p=\overline{1,Q}\quad .$$

Звідси маємо: $B^{T}\cdot C=Y1$, що приводить до системи:

$$\left(B\cdot B^{T}\right)\cdot C=B\cdot Y1,$$

з якої отримаємо доведення теореми:

$$C=\left(B\cdot B^{T}\right)^{-1}\cdot B\cdot Y1.$$

Теорему доведено.

Обчислювальний експеримент. Результати обчислювального експерименту, проведеного за даним методом з використанням сукупності даних Коба-Дугласа, наведені в таблиці. В результаті при $M=1$; $N=1$ для невідомих коефіцієнтів отримані наступні значення:

$\ln A=48,021$; $a_{00}=-15,515$; $a_{10}=0,074$; $a_{01}=0,06$; $a_{11}=-2,244\times10^{-4}$; $b_{00}=3,399$; $b_{10}=-0,059$; $b_{01}=-0,43$; $b_{11}=1,866\times10^{-4}$.

Таким чином, отримали наступну функцію:

$$Y = e^{48,021} \times L^{-15,515+0,074L+0,06K-2,244\cdot10^{-4}L\cdot K} \times K^{3,399-0,059L-0,43K+1,866\cdot10^{-4}L\cdot K} \quad (10)$$

Для цієї функції маємо такий графік відхилень розрахункових значень обсягів виробництва від фактичних (дивись рис. 2):

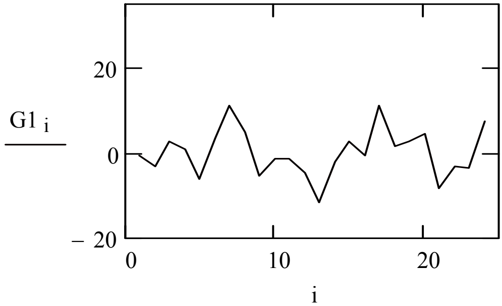


Рисунок 2 – Графік відхилення для нової функції.

де i – роки; $G1_i$ – відхилення розрахункового обсягу виробництва від фактичного в кожному році.

На рис. 2 бачимо, що функція (10) набагато краще наближується до фактичних значень, ніж функції (2) та (3) (дивись рис. 1).

Знайдемо середньоквадратичне відхилення для функцій (2), (3), (10):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{Q} \cdot E},$$

де $Q = 24$ – кількість років,

$$E = \sum_{p=1}^{Q} \left(\left(\ln A + \alpha \cdot \ln L_p + \beta \cdot \ln K_p \right) - \ln Y_p \right)^2$$ – для функцій (2), (3)

або

$$E = \sum_{p=1}^{Q} \left(\left(\ln A + f\left(L_p, K_p, a\right) \cdot \ln L_p + g\left(L_p, K_p, b\right) \cdot \ln K_p \right) - \ln Y_p \right)^2 \; –$$

– для функції (10).

Таким чином, ми розрахували середньоквадратичне відхилення, яке склало для функції (2) – $\sigma_1 = 0,054$, для функції (3) – $\sigma_2 = 0,053$, та для функції (10) – $\sigma_3 = 0,034$, і це також підтверджує, що функція (10) набагато краще наближується до фактичних значень, ніж функції (2) та (3).

Згідно з теоремою (3) статті [3] знайдемо частинні коефіцієнти еластичності для функції (10). Візьмемо похідні від функцій $f\left(L, K, a\right)$ та $g\left(L, K, b\right)$:

$$DF(L, K, a) = \frac{d}{dK} f\left(L, K, a\right),$$

$$DG(L,K,b) = \frac{d}{dL} g\left(L,K,b\right).$$

Згідно з формулою (7) статті [3] знайдемо частинні коефіцієнти еластичності по L та по K, які є дивідірами другого роду по L та по K відповідно [3,5]:

$$E_L(L,K,a,b) = \xleftrightarrow{\frac{\delta Y(L,K,a,b)}{\delta L}} = f\left(L,K,a\right) + L \cdot \left(\int \frac{DG(L,K,b)}{K} dK \right)$$

$$E_K(L,K,a,\, b) = \xleftrightarrow{\frac{\delta Y(L,K,\, a,b)}{\delta K}} = g\left(L,K,b\right) + K \cdot \left(\int \frac{DF(L,K,a)}{L} dL \right)$$

Спростивши ці функції отримаємо:

$$E_L\left(L,K,a,b\right) = K \cdot a_{10} + L \cdot a_{01} + a_{00} + K \cdot L \cdot a_{11} + K \cdot L \cdot b_{11} + L \cdot \ln K \cdot b_{01}, \quad (11)$$

$$E_K\left(L,K,a,b\right) = K \cdot b_{10} + L \cdot b_{01} + b_{00} + K \cdot L \cdot a_{11} + K \cdot L \cdot b_{11} + K \cdot \ln L \cdot a_{10}, \quad (12)$$

де E_L, E_K – частинні коефіцієнти еластичності для функції (10) по L та по K відповідно.

Таким чином частинні коефіцієнти еластичності за змінними L та K у формулі (4) – (6) згідно з твердженнями роботи [3] є функціями, які залежать від змінних L та K, оскільки коефіцієнти $a_{11} = -2,244 \times 10^{-4}$ та $b_{11} = 1,866 \times 10^{-4}$ порівняно з коефіцієнтами $a_{00} = -15,515$ та $b_{00} = 3,399$ є відносно малими.

Висновки. Таким чином, в даній роботі вперше запропоновано проводити математичне моделювання економічних процесів за допомогою узагальнення формули Коба-Дугласа, в якому виробнича функція має частинні коефіцієнти еластичності за змінною L та за змінною K не сталі, а змінні. Запропоновано метод побудови відповідної регресійної моделі і вперше показано за допомогою обчислювального експерименту, що в узагальненій функції Коба-Дугласа, параметри якої знайдені за допомогою даних, які використані *Кобом* і *Дугласом* в їх спільній роботі [1], приводять до змінних частинних коефіцієнтів еластичності, кожний з яких залежить від обох змінних.

Список літератури: **1**. *Cobb C.W., Douglas P.H.* A Theory of Production //American Economic Review. – 1928. – December. – p. 139-165. **2**. *Jesus Felipe, F. Gerard Adams* A Theory of Production. The estimation of the Cobb-Douglas function: a retrospective view // Eastern Economic Journal. – 2005. – Summer, Vol. 31, №3. – p. 427 – 445. **3**. *Артюх М.В., Литвин О.М.* Деякі теореми про виробничі функції від двох змінних зі змінними коефіцієнтами еластичності та їх застосування // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – №2. – с. 23-29. **4**. *Клейнер Г.Б.* Производственные функции: теория, методы, применение. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с. **5**. *Литвин О.М.* Дивідіріальні та мультигральні числення. Монографія. – К.: Наук. думка, 2006. – 144 с.

Надійшла до редколегії 20.05.2012