МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯИ НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
"ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ"

Лапузина Е.Н., Лобода А.И.

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
как учебное пособие для студентов высших учебных заведений

Харьков НТУ "ХПИ" 2009

1

АРИФМЕТИКА
(начальные сведения)

Лексика раздела

арифметическое действие	arithmetic operation	四则算术
больше, чем...	bigger than...	大于
величина (дроби)	value (of fraction)	数
во сколько раз больше...	how many times... is bigger than	大几倍
выполнить	carry out; do	完成
вычислить	calculate	计算出
вычитаемое	subtrahend	被减数
вычитание	subtraction	减法
данный	given	给
действие	operation	运算;操作
деление	division	除法
делимое	dividend	除数
делимость чисел	divisibility of numbers	除的尽的数
делитель	divisor	被除数
дробная часть	fractional part	分数部分
дробь	fraction	分数
бесконечная десятичная дробь	infinite decimal fraction	无限小数
десятичная дробь	decimal fraction	小数
конечная десятичная дробь	limited decimal fraction	有限小数
неправильная дробь	improper fraction	假分数
обратная дробь	inverse fraction	倒数
обыкновенная дробь	common fraction	一般分数,常见的分数

правильная дробь	proper fraction	真分数
смешанная периодическая дробь	mixed periodic fraction	无序循环小数
точная десятичная дробь	exact decimal fraction	精确小数
чистая периодическая дробь	pure decimal fraction	纯粹的周期性循环小数
если	if	假如
если..., то...	if..., then...	如果...那么...
задача	problem	练习
закрыть (скобки)	close (brackets)	反括号
записать	write down	列入
запятая	decimal point; comma	小数点
знак	sign	符号;记号
десятичный знак	decimal place (sign)	小数符号
знаменатель	denominator	分母
измениться	change	改变
использовать	use	使用
каждый	every; each	每,每一个
математика	mathematics	数学
математические знаки	mathematical signs	数学符号
меньше	smaller	小
меньше, чем...	less than...	小于
место	place	位
множитель	multiplier	乘数
простой множитель	prime factor	简单的乘数
на сколько больше...	how much bigger than...	大多少
наибольший общий делитель (НОД)	highest common factor (HCF)	最大公约数
наименьшее общее кратное (НОК)	least common multiple (LCM)	最小公倍数
начало	beginning	开始
несколько	several; some	一点,几个, 有些
общий	common	共同的普通的
одинаковые	identical	相同的
основной	basic	原理
остаток	remainder	余数

открыть (скобки)	open (brackets)	开括号
относиться	relate	比，有关联
отношение	ratio	比例
переносить	transport	代入
период (дроби)	period (of fraction)	有序循环小数
показывать	show	解
половина	half	一半
порядок действий	order of operation	运算顺序
последний	last	最后
последовательно	step by step; orderly	逐步的，有秩序的
потому что	because	因为
приближенное значение	approximate value	约等于的值，近似数
приблизительно	approximately	约等号
приводить дроби к наименьшему общему знаменателю	reduce the fractions to the least common denominator	通分
признаки (делимости чисел)	criterios (of divisibility of numbers)	可除的尽的数，整除的数
пример	example	举例
произведение	product	乘积
пропорция	proportion	比例
крайний член пропорции	extreme term of proportion	比例外项
левая часть пропорции	left part of proportion	比例左项
неизвестный член пропорции	unknown part of proportion	比例中未知的项
перестановка членов пропорции	transposition of terms of proportion	移动比例中项
правая часть пропорции	right part of proportion	比例右项
производные пропорции	derived proportions	比例导出
средний член пропорции	mean term of proportion	比例中项
процент	percent	百分数
процентное отношение	percentage ratio	分数的百分率
равенство	equality	等式
равно (будет)	equal	等于

разложить (число на простые множители)	expand (number into prime factors)	分解
разность (чисел)	difference (of numbers)	差
разный	different	不同的
результат	result	结果
решение	solution	解
само на себя	by itself	自己除自己
свойство (дроби)	property (of fraction)	性质
складывать	add	相加
скобка	bracket	括号
квадратная скобка	square bracket	中括号
круглая скобка	round bracket	小括号
фигурная скобка	figure bracket	大括号
...столько..., сколько...	...as many..., as...	多少
слагаемое	item	加数
следовательно	therefore	因此;那么
сложение	addition	加法
сначала	from the beginning	从.....开始
сокращать	cancel; simplify	化简
составлять	constitute	组成
сравнить	compare	比较
сумма	sum	和
только	only	只有
точный	accurate; exact	精确的;确切的
уменьшаемое	minuend	减数
умножение	multiplication	乘法
умножить на...	multiply by...	乘以
формула	formula	图象
целое	whole	整数
цифра	figure	数字
частное	quotient	商
точное частное	exact quotient	准确的商
часть	part	整体的
часть от числа	part of number	数字的一部分
четверть	quarter	四分之一
числитель	numerator	分子
число	number	数字;数位

двузначное число	two digit number	二位数
кратное число	multiple of number	除得尽的;倍数的
многозначное число	many digit number	多位数
натуральное число	natural numbers	自然数
однозначное число	one digit number	一位数
простое число	prime number	素数
смешанное число	mixed number	混合数
составное число	composite number	合成的数字
число делится само на себя	number is divisible by itself	能被自己整除的数字
член	term	组成部分
чтобы (умножить дробь на дробь), нужно...	in order (to multiply fraction by another fraction) you ought to...	分数的乘法
это значит...	it means...	意思

1.1. Цифры и числа

Цифры – это математические знаки.

0 – это цифра; 1 – это тоже цифра; 9 – это тоже цифра.

Таблица 1.1 – Цифры

0 – нуль	1 – один	2 – два	3 – три	4 – четыре
5 – пять	6 – шесть	7 – семь	8 – восемь	9 – девять

Числа состоят из цифр (математических знаков).

Например, число 20 состоит из цифр "2" и "0". Число 321 состоит из цифр "3", "2" и "1".

Один знак = одна цифра = однозначное число.

Однозначное число *(или цифра)* – это число, которое состоит из одной цифры (одного знака).

Например, цифра 5 (пять) – это однозначное число. Цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – это однозначные числа.

Два знака = две цифры = двузначное число.

Двузначное число – это число, которое состоит из двух цифр (двух знаков).

Например, 23 (двадцать три) – это двузначное число. 10, 11, 12, 13 …. 99 – это двузначные числа.

Таблица 1.2 – Двузначные числа

10 – десять	11 – одиннадцать	12 – двенадцать
13 – тринадцать	14 – четырнадцать	15 – пятнадцать
	…	
20 – двадцать …	30 – тридцать …	40 – сорок …
50 – пятьдесят …	60 – шестьдесят …	70 – семьдесят …
	99 – девяносто девять	

Три знака = три цифры = трёхзначное число.

Трёхзначное число – это число, которое состоит из трёх знаков (трёх цифр).

Например, 390 (триста девяносто) – это трёхзначное число. 100, 101, … 999 – это трёхзначные числа.

Таблица 1.3 – Трёхзначные числа

100 – сто	101 – сто один …	119 – сто девятнадцать
	…	
200 – двести …	300 – триста …	400 – четыреста …
500 – пятьсот …	600 – шестьсот …	700 – семьсот …
800 – восемьсот …	900 – девятьсот …	912 – девятьсот двенадцать …
	999 – девятьсот девяносто девять	

Четыре знака = четыре цифры = четырёхзначное число.

Четырёхзначное число – это число, которое состоит из четырёх знаков (четырёх цифр).

Например, 5015 (пять тысяч пятнадцать) – это четырёхзначное число. 1000, 1001, … 9999 – это четырёхзначные числа.

Таблица 1.4 – Четырёхзначные числа

1000 – тысяча	1001 – тысяча один	1002 – тысяча два …
1030 – тысяча тридцать …	1300 – тысяча триста …	1990 – тысяча девятьсот девяносто…
…		
2000 – две тысячи …	3000 – три тысячи …	4000 – четыре тысячи …
5000 – пять тысяч …	6000 – шесть тысяч …	7000 – семь тысяч …
9999 – девять тысяч девятьсот девяносто девять		

Пять знаков = пять цифр = пятизначное число.

Пятизначное число – это число, которое состоит из пяти знаков (пяти цифр).

Например, 19 012 (девятнадцать тысяч двенадцать) – это пятизначное число. 10 000, 10 001, … 99 999 – это пятизначные числа.

Таблица 1.5 – Пятизначные числа

10000 – десять тысяч	10001 – десять тысяч один …	10020 – десять тысяч двадцать …
15050 – пятнадцать тысяч пятьдесят …	17070 – семнадцать тысяч семьдесят …	19900 – девятнадцать тысяч девятьсот …
…		
20000 – двадцать тысяч …	30000 – тридцать тысяч …	40000 – сорок тысяч …
50000 – пятьдесят тысяч …	60000 – шестьдесят тысяч …	70000 – семьдесят тысяч …
99999 – девяносто девять тысяч девятьсот девяносто девять		

Шесть знаков = шесть цифр = шестизначное число.

Шестизначное число – это число, которое состоит из шести знаков (шести цифр).

Например, 170 700 (сто семьдесят тысяч семьсот) – это шестизначное число. 100 000, 100 001, … 999 999 – это шестизначные числа.

Таблица 1.6 – Шестизначные числа

100000 – сто тысяч	100001 – сто тысяч один …	100020 – сто тысяч двадцать …
150050 – сто пятьдесят тысяч пятьдесят …	170700 – сто семьдесят тысяч семьсот …	199000 – сто девяносто девять тысяч …
…		
200000 – двести тысяч …	300000 – триста тысяч …	400000 – четыреста тысяч …
500000 – пятьсот тысяч …	600000 – шестьсот тысяч …	700000 – семьсот тысяч …
999999 – девятьсот девяносто девять тысяч девятьсот девяносто девять		

Семь знаков = семь цифр = семизначное число.

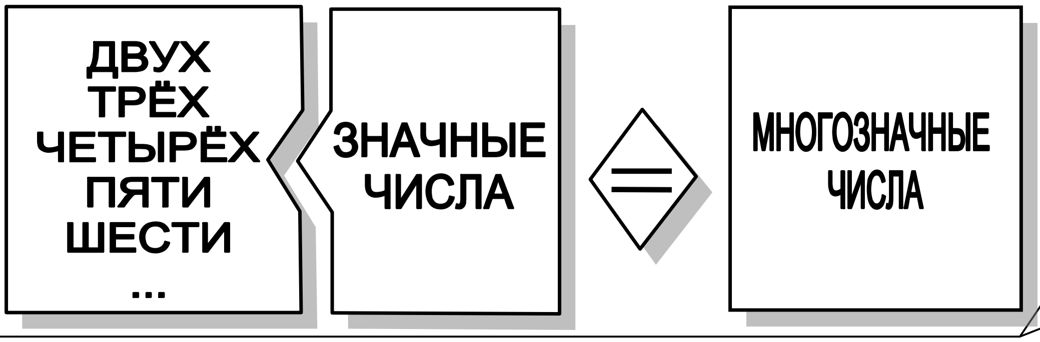
Семизначное число – это число, которое состоит из семи знаков (семи цифр).

Например, 8 540 012 (восемь миллионов пятьсот сорок тысяч двенадцать) – это семизначное число. 1000 000, 1000 001, … 9 999 999 – это семизначные числа.

Таблица 1.7 – Семизначные числа

1 000000 – один миллион	1 000001 – один миллион один …	1018080 – один миллион восемнадцать тысяч восемьдесят …
2 000000 – два миллиона …	3 000000 – три миллиона …	4 000000 – четыре миллиона …
…		
5 000000 – пять миллионов …	6 000000 – шесть миллионов …	7 000000 – семь миллионов …
8 000000 – восемь миллионов …	9 000000 – девять миллионов …	9 999999 – девять миллионов девятьсот девяносто девять тысяч девятьсот девяносто девять

ЗАПОМНИТЕ!



Ответьте на вопросы

1. Какие числа вы знаете?
2. Что такое трёхзначное число?
3. Из каких цифр состоят числа: 754, 8602, 9123876?

Задания для самостоятельной работы № 1

I. Исправьте ошибки (напишите правильно):

а) 56409, 40912, 76158 – это шестизначные числа;
б) 1122, 4014, 2019 – это однозначные числа.

II. Прочитайте числа:

12, 20, 13,30, 14, 40, 15, 50, 16, 60, 17, 70, 101, 199, 228, 555, 674, 1003, 2303, 4518, 5 600, 10300, 13 030, 21088, 101011, 854703, 1250361, 2004742, 3 008018, 4523050, 5800090, 21 412 020, 120666779.

III. Напишите словами числа:

20, 70, 712, 1030, 4515, 7212, 180800, 2000309, 70017700.

IV. Напишите цифрами числа:

двенадцать, девятнадцать, девятьсот восемь, три тысячи восемьсот восемьдесят, двадцать тысяч триста тридцать, два миллиона пятьдесят три, восемь миллионов шестьдесят, одиннадцать миллионов семьсот двадцать два.

V. Напишите (словами и цифрами) пять семизначных чисел.

VI. Заполните таблицу.

Таблица 1.8

0, 1, 2, ... 9	1 знак, 1 цифра	однозначные числа (цифры)
	2 знака, 2 цифры	двузначные числа
100, 101, … 999	3 знака, 3 цифры	
1000, … 9999		четырёхзначные числа
	5 знаков, 5 цифр	пятизначные числа
100 000, … 999 999		шестизначные числа
	7 знаков, 7 цифр	семизначные числа
		восьмизначные числа

1.2. Арифметические действия. Математические знаки

Таблица 1.9 – Арифметические действия. Математические знаки

<table>
<tr><th>Математические знаки</th><th colspan="2">Арифметические действия</th></tr>
<tr><td rowspan="2">"$+$" плюс</td><td>$5+3=8$
сложение</td><td>5 – это слагаемое
3 – это тоже слагаемое
8 – это сумма (результат сложения)</td></tr>
<tr><td colspan="2">слагаемое + слагаемое = сумма</td></tr>
<tr><td rowspan="2">"$-$" минус</td><td>$9-3=6$
вычитание</td><td>9 – это уменьшаемое
3 – это вычитаемое
6 – это разность (результат вычитания)</td></tr>
<tr><td colspan="2">уменьшаемое – вычитаемое = разность</td></tr>
<tr><td rowspan="2">"$\cdot$" умножить на</td><td>$5\cdot 3=15$
умножение</td><td>5 – это множитель (сомножитель)
3 – это тоже множитель
15 – это произведение (результат умножения)</td></tr>
<tr><td colspan="2">множитель · множитель = произведение</td></tr>
<tr><td rowspan="2">"$:$" разделить на</td><td>$12:3=4$
деление</td><td>12 – это делимое
3 – это делитель
4 – это частное (результат деления)</td></tr>
<tr><td colspan="2">делимое : делитель = частное</td></tr>
<tr><td colspan="3">$a=b$ – это равенство</td></tr>
<tr><td colspan="2">"=" будет (что?) или
равно (чему?)</td><td>Читаем так:
$5+x=10$ "пять плюс икс будет десять"
или "пять плюс икс равно десяти"</td></tr>
<tr><td colspan="3">$a>b$, $a<b$, $a\geq b$, $a\leq b$ – это неравенства</td></tr>
<tr><td colspan="2">">" больше, чем (что?)
"<" меньше, чем (что?)
"≥" больше или равно (чему?)
"≤" меньше или равно (чему?)</td><td>Читаем так:
$17-y>3$ семнадцать минус игрек больше, чем три
$20\cdot z\leq 12$ двадцать умножить на "зэт" меньше или равно двенадцати</td></tr>
</table>

ЗАПОМНИТЕ!

Сравнение чисел	
12 > 2	
На сколько двенадцать больше, чем два?	Двенадцать больше, чем два на десять
Во сколько раз двенадцать больше, чем два?	Двенадцать больше, чем два в шесть раз
2 < 12	
На сколько два меньше, чем двенадцать?	Два меньше, чем двенадцать на десять
Во сколько раз два меньше, чем двенадцать?	Два меньше, чем двенадцать в шесть раз

Пример 1. Во сколько раз число 15 больше, чем число 3?
Решение. Найдём частное: 15:3 = 5.
Ответ. Число 15 больше, чем число 3 в пять раз.

Пример 2. На сколько число 15 больше, чем число 3?
Решение. Найдём разность: 15-3 = 12.
Ответ. Число пятнадцать больше, чем число три на двенадцать.

ЗАПОМНИТЕ!

Скобка (-и)		
Круглая (-ые)	Квадратная (-ые)	Фигурная (-ые)
Читаем так: открыть (что?) закрыть (что?)		
Круглую скобку	Квадратную скобку	Фигурную скобку

Пример 3. Прочитайте и вычислите: $\left\{\left[2\cdot\left(148-72:4\right)\right]+55\right\}:9$.

Читаем так: открыть фигурную и квадратную скобки; два умножить на; открыть круглую скобку; сто сорок восемь минус семьдесят два разделить на четыре; закрыть круглую и квадратную скобки; плюс пятьдесят пять; закрыть фигурную скобку; разделить на девять.

Решение. Сначала делаем действия в круглых скобках:

1 действие – деление: $72 : 4 = 18$.

2 действие – вычитание: $148 - 18 = 130$.

Потом делаем действия в квадратных скобках:

3 действие – умножение: $2 \cdot 130 = 260$.

Потом делаем действия в фигурных скобках:

4 действие – сложение: $260 + 55 = 315$.

5 действие – деление: $315 : 9 = 35$.

Ответ. 35.

ЗАПОМНИТЕ!

Правило порядка действий

Сначала выполняем действия в скобках. Внутри любых скобок сначала выполняем умножение или деление, потом сложение или вычитание последовательно.

Ответьте на вопросы

1. Какие математические знаки вы знаете?
2. Какие арифметические действия вы знаете?
3. Назовите правило порядка действий.
4. $a + b = c$ – это сложение. Как называются a, b, c?
5. $a - b = c$ – это вычитание. Как называются a, b, c?
6. $a \cdot b = c$ – это умножение. Как называются a, b, c?
7. $a : b = c$ – это деление. Как называются a, b, c?

Задания для самостоятельной работы № 2

I. Прочитайте примеры и назовите числа (см. табл. 1.9).

а) $45515 + 19212 = 64727$ $\quad$ $320 + 17700 = 18020$

$919412 + 555 = 919967$ $\quad$ $3892 + 16606 = 20498$

$818819 + 2220 = 821039$ $\quad$ $6905 + 112120 = 119025$

$4563890 + 987654 = 5551544$ $\quad$ $2349 + 654321 = 656670$

$616+717770=718386$ $\quad$ $920919+8888=930727$

$819264+550505=1369769$ $\quad$ $404414+111121=515535$

б) $589444-3118=586326$ $\quad$ $789666-12345=777321$

$601782-444414=157368$ $\quad$ $409419-607617=-198198$

$912920-1567344=-654424$ $\quad$ $34567-9876543=-9841976$

$39749-112120119=-112080370$ $\quad$ $295500-166160=129340$

$888808818-313303=888495515$ $\quad$ $20394-817263=-796869$

в) $712\cdot 236=168032$ $\quad$ $450\cdot 156=70200$

$654\cdot 741=484614$ $\quad$ $3521\cdot 98=345058$

$12\cdot 991=11892$ $\quad$ $77017\cdot 500=38508500$

$6321\cdot 54=341334$ $\quad$ $805\cdot 212=170660$

г) $237489:789=301$ $\quad$ $1544056:514=3004$

$450072:987=456$ $\quad$ $76770:19=4040$

$522702:639=818$ $\quad$ $1424277:1479=963$

$1126563:563=2001$ $\quad$ $48239100:6510=7410$

II. Ответьте на вопросы.

1. На сколько число 8 меньше, чем число 10?
2. На сколько число 90 больше, чем число 19?
3. Во сколько раз число 18 меньше, чем число 162?
4. Во сколько раз число 240 больше, чем число 12?

III. Напишите:

На сколько?	Во сколько раз?
$5<10$	$30<90$
$21<23$	$120>40$
$100>51$	$7<42$

IV. Напишите порядок действий и вычислите:

а) $(5555+82320:84-693)\cdot 66$;

б) $3208-87\cdot(67+62524:308)$;

в) $467915+137865:(31353-48\cdot 609)$;

г) $51003-(4968+709\cdot 52)+203$;

д) $612228+(53007-52275:615)$;

е) $(86\cdot 217+275116):859+279569$.

1.3. Простые и составные числа. Разложение чисел на простые множители. НОД и НОК. Признаки делимости чисел

Частное двух чисел может быть: точное и неточное.

$$\begin{array}{r|l} -\,20 & 5 \\ \underline{20} & 4 \\ 0 & \end{array}$$

4 – это частное.

4 – это ***точное частное***, потому что $4 \cdot 5 = 20$.

$$\begin{array}{r|l} -\,28 & 8 \\ \underline{24} & 3 \\ 4 & \end{array}$$

3 – это частное.

3 – это ***неточное частное***, потому что $3 \cdot 8 \neq 28$.

4 – это ***остаток***.

ЗАПОМНИТЕ!

$$a = bq + r, \quad 0 \le r < b,\ b \neq 0,$$

где a – это делимое; b– это делитель; q – это частное; r – это остаток.

Делитель числа a – это число b, на которое число a делится без остатка ($r = 0$).

Кратное числа a – это число, которое делится на число a без остатка ($r = 0$).

Например, $21 : 3 = 7$. Число 3 – это делитель числа 21; а число 21 – это кратное числа 3.

Числа 1, 2, 3, 4, 5 … – это ***натуральные числа***. Число 0 – это не натуральное число.

Числа 2, 3, 5, 7, 11, 19, 23 … делятся только на единицу (1) и сами на себя. Это простые числа.

Простые числа – это числа, которые имеют только два делителя.

Например, число 23 – это простое число, потому что 23 делится только на "1" и на "23". Следовательно, число 23 имеет только два делителя 1 и 23, то есть: $23:1=23$; $23:23=1$.

Числа 4, 6, 8, 9, 10, 12 … делятся на "1", сами на себя и на другие числа. Это составные числа.

Составные числа – это числа, которые имеют больше двух делителей.

Например, число 36 делится на 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Следовательно, число 36 имеет девять делителей.

1 (единица) – не простое и не составное число.

Составные числа можно разложить на простые множители.

Разложить число на простые множители – это значит записать его как произведение простых чисел.

Пример 4. Разложите число 27 на простые множители.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

Ответ. Числа 2, 2, 3 – это простые множители.

Общий делитель нескольких чисел – это число, на которое все данные числа делятся без остатка.

Например, число 18 делится на 2, 3, 3; число 24 делится на 2, 2, 2, 3. Общие делители чисел 18 и 24 – это 2 и 3. Среди всех делителей всегда есть наибольший. Так, наибольший делитель чисел 18 и 24 – это 6 ($2\cdot3=6$).

Наибольший общий делитель нескольких чисел (НОД) – это самое большое натуральное число, на которое делится каждое из данных чисел без остатка.

Пример 5. Найдите НОД чисел 45, 60, 75.

Решение. Разложим числа 45, 60, 75 на простые множители.

$$\left.\begin{array}{l}45=3\cdot 3\cdot 5\\ 60=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\\ 75=3\cdot 5\cdot 5\end{array}\right\}$$ Числа 3 и 5 – это общие множители.

$$\text{НОД}(45,\ 60,\ 75)=3\cdot 5=15$$

Ответ. $\text{НОД}(45,\ 60,\ 75)=15$.

Наименьшее общее кратное (НОК) нескольких чисел – это самое меньшее натуральное число, которое делится на каждое из данных чисел без остатка.

Пример 6. Найдите НОК чисел 5, 6 и 8.

Решение. Разложим числа 5, 6 и 8 на простые множители.

$5=5;\quad 6=2\cdot 3;\quad 8=2\cdot 2\cdot 2.\quad \text{НОК}(5,\ 6,\ 8)=5\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 2=120.$

Ответ. $\text{НОК}(5,\ 6,\ 8)=120$.

Пример 7. Найдите НОК чисел 72 и 108.

Решение. Разложим числа 72 и 108 на простые множители.

$72=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3;\quad 108=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3.$

$$\text{НОК}(72,108)=\mathrlap{\overbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}^{72}}2\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3}_{108}=216$$

Ответ. $\text{НОК}(72,108)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3=216$.

ЗАПОМНИТЕ!

$$\text{НОК}(a,b)=\frac{a\cdot b}{\text{НОД}(a,b)}$$

Пример 8. Найдите НОК чисел 360 и 70.

Решение. $\text{НОД}(360,\ 70)=10$. Используем формулу:

$$\text{НОК}(360,70)=\frac{360\cdot 70}{10}=2520.$$

Ответ. $\text{НОК}(360,70)=2520$.

<u>*Пример 9*</u>. Найдите НОК чисел 20 и 27.

Решение. Разложим числа 20 и 27 на простые множители:

$20 = 2\cdot 2\cdot 5;\qquad 27 = 3\cdot 3\cdot 3.$

Числа 20 и 27 не имеют общих множителей, значит:

$$\text{НОК}\left(20,\,27\right) = \overbrace{2\cdot 2\cdot 5}^{20}\cdot\underbrace{3\cdot 3\cdot 3}_{27} = 540$$

Ответ. $\text{НОК}\left(20, 27\right) = 540$.

НОК чисел, которые не имеют общих множителей – это произведение этих чисел.

Таблица 1.10 – Признаки делимости чисел

Делимость чисел	**Признаки делимости чисел**	**Примеры**
на "2"	Последняя цифра числа делится на 2 или равна нулю	12, 50, 348, 576, 4294, 30590 …
на "5"	Последняя цифра числа равна 5 или нулю	15, 80, 375, 1005 …
на "3"	Сумма цифр числа делится на 3	156, 222, 378, 1032, 15189 …
на "9"	Сумма цифр числа делится на 9	153, 252, 819, 3150, 5787 …
на "4"	Число, которое состоит из двух последних цифр данного числа, делится на 4 или две последние цифры числа – нули	112, 600, 724, 1084, 3048 …
на "25"	Число, которое состоит из двух последних цифр данного числа, делится на 25 или две последние цифры числа – нули	250, 400, 975, 1050, 5125 …
на "8"	Число, которое состоит из трех последних цифр данного числа, делятся на 8 или три последние цифры числа – нули	1008, 3032, 5120, 9000 …

Продолжение таблицы 1.10

Делимость чисел	Признаки делимости чисел	Примеры
на "125"	Число, которое состоит из трех последних цифр данного числа, делится на 125 или три последние цифры числа – нули	1375, 10125, 51000 …
на "6"	Число делится на 2 и на 3	126, 348, 750, 1068, 3163, 17844 …
на "7", "11", "13"	Разность между числом, которое состоит из трех последних цифр данного числа, и числом, которое состоит из остальных цифр этого числа, делится на 7, 11 или 13	1071; 55258 делятся на 7; 28501; 1353 делятся на 11; 1157; 5928 делятся на 13

Ответьте на вопросы.

1. Что называется делителем числа a?
2. Что называется кратным числа a?
3. Что такое простое число?
4. Что такое составное число?
5. Что такое НОД?
6. Что такое НОК?

Задания для самостоятельной работы № 3

I. Назовите однозначные простые числа. Назовите несколько однозначных составных чисел.

II. Прочитайте сначала простые, а потом составные числа:

5, 8, 9, 12, 13, 14. 17, 19, 21, 23, 25, 29, 31, 36, 42, 45, 47, 49, 51, 62, 67, 77, 83, 89, 90, 91, 95, 97, 101, 109.

III. Напишите все простые числа от 11 до 37. Назовите все составные числа от 10 до 30.

IV. Напишите все делители чисел: 12, 19, 27, 36.

V. Напишите делители чисел: 24, 30, 42.

Напишите общие делители чисел: 24, 30, 42.
Напишите наибольший общий делитель чисел: 24, 30, 42.

VI. Верно ли, что:

а) 5 – это делитель числа 45;
б) 16 – это делитель числа 8;
в) 27 – это кратное числа 3;
г) 6 – это кратное числа 12?

VII. Из чисел 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 напишите:

а) делители числа 20;
б) делители числа 16;
в) кратные числа 4;
г) кратные числа 3.

VIII. Напишите все двузначные числа, кратные числам: 8 и 11.

IX. Разложите на простые множители числа: 27, 36, 46, 72, 84, 100, 243, 368, 420, 1000.

1.4. Обыкновенные и десятичные дроби

1.4.1. Обыкновенные дроби

Обыкновенная дробь – это одна или несколько равных частей единицы. Например, дробь $\frac{1}{5}$ означает, что единица разделена на 5 равных частей и взята одна такая часть. Дробь $\frac{3}{4}$ означает, что единица разделена на 4 равные части и взяты три такие части (рис. 1.1).

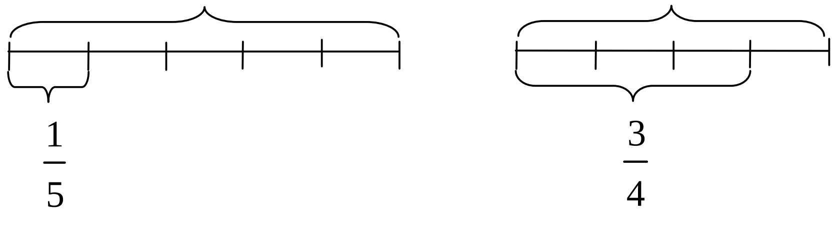


Рисунок 1.1

$\frac{1}{5}$ – это обыкновенная дробь, $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{25}{3}$; $\frac{101}{70}$ – это тоже обыкновенные дроби.

Таблица 1.11 – Числительные

	сколько?	**какой? (по порядку)**	**какая?**	**каких?**
1	один	первый	первая	первых
2	два	второй	вторая	вторых
3	три	третий	третья	третьих
4	четыре	четвертый	четвертая	четвертых
5	пять	пятый	пятая	пятых
6	шесть	шестой	шестая	шестых
7	семь	седьмой	седьмая	седьмых
8	восемь	восьмой	восьмая	восьмых
9	девять	девятый	девятая	девятых
10	десять	десятый	десятая	десятых
		...		
20	двадцать	двадцатый	двадцатая	двадцатых
		...		
100	сто	сотый	сотая	сотых
		...		
200	двести	двухсотый	двухсотая	двухсотых
		...		
500	пятьсот	пятисотый	пятисотая	пятисотых
		...		

ЗАПОМНИТЕ!

$\frac{a}{b}$ – это ***обыкновенная дробь***, "a" – ***числитель*** дроби, "b" – это ***знаменатель*** дроби.

Таблица 1.12 – Обыкновенные дроби

Пример	$\frac{\textbf{ńęîëüęî ?}}{\textbf{ęŕęŕ˙ ?}}$	**Пример**	$\frac{\textbf{ńęîëüęî ?}}{\textbf{ęŕęčő?}}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\text{îäíŕ}}{\text{âňîđŕ˙}}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{\text{äâĺ}}{\text{ňđĺňüčő}}$
$\frac{1}{11}$	$\frac{\text{îäíŕ}}{\text{îäčííŕäöŕňŕ˙}}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{\text{ňđč}}{\text{äĺâ˙ňűő}}$
$\frac{21}{40}$	$\frac{\text{äâŕäöŕňü îäíŕ}}{\text{ńîđîęîâŕ˙}}$	$\frac{74}{17}$	$\frac{\text{ńĺěüäĺń˙ň ÷ĺňűđĺ}}{\text{ńĺěíŕäöŕňűő}}$
$\frac{301}{50}$	$\frac{\text{ňđčńňŕ îäíŕ}}{\text{ď˙ňčäĺń˙ňŕ˙}}$	$\frac{105}{301}$	$\frac{\text{ńňîď˙ňü}}{\text{ňđčńňŕ ďĺđâűő}}$
$\frac{201}{1000000}$	$\frac{\text{äâĺńňč îäíŕ}}{\text{ěčëëčîííŕ˙}}$	$\frac{411}{10000}$	$\frac{\text{÷ĺňűđĺńňŕ îäčííŕäöŕňü}}{\text{äĺń˙ňčňűń˙÷íűő}}$

Если числитель дроби меньше чем знаменатель, то это ***правильная дробь***. Если числитель дроби больше или равен знаменателю, то это ***неправильная дробь***.

Если дробь неправильная, то ее можно записать как ***смешанное число***.

Например, $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{11}$; $\frac{24}{105}$ – это правильные дроби; $\frac{7}{3}$; $\frac{19}{5}$; $\frac{321}{12}$ – это неправильные дроби; $3\frac{1}{2}$; $7\frac{1}{3}$; $119\frac{5}{6}$; $2001\frac{3}{7}$ – это смешанные числа.

Смешанное число – это сумма целой и дробной части.

Например: $8\frac{2}{7} = \underbrace{8}_{\substack{\text{öĺëŕ˙}\\ \text{÷ŕńňü}}} + \underbrace{\frac{2}{7}}_{\substack{\text{äđîáíŕ˙}\\ \text{÷ŕńňü}}}$.

Чтобы записать неправильную дробь как смешанное число, нужно числитель дроби разделить на знаменатель.

ЗАПОМНИТЕ!

Смешанные числа читаем так:

$1\frac{3}{7}$ – одна цел**ая**, три седьмых;

$3\frac{1}{5}$ – три цел**ых**, одна пятая;

$21\frac{11}{30}$ – двадцать одна цел**ая**, одиннадцать тридцатых;

$54\frac{2}{21}$ – пятьдесят четыре цел**ых**, две двадцать первых.

<u>*Пример 10.*</u> Запишите неправильную дробь $\frac{169}{7}$ как смешанное число.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} -\,169 & 7 \\ \underline{14} & \overline{24} \\ -\,29 & \\ \underline{28} & \\ 1 & \end{array}$$

Ответ. $\frac{169}{7}=24\frac{1}{7}$

<u>*Пример 11*</u>. Запишите смешанное число как неправильную дробь.

Решение. $11\frac{3}{5}=\frac{11\cdot 5+3}{5}=\frac{58}{5}$.

Ответ. $\frac{58}{5}$.

ЗАПОМНИТЕ!

Основное свойство дроби. Величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одинаковое число, не равное нулю.

$$\frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n},\quad (m\neq 0,\ n\neq 0)$$

Например, $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot3}{3\cdot3}=\frac{6}{9}$; $\frac{18}{63}=\frac{18:9}{63:9}=\frac{2}{7}$.

Сократить дробь – это значит, что числитель и знаменатель дроби нужно разделить на одинаковое число, не равное нулю.

Например, $\frac{4}{6}=\frac{4:2}{6:2}=\frac{2}{3}$ – мы сократили дробь на "2";

$\frac{8}{16}=\frac{8:8}{16:8}=\frac{1}{2}$ – мы сократили дробь на "8".

Для того чтобы выполнять арифметические действия с обыкновенными дробями, нужно уметь приводить эти дроби к общему знаменателю.

Пример 12. Приведите дроби $\frac{3}{7}$ и $\frac{16}{5}$ к общему знаменателю.

Решение. Дроби $\frac{3}{7}$ и $\frac{16}{5}$ имеют разные знаменатели: 7 и 5. Используем основное свойство дроби и заменим эти дроби другими дробями. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{3}{7}$ на дополнительный множитель 5, получим: $\frac{3\cdot5}{7\cdot5}=\frac{15}{35}$; умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{16}{5}$ на дополнительный множитель 7, получим: $\frac{16\cdot7}{5\cdot7}=\frac{112}{35}$.

Ответ. $\frac{3}{7}=\frac{15}{35}$; $\frac{16}{5}=\frac{112}{35}$.

Такое преобразование называется ***приведением дробей к общему знаменателю***.

Пример 12 можно решить иначе. Например, дроби $\frac{3}{7}$ и $\frac{16}{5}$ можно привести к общему знаменателю 70: $\frac{3}{7}=\frac{3\cdot10}{7\cdot10}=\frac{30}{70}$; $\frac{16}{5}=\frac{16\cdot14}{5\cdot14}=\frac{224}{70}$,

или к общему знаменателю 105: $\frac{3}{7}=\frac{3\cdot15}{7\cdot15}=\frac{45}{105}$; $\frac{16}{5}=\frac{16\cdot21}{5\cdot21}=\frac{336}{105}$,

или к любому другому знаменателю, который делится одновременно и на 7 и на 5.

Таким образом, привести дроби к общему знаменателю можно многими способами. Но обычно удобно приводить дроби к ***наименьшему общему знаменателю*** (НОЗ).

НОЗ дробей равен наименьшему общему кратному (НОК) знаменателей данных дробей.

ЗАПОМНИТЕ!

Чтобы привести дроби к НОЗ, нужно:

1) найти НОК знаменателей дробей;
2) вычислить дополнительные множители (для этого нужно разделить НОК на каждый знаменатель);
3) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на дополнительные множители.

<u>*Пример 13.*</u> Приведите к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{7}{24}$ и $\frac{11}{30}$.

Решение. Найдем наименьшее общее кратное чисел 24 и 30:

$$\text{НОК}(24;30)=120.$$

$120:24=5$, поэтому, чтобы привести дробь $\frac{7}{24}$ к знаменателю 120, нужно ее числитель и знаменатель умножить на дополнительный множитель 5: $$\frac{7}{24}=\frac{7\cdot 5}{24\cdot 5}=\frac{35}{120}.$$

$120:30=4$, поэтому, чтобы привести дробь $\frac{11}{30}$ к знаменателю 120, нужно ее числитель и знаменатель умножить на дополнительный множитель 4: $$\frac{11}{30}=\frac{11\cdot 4}{30\cdot 4}=\frac{44}{120}.$$

Ответ. Мы привели дроби к НОЗ: $\frac{7}{24}=\frac{35}{120}$; $\frac{11}{30}=\frac{44}{120}$.

Таблица 1.13 – Действия с обыкновенными дробями и смешанными числами

Действие	Правило	Пример
Сложение дробей	Чтобы сложить дроби, нужно привести дроби к наименьшему общему знаменателю (НОЗ) и числители сложить.	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3+1\cdot 2}{6}=\frac{5}{6}$, 6 – это НОЗ.
Вычитание дробей	Чтобы вычесть дроби, нужно привести дроби к наименьшему общему знаменателю (НОЗ) и числители вычесть.	$\frac{1}{2}-\frac{3}{7}=\frac{1\cdot 7-3\cdot 2}{14}=\frac{1}{14}$, 14 – это НОЗ.
Умножение дробей	Чтобы умножить дроби, нужно умножить числители и полученный результат записать в числитель; умножить знаменатели и полученный результат записать в знаменатель. Если можно, то сократить дробь.	$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 5}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$.
Деление дробей	Чтобы разделить дробь на дробь, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй дроби. ($\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ – это обратные дроби.)	$\frac{1}{2}:\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$.
Сравнение дробей	Чтобы сравнить дроби, нужно привести их к НОЗ и сравнить их числители.	$\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{5}$. Приведем дроби к НОЗ: $\frac{25}{35}$ и $\frac{21}{35}$, $25>21$, поэтому $\frac{25}{35}>\frac{21}{35}\Rightarrow\frac{5}{7}>\frac{3}{5}$.
Сложение, вычитание, умножение и деление смешанных чисел	Чтобы выполнить действия (сложение, вычитание, умножение, деление) со смешанными числами, удобно записать их как неправильные дроби, а потом выполнить действия.	1) $7\frac{2}{9}-1\frac{1}{3}=\frac{65}{9}-\frac{4}{3}=$ $=\frac{65-12}{9}=\frac{53}{9}=5\frac{8}{9}$ 2) $1\frac{2}{5}:2\frac{7}{9}=\frac{7}{5}:\frac{25}{9}=$ $=\frac{7\cdot 9}{5\cdot 25}=\frac{63}{125}$

1.4.2. Десятичные дроби

Обыкновенная дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1000 ... – это ***десятичная дробь***. Десятичную дробь можно записать так: $\frac{37}{100} = 0,37$. Слева от запятой – ***целая часть*** десятичной дроби. Справа от запятой – ***десятичные знаки*** (десятые, сотые, тысячные...).

ЗАПОМНИТЕ!

Десятичные дроби читаем так:
0,1 – ноль целых, одна десятая;
2,05 – две целых, пять сотых;
31,123 – тридцать одна целая, сто двадцать три тысячных;
11,0019 – одиннадцать целых, девятнадцать десятитысячных.

Десятичные дроби бывают: ***конечные*** и ***бесконечные***.

Например, 3,125; 4,51; 21,01 – это конечные десятичные дроби. 0,333...; 2,0414141...; 5,543671... – это бесконечные десятичные дроби.

Бесконечные десятичные дроби бывают: ***периодические*** и ***непериодические***.

Например, периодические дроби: 0,444... = 0,(4); где 4 – это ***период*** дроби; 3,5151... = 3,(51), где 51 – это период дроби; 7,02333... = 7,02(3), где 3 – это период дроби.

Периодические дроби бывают: ***чистые*** и ***смешанные***.

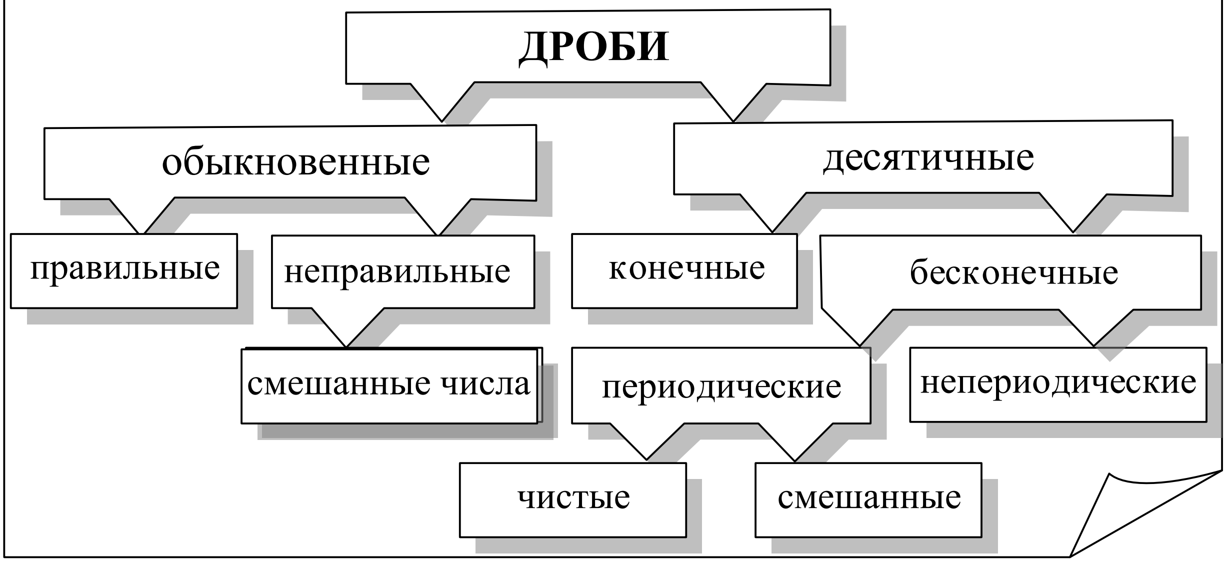
Например, чистые периодические дроби: 2,(32); 41,(05); 123,(5). Смешанные периодические дроби: 3,0(7); 70,24(51); 31,1(55).

Примером непериодических дробей являются: 3,14...; 5,17823...; 6,2345...

Таблица 1.14 – Действия с десятичными дробями

Действие	**Правило**	**Пример**
Сложение и вычитание	Чтобы сложить (вычесть) десятичные дроби, нужно написать равное число десятичных знаков у этих дробей. Потом сложить (вычесть) их как целые числа. Запятая должна быть под запятой.	$\begin{array}{r} 5{,}001 \\ -\ 3{,}200 \\ \hline 1{,}801 \end{array}$ $5,001-3,2=1,801$
Умножение	Чтобы умножить десятичные дроби, нужно умножить их как целые числа. В произведении после запятой поставить столько десятичных знаков, сколько их у двух сомножителей вместе.	1) $2,75\cdot 0,231=0,63525$, т.к. $275\cdot 0231=63525$; 2) $2,56\cdot 100=256$.
Деление	Чтобы разделить десятичную дробь (или целое число) на десятичную дробь, нужно в делимом и в делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько десятичных знаков в делителе. Потом выполнить деление на целое число. Запятую написать после деления целой части десятичной дроби.	1) $11,726:4,51=$ $=1172,6:451=2,6$; 2) $45:1,25=$ $=4500:125=36$.
Преобразование чистой периодической дроби в обыкновенную дробь	Чтобы записать чистую периодическую дробь как обыкновенную, нужно использовать формулу $0,(n_1n_2\ldots n_k)=\dfrac{n_1n_2\ldots n_k}{\underbrace{99\ldots9}_{k}}$	1) $0,12=\dfrac{12}{99}=\dfrac{4}{33}$; 2) $0,236=\dfrac{236}{999}$.
Преобразование смешанной периодической дроби в обыкновенную дробь	Чтобы записать смешанную периодическую дробь как обыкновенную, нужно использовать формулу: $0,m_1m_2\ldots m_l(n_1n_2\ldots n_k)=$ $=\dfrac{m_1m_2\ldots m_ln_1n_2\ldots n_k-m_1m_2\ldots m_l}{\underbrace{99\ldots9}_{k}\underbrace{00\ldots0}_{l}}$	1) $0,2(13)=\dfrac{213-2}{990}=$ $=\dfrac{211}{990}$; 2) $0,43(5)=\dfrac{435-43}{900}=$ $=\dfrac{392}{900}=\dfrac{98}{225}$.

ЗАПОМНИТЕ!



Ответьте на вопросы

1. Что такое правильная дробь?
2. Что такое неправильная дробь?
3. Какие дроби вы знаете?
4. Назовите правило сокращения дробей.
5. Назовите основное свойство дроби.
6. Что такое смешанное число?
7. Как сложить обыкновенные дроби?
8. Как вычесть обыкновенные дроби?
9. Как умножить обыкновенные дроби?
10. Как разделить обыкновенные дроби?
11. Как сложить десятичные дроби?
12. Как вычесть десятичные дроби?
13. Как умножить десятичные дроби?
14. Как разделить десятичные дроби?

Задания для самостоятельной работы № 4

I. Напишите словами, как читать дроби и смешанные числа.

$\frac{1}{35}$; $\frac{21}{50}$; $\frac{31}{60}$; $\frac{72}{101}$; $\frac{19}{20}$; $\frac{33}{74}$; $\frac{93}{47}$; $\frac{59}{100}$; $\frac{3}{200}$; $\frac{11}{600}$; $\frac{233}{1000}$; $10\frac{12}{17}$; $161\frac{8}{13}$; $250\frac{1}{30}$; 0,21; 3,5; 202,134; 70,0017; 0,(7); 0,(27); 1,8(3); 19,(063); 2,22(21).

II. Напишите цифрами.

Семь двенадцатых; три целых четыре седьмых; одна целая одиннадцать тридцать восьмых; восемьдесят девятнадцатых; одиннадцать целых двадцать семь тысячных; тринадцать целых девять десятитысячных; сто одна целая одиннадцать сороковых.

III. Запишите смешанные числа как неправильные дроби.

$20\frac{1}{3}$; $3\frac{2}{5}$; $8\frac{3}{4}$; $15\frac{3}{8}$; $12\frac{1}{19}$; $105\frac{4}{7}$.

IV. Запишите неправильные дроби как смешанные числа.

$\frac{72}{23}$; $\frac{135}{8}$; $\frac{41}{12}$; $\frac{89}{17}$; $\frac{28}{21}$; $\frac{328}{221}$.

V. Решите примеры.

а) $\left(4\frac{62}{125}+33{,}022:5\frac{1}{2}\right):\left(6{,}4-3\frac{1}{3}\cdot 0{,}24\right)$;

б) $\left[\left(20{,}2-76{,}84:8\frac{1}{2}\right)+\left(4{,}72-8{,}4:1\frac{7}{18}\right)\right]:7{,}9$;

в) $\left[10\frac{13}{20}-54{,}74:6\frac{4}{5}+\left(8\frac{2}{15}-3\frac{7}{15}\cdot 2\frac{1}{13}\right)\right]\cdot 3{,}75$;

г) $\left(12{,}06+4{,}5\cdot 3\frac{2}{3}\right):\left(11{,}15-3{,}75\cdot 2\frac{3}{5}\right)+142{,}1:3\frac{1}{2}$;

д) $10\frac{1}{3}-\dfrac{5\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{14}+15{,}03:1\frac{1}{2}-5{,}02+7{,}8:2\frac{2}{5}}{0{,}08\cdot 4\frac{1}{4}+2\frac{2}{7}\cdot 2{,}8-4\frac{6}{25}}$;

е) $\dfrac{12-3\frac{3}{7}\cdot 2{,}8}{3\frac{11}{20}+101{,}22:8\frac{2}{5}}+\dfrac{22-159{,}9:7\frac{4}{5}}{2{,}13+2{,}05\cdot 1\frac{2}{5}}$;

ж) $\dfrac{(1{,}09-0{,}29)\cdot 1\frac{1}{4}}{\left(18{,}9-16\frac{13}{20}\right)\cdot\frac{8}{9}}+\dfrac{(11{,}81+8{,}19)\cdot 0.02}{9:11{,}25}$.

VI. Напишите три правильные дроби, у которых знаменатель больше, чем числитель на "3".

VII. Напишите пять неправильных дробей, у которых знаменатель меньше, чем числитель на "4".

VIII. Сравните дроби.

а) $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{8}$; б) $\frac{4}{7}$ и $\frac{9}{11}$; в) $\frac{5}{6}$ и $\frac{8}{9}$; г) $\frac{5}{12}$ и $\frac{1}{4}$.

1.5. Отношения. Пропорции. Проценты

1.5.1. Отношения

Частное чисел a и b – это ***отношение*** этих чисел, где $b\neq 0$.

Отношение можно записать в виде: $\frac{a}{b}$ или $a:b$, где a и b– это члены отношения.

Читаем отношение $\frac{a}{b}=k$ так: "отношение a к b равно k".

Например, отношение $\frac{4}{2}=2$ читаем так: "отношение четырех к двум равно двум".

Таблица 1.15 – Отношения

Число	**Отношение**	
	чего? **(родительный падеж)**	**к чему?** **(дательный падеж)**
1	одного	одному
2	двух	двум
3	трех	трем
4	четырех	четырем
5	пяти	пяти
6	шести	шести
...	...	...
20	двадцати	двадцати
...	...	...
40	сорока	сорока
...	...	...

Если $\frac{a}{b} > 1$, то отношение показывает, во сколько раз a больше, чем b. Например, $\frac{15}{3} = 5$ (отношение пятнадцати к трем равно пяти). Это отношение показывает, что 15 в 5 раз больше, чем 3.

Если $\frac{a}{b} < 1$, то отношение показывает, какую часть a составляет от b. Например, $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ (отношение трех к двенадцати равно дроби "одна четвертая"). Это отношение показывает, что число 3 составляет $\frac{1}{4}$ часть от числа 12.

Если $\frac{a}{b} = 1$, то числа a и b равны. Например, $\frac{7}{7} = 1$ (отношение семи к семи равно единице (одному). Это отношение показывает, что числа равны между собой.

ЗАПОМНИТЕ!

Свойство отношения. Отношение не изменится, если члены отношения умножить или разделить на одинаковое число (это число не равно нулю).

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}=\frac{a:n}{b:n}, \text{ где } m\neq 0,\ n\neq 0.$$

Следовательно,

а) отношения можно сокращать;

б) отношение дробей можно записать как отношение целых чисел.

<u>*Пример 14.*</u> Запишите отношение дробей $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}$ как отношение целых чисел.

Решение. Найдем наименьший общий знаменатель: НОЗ=15. Умножим члены отношения на 15, получим:

$$\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\left(\frac{2}{3}\cdot 15\right):\left(\frac{4}{5}\cdot 15\right)=(2\cdot 5):(4\cdot 3)=10:12.$$

Ответ. $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=10:12$.

1.5.2. Пропорции

Пропорция – это равенство двух отношений.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ или } a:b=c:d; \qquad \text{где } b\neq 0;\ d\neq 0.$$

здесь a и d – это ***крайние члены*** пропорции; b и c – это ***средние члены*** пропорции; $a:b$ – это левая часть пропорции; $c:d$ – это правая часть пропорции.

Читаем пропорцию так: a относится к b, как c относится к d.

Например, пропорция $\frac{2}{3}=\frac{12}{18}$ читается так: два относится к трем, как двенадцать относится к восемнадцати; $\frac{6}{24}=\frac{8}{32}$ – шесть относится к двадцати четырем, как восемь относится к тридцати двум.

ЗАПОМНИТЕ!

Основное свойство пропорции. Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов пропорции:

$$\text{если } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ то } a\cdot d=b\cdot c, \text{ где } b\neq 0,\ d\neq 0.$$

Например, для пропорции $\frac{3}{5}=\frac{9}{15}$; числа 3 и 15 – это крайние члены пропорции; а числа 5 и 9 – это средние члены пропорции. По основному свойству пропорции запишем:

$$3\cdot 15=5\cdot 9, \text{ т.е. } 45=45.$$

Для пропорции $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=\frac{4}{6}:\frac{4}{9}$; $\frac{1}{2}$ и $\frac{4}{9}$ – это крайние члены пропорции; $\frac{1}{3}$ и $\frac{4}{6}$ – это средние члены пропорции, тогда

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6};\ \frac{4}{18}=\frac{4}{18}.$$

Чтобы найти неизвестный член пропорции, используем основное свойство пропорции.

<u>Пример 15.</u> Найдите неизвестный член пропорции $\frac{7}{11}=\frac{21}{x}$.

Решение. Используя основное свойство пропорции имеем: $7\cdot x=11\cdot 21$,

откуда: $x=\frac{11\cdot 21}{7}=33$

Ответ. $x=33$.

<u>*Пример 16*</u>. Найдите x из пропорции: $\dfrac{x+2}{7}=\dfrac{13}{2}$

Решение. $(x+2)\cdot 2=7\cdot 13$;

$$2x+4=91;$$

$$x=\frac{87}{2};$$

$$x=43{,}5.$$

Ответ. $x=43{,}5$

В пропорции $a:b=c:d$ можно переставлять:

1) средние члены: $a:c=b:d$;
2) крайние члены: $d:b=c:a$;
3) крайние члены a и d – на место средних членов b и c; средние члены b и c – на место крайних членов a и d, т.е.: $b:a=d:c$.

В каждой из полученных пропорций можно менять местами левую и правую части. Получим новые пропорции:

$$c:d=a:b;\ c:a=d:b;\ b:d=a:c;\ d:c=b:a.$$

Например, если дана пропорция: $3:9=11:33$, то можно записать такие новые пропорции: 1) $3:11=9:33$; 2) $33:9=11:3$; 3) $9:3=33:11$ 4) $9:33=3:11$; 5) $11:3=33:9$; 6) $33:11=9:3$; 7) $11:33=3:9$.

ЗАПОМНИТЕ!

Если дана пропорция $a:b=c:d$, то можно записать такие новые пропорции:

1) $\dfrac{a+b}{a}=\dfrac{c+d}{c}$; 2) $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$; 3) $\dfrac{a-b}{a}=\dfrac{c-d}{c}$;

4) $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{b}$; 5) $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$; 6) $\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{b}$.

Например, если дана пропорция: $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$, то можно составить следующие новые пропорции:

1) $\frac{3+5}{3}=\frac{6+10}{6}$; $\frac{8}{3}=\frac{16}{6}$; 2) $\frac{3+5}{5}=\frac{6+10}{10}$; $\frac{8}{5}=\frac{16}{10}$;

3) $\frac{3-5}{3}=\frac{6-10}{6}$; $\frac{-2}{3}=\frac{-4}{6}$; 4) $\frac{3-5}{5}=\frac{6-10}{10}$; $\frac{-2}{5}=\frac{-4}{10}$;

5) $\frac{3+5}{3-5}=\frac{6+10}{6-10}$; $\frac{8}{-2}=\frac{16}{-4}$; 6) $\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{10}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$; $\frac{18}{50}=\frac{9}{25}$.

1.5.3. Проценты

Процент – это одна сотая часть числа.

$$1\%=\frac{1}{100}=0,01,$$

% – это знак процента.

ЗАПОМНИТЕ!

Проценты

один процент	$\left.\begin{array}{l}21\\ 51\\ 101\end{array}\right\}$ процент
$\left.\begin{array}{l}\textit{два}\\ \textit{три}\\ \textit{четыре}\end{array}\right\}$ процента	$\left.\begin{array}{l}52\\ 73\\ 304\end{array}\right\}$ процента
$\left.\begin{array}{l}\textit{пять}\\ \textit{шесть}\\ \textit{семь}\\ \ldots\end{array}\right\}$ процентов	$\left.\begin{array}{l}16\\ 88\\ 316\\ \ldots\end{array}\right\}$ процентов

Проценты можно записать как дробь:

$40\%=\frac{40}{100}=0,4$; $100\%=\frac{100}{100}=1$; $252\%=\frac{252}{100}=2,52$.

Дробь можно записать как проценты:

$0,25 \cdot 100\% = 25\%$;   0,25 – это 25%;

$1,75 \cdot 100\% = 175\%$;   1,75 – это 175%.

Существует несколько видов задач на проценты. Рассмотрим их.

<u>Задача 1.</u> Найдите $x\%$ от числа A.

Решение. $x\%$ от числа A находим так: $\frac{A}{100} \cdot x = b$; здесь b – это $x\%$ от числа A.

Ответ. b – это $x\%$ от числа A.

<u>Пример 17</u>. Найдите 7% от числа 200.

Решение. $b = \frac{200}{100} \cdot 7 = 14$.

Ответ. 7% от числа 200 – это число 14.

<u>Задача 2</u>. Найдите число X, если $m\%$ процентов от числа X равны числу b.

Решение.

$$\begin{matrix} m\% \text{ – это } b \\ 100\% \text{ – это } X \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{m\%}{100\%} = \frac{b}{X} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{b \cdot 100\%}{m\%}$$

Ответ. $X = \frac{b \cdot 100\%}{m\%}$

<u>Пример 18</u>. Найти число X, если 5% от X равны 40.

Решение. $X = \frac{40 \cdot 100\%}{5\%} = 800$.

Ответ. $X = 800$.

<u>Задача 3.</u> Найдите, сколько процентов составляет число n от числа m (процентное отношение – $P\%$).

Решение. $P\% = \frac{n}{m} \cdot 100\%$.

Ответ. Число n составляет $P\%$ от числа m.

Процентное отношение показывает, сколько процентов одно число составляет от другого.

Пример 19. Найдите процентное отношение числа 120 и числа 320.

Решение. $P = \frac{120}{320} \cdot 100\% = 37,5\%$.

Ответ. Число 120 составляет 37,5% от числа 320.

Задача 4. Первоначальный вклад в банк равен a долларов. За год начисляется p процентов. Найдите сумму вклада через n лет.

Решение. Мы знаем, что в банке на вклад начисляют сложные проценты (проценты на проценты). Это значит, что если за год на вклад начислены проценты, то в следующем году проценты будут начисляться на сумму вклада плюс процентные деньги.

Через год сумма вклада будет: $a + a \cdot \frac{p}{100} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$, где a – первоначальная сумма вклада, p – проценты, начисленные за год.

Через 2 года сумма вклада будет:

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)+a\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{p}{100}=a\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2.$$

Через 3 года сумма вклада будет:

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2+a\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{p}{100}=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3.$$

Через n лет сумма вклада будет:

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n.$$

Ответ. $S = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$

ЗАПОМНИТЕ!

Формула сложных процентов: $S = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$,

где S – величина вклада через n лет; a – первоначальная величина вклада; p – проценты, начисленные за год; n – срок вклада.

Пример 20. Первоначальный вклад в банк равен 300 долларов. За год начисляется 3%. Найдите сумму вклада через 5 лет.

Решение. $S = 300\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)^5 = 300\cdot(1,03)^5 \approx 300\cdot 1,159 \approx 348$ (долларов).

Ответ. Сумма вклада через 5 лет будет равна приблизительно (≈) 348 долларов.

Ответьте на вопросы

1. Что такое отношение?
2. Что такое пропорция?
3. Что такое процент?
4. Что такое основное свойство пропорции?
5. Во сколько раз: 16 больше, чем 4;
   21 больше, чем 7;
   36 больше, чем 9?
6. Какую часть составляет: число 18 от числа 36?
   число 7 от числа 35?

Задания для самостоятельной работы № 5

I. Напишите, как прочитать пропорции:

а) $3:5=6:10$; в) $4:7=12:21$;
б) $18:9=10:5$; г) $6:11=18:33$.

II. Найдите x из пропорций:

а) $x:9=7:14$;

б) $4,2:0,7=24:x$;

в) $13\frac{1}{3}:1\frac{2}{3}=\frac{26}{5}:\frac{x}{5}$;

г) $(1,7-x):1,5=3,75:1,5$;

д) $1,25:0,4=1,35:0,5x$;

е) $\dfrac{0,5x+1}{1\frac{2}{7}}=\dfrac{2\frac{7}{9}x-0,7}{4}$;

ж) $\dfrac{1,2:0,375-0,2}{6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+0,8}=\dfrac{0,016:0,12+0,7}{x}$;

з) $\dfrac{0,125x}{\left(\frac{19}{24}-\frac{21}{40}\right)\cdot 8\frac{7}{16}}=\dfrac{\left(1\frac{28}{63}-\frac{17}{21}\right)\cdot 0,7}{0,675\cdot 2,4-0,02}$.

III. Найдите:

а) 120% от 42,5;

б) 800% от 0,125;

в) $\frac{7}{9}$% от 45;

г) 0,45% от 0,5.

IV. Найдите X, если:

а) 3,5% от X равны 21;

б) 210% от X равны 5,6;

в) $3\frac{3}{7}$% от X равны 4,5;

г) 1,25% от X равны 375.

V. Найдите процентное отношение чисел:

а) 1,4 и 0,7;

б) $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{3}$;

в) 0,12 и 0,38;

г) $\frac{2}{30}$ и 0,75.

VI. В библиотеке 5000 книг. 20% книг – это учебники. Сколько учебников в библиотеке?

VII. В группе 9 арабских студентов. Арабские студенты составляют 75% от числа студентов в группе. Сколько студентов в группе?

VIII. В общежитии живут 400 студентов, среди которых 260 студентов-иностранцев. Сколько процентов составляют иностранцы?

IX. Первоначальный вклад в сбербанк равен 400 грн. За год начисляется 3%. Найдите сумму вклада через 2 года.

2
МНОЖЕСТВА

Лексика раздела

бесконечный	infinite	无穷
действительный	real	实数
дополнение множества	addition of set	集合
интервал	interval	区间
иррациональный	irrational	无理数
конечный	finite	有限的
луч	ray	射线
множество	set	集合
бесконечное множество	infinite set	无限集合
конечное множество	final set	有限集合
пустое множество	empty set	空集
равносильные множества	equivalent sets	等值设置
числовое множество	numerical set	数字集合
эквивалентные множества	equivalent sets	等值设置(相当于集)
находиться	be	处于，在
объединение	union	并集
объединение множеств	union of sets	**联集**
отрезок	segment	线段
пересечение	intersection	交集
пересечение множеств	crossing of sets	穿越集合(交叉点集合)
подмножество	subset	子集
принадлежать	belong	属于
пустой	empty	空集
рациональный	rational	有理数
число	number	数
нечетное число	odd number	奇数
целое число	whole number	整数

четное число	even number	偶数
числовая ось	numeral axis	轴
числовой	numerical	数字的
элемент	element	元素;部分
элемент множества	element of set	元素集

2.1. Понятие множества

Понятие множества в математике не определяется. Например, множество студентов в группе, множество книг в библиотеке и так далее.

Множество представляют как совокупность объектов (предметов), которые объединены по общему признаку.

Множества состоят из элементов. Так, a_1, a_2, a_3 ... – это элементы множества A.

Множества обозначают большими буквами латинского алфавита: A, B, C и т.д.

Пишут так: $A=\{a_1, a_2, a_3...\}$. Читают так: "Множество A состоит из элементов a_1, a_2, a_3 и так далее".

ЗАПОМНИТЕ!

Если элемент a_1 принадлежит множеству A, то записывают:

$$a_1 \in A.$$

Пустое множество – это множество, у которого нет элементов. Пустое множество обозначают символом $\varnothing$.

Например, множеством решений неравенства $x^2 < -16$ будет $\varnothing$ (пустое множество).

Множества бывают ***конечные*** и ***бесконечные***. Например, $B = \{1, 30, 35, 41\}$ – это конечное множество; $N = \{1, 2, 3, 4, \mathbf{K}\}$ – это бесконечное множество.

Множество четных чисел $K = \{2, 4, 6 \ldots 2n \ldots\}$ или множество нечетных чисел $A = \{1, 3, 5 \ldots 2n+1 \ldots\}$ – это бесконечные множества.

Множества, элементами которых являются числа, называются ***числовыми множествами***. К таким множествам относятся:

1. $N = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$ ***– множество натуральных чисел***.

Например, $4019 \in N$; $0 \notin N$; $-32 \notin N$.

2. $Z = \{\mathbf{K} -2, -1, 0, 1, 2\ \mathbf{K}\}$ ***– множество целых чисел***.

Например, $-17077 \in Z$; $0,27 \notin Z$; $\frac{1}{31} \notin Z$.

Положительные числа – это числа со знаком "+". ***Отрицательные числа*** – это числа со знаком "–".

3. $Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle/ m \in Z;\ n \in N \right\}$ ***– множество рациональных чисел***.

Читаем эту запись так: "Множество Q состоит из элементов вида $\frac{m}{n}$, таких что m принадлежит множеству Z (целые числа), а n принадлежит множеству N (натуральные числа)".

Например, $-0,125 \in Q$; $7 \in Q$; $-1\frac{3}{7} \in Q$; $\frac{8}{9} \in Q$; $0,57722\ldots \notin Q$.

Целые числа, положительные и отрицательные числа, обыкновенные дроби, конечные десятичные дроби, бесконечные периодические дроби – это ***рациональные числа***.

4. Множество I – ***множество иррациональных чисел***. Бесконечные непериодические дроби – это иррациональные числа.

Например, $\sqrt{2} = 1{,}41421356... \in I$; $p = 3{,}1415926... \in I$; $e = 2{,}71828... \in I$.

5. Множество R – ***множество действительных чисел***. Все рациональные и иррациональные числа – это действительные числа (рис. 2.1).

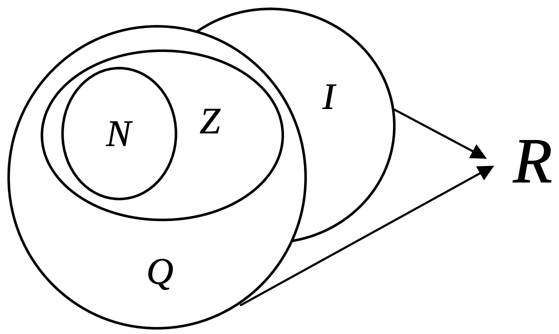


Рисунок 2.1

Действительные числа можно показать точками на числовой оси (рис. 2.2).

Числовая ось (или ***координатная прямая***) – это прямая линия, на которой выбрано начало отсчета (точка "О"), единичный отрезок и направление.

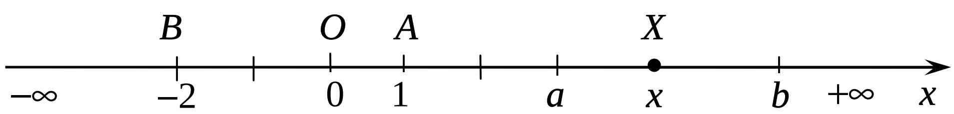


Рисунок 2.2

Направление слева направо на координатной прямой называется положительным. А направление справа налево (т.е. противоположное) называется отрицательным.

Каждому действительному числу соответствует единственная точка числовой оси.

Если точка N на числовой оси соответствует числу r, то это число называют координатой точки N и пишут: $N(r)$.

Например, точка A изображает число 1; тогда 1 – это координата точки A; пишут так: $A(1)$; точка B изображает число (-2), тогда (-2) – это координата точки B: $B(-2)$.

Возьмем два числа a и b, такие, что $a<b$. Отметим на координатной прямой соответствующие им точки.

Любая точка X, которая лежит между a и b, соответствует числу, которое удовлетворяет неравенству: $a<x<b$.

Множество всех чисел, которые удовлетворяют неравенству $a<x<b$, называется ***открытым интервалом*** $]a; b[$ или $(a; b)$.

Множество всех чисел, которые удовлетворяют неравенству $a \le x \le b$, называется ***закрытым интервалом*** или ***отрезком*** $[a; b]$.

ЗАПОМНИТЕ!

$[a; b]$ или $a \le x \le b$ – это закрытый интервал, или отрезок;

$]a; b[$ или $a<x<b$ – это открытый интервал;

$[a; b[$ или $a \le x < b$, $]a; b]$ или $a<x \le b$ – это полуинтервалы (полуоткрытый или полузакрытый интервалы).

Интервалы и отрезки – это конечные числовые ***промежутки***. Существуют и бесконечные числовые промежутки.

Множество всех чисел x, которые удовлетворяют неравенству $x \ge a$, называются ***числовым лучом***: $[a; +\infty[$.

$]-\infty; b]$ – это также числовой луч, если $x \le b$.

Числовые лучи – это бесконечные числовые промежутки.

Например, множество действительных чисел R можно обозначать так: $]-\infty; +\infty[$. Знак " $+\infty$ " читают: "плюс бесконечность"; знак " $-\infty$ " читают: "минус бесконечность".

Геометрически числовые промежутки можно представить так (табл. 2.1):

Таблица 2.1 – Числовые промежутки

Промежуток	**Геометрическое изображение**	**Запись промежутков при помощи неравенств**
Интервал		$]a; b[= \{x / x \in R,\ a < x < b\}$
Отрезок		$[a; b] = \{x / x \in R,\ a \le x \le b\}$
Полуоткрытый (полузакрытый) интервал		$]a; b] = \{x / x \in R,\ a < x \le b\}$
		$[a; b[= \{x / x \in R,\ a \le x < b\}$
Луч		$[a; +\infty[= \{x / x \in R,\ x \ge a\}$
		$]-\infty; b] = \{x / x \in R,\ x \le b\}$

2.2. Действия с множествами

Чтобы описать операции над множествами, используем рисунки 2.3 – 2.6, которые называют диаграммами Эклера-Венне.

Множество B называется ***подмножеством*** множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A. Записывают так: $B \subset A$ (рис. 2.3).

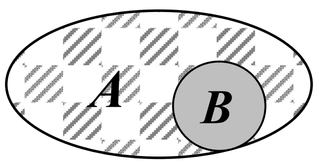


Рисунок 2.3

Например, а) множество натуральных чисел N – это подмножество множества целых чисел Z. Записывают так: $N \subset Z$;

б) отрезок $[-1; 3]$ – это подмножество отрезка $[-4; 5]$. Записывают так: $[-1; 3] \subset [-4; 5]$;

в) $N \subset Z \subset Q \subset R$. Множество натуральных чисел (N) является подмножеством множества целых чисел (Z); множество Z является подмножеством множества рациональных чисел (Q); множество Q – подмножество множества действительных чисел (R).

ЗАПОМНИТЕ!

Объединение множеств A и B – это такое множество C, которое состоит из всех элементов данных множеств. Записывают так: $C = A \cup B$ (рис. 2.4).

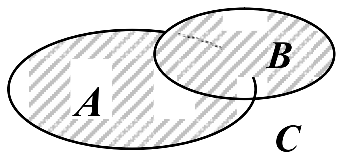


Рисунок 2.4

Например, а) множество действительных чисел R – это объединение множества рациональных чисел Q и иррациональных чисел I. Записывают так: $I \cup Q = R$;

б) если $A = \{2; 4; 6; 8\}$, $B = \{6; 8; 10; 12\}$,

то $C = A \cup B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$;

в) $[-1; 7] \cup [0; 9] = [-1; 9]$.

ЗАПОМНИТЕ!

Пересечение множеств A и B – это такое множество P, которое состоит из общих элементов данных множеств: $P = A \cap B$ (рис. 2.5).

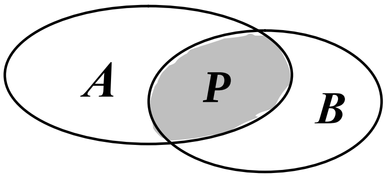


Рисунок 2.5

Например, а) если $A=\{0;1;3;5\}$, $B=\{1;2;3;4\}$, то $P=A\cap B=\{1;3\}$;

б) $[-1;1]\cap\,]0;3[\,=\,]0;1]$;

в) если $A=\{1;\,2;\,3;\,4;\,6;\,12\}$ – это множество делителей числа 12, $B=\{1;\,2;\,3;\,6;\,9;\,18\}$ – это множество делителей числа 18, то множество $C=A\cap B=\{1;\,2;\,3;\,6\}$ – это множество общих делителей чисел 12 и 18;

г) пересечение множества рациональных чисел Q и иррациональных чисел I – это пустое множество: $Q\cap I=\varnothing$.

Множество общих делителей чисел a и b – это пересечение множеств делителей данных чисел.

ЗАПОМНИТЕ!

Разность множеств A и B – это такое множество S, которое состоит из всех элементов множества A, таких, что не принадлежат множеству B, т.е. $S=A\setminus B$ (рис. 2.6).

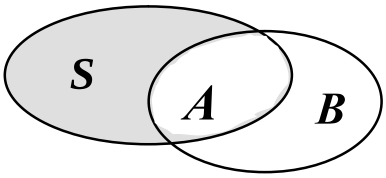


Рисунок 2.6

Например, если $A=[-9;5]$, $B=[0;11]$, то $S=A\setminus B=[-9;\,0[$.

Ответьте на вопросы

1. Какие множества вы знаете?
2. Какие числовые множества вы знаете?
3. Что такое пустое множество?
4. Какие интервалы вы знаете?
5. Что такое подмножество?
6. Что такое пересечение множеств?
7. Что такое объединение множеств?
8. Что такое разность множеств?
9. Какие из данных ниже множеств конечные, а какие бесконечные:
   - множество натуральных чисел;
   - множество простых чисел;
   - множество четных чисел;
   - множество молекул воды в океане;
   - множество дней недели;
   - множество студентов на подготовительном факультете;
   - множество четных делителей числа 21?
10. Какие записи верные: $31 \in N$; $6 \notin Q$; $\frac{1}{3} \notin N$; $3,(2) \in Q$; $6,28 \in N$; $-3013 \notin Z$; $0 \in Q$; $7,23458... \in Q$; $10,7(16) \in Z$; $28 \in I$; $-32 \notin I$.

Задания для самостоятельной работы № 6

I. Даны множества: N – натуральных чисел; N_1 – натуральных чисел, которые заканчиваются цифрой "7"; P – множество четных натуральных чисел.

Покажите символом $\in$, каким из данных множеств принадлежат числа: 18 ; 317 ; -16 ; $-28\frac{1}{2}$; 228 ; -457 ; 245 ; 697 ; 324 . Символом $\notin$ покажите, каким множествам не принадлежат эти числа.

II. Напишите пять первых элементов следующих множеств:

1. $A=\{x/x=2p;\ p\in N\}$; 2. $B=\{x/x=2p+1;\ p\in N\}$;
3. $C=\{x/x=5p;\ p\in N\}$.

III. Дано множество чисел: $A=\left\{x\middle/ x=\dfrac{n^2+1}{n^2+4};\ n\in N\right\}$.
Определите, принадлежат ли числа $\frac{2}{5}$; $\frac{17}{20}$; $-\frac{1}{7}$; $\frac{5}{6}$; $-\frac{2}{3}$; $\frac{50}{53}$; $-\frac{16}{25}$; $\frac{37}{40}$; $-\frac{15}{16}$; $\frac{10}{13}$; $\frac{122}{125}$; $\frac{145}{148}$; $-\frac{26}{35}$ множеству A?

IV. Дано множество $A=\left\{x\middle/ x=\dfrac{n^2+7}{n^3+15};\ n\in N\right\}$. Напишите три числа, которые принадлежат множеству A.

V. Назовите числовые множества, покажите их на числовой оси и запишите в виде неравенств:

1) $]3;+\infty[$; 2) $]-\infty;2[$; 3) $[-2;4]$;
4) $]-3;3[$; 5) $[0;5]$; 6) $]-4;0[$;
7) $[-2;4[$; 8) $]-\infty;-3]$; 9) $[0;7[$.

VI. Назовите наибольшее целое число, которое принадлежит интервалу:

1) $[-12;-9]$; 2) $[-1;17[$; 3) $]-8;-5]$; 4) $]-\infty;31]$; 5) $]-\infty;+\infty[$.

VII. Какие из целых чисел принадлежат интервалу:

1) $[0;8]$; 2) $]-3;3[$; 3) $]-5;3[$; 4) $]-4;8]$; 5) $]-4;1[$.

VIII. Дано множество $K=\{21;54;153;171;234\}$. Из элементов множества K составьте подмножества:

1) чисел, которые делятся на 7;
2) чисел, которые делятся на 9;
3) чисел, которые не делятся на 4;
4) чисел, которые не делятся на 5.

IX. Найдите пересечение множеств решений двух неравенств:

1) $x > -2$ и $x > 0$; 2) $x > 3{,}7$ и $x \le 4$; 3) $x \ge 5$ и $x < -7\frac{1}{2}$;

4) $|x| \ge 3$ и $2 < x < 5$; 5) $-2 < x < 4$ и $1 \le x \le 7{,}2$.

X. Даны множества:

$P = \{x/x \in N,\ x < 20,\ x - \text{нечетное число}\}$;

$Q = \{x/x \in N,\ x < 20,\ x - \text{четное число}\}$;

$S = \{x/x \in N,\ x < 20,\ x \text{ делится на } 3\}$;

$T = \{x/x \in N,\ x < 20,\ x \text{ делится на } 4\}$.

Назовите все элементы данных множеств и множеств: $Q \cap T$; $Q \cap S$; $P \cap S$; $P \cap Q$; $Q \cap S \cap T$.

XI. Найдите объединение:

1) множеств M и P, если $P = \{1;\ 2;\ 5;\ 8;\ 9\}$; M – множество простых чисел, меньших 7;
2) P – множество натуральных чисел, меньших 15; M – множество простых чисел, меньших 15.

XII. Множество D – это объединение множества двузначных натуральных чисел и множества натуральных чисел от 1 до 20. Принадлежат ли множеству D числа: 15; 99; 100; 5; 7? Запишите ответ с помощью знаков $\in$ и $\notin$.

XIII. Покажите на числовой оси объединение множеств A и B, если:

1) $A = \{x/x > -3\}$; $B = \{x/x < -5\}$;
2) $A = \{x/-2 \le x \le 0\}$; $B = \{x/-1 \le x \le 4\}$;
3) $A = \{x/3{,}5 \le x < 1\}$; $B = \{x/-7 < x < 412\}$.

XIV. Найдите объединение интервалов:

1) $]-\infty;\ 4]$ и $[-2;\ +\infty[$; 2) $[2;\ 4]$ и $[3;\ 6]$;

3) $]-1;\ 5[$ и $]1;\ 7[$; 4) $[-8;\ 8]$ и $[-6;\ 6]$.

XV. Из множества $\left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{5}; \frac{5}{2}; \frac{7}{7}\right\}$ выделите подмножество: правильных дробей; неправильных дробей; целых чисел; смешанных чисел.

XVI. Пусть: 1) $A = \left]-\infty; 1\right[$; $B = [-3; 6]$;

2) $A = [2; 5]$; $B = \left]3; 5\right[$;

3) $A = \left]-\infty; 3\right]$; $B = \left]-1; 14\right[$.

Найдите: $A \setminus B$.

3

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

Лексика раздела

A^2	A square	A 的平方
A^3	A cube	A 的立方
алгебраическая дробь	algebraic fraction	代数分数
в степени n	of the n power	N 次方
вид	form	形式
возводить (в степень)	raise (to a power)	求.....
выделить полный квадрат	separate complete square	完全一元二次方程的分解
выносить общий множитель за скобки	put common factor outside the brackets	把因子从括号里解出
группировать	group	分组;组合
доказать, что…	prove that…	证明
дробное выражение	fractional expression	分数的公式
извлечь корень	extract root	开方
использовать	use	使用;运用
квадрат	square	平方
корень	root	根
корень из числа	root of number	数字的根
корень квадратный из A	square root out of A	A 的平方根
корень кубический из A	cube root out of A	A 的立方根
куб	cube	立方
метод	method	方法;顺序
многочлен	polynomial	多项式
называется	is called	叫做
не равно нулю	unequal to zero	不等于零
область определения	domain of definition	定义域

обозначить	designate	指出
одночлен	monomial	单项式
освободиться от иррациональности	get rid (of) irrationality	去掉不合理的
основание	base	底数
остаток	remainder	余数
подобные члены	similar terms	相似的部分
показатель	index, exponent	指数
преобразование	transformation	转化
разложение многочлена на множители	decomposition of polynomial into factors	在多项式里分解因子
разложить	decompose	分解
сопряженные	conjugate	二元的
старший	of highest degree	最大的
степень	degree, power	幂;乘方
существовать	exist	存在
теорема Безу	Bezu theorem	贝祖定理
формулы сокращенного умножения	formula of abbreviated multiplication	最简公式

3.1. Степень. Действия со степенями

ЗАПОМНИТЕ!

Степень (a^n) – это произведение n одинаковых сомножителей.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} \text{ – это степень,}$$

где a – это основание степени (действительное число);
n – это показатель степени (натуральное число).

Читают так: a^n – "a" в степени "n" или "a" в энной степени;

5^4 – пять в степени четыре или пять в четвертой степени;

6^7 – шесть в степени семь или шесть в седьмой степени;

3^{100} – три в степени сто или три в сотой степени;

7^2 – семь во второй степени или семь в квадрате;

8^3 – восемь в третьей степени или восемь в кубе.

$2^4 = 16$ – это действие называется: "***возведение в степень***". Говорят: "Мы возвели "2" в четвертую степень".

Таблица 3.1 – Действия со степенями

Действие	Обозначение	Пример
Произведение степеней с одинаковыми основаниями	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$5^7 \cdot 5 = 5^{7+1} = 5^8$
Чтобы умножить степени с одинаковыми основаниями, нужно основания написать без изменения, а показатели сложить.		
Частное степеней с одинаковыми основаниями	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{2^3}{2^2} = 2^{3-2} = 2$
Чтобы разделить степени с одинаковыми основаниями, нужно основания написать без изменения, а показатели вычесть.		
Возведение степени в степень	$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(5^2\right)^4 = 5^8$
Чтобы возвести степень в степень, нужно основание написать без изменения, а показатели умножить.		
Возведение в нулевую степень	$a^0 = 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
Степень числа a с нулевым показателем равна единице, если $a \neq 0$.		
Возведение в отрицательную степень	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$
Любое число a в степени с отрицательным показателем есть дробь, если $a \neq 0$.		

Продолжение таблицы 3.1

Действие	Обозначение	Пример
Возведение произведения в степень	$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$20^3 = (5\cdot 4)^3 = 5^3\cdot 4^3 = 125\cdot 64 = 8000$
Степень произведения равна произведению степеней множителей.		
Возведение частного в степень	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$
Степень частного (дроби) равна дроби, у которой числитель и знаменатель возведены в данную степень.		

Приведем несколько важных замечаний.

1. Любая степень положительного числа – это положительное число. Например, $10^4 = 10000$; $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$.

2. Четная степень отрицательного числа – это положительное число. Например, $(-2)^4 = 16$; $(-1)^{2n} = 1$.

3. Нечетная степень отрицательного числа – это отрицательное число. Например, $(-3)^3 = -27$; $(-1)^{2n-1} = -1$.

Рассмотрим несколько примеров.

<u>*Пример 1.*</u> Выполните действия: $A = 2^{-2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}\cdot 2^4 : \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 : \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$.

Решение. Чтобы найти ответ, удобно записать все члены выражения A как степени с одинаковым основанием:

$$A = 2^{-2}\cdot 2^3\cdot 2^4 : 2^{-3} : 2^3 = 2^{-2+3+4+3-3} = 2^5 = 32$$

Ответ. $A = 32$.

<u>*Пример 2.*</u> Выполните действия: $A = \dfrac{16^2\cdot 4^{-5}\cdot 0,25}{2^{-1}\cdot 128\cdot (0,5)^0}$.

Решение. $A = \dfrac{\left(2^4\right)^2\cdot\left(2^2\right)^{-5}\cdot 2^{-2}}{2^{-1}\cdot 2^7\cdot 1} = 2^8\cdot 2^{-10}\cdot 2^{-2}\cdot 2^1\cdot 2^{-7} = 2^{8-10-2+1-7} = 2^{-10}$.

Ответ. $A = 2^{-10}$.

3.2. Алгебраические выражения

Алгебраическое выражение – это выражение, которое состоит из чисел, переменных и математических знаков. Выражение может содержать скобки, рациональную степень переменной (с целым или дробным показателем), знак модуля.

Например, алгебраические выражения – это: $m+n-\frac{p}{4}$; $\frac{4a^4+2a+1}{a-1}$; $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{c}{3}\right)^3$; $\sqrt{3a-4b}$; $\left(\sqrt[3]{8}-y\right)^4$; $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$.

Область допустимых значений (ОДЗ) алгебраического выражения – это такие значения переменных, при которых это выражение имеет смысл.

Пример 3. Найдите ОДЗ алгебраического выражения: $\sqrt{x-4}$.
Решение. Если $x<4$, то выражение $\sqrt{x-4}$ не имеет смысла.
Ответ. ОДЗ: $x>4$.

Пример 4. Найдите ОДЗ выражения: $\frac{x^2-49}{x^2-36}$.

Решение. Из условия имеем: $x^2-36\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 6$. Это значит, что если $x=6$ или $x=-6$, то выражение $\frac{x^2-49}{x^2-36}$ не имеет смысла.

Ответ. ОДЗ: $x\neq \pm 6$.

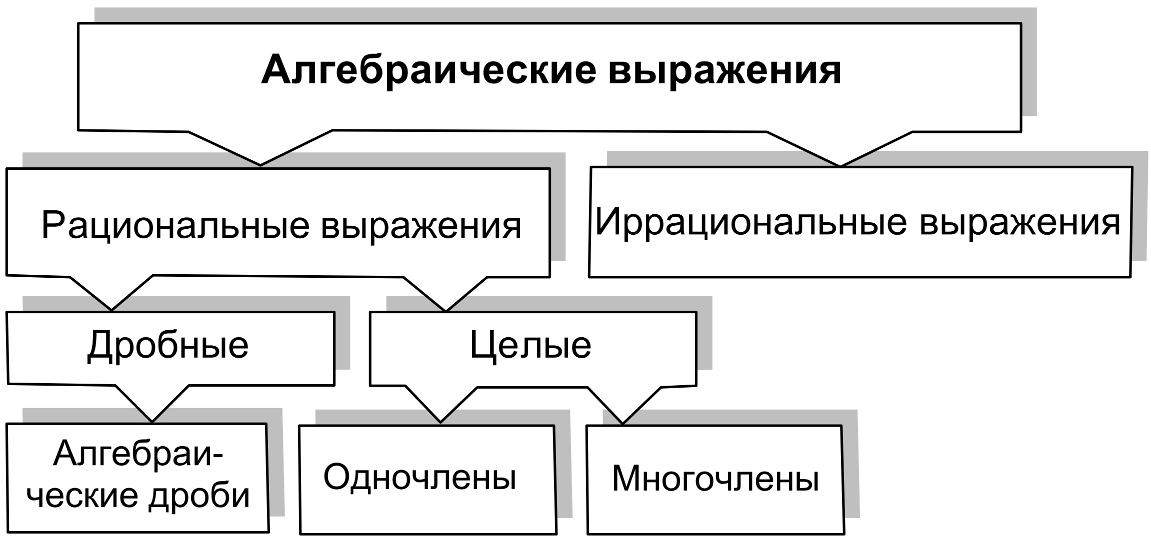


Рисунок 3.1

Рассмотрим рисунок 3.1 подробнее, для этого дадим характеристику каждому компоненту рисунка.

Алгебраические выражения могут быть рациональными и иррациональными.

Рациональное выражение – это выражение, в котором содержатся действия сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень (здесь показатель степени – это натуральное число).

Например, $\frac{6a^2}{b^2+1}$; $5b$; $\frac{4y}{y^3-1}$ – это рациональные выражения.

Рациональные выражения могут быть ***целыми*** и ***дробными***.

Целое рациональное выражение не содержит деления на буквенное выражение. Например, $a^2+3a^2b-\frac{3}{4}b^3+0,2$; $7b^8m^5$ – это целые рациональные выражения.

Целые рациональные выражения подразделяются на одночлены и многочлены.

Одночлен – это произведение числового коэффициента на натуральную степень переменных.

Например, $-3b$; $8a^2b^3c^4$; $\frac{7}{13}mn$ – это одночлены, где -3; 8; $\frac{7}{13}$ – это числовые коэффициенты; b; $a^2b^3c^4$; mn – это буквенные выражения.

Степень одночлена – это сумма показателей степеней всех переменных одночлена.

Например, одночлен $3a^3b^2c$ – это одночлен шестой степени $(3+2+1=6)$; одночлен $5ax^3$ – это одночлен четвертой степени $(1+3=4)$; 7 – это одночлен нулевой степени.

ЗАПОМНИТЕ!

Одночлен имеет ***стандартный вид***, если числовой коэффициент стоит на первом месте (перед буквенным выражением), а неизвестные множители записаны в алфавитном порядке.

Одночлены называются ***подобными***, если они имеют одинаковые буквенные выражения.

Привести подобные одночлены (члены) – это значит найти их сумму или разность.

Например, $7a^3b^2$; $0,3a^3b^2$; $-24a^3b^2$ – это подобные одночлены.

Пример 5. Приведите подобные члены: $x^2-4xy+3a^2+8xy-5a^2-x^2-2yz$.
Решение. $x^2-x^2=0$; $-4xy+8xy=4xy$; $3a^2-5a^2=-2a^2$.
Ответ. $4xy-2a^2-2yz$.

Многочлен – это алгебраическая сумма одночленов (их сумма или разность).

Например, $5a^2-3ab+c$ – это многочлен.

Степень многочлена – это степень его старшего члена.

Например, многочлен $8x^4-3x^3-x-5$ – это многочлен четвертой степени; многочлен $2x^3y^2+xy^3-7xy+6$ – это многочлен пятой степени.

Дробное рациональное выражение содержит деление на выражение с переменными. Дробное рациональное выражение называют алгебраической дробью.

Например, $\dfrac{8a^3+5b^2}{a-1}$; $\left(\dfrac{5}{a}-\dfrac{7c}{b}+\dfrac{8n^5}{c^3}\right)^3$ – это алгебраические дроби.

Используют и другое определение алгебраической дроби.

Выражение вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – это многочлены или одночлены, называется ***алгебраической дробью***.

Область допустимых значений (ОДЗ) алгебраической дроби это множество значений переменной, при которых ее знаменатель не равен нулю ($Q(x) \neq 0$).

Алгебраическая дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, т.е. $P(x) = 0$.

Если в алгебраическом выражении используется возведение переменных в дробную степень (извлечение корня из переменных), то такое алгебраическое выражение называется ***иррациональным***.

Например, $\sqrt{x^2 + y^3}$; $a^{\frac{4}{3}} - b^{\frac{4}{3}}$ – это иррациональные выражения.

ЗАПОМНИТЕ!

Алгебраические выражения могут быть рациональными и иррациональными.

Рациональные выражения разделяются на целые и дробные.

Целые рациональные выражения состоят из одночленов и многочленов.

Дробные рациональные выражения включают в себя алгебраические дроби.

3.3. Многочлен n -й степени и его частные случаи для $n=0;1;2$

Многочлен n -й степени записывают как алгебраическую сумму одночленов по убывающим степеням:

$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n$, в котором $a_0\neq 0$;

$a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ – коэффициенты многочлена n -й степени;

a_0x^n – старший член многочлена;

a_0 – коэффициент при старшем члене;

a_n – свободный член многочлена;

n – степень многочлена (это степень старшего члена);

x – переменная (или неизвестная).

Например, а) 5 – это многочлен нулевой степени;

б) $y+12$ – это многочлен первой степени, где y – это старший член, коэффициент старшего члена равен единице; 12 – это свободный член многочлена;

в) x^2+3x-9 – это многочлен второй степени (квадратный трехчлен), где x^2 – это старший член; коэффициент при старшем члене равен единице; 9 – это свободный член многочлена;

г) $6x^7-3x^5+4x+3$ – это многочлен седьмой степени, где $6x^7$ – это старший член; 6 – коэффициент при старшем члене; 3 – это свободный член многочлена.

Корень многочлена $P_n(x)$ – это такое значение x, при котором многочлен обращается в нуль.

Например, $x=2$ – это корень многочлена $P_3(x)=x^3-x^2-x-2$, т.к. $P_3(2)=2^3-2^2-2-2=0$.

Действия с многочленами рассмотрены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Действия с многочленами

<table>
<tr><th>Действия</th><th>Примеры</th></tr>
<tr><td>Сложение многочленов</td><td>

$\left(x^2+2ax-a^2\right)+\left(-x^2-2ax+a^2\right)=x^2+2ax-a^2-x^2-2ax+a^2=0$

Перед скобками стоит знак "+", поэтому, если мы открываем скобки, то знаки членов в скобках не изменяются.</td></tr>
<tr><td>Вычитание многочленов</td><td>

$\left(5x^2-xy\right)-\left(7x^2-xy-y^2\right)=5x^2-xy-7x^2+xy+y^2=-2x^2+y^2$

Перед скобками стоит знак "–", поэтому, если мы открываем скобки, то знаки членов в скобках изменяются на противоположные.</td></tr>
<tr><td>Умножение многочленов</td><td>

$\left(2a^2-8\right)\cdot\left(a^2+2\right)=2a^4-8a^2+4a^2-16=2a^4-4a^2-16$

Каждый член первого многочлена умножим на каждый член второго многочлена.</td></tr>
<tr><td>Деление многочленов</td><td>

1) $\left(6a^4b^2-3,6a^2b^3\right):2a^2b=\dfrac{6a^4b^2}{2a^2b}-\dfrac{3,6a^2b^3}{2a^2b}=3a^2b-1,8b^2;$

2)
$$\begin{array}{l|l}
-\;5x^3+14x^2+12x+8 & x+2 \\
\underline{\;\;\;5x^3+10x^2} & \overline{5x^2+4x+4} \\
\qquad -\;4x^2+12x+8 & \\
\qquad \underline{\;\;\;4x^2+8x} & \\
\qquad\qquad -\;4x+8 & \\
\qquad\qquad \underline{\;\;\;4x+8} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

3) $\left(5x^4-3x^5+3x-1\right):\left(x+1-x^2\right).$

Запишем члены многочленов в порядке понижения степеней:

$$\begin{array}{l|l}
-\;-3x^5+5x^4+3x-1 & -x^2+x+1 \\
\underline{\;\;\;-3x^5+3x^4+3x^3} & \overline{3x^3-2x^2+x-1} \\
\qquad -\;2x^4-3x^3+3x-1 & \\
\qquad \underline{\;\;\;2x^4-2x^3-2x^2} & \\
\qquad\qquad -\;-x^3+2x^2+3x-1 & \\
\qquad\qquad \underline{\;\;\;-x^3+x^2+x} & \\
\qquad\qquad\qquad -\;x^2+2x-1 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\;\;\;x^2-x-1} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 3x &
\end{array}$$

$3x^3-2x^2+x-1$ – это частное от деления; $3x$ – это остаток.

Результат деления можно записать так:

$\left(5x^4-3x^5+3x-1\right):\left(x+1-x^2\right)=3x^3-2x^2+x-1+\dfrac{3x}{-x^2+x+1}.$</td></tr>
</table>

3.4. Формулы сокращенного умножения

1. **Квадрат суммы**: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$$(a+b+c)^2 = \left[(a+b)+c\right]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)\cdot c + c^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc).$$

2. **Квадрат разности:** $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

3. **Разность квадратов:** $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
4. **Куб суммы:**

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$$

5. **Куб разности:**

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b).$$

6. **Сумма кубов:** $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$.
7. **Разность кубов:** $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$.
8. **Обобщенные формулы разности и суммы степеней:**

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right);$$
$$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

Например, $x^6 - y^6 = (x-y)\left(x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5\right)$.

9. **Бином Ньютона:**

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 +$$
$$+ \mathbf{K} + \frac{n(n-1)(n-2)\mathbf{K}(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \mathbf{K}\cdot k}a^{n-k}b^k + \mathbf{K} + b^n.$$

Например, $\left(a+b\right)^6=a^6+6a^5b+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}a^4b^2+\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}a^3b^3+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}a^2b^4+$
$+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}ab^5+b^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$.

3.5. Разложение многочленов на множители

Разложить многочлен на множители – это значит записать его как произведение многочленов и одночленов.

Существует несколько способов разложения многочленов на множители.

1. ***Вынесение общего множителя за скобки***

Например, $12a^5b^6-9a^4bc^3+3a^3b^2c=3a^3b\cdot4a^2b^5-3a^3b\cdot3ac^3+3a^3b\cdot bc=$
$=3a^3b\cdot\left(4a^2b^5-3ac^3+bc\right)$.

2. ***Группировка***

Например, 1) $x^2y-z^2x+y^2x-yz^2=\left(x^2y+y^2x\right)-\left(z^2x+yz^2\right)=$
$=xy\cdot(x+y)-z^2\cdot(x+y)=(x+y)\cdot\left(xy-z^2\right)$;

2) $a^2-7ab+12b^2=a^2-3ab-4ab+12b^2=\left(a^2-3ab\right)-\left(4ab-12b^2\right)=$
$=a\cdot(a-3b)-4b\cdot(a-3b)=(a-3b)\cdot(a-4b)$.

3. ***Использование формул сокращенного умножения***

Например, 1) $27a^3+125b^3=(3a)^3+(5b)^3=(3a+5b)\cdot\left(9a^2-15ab+25b^2\right)$;

2) $m^2+n^2+2mn+2m+2n+1=\left(m^2+n^2+2mn\right)+(2m+2n)+1=$
$=(m+n)^2+2(m+n)+1=\left[(m+n)+1\right]^2=(m+n+1)^2$;

3) $x^4+4y^4=x^4+4y^4+4x^2y^2-4x^2y^2=\left(x^4+4x^2y^2+4y^4\right)-4x^2y^2=$
$=\left(x^2+2y^2\right)^2-(2xy)^2=\left(x^2+2y^2+2xy\right)\left(x^2+2y^2-2xy\right)$.

4. ***Разложение квадратного трехчлена на линейные множители (если известны его корни):***
$ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$

Например, $2x^2-6x-8=2(x+1)(x-4)$, потому что $2x^2-6x-8=0\Rightarrow$
$\Rightarrow x_1=-1;\ x_2=4$ – это корни многочлена.

3.6. Теорема Безу. Использование теоремы Безу для разложения многочленов на множители

Пусть $P(x)$ – это многочлен n-й степени:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \qquad a_0 \neq 0;\ b \in R.$$

Разделим $P(x)$ на $(x-b)$, получим: $P(x) = (x-b)\cdot j(x) + r$, где $j(x)$ – это частное от деления $P(x)$ на $(x-b)$; r – остаток. Степень переменной остатка всегда меньше степени переменной делителя.

<u>*Пример 6*</u>. Разделите $x^4 + 2x^2 - 5$ на $x^2 + 2x + 2$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^4 + 2x^2 - 5 & x^2 + 2x + 2 \\
\underline{x^4 + 2x^3 + 2x^2} & \overline{x^2 - 2x + 4} \\
-\,-2x^3 - 5 & \\
\underline{-2x^3 - 4x^2 - 4x} & \\
-\,4x^2 + 4x - 5 & \\
\underline{4x^2 + 8x - 8} & \\
-4x - 13 &
\end{array}$$

Значит, $\dfrac{x^4 + 2x^2 - 5}{x^2 + 2x + 2} = x^2 - 2x + 4 + \dfrac{-4x - 13}{x^2 + 2x + 2} = x^2 - 2x + 4 - \dfrac{4x + 13}{x^2 + 2x + 2}$,

где $x^2 - 2x + 4$ – это целая часть многочлена; $(-4x - 13)$ – это остаток.

Ответ. $x^2 - 2x + 4 - \dfrac{4x + 13}{x^2 + 2x + 2}$.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x-b)$ равен $P(b)$.

<u>*Пример 7*</u>. Найдите остаток от деления $\left(x^4 + 5x^3 - 3x + 6\right) : (x+3)$.

Решение. Подставим $x = -3$ в многочлен $x^4 + 5x^3 - 3x + 6$:

$$r = (-3)^4 + 5\cdot(-3)^3 - 3(-3) + 6 = -39;\ r = P(-3) = -39.$$

Ответ. $r = -39$.

Следствия теоремы Безу.

1. Если многочлен $P(x)$ делится на $(x-a)$ без остатка, то a – это корень многочлена.

2. Если a – это корень многочлена $P(x)$, то многочлен делится на $(x-a)$ без остатка.

Пример 8. При каком значении " a " остаток от деления многочлена x^4+6x^2+ax+6 на $x+2$ равен нулю?

Решение. $r=P(-2)=(-2)^4+6\cdot(-2)^2+a\cdot(-2)+6=16+24-2a+6=$
$=46-2a \quad\Rightarrow\quad 46-2a=0;\ \ a=23$.

Ответ. Остаток от деления равен нулю, если $a=23$.

3. Если $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, то любой целый корень многочлена $P(x)$ является делителем его свободного члена a_n.

Пример 9. Разложите на множители многочлен x^3-5x^2+7x-3.

Решение. Найдем делители свободного члена – это числа ±1 и ±3.

При значениях $x_1=1$ и $x_2=3$ многочлен обращается в ноль, поэтому $x_1=1$ и $x_2=3$ – это корни многочлена. Многочлен делится без остатка на $(x-1)$ и на $(x-3)$.

Выполним деление многочлена на $(x-1)$ углом:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^3-5x^2+7x-3 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-x^2\qquad\qquad} & x^2-4x+3 \\
-\;-4x^2+7x\quad & \\
\underline{-4x^2+4x\quad} & \\
-\;3x-3 & \\
\underline{3x-3} & \\
0 &
\end{array}
$$

Получим: $x^3-5x^2+7x-3=(x-1)\left(x^2-4x+3\right)=$

$$=(x-1)\left[(x-1)\cdot x-3\cdot(x-1)\right]=(x-1)(x-1)(x-3)$$

Ответ. $(x-1)(x-1)(x-3)$.

3.7. Тождественные преобразования алгебраических дробей

Алгебраические дроби можно складывать, вычитать, умножать, делить, приводить к общему знаменателю, сокращать, возводить в степень, т.е. выполнять их ***тождественные преобразования***. Рассмотрим некоторые примеры.

I. Упростите выражения, используя основное свойство дроби (числитель и знаменатель дроби можно умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля).

1. $\dfrac{x+\frac{1}{4}}{\frac{2x}{3}-\frac{1}{6}}=\dfrac{12\cdot\left(x+\frac{1}{4}\right)}{12\cdot\left(\frac{2x}{3}-\frac{1}{6}\right)}=\dfrac{12x+3}{8x-2};$

2. $\dfrac{\frac{1}{5}x^2+x+1}{\frac{1}{15}x^3+\frac{1}{3}x}=\dfrac{15\cdot\left(\frac{1}{5}x^2+x+1\right)}{15\cdot\left(\frac{1}{15}x^3+\frac{1}{3}x\right)}=\dfrac{3x^2+15x+15}{x^3+5x};$

3. $\dfrac{7x^2+21x}{49x-7xy}=\dfrac{\frac{7x^2+21x}{7x}}{\frac{49x-7xy}{7x}}=\dfrac{x+3}{7-y};\ x\neq 0;\quad y\neq 7;$

II. Сократите дроби.

1. $\dfrac{4\left(x^4-1\right)}{\left(x^3-x\right)\left(2x-6\right)}=\dfrac{4\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{2x\left(x^2-1\right)\left(x-3\right)}=\dfrac{2\left(x^2+1\right)}{x\left(x-3\right)};$

2. $\dfrac{x^2-y^2}{2\left(x+y\right)}=\dfrac{\left(x-y\right)\left(x+y\right)}{2\left(x+y\right)}=\dfrac{x-y}{2};$

3. $\dfrac{3a-6b}{a^2-4b^2}=\dfrac{3\left(a-2b\right)}{a^2-\left(2b\right)^2}=\dfrac{3\left(a-2b\right)}{\left(a-2b\right)\left(a+2b\right)}=\dfrac{3}{a+2b};$

4. $\dfrac{16^7-16^6}{8^{10}-8^9+8^8}=\dfrac{16^6\left(16-1\right)}{8^8\left(8^2-8+1\right)}=\dfrac{\left(8\cdot 2\right)^6\cdot 15}{8^8\cdot 57}=\dfrac{2^6\cdot 5\cdot 3}{8^2\cdot 19\cdot 3}=\dfrac{\left(2^3\right)^2\cdot 5}{\left(2^3\right)^2\cdot 19}=\dfrac{5}{19}.$

III. Приведите дроби к общему знаменателю.

1. $\dfrac{2a}{4-3a}$; $\dfrac{a-3}{4+3a}$.

Общий знаменатель данных дробей – это произведение знаменателей: $(4-3a)(4+3a)$.

$$\frac{2a}{4-3a}=\frac{2a(4+3a)}{(4-3a)(4+3a)}=\frac{2a(4+3a)}{16-9a^2};$$

$$\frac{a-3}{4+3a}=\frac{(a-3)(4-3a)}{(4+3a)(4-3a)}=\frac{(a-3)(4-3a)}{16-9a^2}.$$

2. $\dfrac{1}{9a\left(a^2-4b^2\right)}$; $\dfrac{5n}{36a^4-72a^3b}$; $\dfrac{3m}{20a^3+40a^2b}$.

Для того чтобы найти общий знаменатель, разложим знаменатели этих дробей на множители:

$$9a\left(a^2-4b^2\right)=9a(a-2b)(a+2b);$$

$$36a^4-72a^3b=36a^3(a-2b);$$

$$20a^3+40a^2b=20a^2(a+2b).$$

Наименьшее общее кратное чисел 9; 36; 20 – это число 180. Поэтому общий знаменатель данных дробей – это: $180a^3(a-2b)(a+2b)$. Дополнительные множители для этих дробей: $20a^2$; $5(a+2b)$; $9a(a-2b)$.

$$\frac{1}{9a\left(a^2-4b^2\right)}=\frac{{}^{20a^2/}1}{9a(a-2b)(a+2b)\cdot 20a^2}=\frac{20a^2}{180a^3(a-2b)(a+2b)};$$

$$\frac{5n}{36a^4-72a^3b}=\frac{{}^{5(a+2b)/}5n}{36a^3(a-2b)\cdot 5(a+2b)}=\frac{25n(a+2b)}{180a^3(a-2b)(a+2b)};$$

$$\frac{3m}{20a^3+40a^2b}=\frac{{}^{9a(a-2b)/}3m}{20a^2(a+2b)\cdot 9a(a-2b)}=\frac{27am(a-2b)}{180a^3(a-2b)(a+2b)}.$$

3. $\dfrac{x}{8x^2-8y^2}$; $\dfrac{x}{2x^2-2xy}$; $\dfrac{y}{12x^3y^2+12y^3x^2}$.

Для того чтобы найти общий знаменатель, разложим знаменатели этих дробей на множители:

$$8x^2-8y^2=8(x-y)(x+y);$$

$$2x^2-2xy=2x(x-y);$$

$$12x^3y^2+12y^3x^2=12x^2y^2(x+y).$$

Общий знаменатель данных дробей – это: $24x^2y^2(x-y)(x+y)$.

Дополнительные множители: $3x^2y^2$; $12xy^2(x+y)$; $2(x-y)$.

$$\frac{x}{8x^2-8y^2}=\frac{x\cdot 3x^2y^2}{8(x-y)(x+y)\cdot 3x^2y^2}=\frac{3x^3y^2}{24x^2y^2(x-y)(x+y)};$$

$$\frac{x}{2x^2-2xy}=\frac{x\cdot 12xy^2(x+y)}{2x(x-y)\cdot 12xy^2(x+y)}=\frac{12x^2y^2(x+y)}{24x^2y^2(x-y)(x+y)};$$

$$\frac{y}{12x^3y^2+12y^3x^2}=\frac{y\cdot 2(x-y)}{12x^2y^2(x+y)\cdot 2(x-y)}=\frac{2y(x-y)}{24x^2y^2(x-y)(x+y)}.$$

IV. Выполните действия (сложение, вычитание, умножение и деление алгебраических дробей).

Для выполнения этих действий, нужно приводить алгебраические дроби к общему знаменателю и выполнять преобразования.

1. $$\frac{{}^{x+1\diagup}5}{x-1}-\frac{{}^{x-1\diagup}4}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{5\cdot(x+1)-4\cdot(x-1)+2}{x^2-1}=\frac{5x+5-4x+4+2}{x^2-1}=\frac{x+11}{x^2-1};$$

2. $$\frac{1}{b}-\frac{3a}{b^2+3ab}-\frac{b}{b^2-9a^2}=\frac{{}^{(b+3a)(b-3a)\diagup}1}{b}-\frac{{}^{b-3a\diagup}3a}{b(b+3a)}-\frac{{}^{b\diagup}b}{(b-3a)(b+3a)}=$$

$$=\frac{(b+3a)(b-3a)-3a\cdot(b-3a)-b^2}{b(b+3a)(b-3a)}=\frac{b^2-9a^2-3ab+9a^2-b^2}{b(b+3a)(b-3a)}=$$

$$=\frac{-3ab}{b(b+3a)(b-3a)}=\frac{-3ab}{b\left(b^2-9a^2\right)}=\frac{3a}{9a^2-b^2};$$

3. $\dfrac{3x(x-y)}{x^2-2xy+y^2}\cdot\dfrac{2y(y-x)}{x^2+2xy+y^2}=\dfrac{-3x\cdot 2y(x-y)^2}{(x-y)^2(x+y)^2}=-\dfrac{6xy}{(x+y)^2}$;

4. $\dfrac{(m-n)^2}{5m(m+n)^2}:\dfrac{(m^2-n^2)}{15m^2}=\dfrac{(m-n)^2\cdot 15m^2}{5m(m+n)^2\cdot(m-n)(m+n)}=\dfrac{3m(m-n)}{5(m+n)^3}$;

5. $\left(a+\dfrac{b-a}{1-ab}\right):\left(a+\dfrac{ab-a}{1-ab}\right)=\dfrac{a(1-ab)+b-a}{1-ab}:\dfrac{a(1-ab)+ab-a}{1-ab}=$

$=\dfrac{a-a^2b+b-a}{1-ab}:\dfrac{a-a^2b+ab-a}{1-ab}=\dfrac{b-a^2b}{1-ab}:\dfrac{ab-a^2b}{1-ab}=$

$=\dfrac{b(1-a^2)}{1-ab}\cdot\dfrac{1-ab}{ab(1-a)}=\dfrac{b(1-a)(1+a)(1-ab)}{(1-ab)\cdot ab\cdot(1-a)}=\dfrac{1+a}{a}$.

V. Выполните тождественные преобразования.

1. $A=\left(\dfrac{2a}{x^2-a^2}+\dfrac{1}{a-x}\right)\cdot\dfrac{x^2-a^2}{a+x}$.

Выполним сложение в скобках, для этого разложим на множители знаменатель первой дроби: $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$.

Знаменатель второй дроби запишем так: $a-x=-(x-a)$.

Получаем: $-(x-a)(x+a)$ – это общий знаменатель;

-1 – это дополнительный множитель первой дроби;

$x+a$ – это дополнительный множитель второй дроби.

$$\frac{^{-1/}\,2a}{x^2-a^2}+\frac{^{x+a/}\,1}{a-x}=\frac{-2a+x+a}{-(x-a)(x+a)}=\frac{x-a}{-(x-a)(x+a)}=-\frac{1}{x+a}.$$

Сократим на $(a+x)$ дробь $\dfrac{x^2-a^2}{a+x}$, тогда получим:

$$\frac{(x-a)(x+a)}{a+x}=x-a.$$

Выполним умножение: $-\dfrac{1}{x+a}\cdot(x-a)=-\dfrac{x-a}{x+a}=\dfrac{a-x}{a+x}$.

Получим результат: $A=\dfrac{a-x}{a+x}$.

2. $A=\left(\frac{a}{ax-2x^2}-\frac{2}{a+a^2-2ax-2x}\left(1+\frac{3a+a^2}{a+3}\right)\right)^{-1}.$

Выполним преобразования:

$$A=\left(\frac{a}{x(a-2x)}-\frac{2}{a(1+a)-2x(a+1)}\left(1+\frac{a(3+a)}{a+3}\right)\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{a}{x(a-2x)}-\frac{2}{(1+a)(a-2x)}(1+a)\right)^{-1}=\left(\frac{a}{x(a-2x)}-\frac{2}{(a-2x)}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{a-2x}{x(a-2x)}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}=x.$$

Получим результат: $A=x$.

3. $A=\dfrac{\dfrac{m^2+n^2}{n}-m}{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m}}\cdot\dfrac{m^2-n^2}{m^3+n^3}.$

Преобразуем числитель и знаменатель первой дроби:

$$\frac{m^2+n^2}{n}-m=\frac{m^2+n^2-mn}{n}; \qquad \frac{1}{n}-\frac{1}{m}=\frac{m-n}{m\cdot n};$$

поэтому $\dfrac{\dfrac{m^2+n^2}{n}-m}{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m}}=\dfrac{\left(m^2+n^2-mn\right)mn}{(m-n)n}=\dfrac{m\left(m^2-mn+n^2\right)}{m-n}.$

Умножим первую дробь на вторую:

$$\frac{m\left(m^2-mn+n^2\right)}{m-n}\cdot\frac{m^2-n^2}{m^3+n^3}=\frac{m\left(m^2-mn+n^2\right)(m-n)(m+n)}{(m-n)(m+n)\left(m^2-mn+n^2\right)}=m.$$

Получим результат: $A=m$.

4. $A=\left(\frac{x+5}{x^2-81}+\frac{x+7}{x^2-18x+81}\right):\left(\frac{x+3}{x-9}\right)^2+\frac{x+7}{x+9}.$

Делаем действия последовательно. Сначала – сложение в первых скобках, для этого приводим дроби к общему знаменателю.

$$\frac{x+5}{x^2-81}+\frac{x+7}{x^2-18x+81}=\frac{x+5}{(x-9)(x+9)}+\frac{x+7}{(x-9)^2}=$$

$$=\frac{(x-9)(x+5)+(x+9)(x+7)}{(x-9)^2\cdot(x+9)}=\frac{x^2+5x-9x-45+x^2+7x+9x+63}{(x-9)^2\cdot(x+9)}=$$

$$=\frac{2x^2+12x+18}{(x-9)^2\cdot(x+9)}=\frac{2\left(x^2+6x+9\right)}{(x-9)^2\cdot(x+9)}=\frac{2(x+3)^2}{(x-9)^2\cdot(x+9)}.$$

Разделим результат на вторую дробь.

$$\frac{2(x+3)^2}{(x-9)^2\cdot(x+9)}:\left(\frac{x+3}{x-9}\right)^2=\frac{2(x+3)^2\cdot(x-9)^2}{(x-9)^2\cdot(x+9)(x+3)^2}=\frac{2}{x+9}.$$

Выполним сложение. $\frac{2}{x+9}+\frac{x+7}{x+9}=\frac{2+x+7}{x+9}=\frac{x+9}{x+9}=1.$

Получим результат: $A=1.$

5. $A=\left[\left(\frac{x}{x-y}\right)^{-2}-\frac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right]^2\cdot\frac{x^4}{x^2y^2-y^4}.$

Делаем действия последовательно.

1) $\left(\frac{x}{x-y}\right)^{-2}=\frac{(x-y)^2}{x^2};$

2) $\frac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}=\frac{x^2+2xy+y^2-4xy}{x(x-y)}=\frac{x^2-2xy+y^2}{x(x-y)}=\frac{(x-y)^2}{x(x-y)}=\frac{x-y}{x};$

3) $\frac{(x-y)^2}{x^2}-\frac{x-y}{x}=\frac{(x-y)^2-x(x-y)}{x^2}=\frac{x^2-2xy+y^2-x^2+xy}{x^2}=$

$=\frac{y^2-xy}{x^2}=\frac{y(y-x)}{x^2};$

4) $\left(\frac{y(y-x)}{x^2}\right)^2\cdot\frac{x^4}{x^2y^2-y^4}=\frac{y^2(y-x)^2\cdot x^4}{x^4y^2\left(x^2-y^2\right)}$; т.к. $(y-x)^2=(x-y)^2$,

после сокращения получаем: $\frac{(y-x)^2}{x^2-y^2}=\frac{(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{x-y}{x+y}.$

Получим результат: $A=\frac{x-y}{x+y}.$

Ответьте на вопросы

1. Что такое степень?
2. Какие действия со степенями вы знаете? Сформулируйте правила.
3. Что такое алгебраическое выражение?
4. Что такое область допустимых значений алгебраического выражения?
5. Какие алгебраические выражения вы знаете?
6. Что такое подобные члены?
7. Что значит привести подобные члены?
8. Какие формулы сокращенного умножения вы знаете?
9. Что значит разложить многочлен на множители?
10. Какие способы разложения многочленов на множители вы знаете?
11. Сформулируйте теорему Безу и ее следствия.
12. Что такое алгебраическая дробь?
13. Какие действия можно выполнять с алгебраическими дробями?

Задания для самостоятельной работы № 7

I. Выполните действия.

а) $\frac{1}{3}a^{m+n}b^2c^4\cdot\frac{1}{2}a^{2n}\cdot b^m\cdot c$;

б) $\left(\frac{4}{5}a^2b^{k+1}c^{10}\right):2\frac{3}{5}a^4\cdot b^{k-1}\cdot c^2$;

в) $1{,}8a^3b\cdot 1{,}2a^3b^2$;

г) $3^2\cdot 2^5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$;

д) $(-16)\cdot\left(1:2^5\right)\cdot 2^3$;

е) $\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\right]:\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$;

ж) $-\left(-1\frac{1}{2}a^2b^3c^4\right)^2$;

з) $9{,}5\cdot x^k\cdot y^{n-2}\cdot z\cdot 0{,}95x^3\cdot y^2z$;

и) $\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^3\cdot\left(\frac{2b^2}{3a^3}\right)^2$;

к) $\left[2^{-3}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]:\left[\left(\frac{1}{5}\right)^0-12\cdot 3^{-3}\right]$;

II. Запишите дроби в виде чисел (выражений) с отрицательными показателями степени.

а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{8}$; в) $\frac{1}{125}$; г) $\frac{81}{16}$; д) $0{,}1$; е) $0{,}0001$; ж) $0{,}5$; з) $\frac{1}{x}$; и) $\frac{9}{x^2}$; к) $\frac{8}{x^3}$; л) $\frac{17}{x-4}$; м) $\frac{1}{3\cdot(x+1)^4}$; н) $\frac{6}{x\cdot(2x^4+9)}$.

III. Найдите, при каких значениях переменных имеют смысл выражения:

а) $\frac{8}{9x}$; б) $\frac{13}{x-8}$; в) $\frac{x+1}{9}$; г) $\frac{2x}{|x|-7}$; д) $\frac{a+3}{a\cdot(a-6)}$; е) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-4}$; ж) $\frac{3x}{x^2-9}$; з) $\frac{x-2}{x^2+4}$; и) $\frac{7m+4n}{m-2n}$.

IV. Упростите выражения.

а) $3x^2(x^2-2x+3)+3x(x^3-3x+4)-5(x^4+3x^3)$;

б) $(x^2-3x+2)(3x+4)-13\cdot(1-x^2)$;

в) $(x-1)(x^3+x^2+x+1)+2x^4-5$;

г) $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)-2x^2-3$;

д) $5\cdot(2x+3)(x+2)-2\cdot(5x-4)(x-1)-40x-21+x^3$;

е) $(2a^2-5b^2-3ab)(ab^2+3a^3-2a^2b)-ab^3\cdot(7a-5b)$.

V. Выполните деление с остатком.

а) $2x^2-15x+13$ на $(x-1)$;

б) $x^3-6x^2+5x+12$ на $(x+1)$;

в) $2x^3-3x^2-11x+6$ на $(x-3)$;

г) $x^4-3x^3-x^2+8x-4$ на x^2-4x+4;

д) $x^6-x^4+4x^2-4$ на x^3+x^2-2;

е) $x^4+x^3+3x^2+2x+2$ на x^2-x+1.

VI. Выполните деление многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$.

а) $P_3(x)=2x^3-19x^2+32x+21$; $Q_1(x)=x-7$;

б) $P_4(x)=x^4-3x^3-14x^2+12x+40$; $Q_2(x)=x^2-4$;

в) $P_3(x)=2x^3-21x^2+67x-60$; $Q_1(x)=x-5$;

г) $P_7(x)=2x^7+3x^6-3x-2$; $Q_1(x)=x-1$;

д) $P_3(x)=4x^3-24x^2+21x-5$; $Q_1(x)=2x-1$.

VII. Разложите на множители способом вынесения общего множителя за скобки.

а) $-a^2x-b^2x-c^2x$ б) $7a^4x^2y-14a^2x^3y^2-49a^3x^2y^2+35a^2x^2y^3$;

в) $(x-y)^3-(x-y)^2$; г) $6x^{m+6}-30x^{m+3}+54x^m$;

д) $12(c-y)+6y(y-c)-2y^2(c-y)$; е) $a^{2n-1}b^3+a^{n+3}b^{12}$;

ж) $x^{2n+1}y^3+x^{n-1}y^{15}$; з) $9^{2n+1}-9^{n-1}$.

VIII. Разложите на множители способом группировки.

а) $m^2n^2+mn-m^3-n^3$; г) x^2-ax-a^2y+axy;

б) $3x^3-2y^3-6x^2y^2+xy$; д) $3\cdot(a+b)^2-2a^2-2ab$;

в) $2a(x+y)-x-y$; е) $4x^2y^2+5xz^3-20yz^2-x^3yz$.

IX. Разложите на множители, используя формулы сокращенного умножения.

а) $x^4-0{,}0001$; г) $a^2+x^2-a^2x^2+4ax-1$;

б) $(x-2)^2-9$; д) $x^{-4}-16y^{-6}$;

в) $x^{3n}+y^{3n}$; е) x^4+4x^2-5.

X. Разложите на множители, используя разные способы разложения.

а) $a^4+a^2b^2+b^4$; г) a^4+a^2+1;

б) $x^3+4x^2-3x-18$; д) $(x+y)^4-(x-y)^4$;

в) a^3+3a^2-4; е) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

XI. Приведите дроби к общему знаменателю.

а) $\dfrac{5}{12x^3y^2}$; $\dfrac{1}{7x^2z}$; $\dfrac{13}{21x^4z^4}$;   в) $\dfrac{a}{a-b}$; $\dfrac{4a}{b^3-a^3}$; $\dfrac{3}{a^2+ab+b^2}$;

б) $\dfrac{1}{a-b}$; $\dfrac{1}{ab+b^2}$;   г) $\dfrac{1}{x^2-y^2-z^2-2yz}$; $\dfrac{1}{x+y+z}$; $\dfrac{-x+y}{x-y-z}$

XII. Сократите дроби.

а) $\dfrac{18x^4y^3z^2}{12xy^2z^3}$;   б) $\dfrac{72x^ny^{3k}z^{6m}}{32x^{3n}y^{4k}z^{9m}}$;   в) $\dfrac{x^9-x^6}{x^4-x^7}$;   г) $\dfrac{x^6-3x^3-4}{x^9+1}$.

XIII. Упростите выражения.

1) $\dfrac{x+y}{x-y}:\dfrac{x+y}{y}$;   2) $\dfrac{x-81}{9x-81}-\dfrac{7x+9}{9x-x^2}$;

3) $\dfrac{x^2+2xy}{x^3-8y^3}-\dfrac{4y^2}{8y^3-x^3}$;   4) $\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2+\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2$;

5) $\left(x-\dfrac{x^2-y^2}{x-y}\right)\cdot\left(y+\dfrac{x^2-y^2}{x+y}\right)$;   6) $\dfrac{(x+4)^2}{3x-9}:\dfrac{2x+8}{x^2-9}$;

7) $\left(a^2-b^2\right):\left(a^{-1}+b^{-1}\right)$;   8) $\dfrac{x-5}{x^2+5x}+\dfrac{x+5}{x^2-5x}-\dfrac{4x}{x^2-25}$;

9) $\left(\dfrac{x}{8x+1}+1\right)\cdot\dfrac{1-64x^2}{81x^2-1}-\dfrac{8x}{1-9x}$;

10) $\left(\dfrac{a+b}{a^2+ab}-\dfrac{1}{a^2-b^2}:\dfrac{a+b}{(b-a)^2}\right)\cdot\dfrac{(a+b)^2}{2b^2}$;

11) $\left(\dfrac{9a+c}{a^2-9ac}+\dfrac{9a-c}{a^2+9ac}\right)\cdot\dfrac{a^2-81c^2}{a^2+c^2}$;

12) $\left(\dfrac{2xy}{y^2-16x^2}-\dfrac{x}{y-4x}\right):\dfrac{x^2}{y^2+4xy}$;

13) $\left(\dfrac{8a-8b}{a^3+b^3}-\dfrac{a-b}{a^2-ab+b^2}\right):\dfrac{8-a-b}{a^3+b^3}$;

14) $\left(2+3x+\dfrac{1}{2-3x}\right):\left(1+\dfrac{1}{4-9x^2}\right)$;

15) $\left(\left(\dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)\right):\dfrac{(x+y)^2-4xy}{1-\dfrac{y}{x}}$;

16) $\left(\dfrac{b}{9a-a^3}-\dfrac{1}{a^2+3a}+\dfrac{3}{a^2b-9b}\right):\dfrac{b^2-6b+9}{a^3b-9ab}$;

17) $\left(\dfrac{a-5}{a^2-5a+25}-\dfrac{ab-5b}{a^3+125}\right):\dfrac{a-b+5}{a^3b+125b}$;

18) $\left(\dfrac{x^2}{x-2}-8\right):\dfrac{4-x}{4-x^2}+4-x$;

19) $\dfrac{x^2+x-xy-y}{x^2+x+xy+y}:\dfrac{x^2-x-xy+y}{x^2-x+xy-y}$;

20) $\left(\dfrac{5a+b}{a^2-25b^2}-5a-b\right)\cdot\dfrac{3a+15b}{5a+b}-\dfrac{3}{a-5b}$;

21) $\left(3m-\dfrac{5}{m+n}\right)\cdot\left(3m+\dfrac{5}{m+n}\right)+\dfrac{25}{(m+n)^2}$;

22) $\dfrac{5}{a+b}-\dfrac{5a-5b}{2a-5b}\cdot\left(\dfrac{2a-5b}{a^2-b^2}-2a+5b\right)$;

23) $\left(\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{3}{a^3+1}+\dfrac{3}{a^2-a+1}\right)\cdot\left(a-\dfrac{2a-1}{a+1}\right)$;

24) $\dfrac{3a+2}{8a-7}\cdot\left(\dfrac{3a^2+2a}{9a^2+12a+4}-\dfrac{2a+3}{3a+2}\right)+\dfrac{9a-4}{8a-7}-\dfrac{a-5}{a}$;

25) $\dfrac{\left(x^2-2xy+y^2\right)^3}{\left(x^2+xy\right)^3}\cdot\dfrac{\left(x^2(x+y)\right)^3}{\left((y-x)^3\right)^2}$;

26) $\dfrac{a^2-4}{a^2+2a}\cdot\left(a+\dfrac{2a}{a-2}\right)-\dfrac{a^3-8}{a+2}\cdot\left(2+\dfrac{a^2}{a+2}\right)^{-1}$;

27) $\left(\frac{6}{x^2+5x+4}-\frac{2}{(x+1)(x+2)}+\frac{x}{(x+2)(x+4)}\right)^2\cdot\frac{x^2+4x+4}{2}$;

28) $\left(\left(\frac{x}{x+y}\right)^2+\frac{(x-y)^2+4xy}{y^2+xy}\right)\cdot\frac{x^6}{x^3y^3-y^6}$;

29) $\left(\frac{x+6}{x^2-64}+\frac{x+10}{x^2-16x+64}\right):\left(\frac{x+4}{x-8}\right)^2+\frac{6+x}{8+x}$;

30) $\frac{x}{mx-3m^2}-\frac{3}{x^2+x-3mx-3m}\cdot\left(1+\frac{8x+x^2}{8+x}\right)$;

31) $\left(\frac{a^2}{a+b}-\frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$;

32) $\frac{\left(ab^{-1}+a^{-1}b+1\right)\left(a^{-1}-b^{-1}\right)^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-\left(ab^{-1}+a^{-1}b\right)}-\frac{1-a^2}{ab}$;

33) $\left(\frac{2+x}{(2-x)^2}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{2-x}{(2+x)^2}\right):\frac{16x^2}{16-x^4}+\frac{x^2}{x^2-4}$;

34) $\left(\frac{x}{a+x}+a\right)\cdot\left(\frac{a}{a-x}-x\right)-\left(\frac{a}{a+x}+x\right)\cdot\left(\frac{x}{a-x}-a\right)$;

35) $\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\right):\left(1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}\right)$;

36) $\frac{x+y}{(y-z)(z-x)}+\frac{y+z}{(z-x)(x-y)}+\frac{z+x}{(x-y)(y-z)}$;

37) $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$;

38) $\frac{x^3}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^3}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^3}{(z-x)(z-y)}$;

39) $\frac{x^4}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^4}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^4}{(z-x)(z-y)}$.

3.8. Корень n- й степени

ЗАПОМНИТЕ!

Корень n-й степени из действительного числа a ($\sqrt[n]{a}$) – это такое действительное число x, при котором выполняется равенство: $x^n = a$ $(n \in N, n \geq 2)$.

$\sqrt[n]{a}=x$ – это корень n-й степени из действительного числа a, где a – это подкоренное выражение; n – это показатель корня; x – это значение корня.

Читают так:

$\sqrt{a}$ – корень второй степени из a или корень квадратный из a;

$\sqrt[3]{b}$ – корень третьей степени из b или корень кубический из b;

$\sqrt[4]{m}$ – корень четвертой степени из m;

$\sqrt[7]{30}$ – корень седьмой степени из тридцати;

$\sqrt[100]{40}$ – корень сотой степени из сорока.

Например, а) $\sqrt{9} = 3$, т.к. $3^2 = 9$; б) $\sqrt{0} = 0$; в) $\sqrt[3]{-27} = -3$, т.к. $(-3)^3 = -27$; г) $\sqrt[5]{243} = 3$, т.к. $3^5 = 243$.

Действие, с помощью которого вычисляется корень, называется ***извлечением корня***.

Корень четной степени можно извлечь только из неотрицательного числа ($a \geq 0$). Если $a < 0$, то $\sqrt[2n]{a}$ не существует.

Например, выражения $\sqrt{-4}$; $\sqrt[4]{-81}$; $\sqrt[6]{-16}$ не имеют смысла в области действительных чисел.

Арифметический корень – это неотрицательный корень n-ой степени из неотрицательного числа.

Например, $\sqrt{9}=3$ – это арифметический квадратный корень из девяти: $3^2=9$ (числа 3 и 9 – неотрицательные); $\sqrt[4]{16}=2$, т.к. $2^4=16$.

Корень нечетной степени можно извлечь и из отрицательного числа. $\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$. Например, $\sqrt[3]{-64}=-4$, т.к. $(-4)^3=-64$; $\sqrt[3]{-1}=-1$; $\sqrt[3]{-8}=-2$; $\sqrt[5]{-32}=-2$.

ЗАПОМНИТЕ!

Основное свойство корня

$$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m},\ a\geq 0,\ n\in N,\ m\in N,\ k\in N.$$

Величина корня не изменится, если показатели корня и подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число.

3.8.1. Действия с корнями

Рассмотрим некоторые действия с корнями.

1. Умножение корней

а) с одинаковыми показателями: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$.

Чтобы умножить корни с одинаковыми показателями, нужно показатель корня написать без изменения, а подкоренные выражения умножить.

Например, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

б) с разными показателями: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[n\cdot m]{a^m\cdot b^n}$.

Чтобы умножить корни с разными показателями, нужно сначала привести корни к общему показателю (использовать основное свойство корня), а потом выполнить их умножение.

Например, $\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt[10]{3^2}\cdot\sqrt[10]{2^5}=\sqrt[10]{3^2\cdot 2^5}=\sqrt[10]{9\cdot 32}=\sqrt[10]{288}$.

2. Деление корней

а) с одинаковыми показателями: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, \quad b \neq 0$.

Чтобы разделить корни с одинаковыми показателями, нужно показатель корня написать без изменения, а подкоренные выражения разделить.

Например, $\sqrt[3]{6a^4} : \sqrt[3]{2a} = \sqrt[3]{\dfrac{6a^4}{2a}} = \sqrt[3]{3a^3} = a\sqrt[3]{3}$.

б) с разными показателями: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \dfrac{\sqrt[n\cdot m]{a^m}}{\sqrt[n\cdot m]{b^n}} = \sqrt[n\cdot m]{a^m : b^n}$.

Чтобы разделить корни с разными показателями, нужно сначала привести корни к общему показателю (использовать основное свойство корня), а потом выполнить их деление.

Например, $\dfrac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt[10]{3^2}}{\sqrt[10]{2^5}} = \sqrt[10]{\dfrac{3^2}{2^5}} = \sqrt[10]{\dfrac{9}{32}}$.

3. ***Извлечение корня из корня:*** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$.

Чтобы извлечь корень из корня, нужно показатели корня умножить, а подкоренное выражение записать без изменения.

Например, $\sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[6]{7}$.

Рассмотрим некоторые преобразования корней.

1. ***Возведение корня в степень:*** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Например, $\left(\sqrt[3]{-2}\right)^5 = \sqrt[3]{(-2)^5} = \sqrt[3]{-32} == -\sqrt[3]{32}$.

2. Вынесение множителя из-под корня:

$$\sqrt[n]{a^{n+m}} = \sqrt[n]{a^n \cdot a^m} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{a^m} = a\sqrt[n]{a^m},\ a > 0.$$

Например, $\sqrt[5]{2^7} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^2} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{2^2} = 2\sqrt[5]{2^2} = 2\sqrt[5]{4}$.

3. Внесение множителя под корень:

$$a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb},\ a\geq 0,\ b\geq 0.$$

Например, $3\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{3^3\cdot 6}=\sqrt[3]{27\cdot 6}=\sqrt[3]{162}$.

4. Освобождение дроби от иррациональности в знаменателе или числителе дроби:

$$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b};\qquad \frac{\sqrt{a}}{b}=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}{b\cdot\sqrt{a}}=\frac{a}{b\sqrt{a}}$$

ЗАПОМНИТЕ!

Чтобы освободить дробь от иррациональности в числителе или в знаменателе, можно использовать формулы:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=a-b;$$

$$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right)=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=a+b;$$

$$\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right)=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=a-b.$$

Например, $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{5-3}=$

$=\sqrt{5}-\sqrt{3}$. Здесь $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ – это взаимно сопряженные выражения.

5. Приведение подобных корней

Подобные корни – это корни с одинаковыми показателями и подкоренными выражениями. Например, $\sqrt[n]{ab}$ и $5\sqrt[n]{ab}$ – это подобные корни.

Приведение подобных корней – это их сложение или вычитание.

Например, $\sqrt[3]{108}+3\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{27\cdot 4}+3\sqrt[3]{8\cdot 4}=3\sqrt[3]{4}+6\sqrt[3]{4}=9\sqrt[3]{4}$.

Определения средних величин

Для решения некоторых математических задач необходимо использовать понятия средних величин: среднего арифметического и среднего геометрического.

Среднее арифметическое чисел $a_1,\ a_2 \dots\ a_n$ – это число A_n:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Чтобы найти среднее арифметическое n чисел, нужно:

1) найти сумму этих чисел;
2) эту сумму разделить на число слагаемых (n).

Среднее геометрическое неотрицательных чисел $a_1,\ a_2 \dots\ a_n$ – это число G_n:

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Чтобы найти среднее геометрическое n положительных чисел, нужно:

1) найти произведение этих чисел;
2) извлечь корень степени n из этого произведения.

<u>Пример 10</u>. Найдите среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел 8; 8; 27.

Решение. Среднее арифметическое :

$$A_3 = \frac{8+8+27}{3} = \frac{43}{3} = 14\frac{1}{3};$$

Среднее геометрическое:

$$G_3 = \sqrt[3]{8 \cdot 8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12.$$

Ответ. $A_3 = 14\frac{1}{3}$; $G_3 = 12$.

ЗАПОМНИТЕ!

Неравенство Коши. Среднее арифметическое n неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}.$$

Если все n чисел $a_1,\ a_2 ...\ a_n$ равны между собой, то

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}.$$

Рассмотрим примеры на преобразование иррациональных выражений.

<u>*Пример 11*</u>. Упростите выражение $\sqrt{9 + 2\sqrt{8}}$.

Решение. Преобразуем подкоренное выражение, используя формулу полного квадрата суммы:

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab}.$$

Тогда, $9 + 2\sqrt{8} = 1 + 8 + 2\sqrt{1 \cdot 8} = 1 + 8 + 2\sqrt{1} \cdot \sqrt{8} = \left(1 + \sqrt{8}\right)^2$.

Мы получили, что $\sqrt{9+2\sqrt{8}} = \sqrt{\left(1+\sqrt{8}\right)^2} = \left|1+\sqrt{8}\right| = 1+\sqrt{8}$, т.к. $1>0$ и $\sqrt{8}>0$.

Ответ. $1+\sqrt{8}$.

<u>*Пример 12.*</u> Упростите выражение $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$.

Решение. Чтобы записать выражение $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$ в виде квадрата разности, запишем его так:

$11 - 6\sqrt{2} = 11 - 2\sqrt{9 \cdot 2} = 9 + 2 - 2\sqrt{9 \cdot 2} = \left(\sqrt{9} - \sqrt{2}\right)^2 = \left(3 - \sqrt{2}\right)^2$,

$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = \sqrt{\left(3 - \sqrt{2}\right)^2} = \left|3 - \sqrt{2}\right| = 3 - \sqrt{2}$ (т.к. $3 - \sqrt{2} > 0$).

Ответ. $3 - \sqrt{2}$.

<u>*Пример 13.*</u> Упростите выражение $\sqrt{a^2 - 2b\sqrt{a^2 - b^2}}$.

Решение. Запишем подкоренное выражение в виде полного квадрата. Для этого прибавим и вычтем b^2 из выражения под знаком корня, получим:

$$a^2 - 2b\sqrt{a^2 - b^2} = a^2 - b^2 - 2b\sqrt{a^2 - b^2} + b^2.$$

Запишем a^2-b^2 в виде $\left(\sqrt{a^2-b^2}\right)^2$, получим:

$$\left(\sqrt{a^2-b^2}\right)^2-2b\sqrt{a^2-b^2}+b^2.$$

Запишем формулу так: $\left(\sqrt{a^2-b^2}-b\right)^2$. Тогда $\sqrt{a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}}=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{a^2-b^2}-b\right)^2}=\left|\sqrt{a^2-b^2}-b\right|$ по определению арифметического корня.

Ответ. $\left|\sqrt{a^2-b^2}-b\right|$.

Пример 14. Упростите выражение $A=\left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}}+\frac{1}{2-2\sqrt{a}}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{a}\right)$.

Решение. Выполним действия в первых скобках:

$$\frac{1}{2+2\sqrt{a}}+\frac{1}{2-2\sqrt{a}}-\frac{a^2+1}{1-a^2}=\frac{1}{2\left(1+\sqrt{a}\right)}+\frac{1}{2\left(1-\sqrt{a}\right)}-\frac{a^2+1}{1-a^2}=$$

$$=\frac{1-\sqrt{a}+1+\sqrt{a}}{2\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{a}\right)}-\frac{a^2+1}{1-a^2}=\frac{1}{1-a}-\frac{a^2+1}{(1+a)(1-a)}=$$

$$=\frac{1+a-a^2-1}{(1+a)(1-a)}=\frac{a(1-a)}{(1+a)(1-a)}=\frac{a}{1+a}.$$

Выполним действия во вторых скобках: $1+\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a}$.

Выполним умножение: $\frac{a}{1+a}\cdot\frac{a+1}{a}=1$.

Ответ. $A=1$.

Пример 15. Упростите выражение: $A=\sqrt{x^2+2+2\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+2-2\sqrt{x^2+1}}$.

Решение. Выделим полный квадрат и преобразуем выражения под знаком корня:

à) $\sqrt{x^2+2+2\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{\left(x^2+1\right)+2\sqrt{x^2+1}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^2}=$

$=\left|\sqrt{x^2+1}+1\right|=\sqrt{x^2+1}+1,$ ò.ê. $\sqrt{x^2+1}+1\geq 0$ ïðè ëþáîì x.

á) $\sqrt{x^2+2-2\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{\left(x^2+1\right)-2\sqrt{x^2+1}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2}=$

$=\left|\sqrt{x^2+1}-1\right|=\sqrt{x^2+1}-1,$ ò.ê. $\sqrt{x^2+1}-1\geq 0$ ïðè ëþáîì x.

Выполним вычитание: $\sqrt{x^2+1}+1-\sqrt{x^2+1}+1=2$.

Ответ. $A=2$.

<u>*Пример 16.*</u> Упростите выражение $A=\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2$.

Решение. а) Вынесем общий множитель $\sqrt[4]{x}$ в числителе первой дроби и сократим дробь:

$$\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x^2}-1\right)}{1-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{-\left(\sqrt{x}-1\right)}=-\sqrt[4]{x}.$$

б) Выполним сложение в скобках и возведение полученное выражение в квадрат:

$$\left(-\sqrt[4]{x}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2=\left(\frac{-\sqrt[4]{x^2}+1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2=\left(\frac{-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2=\frac{1}{\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{1\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x}.$$

Ответ. $A=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

<u>*Пример 17.*</u> Упростите выражение: $A=\left(\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{1}{(ab)^{-\frac{1}{2}}}\right)\cdot(a-b)^{-1}$.

Решение. а) Запишем выражение в первых скобках с помощью корня:

$$\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{(ab)^{-\frac{1}{2}}}\right)\cdot(a-b)^{-1}=\left(\frac{\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt{b}\right)^3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\frac{1}{a-b}.$$

б) Выполним вычитание в скобках, потом – умножение:

$$\left(\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2-\sqrt{ab}+\left(\sqrt{b}\right)^2\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\frac{1}{a-b}=$$

$$=\left(a-\sqrt{ab}+b-\sqrt{ab}\right)\cdot\frac{1}{a-b}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{a-b}.$$

Ответ. $A=\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{a-b}$.

Ответьте на вопросы

1. Что такое арифметический корень?
2. Какие действия с корнями вы знаете?
3. Сформулируйте основное свойство корня.
4. Что такое приведение подобных корней?
5. Что такое среднее арифметическое и среднее геометрическое?

Задания для самостоятельной работы № 8

I. Вычислите.

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$;

2) $\sqrt{144}\cdot\sqrt{\dfrac{49}{64}}\cdot\sqrt{0,01}$;

3) $\sqrt[3]{1\dfrac{1}{8}}:\sqrt[3]{2\dfrac{2}{3}}$;

4) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot\sqrt{3,8}$;

5) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{48}}$;

6) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$;

7) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

8) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{153}}{\sqrt{17}}-\dfrac{\sqrt{304}}{\sqrt{19}}+\dfrac{\sqrt{1331}}{\sqrt{11}}$;

9) $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$;

10) $\sqrt{57-12\sqrt{21}}$;

11) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$;

12) $\sqrt{7+\sqrt{48}}$;

13) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$;

14) $(0,008)^{-\frac{1}{3}}-\left(1\dfrac{1}{4}\right)^{-2}+256^{0,75}-\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-1}+13^{0}$.

II. Вынесите множитель из-под знака корня.

1) $\sqrt[5]{32a^6b}$;

2) $\sqrt[5]{\dfrac{x^{10}d^5}{y^5}}$;

3) $\dfrac{a}{x}\sqrt[3]{\dfrac{27x^6y^5}{12a^9b^3}}$;

4) $\sqrt{\dfrac{a}{b^2}-\dfrac{1}{b}}$;

5) $\sqrt{\dfrac{x^3}{a^6}-\dfrac{1}{a}}$;

6) $\sqrt{\dfrac{\left(a^2-2ab+b^2\right)\cdot y}{25}}$;

7) $\sqrt[3]{\dfrac{\left(y^2-x^2\right)^4}{8(x+y)}}$; 8) $\sqrt[3]{\dfrac{b^3}{a^4}-\dfrac{b^5}{a^6}}$; 9) $\sqrt[m]{2^{m+1}\cdot a^{5m}\cdot b^{m+n}\cdot c^{mp+1}}$;

10) $\dfrac{ac}{b}\sqrt[n]{3^{n+2}\cdot a^{n+5}\cdot b^{2n-1}\cdot c^{1-3n}}$; 11) $\sqrt[m+n]{a^{2m+n}\cdot b^{m+2n}\cdot c^{m^2-n^2}}$;

12) $yz^2\cdot\sqrt[2p]{x^{4p+1}\cdot y^{6p+2}\cdot z^5}$.

III. Внесите множитель под знак корня.

1) $\dfrac{1}{1+x}\sqrt{\dfrac{1}{x}+x+2}$; 2) $\dfrac{2a}{a-b}\sqrt{\dfrac{a}{2}-\dfrac{b^2}{2a}}$; 3) $5\sqrt[3]{3}$;

4) $a^3\cdot\sqrt{2ab}$; 5) $m^2\cdot\sqrt[3]{mn}$; 6) $2n\cdot\sqrt[3]{m^2n}$;

7) $m\cdot\sqrt[5]{1-\dfrac{1}{m^5}}$; 8) $\dfrac{4a}{3b}\sqrt[5]{\dfrac{81b^3}{16a^4}}$; 9) $3a^nb\cdot\sqrt[m]{3a^2b}$;

10) $(2-a)\cdot\sqrt{\dfrac{2a}{a-2}},\quad a>2$; 11) $(x-5)\sqrt{\dfrac{x}{25-x^2}},\quad 0<x<5$;

12) $\dfrac{m}{m-n}\cdot\sqrt[2k]{\dfrac{(n-m)^{2k-1}}{m}},\quad 0<m<n$.

IV. Освободите дроби от иррациональности в знаменателе.

1) $\dfrac{18}{\sqrt{6}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; 3) $\dfrac{10}{\sqrt[4]{125}}$;

4) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}$; 5) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$; 6) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$;

7) $\dfrac{c}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$; 8) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}$; 9) $\dfrac{2\sqrt{20}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{3}}$;

10) $\dfrac{\sqrt{27}-\sqrt{21}-\sqrt{15}}{3-\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; 11) $\dfrac{\sqrt{x(x-a)}-x}{\sqrt{x(x+a)}+x}$; 12) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$.

V. Освободите дроби от иррациональности в числителе.

1) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$; 2) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{8}$; 3) $\dfrac{2\sqrt{6}-4}{15}$;

4) $\dfrac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{20}$; 5) $\dfrac{\sqrt{m}+1}{m}$; 6) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

7) $\dfrac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}}$; 8) $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$; 9) $\dfrac{m+n-2\sqrt{mn}}{(m+n)^3}$.

VI. Разложите выражение на множители.

1) $x-y, \quad x,y\ge 0$; 2) $\sqrt{x}-49$; 3) $5-3x^{\frac{1}{3}}, \quad x\ge 0$;

4) $\sqrt{a}-\sqrt{b}+a-b$; 5) $x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{5}{4}}+9$; 6) $x+4\sqrt{x}-12$.

VII. Упростите выражения.

1) $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}$;

2) $\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{a^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}+\sqrt{ax}$;

3) $\dfrac{\sqrt{a-2\sqrt{a}+1}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{a}+1}:\dfrac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt[4]{a}-1}+1, \quad a>1$;

4) $\left(\dfrac{x+\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}-\sqrt[4]{xy}\right):\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}, \quad x\ne y; \quad x\ge 0$;

5) $\left[\left(\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q}\right)^{-2}+\left(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q}\right)^{-2}\right]:\dfrac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}$;

6) $\sqrt{\dfrac{x}{x-a^2}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)$;

7) $\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}-\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^{-2}-\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}-\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-2}$;

8) $\left(\dfrac{n+1+\sqrt{n^2-1}}{n+1-\sqrt{n^2-1}}-n\right)^2, \quad n\ge 1$;

9) $\left(1+\dfrac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right):\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)$;

10) $\left(\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^2$;

11) $\dfrac{2\sqrt{x}+3}{4x+6\sqrt{x}+9}:\dfrac{1}{8\sqrt{x^3}-27}$;

12) $\dfrac{\left(m^2-\dfrac{1}{n^2}\right)^m\cdot\left(n+\dfrac{1}{m}\right)^{n-m}}{\left(n^2-\dfrac{1}{m^2}\right)^n\cdot\left(m-\dfrac{1}{n}\right)^{m-n}}$;

13) $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}$;

14) $\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}+7\sqrt[3]{ab}$;

15) $\left(\dfrac{x^5+x^{-1}}{x^3-x+x^{-1}}\right):\dfrac{\left(x-x^{-1}\right)^2+4}{1+x^{-2}}$;

16) $\left(\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{5b}\right)\cdot\left((2a)^{\frac{2}{3}}+(5b)^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{10ab}\right)$;

17) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3b}-\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}+\dfrac{1+\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right)^{-2}\cdot\left(1+2\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$;

18) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+y}}{\sqrt[3]{x-y}}+\dfrac{\sqrt[3]{x-y}}{\sqrt[3]{x+y}}-2\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-y}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+y}}\right)$;

19) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}-\dfrac{1}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)$;

20) $\dfrac{\sqrt{a}-a^{-\frac{1}{2}}b}{1+\sqrt{a^{-1}b}}+\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-a^{-\frac{1}{3}}b}{\sqrt[6]{a}-a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{b}}-2\sqrt{a}$;

21) $\left[\left(\frac{x^2}{y^3}+\frac{1}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\right]:\frac{(x-y)^2+4xy}{1+\frac{y}{x}}$;

22) $\left(\frac{1}{p-2q}+\frac{6q}{4q^2-p^2}-\frac{2}{p+2q}\right):\left(\frac{p^2+4q^2}{p^2-4q^2}+1\right)$;

23) $\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1}+\sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1}-\sqrt{a}\right)\cdot\left(a-\sqrt{a^3}\right)^{-1}$;

24) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right):\left(2+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)-\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$;

25) $\left(1-\frac{1+ab}{1+\sqrt[3]{ab}}\right):\left(\sqrt{ab}\cdot\left(1-\sqrt[3]{ab}\right)-\frac{(1-ab)\left(\sqrt[3]{ab}-1\right)}{1+\sqrt{ab}}\right)$;

26) $\left(\frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\cdot\frac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):\frac{\sqrt{ab}}{a-b}$;

27) $\frac{x^2-x-2+(x-1)\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-2+(x+1)\sqrt{x^2-4}},\quad x\geq 2$;

28) $\frac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-\left(\frac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}}-\sqrt[4]{ax}\right)$;

29) $\frac{n+7+\sqrt{n^2-49}}{n+7-\sqrt{n^2-49}}+\frac{n+7-\sqrt{n^2-49}}{n+7+\sqrt{n^2-49}}$;

30) $\frac{27-x}{3+\sqrt[3]{x}}:\left(3+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x}}\right)-\left(\sqrt[3]{x}+\frac{3\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-3}\right)\cdot\frac{9-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}}$;

31) $\left(\frac{a+\sqrt{a^2-9}}{a-\sqrt{a^2-9}}-\frac{a-\sqrt{a^2-9}}{a+\sqrt{a^2-9}}\right):\frac{a\cdot\sqrt{a^2-9}}{9}$;

32) $\frac{\left(a^2-b^2\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^4}}+8a+b$;

33) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)-a^{\frac{2}{3}}$;

34) $\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^{-1}y^{3}}\right):\left(\dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}}+\dfrac{\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}\right)$;

35) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{a^{2}}}{1+\sqrt[3]{a}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{a}}-\sqrt[3]{a^{2}}$;

36) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\left(\dfrac{a+\sqrt[4]{ab^{3}}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}-\sqrt[4]{ab}\right):\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$;

37) $\dfrac{\left(a^{2}+a\sqrt{ab}+b\sqrt{ab}+b^{2}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-2}-\sqrt{ab}}{a-b}+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

38) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^{4}}-8y\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^{2}}+2\sqrt[3]{xy}+4\sqrt[3]{y^{2}}}\right):\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}\right)-\sqrt[3]{x^{2}}$;

39) $\left[\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^{3}b}-a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a^{-1}}}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right)\right]:\left[a+b-\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-1}\right]$;

40) $\dfrac{x^{3}-3x-2+\left(x^{2}-1\right)\cdot\sqrt{x^{2}-4}}{x^{3}-3x+2+\left(x^{2}-1\right)\cdot\sqrt{x^{2}-4}},\quad x\geq 2.$

4

РАВЕНСТВА. ТОЖДЕСТВА. УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Лексика раздела

возведение в степень	raising to a power	升幂
выделить полный квадрат	separate complete square	完全一元二次方程的分解
вычесть	subtract	减去
дискриминант	discriminator	判别式
замена переменных	substitution of variables	换元法
исследование	investigation	研究
неизвестная	unknown	未知数
определитель	determinant	决定元
подстановка	substitution	代换
прибавить	add	加上
приведение	reduction	化简
пропорциональность	proportionality	比例
равенство	equality	等式;相等
верное равенство	proper equality	正确的等式
неверное равенство	improper equality	不正确的等式
разбиение интервала	partition of an interval	区间
свободный член	independent term	自由项
свойство модуля	property of modulus	绝对值的性质
симметричный	symmetric	相称性的
система уравнений	system of equations	方程式的计算顺序
система однородных уравнений	system of homogeneous equations	同类多项式（群）
система симметричных уравнений	system of symmetric equations	对称多项式（群）

соответствие	correspondence	一致性
соответствовать	correspond	与……相符
столбец	column	（一）纵
строка	row	（一）行
теорема Виета	the Viet theorem	韦达定理
тождество	identity	恒等式
трехчлен	trinomial	三项式
уравнение	equation	方程式
алгебраическое уравнение	algebraic equation	代数方程式
биквадратное уравнение	biquadrate equation	四次方程
иррациональное уравнение	irrational equation	无理方程
квадратное уравнение	quadratic equation	二次曲线方程
линейное уравнение	linear equation	一次直线方程
равносильное уравнение	reduced equation	简化的方程
эквивалентное уравнение	equivalent equation	等价方程

4.1. Равенства. Тождества. Уравнения

Равенство – это два выражения, между которыми стоит знак "=" (равно). Например, $x = y$ – это равенство, где x – это левая часть равенства, y – это правая часть равенства.

Свойства равенств:

1) $x = y \quad \Rightarrow \quad y = x$; 2) $x = y, \quad y = z \quad \Rightarrow \quad x = z$;

3) $x = y \quad \Rightarrow \quad x + z = y + z$; 4) $x = y \quad \Rightarrow \quad x \cdot z = y \cdot z$;

5) $x = y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{z} = \dfrac{y}{z} \quad (z \neq 0)$.

Равенства бывают: ***числовые*** или ***с переменными***.

Числовое равенство может быть ***верным*** или ***неверным***.

Например, 1) $15-6=9$; $\frac{10}{5}=12-10$ – это верные числовые равенства; $7=10$; $5+4=4\cdot 3$ – это неверные числовые равенства. 2) $x+y=2$ – это равенство с переменными. Переменные x и y в этом равенстве могут принимать различные числовые значения. Если $x=0$, а $y=2$, то $0+2=2$ – это верное числовое равенство. Если $x=1$, а $y=5$, то $1+5=2$ – это неверное числовое равенство.

Тождество – это равенство с переменными, которое будет верным числовым равенством при любых значениях переменных.

Например, $\left(x^2-y^2\right)=\left(x-y\right)\left(x+y\right)$; $\left(a+b\right)^2=a^2+2ab+b^2$; $\frac{x^2-1}{x+1}=x-1$, если $x\neq -1$; $\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$, если $x>0$ – это тождества.

Уравнение – это равенство с переменными, которое будет верным числовым равенством при определенных значениях переменных.

Так, $f\left(x\right)=j\left(x\right)$ – это уравнение с одной переменной x, где $f\left(x\right)$ и $j\left(x\right)$ – это алгебраические выражения; x – это переменная или неизвестная.

Например, $\left(x+7\right)\left(x-4\right)=0$ – это уравнение с одной переменной x; $3x+4y=0$ – это уравнение с двумя переменными x и y.

Корень (решение) уравнения – это такое значение переменной, при котором уравнение будет верным числовым равенством.

Решить уравнение – это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Пример 1. Решите уравнение $4x-3=5$.

Решение. Выполним тождественные преобразования: $4x-3=5 \Leftrightarrow 4x=8 \Leftrightarrow x=2$. Это уравнение имеет один единственный корень $x=2$. Только если $x=2$ уравнение $4x-3=5$ будет верным числовым равенством: $4\cdot 2-3=5$, или $8-3=5$.

Ответ. $\{2\}$.

<u>*Пример 2.*</u> Найдите корни уравнения $(x-4)(x+3)(x+5)=0$.

Решение. $(x-4)(x+3)(x+5)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ x+3=0 \\ x+5=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=4 \\ x_2=-3. \\ x_3=-5 \end{array}\right.$

$S=\{-5;-3;\ 4\}$ – это множество корней уравнения.

Ответ. $\{-5;-3;\ 4\}$.

<u>*Пример 3.*</u> Найдите корни уравнения $x^2+4=0$.

Решение. $x^2 \neq -4$, следовательно, это уравнение не имеет действительных корней (не имеет решений в области действительных чисел).

Ответ. $\varnothing$.

<u>*Пример 4.*</u> Найдите решение уравнения $|x|=x$.

Решение. Уравнение $|x|=x$ имеет бесчисленное множество корней (решений). Любое неотрицательное число $x \geq 0$ – это решение данного уравнения.

Ответ. $\{x/x \geq 0\}$.

ЗАПОМНИТЕ!

Область определения уравнения (или область допустимых значений уравнения (ОДЗ или D)) – это множество значений переменной x, при которых имеют смысл (определены) левая и правая части уравнения.

Чтобы найти ОДЗ уравнения $f(x)=j(x)$, нужно найти пересечение множеств, на которых определены заданные алгебраические выражения $f(x)$ и $j(x)$.

<u>*Пример 5.*</u> Найдите область допустимых значений уравнения $\dfrac{4}{x-2}=\sqrt{x}$.

Решение. Найдем ОДЗ левой $f(x)=\dfrac{4}{x-2}$ и правой $j(x)=\sqrt{x}$ части уравнения.

ОДЗ левой части уравнения – это все действительные числа, кроме $x=2$:

$$D_1 = R\setminus\{2\} =]-\infty;\quad 2[\ \mathbf{U}\ ]2;\quad +\infty[\,.$$

ОДЗ правой части уравнения – это все положительные числа $x>0$:

$$D_2 = [0;\quad +\infty[\,.$$

ОДЗ уравнения – это пересечение множеств D_1 и D_2:

$$D = D_1\ \mathbf{I}\ D_2 = [0;\quad 2[\ \mathbf{U}\ ]2;\quad +\infty[$$

Ответ. $x\in[0;\quad 2[\ \mathbf{U}\ ]2;\quad +\infty[$.

Два уравнения $f(x)=0$ и $j(x)=0$ называются ***равносильными*** (эквивалентными), если множества их корней (решений) совпадают: $f(x)=0 \ \Leftrightarrow\ j(x)=0$ ($\Leftrightarrow$ – это знак эквивалентности (равносильности)).

Например, 1) уравнения $x+4=3x$ и $x-2=0$ – эквивалентны, т.к. эти уравнения имеют корень: $x=2$;

2) уравнения $x-8=1$ и $x^2=81$ не равносильны, т.к. уравнение $x-8=1$ имеет только один корень: $x=9$, а уравнение $x^2=81$ имеет два корня: $x_1=9$; $x_2=-9$.

Рассмотрим некоторые эквивалентные преобразования, которые удобно использовать при решении уравнений.

Таблица 4.1 – Эквивалентные преобразования уравнений

№	Действия	Примеры
1.	Замена левой части уравнения на правую часть или правой части на левую	$x+5=3x-4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x-4=x+5$
2.	Перенос слагаемых из одной части уравнения в другую с противоположным знаком	$2x+7=x-3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x-x=-7-3$

Продолжение таблицы 4.1

3.	Умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же число, не равное нулю	$\frac{x+1}{4}=x \Leftrightarrow 4\cdot\frac{x+1}{4}=4x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x+1=4x$
4.	Вычитание или прибавление одного и того же числа к обеим частям уравнения	$x+2=5x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x+2+7=5x+7$
5.	Вычитание или прибавление одного и того же алгебраического выражения к обеим частям уравнения. При этом области определения полученного и данного уравнения должны совпадать	$x=2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x+x^2=2+x^2$

В процессе решения уравнений при помощи эквивалентных преобразований, необходимо:

1) найти область допустимых значений (ОДЗ) исходного уравнения;
2) проверить, принадлежат ли полученные значения ОДЗ исходного уравнения.

Пример 6. Решите уравнение $x^2+6+\frac{1}{x-2}=5x+\frac{1}{x-2}$.

Решение. Найдем ОДЗ уравнения: $x \neq 2$. Преобразуем уравнение, для этого перенесем все члены уравнения в левую часть. Получим уравнение $x^2-5x+6=0$. Корни этого уравнения: $x_1=2$; $x_2=3$. Но корень $x_1=2$ не принадлежит области допустимых значений (ОДЗ). Поэтому $x_1=2$ – это посторонний корень, который не нужно рассматривать. Решением уравнения будет $x=3$.

Ответ. $\{3\}$.

Уравнения бывают различных видов. Приведем примеры некоторых уравнений:

- линейные: $ax+b=0$;
- квадратные: $ax^2+bx+c=0$;
- рациональные (высших степеней):

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0; \quad (n\in N, \quad a_0\neq 0);$$

- ü иррациональные: $\sqrt{ax+b}-\sqrt[3]{cx-d}=0$;
- ü с модулем: $|x+a|-|x-b|=0$;
- ü логарифмические: $\log_a x = m$;
- ü показательные: $a^{\sqrt{x}}=m$;
- ü тригонометрические: $\sin x = a$ и другие.

4.2. Линейные и квадратные уравнения

Уравнение вида $ax+b=0$, $a\neq 0$ называется ***линейным уравнением*** с одной переменной, где a и b – это заданные числа: a – это коэффициент при переменной x; b – это свободный член.

Корень линейного уравнения: $x=-\dfrac{b}{a}$.

<u>*Пример 7.*</u> Решите уравнение: $\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{9}=0$.

Решение. Сделаем эквивалентные преобразования:

$$\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}=0 \Leftrightarrow \frac{x}{3}=\frac{2}{9} \Leftrightarrow x=3\cdot\frac{2}{9} \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}.$$

Ответ. $\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

<u>*Пример 8.*</u> Решите уравнение: $\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{2x-1}{6}=\dfrac{x-3}{12}+1$.

Решение. Приведем дроби к общему знаменателю и сделаем эквивалентные преобразования: $\dfrac{{}^{4/}\,x-2}{3}+\dfrac{{}^{2/}\,2x-1}{6}=\dfrac{{}^{1/}\,x-3}{12}+{}^{12/}1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-8+4x-2}{12}=\frac{x-3+12}{12} \Leftrightarrow 4x-8+4x-2=x-3+12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x+4x-x=8+2-3+12 \Leftrightarrow 7x=19 \Leftrightarrow x=\frac{19}{7}.$$

Ответ. $\left\{\dfrac{19}{7}\right\}$.

Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) называется ***квадратным уравнением*** с одной переменной, где a – коэффициент при x^2 (первый коэффициент); b – коэффициент при x (второй коэффициент); c – свободный член.

Если $b \neq 0, c \neq 0$, то квадратное уравнение называется ***полным***.

Если $b = 0$ или $c = 0$, то квадратное уравнение называется ***неполным***. Например, $ax^2 = 0$; $ax^2 + bx = 0$; $ax^2 + c = 0$ – это неполные квадратные уравнения.

Если $a = 1$, то квадратное уравнение называется ***приведенным***. Приведенное квадратное уравнение записывают так: $x^2 + px + q = 0$.

ЗАПОМНИТЕ!

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находят по формуле: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$ – это дискриминант квадратного уравнения.

Если второй коэффициент квадратного уравнения – это четное число, то корни такого квадратного уравнения можно находить по формуле: $x_{1,2} = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$, $a \neq 0$.

ЗАПОМНИТЕ!

1. Если $D < 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней.
2. Если $D = 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два равных корня: $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$.
3. Если $D > 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два разных действительных корня.

Пример 9. Решите уравнение: $2x^2-3x-5=0$.

Решение. Имеем $a=2$; $b=-3$; $c=-5$. Найдем дискриминант уравнения: $D=3^2-4\cdot 2\cdot(-5)=49>0$, значит уравнение имеет два действительных корня. По формуле корней квадратного уравнения найдем эти корни:

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm 7}{4};\Rightarrow\ x_1=\frac{3+7}{4}=\frac{5}{2};\ x_2=\frac{3-7}{4}=-1.$$

Ответ. $x_1=\frac{5}{2}$; $x_2=-1$.

Пример 10. Решите уравнение: $x^2+x+1=0$

Решение. Найдем дискриминант уравнения: $D=1^2-4\cdot 1\cdot 1=1-4=-3<0\Rightarrow$ уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. $\varnothing$.

Пример 11. Решите уравнение: $4x^2+12x+9=0$.

Решение. Найдем дискриминант уравнения: $D=12^2-4\cdot 4\cdot 9=144-144=0$, следовательно $x_1=x_2=\frac{-12}{8}=-\frac{3}{2}$. Уравнение имеет два равных корня.

Ответ. $x_1=x_2=-\frac{3}{2}$.

Пример 12. Решите уравнение: $5x^2-18x+9=0$.

Решение. Используем формулу корней квадратного уравнения, когда коэффициент при x – четное число.

Имеем $a=5$; $2k=-18\Rightarrow k=-9$; $c=9$.

Тогда $x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{9^2-5\cdot 9}}{5}=\frac{9\pm\sqrt{36}}{5}=\frac{9\pm 6}{5}$; $x_1=\frac{9+6}{5}=3$; $x_2=\frac{9-6}{5}=\frac{3}{5}$.

Ответ. $x_1=3$; $x_2=\frac{3}{5}$.

4.3. Теорема Виета

ЗАПОМНИТЕ!

Теорема Виета. Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, тогда их сумма равна $-\frac{b}{a}$, а произведение равно $\frac{c}{a}$.

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Докажем теорему Виета.

Дано: $ax^2+bx+c=0$; $D\ge 0$ $\Leftrightarrow$. $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$; $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.

Доказать: $x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}$; $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

Доказательство: $x_1+x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}+\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-2b}{2a}=-\dfrac{b}{a}$;

$$x_1\cdot x_2=\left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2}=\frac{b^2-D}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

Из теоремы Виета следует, что квадратный трехчлен ax^2+bx+c можно разложить на линейные множители:

$$ax^2+bx+c=a\cdot\left[x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2\right]=$$
$$=a\cdot\left[x^2-x_1\cdot x-x_2\cdot x+x_1\cdot x_2\right]=$$
$$=a\cdot\left[x(x-x_1)-x_2\cdot(x-x_1)\right]=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$$

Так, если $D\ge 0$, то $ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$.

<u>*Пример 13.*</u> Разложите квадратный трехчлен $3x^2-10x+3$ на линейные множители.

Решение. Найдем корни трехчлена. Для этого решим уравнение

$$3x^2-10x+3=0\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-9}}{3}=\frac{5\pm 4}{3};\ x_1=\frac{1}{3};\ x_2=3.$$

Так, $3x^2-10x+3=3\cdot\left(x-\dfrac{1}{3}\right)(x-3)=(3x-1)(x-3)$.

Ответ. $3x^2-10x+3=(3x-1)(x-3)$.

ЗАПОМНИТЕ!

Теорема Виета для приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ **.** Если приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет действительные корни x_1 и x_2, то их сумма: $x_1+x_2=-p$, а произведение: $x_1\cdot x_2=q$.

Обратная теорема Виета. Если сумма двух чисел x_1 и x_2 равна $(-p)$, а произведение этих чисел равно q, то числа x_1 и x_2 – это корни уравнения $x^2+px+q=0$.

Докажем обратную теорему Виета.

Дано: $x_1+x_2=-p$; $x_1\cdot x_2=q$.

Доказать, что x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2+px+q=0$.

Доказательство: $x_1+x_2=-p \Rightarrow x_1=-p-x_2$. Подставим $x_1=-p-x_2$ в равенство $x_1\cdot x_2=q$, получим: $(-p-x_2)\cdot x_2=q \Rightarrow -px_2-x_2^2=q \Rightarrow x_2^2+px_2+q=0$. Следовательно, число x_2 – это корень уравнения $x^2+px+q=0$.

Так же можно показать, что число x_1 – это тоже корень уравнения $x^2+px+q=0$.

Используя обратную теорему Виета, можно составить квадратное уравнение по данным корням.

Пусть $x_1=m$; $x_2=n$. По теореме Виета: если $\begin{cases} p=-(m+n) \\ q=m\cdot n \end{cases}$,

то $x^2-(m+n)\cdot x+m\cdot n=0$.

<u>*Пример 14.*</u> Составьте квадратное уравнение с корнями $x_1=-2$; $x_2=4$.

Решение. По теореме Виета: $p=-(x_1+x_2)=-2$; $q=x_1\cdot x_2=-8$.

Ответ. $x^2-2x-8=0$.

S **Ответьте на вопросы**

1. Что такое равенство, тождество, уравнение?
2. Что такое ОДЗ уравнения?
3. Что такое равносильные уравнения?
4. Что такое корень уравнения?
5. Какие преобразования можно делать, чтобы получить равносильные уравнения?
6. Какие виды уравнений вы знаете?

Задания для самостоятельной работы № 9

I. Решите уравнения.

1) $(2x-1)+(x-3)=8$;

2) $\dfrac{2x-1}{3x+5}=\dfrac{2}{5}$;

3) $\dfrac{4\cdot(x-2)}{3}+\dfrac{3x+1}{8}=\dfrac{3\cdot(6x-5)}{5}-9$;

4) $\dfrac{2-3x}{4}-\dfrac{5-x}{9}-\dfrac{5-2x}{12}=0,25-\dfrac{x+2}{4}-\dfrac{x+1}{18}$;

5) $\dfrac{2x^2-1}{x^2-9}-\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{3x+1}{3x-9}$;

6) $\dfrac{9x-5}{3x+1}+\dfrac{108x-9-36x^2}{4\cdot(9x^2-1)}=\dfrac{12x+1}{6x-2}$;

7) $(x-1)^2=16$;

8) $9\cdot(x+3)^2-\sqrt[3]{2}=0$;

9) $\sqrt{2}\cdot\left(3x-1+\sqrt{5}\right)^2-4=\sqrt{3}$;

10) $-x^2-5x=0$

11) $9x^2-14x=0$;

12) $(x-3)^2=6\cdot(x-3)$;

13) $9\cdot(x-7)^2=14-2x$;

14) $x^2-7x+12=0$;

15) $x^2-x-2=0$;

16) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{13x}{12}-1=0$;

17) $9x^2-\sqrt{3}x-2=0$;

18) $\dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{4}{x-2}$;

19) $\dfrac{2}{3\cdot(3x+1)}+\dfrac{x+3}{9x^2-3x+1}=\dfrac{2}{27x^3+1}$;

20) $\dfrac{2}{8x^3+4x^2-2x-1}+\dfrac{1}{1-4x^2}=\dfrac{x}{4x^2+4x+1}$.

II. В уравнении $x^2+px+18=0$ один из корней равен 3. Найдите второй корень и коэффициент p.

III. Составьте квадратные уравнения по данным корням:

1) 3 и -3;

2) $\dfrac{1}{2}$ и $-\dfrac{1}{4}$;

3) $0,4$ и $0,01$;

4) $\dfrac{1}{10-2\sqrt{10}}$ и $\dfrac{1}{10+\sqrt{40}}$; 5) $\dfrac{6}{\sqrt{15}-3}$ и $\dfrac{6}{\sqrt{15}+3}$;

6) $\dfrac{22}{5-\sqrt{14}}$ и $\dfrac{22}{5+\sqrt{14}}$; 7) $a+b\sqrt{m}$ и $a-b\sqrt{m}$.

IV. Один из корней уравнения $2x^2+bx-18=0$ равен 2. Найдите второй корень и коэффициент b.

V. Один из корней уравнения $3x^2+14x+c=0$ равен -4. Найдите второй корень и свободный член c.

VI. Один из корней уравнения $x^2-7x+q=0$ равен 9. Найдите второй корень и коэффициент q.

VII. Разность корней уравнения $x^2+13x+q=0$ равен 5. Найдите коэффициент q.

VIII. Составьте квадратное уравнение, корни которого в два раза больше корней уравнения:

1) $x^2-5x+6=0$; 2) $3x^2+10x+3=0$;
3) $2x^2-3x+1=0$; 4) $6x^2-7x+1=0$;
5) $5x^2-12x+4=0$; 6) $8x^2+14x+3=0$.

IX. Составьте квадратное уравнение, корни которого на 0,2 больше корней уравнения:

1) $x^2-12x+20=0$; 2) $x^2-18x+32=0$;
3) $5x^2-x-2=0$; 4) $11x^2+8x-3=0$;
5) $5x^2+22x+24=0$; 6) $3x^2+10x+8=0$.

X. Составьте квадратное уравнение, корни которого обратны корням уравнения:

1) $x^2-8x+12=0$; 2) $2x^2-x-1=0$;
3) $3x^2+5x-8=0$; 4) $4x^2-3x-1=0$;
5) $x^2+px+q=0$; 6) $ax^2+bx+c=0$.

XI. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны:

1) квадратам корней уравнения $ax^2+bx+c=0$;
2) кубам корней уравнения $ax^2+bx+c=0$.

XII. Составьте квадратное уравнение, один из корней которого равен сумме, а второй – произведению корней уравнения $ax^2+bx+c=0$.

XIII. Не решая уравнения $x^2+(a+9)x+a^2+11=0$, найдите при каких значениях a один из корней в пять раз больше второго.

XIV. При каком значении a один из корней уравнения $8x^2-30x+a^3=0$ равен квадрату другого корня?

4.4. Трехчленные уравнения. Биквадратные уравнения

Уравнение вида $ax^{2n}+bx^n+c=0$ называется ***трехчленным***, если $n\ge 2$, $n\in N$, $a\ne 0$, $b\ne 0$, $c\ne 0$.

Если $n=2$, то уравнение $ax^4+bx^2+c=0$ называется ***биквадратным уравнением.***

Заменой переменной $x^n=t$ трехчленное уравнение $ax^{2n}+bx^n+c=0$ преобразуется в квадратное $at^2+bt+c=0$.

<u>Пример 15.</u> Решите уравнение $x^4-13x^2+36=0$.

Решение. Пусть $x^2=t$, тогда $t^2-13t+36=0 \Leftrightarrow t_1=4;\ t_2=9$;

$$x^2=4 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm 2; \qquad x^2=9 \Leftrightarrow x_{3,4}=\pm 3.$$

Ответ. $\{\pm 2;\quad \pm 3\}$.

<u>Пример 16.</u> Решите уравнение $(2x-1)^6+3(2x-1)^3-10=0$.

Решение. Пусть $(2x-1)^3=t$, тогда $t^2+3t-10=0 \Leftrightarrow t_1=-5;\ t_2=2$.

Если $t=-5$, то $(2x-1)^3=-5 \Leftrightarrow (2x-1)^3+5=0$. Разложим это выражение на множители, используя формулу суммы кубов:
$(2x-1)^3+5=\left(2x-1+\sqrt[3]{5}\right)\left(4x^2-4x+1-2x\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}\right)=0$.

Приравняем выражения в скобках к нулю и найдем корни уравнения:

а) $2x-1+\sqrt[3]{5}=0 \Leftrightarrow x_1=\dfrac{1-\sqrt[3]{5}}{2}$;

б) $4x^2-4x+1-2x\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}=0$ –уравнение не имеет действительных корней, т.к. $D=\left(-4-2\sqrt[3]{5}\right)^2-4\cdot 4\cdot\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}+1\right)=-12\cdot\sqrt[3]{25}-32\sqrt[3]{5}<0$.

Если $t=2$, то $(2x-1)^3=2 \Leftrightarrow (2x-1)^3-2=0$. Тогда,

$(2x-1)^3-2=\left(2x-1-\sqrt[3]{2}\right)\left(4x^2-4x+1+2x\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)=0$.

Приравняем выражения в скобках к нулю и найдем корни уравнения:

а) $2x-1-\sqrt[3]{2}=0 \Leftrightarrow x_2=\dfrac{1-\sqrt[3]{2}}{2}$;

б) $4x^2-4x+1+2x\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}=0$ – это уравнение не имеет действительных корней, потому что $D=\left(-4+2\sqrt[3]{2}\right)^2-4\cdot 4\cdot\left(-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1\right)= =-12\cdot\sqrt[3]{4}<0$.

Ответ. Уравнение $(2x-1)^6+3(2x-1)^3-10=0$ имеет два действительных корня: $x\in\left\{\dfrac{1-\sqrt[3]{5}}{2};\quad \dfrac{1+\sqrt[3]{2}}{2}\right\}$.

Пример 17. Решите уравнение $x^8-17x^4+16=0$.

Решение. Пусть $x^4=t$, тогда $x^8=\left(x^4\right)^2=t^2$, получим

$$t^2-17t+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=1 \\ t_2=16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4=1 \\ x^4=16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\sqrt[4]{1}=1 \\ x_2=-\sqrt[4]{1}=-1 \\ x_3=\sqrt[4]{16}=2 \\ x_4=-\sqrt[4]{16}=-2 \end{array}\right.$$

Ответ. $\{\pm 1;\quad \pm 2\}$.

4.5. Уравнения высших степеней

Уравнение вида $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n=0$ $(n\in N;\quad a_0\neq 0)$ – это ***алгебраическое уравнение степени*** n.

Если $n>2$, то уравнение называется уравнением высшей степени. Например, $7x^3+25x^2-x-1=0$ – это уравнение третьей степени.

Алгебраическое уравнение степени n имеет не более n действительных корней.

Если $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n$, тогда для уравнения $P_n(x)=0$ справедлива теорема Безу.

ЗАПОМНИТЕ!

Теорема Безу. Многочлен $P_n(x)$ делится без остатка на двучлен $(x-a)$ тогда и только тогда, когда a – это корень многочлена $P_n(x)$.

Например, многочлен x^3+x^2-x-1 делится без остатка на двучлен $(x-1)$, т.к. $x=1$ – это корень уравнения $x^3+x^2-x-1=0$.

Если $P_n(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, то любой целый корень многочлена $P_n(x)$ является делителем свободного члена a_n.

Например, $x^2-7x+12$ – многочлен второй степени; его корни $x_1=3$ и $x_2=4$ – это делители свободного члена (числа 12).

Если существует хотя бы один целый корень уравнения, то ***уравнения высших степеней решают так***:

1) находят множество делителей свободного члена a_n;
2) проверяют, какие из этих делителей являются корнями уравнения $P_n(x)=0$ (используя теорему Безу);
3) находят частное от деления $P_n(x)$ на $x-x_1$, где x_1 – корень уравнения $P_n(x)=0$;
4) записывают $Q_{n-1}(x)=\dfrac{P_n(x)}{x-x_1}$ как многочлен степени $(n-1)$: $\dfrac{P_n(x)}{x-x_1}=Q_{n-1}(x)\Rightarrow\ P_n(x)=(x-x_1)Q_{n-1}(x)$, где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени $(n-1)$;
5) проверяют, являются ли корни многочлена $Q_{n-1}(x)$ также и корнями исходного уравнения.

<u>*Пример 18.*</u> Решите уравнение $x^3-2x+1=0$.

Решение. 1) Находим множество делителей свободного члена: это ±1.

2) Проверяем, какой из делителей является корнем заданного уравнения.

При $x=1$, получим: $x^3-2x+1=1^3-2\cdot1+1=0 \Rightarrow x=1$ – это корень заданного уравнения.

При $x=-1$, получим: $x^3-2x+1=(-1)^3-2\cdot(-1)+1=2 \Rightarrow x=-1$ – это не корень заданного уравнения.

3) Находим частное от деления многочлена x^3-2x+1 на $(x-1)$.

Получаем $\dfrac{x^3-2x+1}{x-1}=x^2+x-1$.

4) Записываем частное как многочлен степени $(n-1)$:

$$x^3-2x+1=(x-1)\left(x^2+x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2+x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Ответ. $\left\{1;\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

<u>*Пример 19.*</u> Решите уравнение $x^3-5x^2-2x+24=0$.

Решение. 1) Записываем делители свободного члена: ±1; ±2; ±3; $\pm4;\pm6;\pm8$; ±12; ±24. Подбором находим целый корень уравнения.

2) Подставляем найденные делители в исходное уравнение.

При $x=-1$, получим: $(-1)^3-5(-1)^2-2(-1)+24=-1-5+2+24=20\neq0$ $\Rightarrow x=-1$ – не является корнем заданного уравнения.

При $x=1$, получим: $1^3-5\cdot1^2-2\cdot1+24=1-5-2+24=18\neq0 \Rightarrow x=1$ – не является корнем заданного уравнения.

При $x=-2$, получим: $(-2)^3-5(-2)^2-2\cdot(-2)+24=-8-20+4+24=0 \Rightarrow$ $x_1=-2$ – является корнем заданного уравнения.

3) По теореме Безу многочлен $x^3-5x^2-2x+24$ делится без остатка на $(x+2)$. Выполним деление "углом":

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3-5x^2-2x+24 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3+2x^2} & x^2-7x+12 \\ -\,-7x^2-2x & \\ \underline{-7x^2-14x} & \\ -\,12x+24 & \\ \underline{12x+24} & \\ 0 & \end{array}$$

Представим многочлен в виде произведения двух сомножителей: $x^3-5x^2-2x+24=(x+2)(x^2-7x+12)$.

$$(x+2)(x^2-7x+12)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=0 \\ x^2-7x+12=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_2=3; \quad x_3=4 \end{array}\right.$$

Ответ. $\{-2;\ 3;\ 4\}$.

<u>*Пример 20.*</u> Решите уравнение $2x^3-3x^2-x+1=0$.

Решение. 1) Множество делителей свободного члена 1 – это ± 1. Но ± 1 не являются корнями исходного уравнения.

2) Найдем рациональные корни уравнения в виде $\frac{p}{q}$, где p – делитель числа 1; q – делитель числа 2 (2 – это старший коэффициент уравнения). p и q – это взаимно простые числа. Такими корнями могут быть: $\pm\frac{1}{2}$.

3) Проверим $\pm\frac{1}{2}$. После подстановки, находим корень уравнения $x=\frac{1}{2}$.

4) Разделим многочлен на $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ или $2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)=2x-1$, чтобы при делении не было дробных коэффициентов.

$$\begin{array}{r|l} -\ 2x^3-3x^2-x+1 & 2x-1 \\ \cline{2-2} \underline{2x^3-x^2} & x^2-x-1 \\ -\ -2x^2-x & \\ \underline{-2x^2+x} & \\ -\ -2x+1 & \\ \underline{-2x+1} & \\ 0 & \end{array}$$

5) Получаем: $2x^3-3x^2-x+1=(2x-1)(x^2-x-1)=0$.

$$(2x-1)(x^2-x-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ x^2-x-1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{2} \\ x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad x_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Ответ. $\left\{\frac{1}{2};\ \frac{1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

ЗАПОМНИТЕ!

Если корень уравнения $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ – это дробь $\frac{p}{q}$, тогда q – это делитель старшего коэффициента a_0, а p – это делитель свободного члена a_n.

4.5.1. Симметричные уравнения третьей и четвертой степеней

Рациональное уравнение третьей степени называется симметричным, если оно имеет вид: $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ $(a \neq 0)$.

Многочлен левой части такого уравнения легко разложить на множители и получить совокупность линейного и квадратного уравнений: $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow a(x^3+1) + bx(x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$$a(x+1)(x^2-x+1) + bx(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)\left[a(x^2-x+1)+bx\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)\left(ax^2+(b-a)x+a\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ ax^2+(b-a)x+a=0 \end{array}\right..$$

<u>*Пример 21.*</u> Решите уравнение $x^3 + 9x^2 + 9x + 1 = 0$.

Решение. С помощью эквивалентных преобразований разложим левую часть уравнения на множители:

$$x^3+9x^2+9x+1 = x^3+1+9x^2+9x = (x+1)(x^2-x+1)+9x(x+1) =$$

$$= (x+1)(x^2-x+1+9x) = (x+1)(x^2-x+1+9x) = (x+1)(x^2+8x+1).$$

Приравняем каждый множитель к нулю:

$$(x+1)(x^2+8x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x^2+8x+1=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-4\pm\sqrt{15} \end{array}\right..$$

Ответ. $\{-1; -4\pm\sqrt{15}\}$.

Рациональное уравнение четвертой степени называется симметричным, если оно имеет вид: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ $(a \neq 0)$.

<u>*Пример 22.*</u> Решите уравнение $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$.

Решение. $x^4-2x^3-x^2-2x+1=x^4+1-2x^3-2x-x^2=\left(x^2\right)^2+1-2x\left(x^2+1\right)-x^2=$

$$=\left(x^2\right)^2+2x^2\cdot 1+1^2-2x^2-2x\left(x^2+1\right)-x^2=\left(x^2+1\right)^2-2x\left(x^2+1\right)-3x^2=$$

$$=\left(x^2+1\right)^2-2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot x+x^2-x^2-3x^2=\left(\left(x^2+1\right)-x\right)^2-4x^2=\left(x^2-x+1\right)^2-(2x)^2=$$

$$=\left(x^2-x+1-2x\right)\left(x^2-x+1+2x\right)=\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2+x+1\right).$$

$$\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2+x+1\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x^2-3x+1=0 \\ x^2+x+1=0 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \\ \text{äÍ éńňâčňÍ ëüí ű ő ęî đí Í é í Í ň, ň.ę.}\quad D=1^2-4\cdot 1\cdot 1=-3<0 \end{array}\right.$$

Ответ. $\left\{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

4.6. Решение алгебраических уравнений методом введения новой переменной

Для решения алгебраических уравнений часто используют метод введения новой переменной. Рассмотрим это на примерах.

<u>*Пример 23.*</u> Решите уравнение $\left(x^2+x\right)^2-8\left(x^2+x\right)+12=0$.

Решение. Пусть $x^2+x=t$, тогда получим уравнение: $t^2-8t+12=0$. Находим $t_1=2$; $t_2=6$. Теперь нужно решить два квадратных уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x=2 \\ x^2+x=6 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x^2+x-2=0 \\ x^2+x-6=0 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x_1=-2;\quad x_2=1 \\ x_3=-3;\quad x_4=2 \end{array}\right.$$

Ответ. $\{-3;\,-2;\,1;\,2\}$.

<u>*Пример 24.*</u> Решите уравнение $\dfrac{1}{x^2+2x-3}+\dfrac{18}{x^2+2x+2}+\dfrac{-18}{x^2+2x+1}=0$.

Решение. Пусть $x^2+2x+1=t$, тогда для t получим уравнение:

$$\frac{1}{t-4}+\frac{18}{t+1}+\frac{-18}{t}=0 \;\Rightarrow\; \frac{t^2-17t+72}{t(t+1)(t-4)}=0.$$

Данное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$\left[\begin{array}{l} t^2-17t+72=0 \\ t(t+1)(t-4)\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=9, t_2=8 \\ t_3\neq 0, t_4\neq -1, t_5\neq 4 \end{array}\right.$, значит $t_1=9$ и $t_2=8$ – корни данного уравнения.

Теперь нужно решить два квадратных уравнения:
$\left[\begin{array}{l} x^2+2x+1=9 \\ x^2+2x+1=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=2; \quad x_2=-4 \\ x_{3,4}=-1\pm 2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Ответ. $\left\{-4; \quad -1-2\sqrt{2}; \quad -1+2\sqrt{2}; \quad 2\right\}$.

<u>*Пример 25.*</u> Решите уравнение $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби на x, получим $\dfrac{4}{4x+\dfrac{7}{x}-8}+\dfrac{3}{4x+\dfrac{7}{x}-10}=1$. Обозначим $4x+\dfrac{7}{x}=t$, тогда для t получаем уравнение: $\dfrac{4}{t-8}+\dfrac{3}{t-10}=1$, где $t\neq 8$; $t\neq 10$, т.е. $t^2-25t+144=0$; $t_1=16$; $t_2=9$. Теперь нужно решить два уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} 4x+\dfrac{7}{x}=9 \\ 4x+\dfrac{7}{x}=16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2-9x+7=0 \\ 4x^2-16x+7=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{äåéñòâèòåëüíû õ êîðíåé íåò} \\ x_1=\dfrac{1}{2}; \quad x_2=\dfrac{7}{2}. \end{array}\right.$$

Уравнение $4x^2-9x+7=0$ не имеет действительных корней, т.к. его дискриминант меньше нуля.

Ответ. $\left\{\dfrac{1}{2}; \quad \dfrac{7}{2}\right\}$.

ЗАПОМНИТЕ!

Уравнение вида $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$ можно привести к квадратному, если:

$$a+b=c+d \text{ или } a+c=b+d \text{ или } a+d=b+c.$$

<u>*Пример 26.*</u> Решите уравнение $(x+4)(x+5)(x+7)(x+8)=4$.

Решение. В нашем примере $4+8=5+7$, значит, множители левой части можно сгруппировать так:
$[(x+4)(x+8)]\cdot[(x+5)(x+7)]=4 \Rightarrow (x^2+12x+32)(x^2+12x+35)=4$.

Обозначим $x^2+12x+32=t$, тогда: $x^2+12x+35=t+3$.

Получим уравнение: $t\cdot(t+3)=4 \Rightarrow t^2+3t-4=0 \Rightarrow t_1=-4;\ t_2=1$.

Теперь решим два квадратных уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+12x+32=-4 \\ x^2+12x+32=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+12x+36=0 \\ x^2+12x+31=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=6 \\ x_{2,3}=-6\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Ответ. $\left\{6;\quad -6\pm\sqrt{5}\right\}$.

ЗАПОМНИТЕ!

Уравнение вида $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ приводят к биквадратному уравнению при помощи замены: $x=t-\dfrac{a+b}{2}$.

Пример 27. Решите уравнение $(x-4{,}5)^4+(x-5{,}5)^4=1$.

Решение. В нашем примере сделаем замену: $x=t-\dfrac{-4{,}5-5{,}5}{2} \Rightarrow x=t+5$.

Тогда: $x-4{,}5=t+0{,}5$; $x-5{,}5=t-0{,}5$. Получаем уравнение для t:

$$(t+0{,}5)^4+(t-0{,}5)^4=1 \Rightarrow \left[(t+0{,}5)^2-(t-0{,}5)^2\right]^2+2\left(t^2-0{,}25\right)^2=1.$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены: $16t^4+24t-7=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t^2=\frac{1}{4} \Rightarrow t_{1,2}=\pm 0{,}5. \text{ Получим: } \left[\begin{array}{l} x-4{,}5=0{,}5+0{,}5 \\ x-4{,}5=-0{,}5+0{,}5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=5{,}5; \\ x_2=4{,}5. \end{array}\right.$$

Ответ. $\left\{4{,}5;\quad 5{,}5\right\}$.

ЗАПОМНИТЕ!

Уравнение вида $ax^4+bx^3+cx^2+dx+m=0$ называется ***возвратным***, если $\dfrac{a}{m}=\dfrac{b^2}{d^2}$, $m\neq 0$.

Чтобы решить возвратное уравнение, нужно:

– разделить обе части уравнения на x^2 (если $x=0$, то это не решение уравнения);
– сделать замену переменных и получить квадратное уравнение;
– найти x.

<u>*Пример 28.*</u> Решите уравнение $3x^4-2x^3-9x^2-4x+12=0$.

Решение. Отношение первого коэффициента к свободному члену и отношение квадрата второго коэффициента к квадрату предпоследнего члена равны между собой: $\frac{3}{12}=\frac{(-2)^2}{(-4)^2}=\frac{1}{4}$. Разделим исходное уравнение на x^2. Получим $3x^2-2x-9-\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}=0$. Сгруппируем слагаемые:

$$3x^2+\frac{12}{x^2}-2x-\frac{4}{x}-9=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\cdot\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-2\cdot\left(x+\frac{2}{x}\right)-9=0.$$

Сделаем замену: $x+\frac{2}{x}=t,$ получим: $t^2=\left(x+\frac{2}{x}\right)^2=x^2+4+\frac{4}{x^2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2+\frac{4}{x^2}=t^2-4\Rightarrow 3\left(t^2-4\right)-2t-9=0\Leftrightarrow 3t^2-2t-21=0\Rightarrow t_1=3;\ t_2=-\frac{7}{3}.$$

Если $t=3\Rightarrow x+\frac{2}{x}=3\Rightarrow\frac{x^2+2}{x}=3\Rightarrow x^2+2=3x\Rightarrow x^2-3x+2=0$, тогда $x_1=1;\ x_2=2.$

Если $t=-\frac{7}{3}\Rightarrow x+\frac{2}{x}=-\frac{7}{3}\Rightarrow\frac{x^2+2}{x}=-\frac{7}{3}\Rightarrow 3\left(x^2+2\right)=-7x\Rightarrow 3x^2+7x+6=0.$

$D=7^2-4\cdot3\cdot6=49-72=-23<0 \quad \Rightarrow$ действительных корней нет.

Ответ. $\{1;\ 2\}$.

4.7. Уравнения, которые содержат переменную под знаком модуля

Модуль числа обозначается так: $|x|$.

ЗАПОМНИТЕ!

Определение модуля:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0;\\ -x, & x<0;\end{cases} \qquad |f(x)|=\begin{cases}f(x), & f(x)\ge 0;\\ -f(x), & f(x)<0.\end{cases}$$

Свойства модуля: $|x|\ge 0;$ $|x|\ge x;$ $|xy|=|x|\cdot|y|;$ $|x|^2=x^2;$ $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|};$ $|-x|=|x|;$ $|-f(x)|=|f(x)|.$

Чтобы решить уравнения с переменной под знаком модуля, нужно:

- раскрыть модуль по определению;
- если нужно, то возвести обе части уравнения в квадрат;
- приравнять к нулю выражения, которые стоят под знаком модуля;
- нанести полученные значения на числовую ось (при этом числовая ось разбивается на интервалы или промежутки);
- решить полученные уравнения в каждом из интервалов.

Пример 29. Решите уравнение $|7x-1|=21-9x$.

Решение. Раскроем модуль по определению:

а) если $7x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq\frac{1}{7}$, то $|7x-1|=7x-1$, тогда $7x-1=21-9x\Rightarrow x=\frac{11}{8}$,

$\frac{11}{8}\in\left[\frac{1}{7};\ +\infty\right[$, значит $x=\frac{11}{8}$ – это корень уравнения;

б) если $7x-1<0 \Rightarrow x<\frac{1}{7}$, то $|7x-1|=1-7x$, тогда $1-7x=21-9x\Rightarrow x=10$,

но $10\notin\left]-\infty;\ \frac{1}{7}\right[$, поэтому $x=10$ – это не решение уравнения.

Ответ. $\left\{\frac{11}{8}\right\}$.

Пример 30. Решите уравнение $|x+2|+|x-4|=5x-20$.

Решение. Приравняем выражения под знаком модуля к нулю: $x+2=0\Rightarrow x=-2$; $x-4=0\Rightarrow x=4$.

Нанесем на числовую ось точки $x=-2$ і $x=4$. Эти точки разделяют числовую ось на три интервала. Обозначим эти интервалы как I, II, III. Найдем знаки выражений под знаком модуля на каждом из интервалов (рис. 4.1).

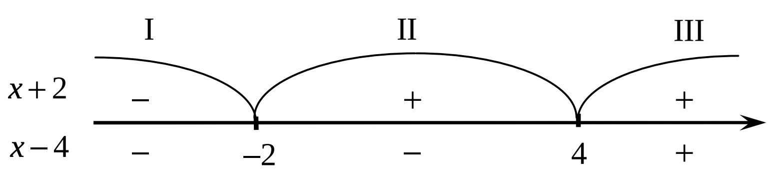


Рисунок 4.1

Решаем уравнение на каждом из интервалов.

I. $|x+2|=-(x+2)=-x-2$; $|x-4|=-(x-4)=-x+4$, тогда

$-x-2-x+4=5x-20 \Leftrightarrow -2+4+20=x+x+5x \Leftrightarrow 22=7x \Leftrightarrow x=\dfrac{22}{7}$, но $\dfrac{22}{7}\notin\,]-\infty;-2[$, поэтому на интервале I уравнение $|x+2|+|x-4|=5x-20$ решений не имеет.

II. $|x+2|=x+2$; $|x-4|=-(x-4)=-x+4$, тогда

$x+2+(-x+4)=5x-20 \Leftrightarrow 5x=2+4+20 \Leftrightarrow 5x=26 \Leftrightarrow x=\dfrac{26}{5}$, но $\dfrac{26}{5}\notin[-2;4]$, поэтому на интервале II уравнение $|x+2|+|x-4|=5x-20$ решений не имеет.

III. $|x+2|=x+2$; $|x-4|=x-4$, тогда $x+2+x-4=5x-20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-4+20=-x-x+5x \Leftrightarrow 18=3x \Leftrightarrow x=6$. $6\in\,]4;+\infty[$, поэтому $x=6$ – это решение уравнения.

Ответ. $\{6\}$.

<u>*Пример 31.*</u> Решите уравнение $|2x-1|=|x-1|$.

Решение. Это уравнение можно решать методом, который рассмотрен выше. Однако, для данного уравнения с двумя модулями, удобнее использовать свойство модуля $|f(x)|^2=(f(x))^2$ и возвести обе части уравнения в квадрат.

Тогда, $|2x-1|=|x-1| \Leftrightarrow |2x-1|^2=|x-1|^2 \Rightarrow (2x-1)^2=(x-1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=x^2-2x+1 \Leftrightarrow 3x^2-2x=0 \Leftrightarrow x\cdot(3x-2)=0 \Leftrightarrow x_1=0;\ x_2=\dfrac{2}{3}$.

Ответ. $\left\{0;\ \dfrac{2}{3}\right\}$.

4.8. Иррациональные уравнения

Иррациональные уравнения – это уравнения, в которых переменная стоит под знаком корня.

Например, $\sqrt{1-x}=3$; $\sqrt{x^2}+\sqrt{x^5}=5$; $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-1}=-1$; $x^{\frac{1}{3}}+4=0$ – это иррациональные уравнения.

ЗАПОМНИТЕ!

Основные методы решения иррациональных уравнений:

1) метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень;
2) метод введения новых переменных.

При решении иррациональных уравнений нужно делать проверку найденных корней или находить область допустимых значений уравнения.

Пример 32. Решите уравнение $\sqrt{x-5}+\sqrt{3-x}=7$.

Решение. Находим ОДЗ уравнения: $D\colon \begin{cases} x-5\ge 0 \\ 3-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5 \\ x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow x=\varnothing$.

Ответ. $\varnothing$.

Пример 33. Решите уравнение $\sqrt{3x-6}=\sqrt{9-2x}$.

Решение. Возведем в квадрат обе части уравнения, получим: $3x-6=9-2x \quad \Leftrightarrow \quad 5x=15 \quad \Leftrightarrow \quad x=3$. Выполним проверку.

Проверка. При $x=3$: $\sqrt{3x-6}=\sqrt{3\cdot 3-6}=\sqrt{3}$; $\sqrt{9-2x}=\sqrt{9-2\cdot 3}=\sqrt{3}$; $\sqrt{3}=\sqrt{3} \Rightarrow x=3$ – это корень данного уравнения.

Ответ. $\{3\}$.

Пример 34. Решите уравнение $\sqrt{x+11}=1-x$.

Решение. Решим уравнение двумя способами.

I способ *(с проверкой корней)*.

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим: $\left(\sqrt{x+11}\right)^2=(1-x)^2 \Leftrightarrow x+11=1-2x+x^2 \Leftrightarrow x^2-3x-10=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1=-2; \quad x_2=5$.

Проверка. При $x_1=-2$, получим: $\sqrt{-2+11}=1-(-2) \Rightarrow \sqrt{9}=3 \Rightarrow 3=3$, значит $x_1=-2$ – это корень уравнения.

При $x_2=5$, получим: $\sqrt{5+11}\ne 1-5 \Rightarrow \sqrt{16}\ne -4 \Rightarrow 4\ne -4$, значит $x_2=5$ – это не корень уравнения.

Ответ. $\{-2\}$.

II способ *(с помощью эквивалентных преобразований)*.

$$\sqrt{x+11}=1-x \iff \begin{cases} x+11\ge 0 \\ 1-x\ge 0 \\ \left(\sqrt{x+11}\right)^2=(1-x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x\ge -11 \\ x\le 1 \\ x+11=1-2x+x^2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -11\le x\le 1 \\ x^2-3x-10=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -11\le x\le 1 \\ x_1=-2; \quad x_2=5 \end{cases} \iff \quad x=-2.$$

Ответ. $\{-2\}$.

<u>*Пример 35*</u>. Решите уравнение $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$.

Решение. Найдем ОДЗ: $x\in R$.

Возведем обе части уравнения в куб, используя формулу:

$$(a-b)^3=a^3-3ab(a-b)-b^3.$$

Тогда: $\left(\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}\right)^3=\left(\sqrt[3]{x+34}\right)^3-3\cdot\sqrt[3]{(x+34)(x-3)}\cdot 1-\left(\sqrt[3]{x-3}\right)^3$;

$1=x+34-3\cdot\sqrt[3]{(x+34)(x-3)}-x+3 \Rightarrow 3\cdot\sqrt[3]{(x+34)(x-3)}=36 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[3]{(x+34)(x-3)}=12$.

Возведем обе части уравнения в куб еще раз, получим:

$$x^2+31x-1830=0; \quad x_1=-61; \quad x_2=30.$$

Сделаем проверку:

а) Если $x_1=-61$, то $\sqrt[3]{-61+34}-\sqrt[3]{-61-3}=-3+4=1$; $1=1 \Rightarrow x_1=-61$ – это корень уравнения.

б) Если $x_2=30$, то $\sqrt[3]{30+34}-\sqrt[3]{30-3}=4-3=1$; $1=1 \Rightarrow x_2=30$ – это корень уравнения.

Ответ. $\{-61;\ 30\}$.

<u>*Пример 36.*</u> Решите уравнение $\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3x-1}=\sqrt[3]{x+1}$.

Решение. Найдем ОДЗ: $x\in R$. Возведем обе части уравнения в куб:

$$\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3x-1}\right)^3=\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 \iff$$

$$\iff \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3-3\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2\cdot\sqrt[3]{3x-1}+3\sqrt[3]{x-1}\cdot\left(\sqrt[3]{3x-1}\right)^2+\left(\sqrt[3]{3x-1}\right)^3=x+1 \iff$$

$$\iff x-1+3\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{3x-1}\cdot\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3x-1}\right)+3x-1=x+1 \iff$$

$$\iff 3\sqrt[3]{(x-1)(3x-1)}\cdot\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3x-1}\right)=-x+1-3x+1+x+1 \iff$$

$$\iff 3\sqrt[3]{(x-1)(3x-1)}\cdot\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3x-1}\right)=-3\cdot(x-1).$$

По условию: $\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3x-1}=\sqrt[3]{x+1}$, тогда получим:

$$3\sqrt[3]{(x-1)(3x-1)}\cdot\sqrt[3]{x+1}=-3\cdot(x-1).$$

Разделим обе части уравнения на 3 и возведем их в куб:

$$(x-1)(3x-1)(x+1)=-(x-1)^3 \Leftrightarrow (x-1)(3x-1)(x+1)+(x-1)^3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (x-1)\left[(3x-1)(x+1)+(x-1)^2\right]=0 \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ (3x-1)(x+1)+(x-1)^2=0 \end{array}\right. \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 3x^2+3x-x-1+x^2-2x+1=0 \end{array}\right. \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 4x^2=0 \end{array}\right. \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$$

Сделаем проверку.

а) При $x=1$, получим: $\sqrt[3]{1-1}+\sqrt[3]{3\cdot 1-1}=\sqrt[3]{1+1} \ \Rightarrow \ \sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2} \ \Rightarrow \ x=1$ – это корень уравнения.

б) При $x=0$, получим: $\sqrt[3]{0-1}+\sqrt[3]{3\cdot 0-1}=\sqrt[3]{0+1} \ \Rightarrow \ -2\neq 1 \ \Rightarrow \ x=0$ – это не корень уравнения.

Ответ. $\{1\}$.

<u>*Пример 37.*</u> Решите уравнение $\dfrac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{2}-\dfrac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{x^2}=\dfrac{x}{2}\cdot\sqrt[7]{\dfrac{x^3}{x+\sqrt{2}}}$.

Решение. Вынесем общий множитель за скобки в левой части уравнения; приведем к общему знаменателю и сократим на 2, получим:

$$\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}\cdot\frac{x^2-2}{x^2}=x\cdot\sqrt[7]{\frac{x^3}{x+\sqrt{2}}}.$$

Умножим правую и левую часть уравнения на $\dfrac{1}{x}\cdot\sqrt[7]{\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^3}}$, получим:

$$\sqrt[7]{\left(\frac{x^2-2}{x^3}\right)^8}=1 \ \Rightarrow \ \frac{x^2-2}{x^3}=\pm 1 \ \Rightarrow \ \left[\begin{array}{l} x^2-2=x^3 \\ x^2-2=-x^3 \end{array}\right. \ \Rightarrow \ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right..$$

Сделаем проверку.

При $x=1$, получим: $\dfrac{\sqrt[7]{1-\sqrt{2}}}{2}-\dfrac{\sqrt[7]{1-\sqrt{2}}}{1^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt[7]{\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ \sqrt[7]{1-\sqrt{2}}+\sqrt[7]{\frac{1}{1+\sqrt{2}}}=0 \ \Rightarrow \ \frac{\sqrt[7]{1-2}+\sqrt[7]{1}}{\sqrt[7]{1+\sqrt{2}}}=0 \ \Rightarrow \ \frac{-1+1}{\sqrt[7]{1+\sqrt{2}}}=0 \ \Rightarrow \ 0=0.$$

Так же проверяем $x=-1$ и убеждаемся, что это корень данного уравнения.

Ответ. $\{-1;\ 1\}$.

<u>*Пример 38.*</u> Решите уравнение $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}}=2$.

Решение. Сделаем замену переменной: $t=\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}$. Тогда $\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}}=t^{-1}$.

Получим: $t+\frac{1}{t}=2 \Leftrightarrow \frac{t^2+1}{t}=2 \Leftrightarrow t^2+1=2t \Leftrightarrow t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t-1)^2=0 \Leftrightarrow t=1$. Значит, $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}=1 \Leftrightarrow \frac{5-x}{x+3}=1 \Leftrightarrow 5-x=x+3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5-3=x+x \Leftrightarrow 2=2x \Leftrightarrow x=1$.

Проверка. Если $x=1$, тогда $\sqrt[7]{\frac{5-1}{1+3}}+\sqrt[7]{\frac{1+3}{5-1}}=\sqrt[7]{\frac{4}{4}}+\sqrt[7]{\frac{4}{4}}=1+1=2;$

$2=2 \Rightarrow x=1$ – это корень уравнения.

Ответ. $\{1\}$.

<u>*Пример 39.*</u> Решите уравнение $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}-26\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=27$.

Решение. Сделаем преобразования:

$\sqrt{x\sqrt[5]{x}}=\sqrt{\sqrt[5]{x^5\cdot x}}=\sqrt[10]{x^6}=x^{\frac{6}{10}}=x^{\frac{3}{5}}$; $\quad \sqrt[5]{x\sqrt{x}}=\sqrt[5]{\sqrt{x^2\cdot x}}=\sqrt[10]{x^3}=x^{\frac{3}{10}}$.

Сделаем замену переменной: $x^{\frac{3}{10}}=t\geq 0$, получим $x^{\frac{3}{5}}=\left(x^{\frac{3}{10}}\right)^2=t^2$. Тогда, данное уравнение запишем так: $t^2-26t=27 \Leftrightarrow t^2-26t-27=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_1=27;\ t_2=-1$. Так как $t\geq 0$, то $t_2=-1$ – это не корень уравнения.

Если $t_1=27$, то $x^{\frac{3}{10}}=27 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{3}{10}}\right)^{\frac{10}{3}}=27^{\frac{10}{3}} \Leftrightarrow x=\left(3^3\right)^{\frac{10}{3}} \Leftrightarrow x=3^{10} \Leftrightarrow x=59049$.

Проверка. Так как исходное уравнение $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}-26\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=27$ эквивалентно уравнению $x^{\frac{3}{10}}=27$, то подставляя $x=3^{10}$ в это уравнение получим: $\left(3^{10}\right)^{\frac{3}{10}}=3^3=27 \Rightarrow x=59049$ – это корень исходного уравнения.

Ответ. $\{59049\}$.

Ответьте на вопросы

1. Какие уравнения называют биквадратными?
2. Какой вид имеют уравнения высших степеней?
3. Приведите схему решения уравнений высших степеней.
4. Какие уравнения называют симметричными?
5. Какие уравнения называют возвратными?
6. Назовите основные методы решения рациональных уравнений.

Задания для самостоятельной работы № 10

I. Решите биквадратные уравнения.

1) $x^4-5x^2+4=0$; 2) $x^4+2x^2-8=0$;

3) $x^2-\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2=8$; 4) $x^4-9x^2=0$;

5) $x^4-16=0$; 6) $x^4-6x^2+8=0$.

II. Решите возвратные уравнения.

1) $x^4-2x^3-6x^2-2x+1=0$; 2) $x^4+3x^3+2x^2+3x+1=0$;

3) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$; 4) $3x^4+x^3-8x^2-x+3=0$;

5) $3x^3-7x^2-7x+3=0$; 6) $x^4-3x^3-8x^2+12x+16=0$.

III. Решите уравнения, используя замену переменной.

1) $x^6-9x^3+8=0$; 2) $(x-1)^6-28(x-1)^3+27=0$;

3) $(x+2)^8-82(x+2)^4+81=0$; 4) $\dfrac{24}{x^2+2x-8}-\dfrac{15}{x^2+2x-3}=2$;

5) $(x+3)^4+(x+5)^4=16$; 6) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=120$;

7) $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\dfrac{3x}{x^2-8x+15}$; 8) $(x+2)^2+\dfrac{24}{x^2+4x}=18$;

9) $(x-3)^4+(x-5)^4=2$; 10) $\left(x^2+x+3\right)\cdot\left(x^2+x+8\right)=50$;

11) $\left(3x^2+7x-2\right)^2+5x^2\left(3x^2+7x-2\right)-24x^4=0$;

12) $\dfrac{33}{x^2-6x+8}-x^2+6x=16$.

IV. Решите уравнения с модулем.

1) $|x|=x+2$; 2) $|-x+2|=2x+1$;

3) $|x+1|+|x-5|=20$; 4) $\left|x^2-6x+7\right|=\dfrac{5x-9}{3}$;

5) $x^2-6x+|x-4|+8=0$; 6) $|x-2|+|x+3|=5$;

7) $|2x+1|-|3-x|=|x-4|$; 8) $|x|-2\cdot|x+1|+3\cdot|2x-4|=1$.

V. Решите иррациональные уравнения.

1) $\sqrt{x+1}=8-\sqrt{3x+1}$; 2) $\sqrt[4]{-2x}=4$; 3) $\sqrt{-3x}=9$;

4) $\sqrt[3]{-x}=3$; 5) $\sqrt{x^2+10x+25}+\sqrt{x^2-6x+9}=8$;

6) $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}$; 7) $\dfrac{x+5}{x}-\sqrt{\dfrac{x+5}{x}}=30$;

8) $(x+1)\sqrt{x^2+3x-2}=4x+4$; 9) $\sqrt[3]{2x+4}+\sqrt[3]{x-3}=1$;

10) $\sqrt{(x+9)^2}+2\sqrt{(x+11)(x+9)}+\sqrt{(x+11)^2}=10$;

11) $\sqrt[3]{x^2-3x-2}=x+4$; 12) $\sqrt[3]{x-6}-\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{3(x-2)}$;

13) $\sqrt[3]{5x+2}+\sqrt[3]{3x+6}+\sqrt[3]{7x-2}=0$; 14) $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4$;

15) $\sqrt[3]{76+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{76-\sqrt{x}}=8$; 16) $\sqrt{x-1}+6\cdot\sqrt[4]{x-1}=16$;

17) $\sqrt{4x^2+6x+6}+\sqrt{4x^2-6x+6}=6x$; 18) $\sqrt[3]{x^2}-2\cdot\sqrt[6]{x}+\sqrt{x}=2$;

19) $\dfrac{\sqrt[5]{x-2\sqrt{3}}}{12}-\dfrac{\sqrt[5]{x-2\sqrt{3}}}{x^2}=\dfrac{x}{12}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{x^3}{x+2\sqrt{3}}}$; 20) $\sqrt{x+3}=\sqrt[3]{3x+5}$;

21) $\dfrac{\sqrt[5]{2-x}}{x^2}-\dfrac{\sqrt[5]{2-x}}{4}=\sqrt[5]{\dfrac{x^2}{2+x}}$; 22) $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}=1$;

23) $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$; 24) $x^2+3x+\sqrt{x^2+6x+9}=0$;

25) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$.

4.9. Системы алгебраических уравнений

Системы уравнений – это несколько уравнений с двумя (или более) переменными.

Решить систему уравнений – значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Система называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.

Две системы называются ***равносильными***, если они имеют одно и то же множество решений.

4.9.1. Решение систем линейных уравнений

Система уравнений называется ***линейной***, если все уравнения, которые входят в систему, являются линейными.

Если система n линейных уравнений содержит n неизвестных, то возможны три случая:

1) система не имеет решения;
2) система имеет только одно решение;
3) система имеет бесконечное множество решений.

Исследовать систему – это значит определить, при каких значениях коэффициентов система имеет единственное решение; не имеет решения; имеет бесконечное множество решений.

Рассмотрим систему линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, где x и y – это переменные (неизвестные); a_1, a_2, b_1, b_2 – коэффициенты при переменных; c_1, c_2 – свободные члены.

Для решения таких систем часто используют определитель второго порядка.

Определитель второго порядка (главный определитель системы) состоит из коэффициентов при переменных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 называются ***элементами*** определителя.

Элементы a_1, a_2 или b_1, b_2, которые расположены по вертикали, образуют ***столбцы*** определителя.

Элементы a_1, b_1 или a_2, b_2, которые расположены по горизонтали, образуют ***строки*** определителя.

Элементы a_1, b_2 образуют ***главную диагональ*** определителя.

Элементы a_2 , b_1 образуют ***вспомогательную диагональ*** определителя.

Вспомогательный определитель состоит из коэффициентов при переменных и свободных членов:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1; \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1.$$

ЗАПОМНИТЕ!

Правило Крамера. Если главный определитель системы не равен нулю, то эта система имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

В таком случае: $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$; $\Delta \neq 0$.

<u>*Пример 40.*</u> Решите систему $\begin{cases} 5x - 4y = 0 \\ 2x - 7y = 27 \end{cases}$.

Решение. Вычислим определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -27; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 27 & -7 \end{vmatrix} = 108; \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 27 \end{vmatrix} = 135;$$

$$x = \frac{108}{-27} = -4; \qquad y = \frac{135}{-27} = -5.$$

Ответ. $\{-4;\ -5\}$.

ЗАПОМНИТЕ!

Если главный определитель равен нулю, а хотя бы один вспомогательный определитель не равен нулю, то система не имеет решений (несовместна). Условие несовместимости можно записать так: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$; $\Delta = 0$; $\Delta_x \neq 0$; $\Delta_y \neq 0$.

<u>*Пример 41.*</u> Решите систему $\begin{cases} 9x-6y=3 \\ 3x-2y=2 \end{cases}$.

Решение. Вычислим главный определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 9 & -6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$.

Свободные члены не пропорциональны коэффициентам при переменных: $\frac{9}{3} = \frac{-6}{-2} \neq \frac{3}{2}$. $\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$; $\Delta_y = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$.

Ответ. Система не имеет решений (несовместна).

ЗАПОМНИТЕ!

Если и главный определитель, и вспомогательные определители равны нулю, то система имеет бесконечное множество решений. Это можно записать так:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}; \;\; \Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0.$$

<u>*Пример 42.*</u> Решите систему $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 6x-4y=2 \end{cases}$.

Решение. Вычислим определители системы:

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 0$; $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$; $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

Вычислим отношения между коэффициентами при переменных и свободными членами: $\frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$. Отношения равны, следовательно, система имеет бесконечное множество решений.

Ответ. Система имеет бесконечное множество решений.

<u>*Пример 43.*</u> Исследуйте систему $\begin{cases} (a-1)x+(2a-3)y=a+2 \\ (a+1)x+(a+3)y=3a+1 \end{cases}$.

Решение. Коэффициенты системы зависят от параметра a.

Запишем главный определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a-1 & 2a-3 \\ a+1 & a+3 \end{vmatrix} = a\cdot(3-a)$.

1) Главный определитель будет равен нулю, если $a=0$ и $a=3$. Поэтому, если $a \neq 0$ и $a \neq 3$, то система имеет единственное решение.

2) Если $a=0$, то, подставив это значение в систему, получаем: $\begin{cases} x+3y=-2 \\ x+3y=1 \end{cases}$.

Найдем определители этой системы:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0;\quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0;\quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$ Значит, при $a = 0$ система не имеет решений (несовместна).

3) Если $a = 3$, то, подставив это значение в систему, получаем: $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$

$\Rightarrow\ y = \dfrac{5 - 2x}{3}$, поэтому при $a = 3$ система имеет бесконечное множество решений вида $\left\{\left(x;\ \dfrac{5-2x}{3}\right)\right\}$, где $x \in R$.

Ответ. Если $a \neq 0$ и $a \neq 3$, то система имеет единственное решение;

если $a = 0$, то система не имеет решений (несовместна);

если $a = 3$, то система имеет бесконечное множество решений вида $\left\{\left(x;\ \dfrac{5-2x}{3}\right)\right\}$, где $x \in R$.

Рассмотрим систему линейных уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$, где x, y, z – это переменные; a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 – коэффициенты при переменных; d_1, d_2, d_3 – свободные члены.

Для решения таких систем часто используют определители третьего порядка.

Выражение, обозначенное символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, называют ***определителем третьего порядка***.

Вычислить определитель третьего порядка можно разными способами. Рассмотрим некоторые из них.

1. Произведения элементов главной диагонали и элементов, которые образуют треугольник с основаниями, параллельными главной диагонали, нужно взять со знаком "+". Произведения элементов вспомогательной диагонали и элементов, которые лежат на вершинах треугольников с основаниями, параллельными вспомогательной диагонали, нужно взять со знаком "−" (рис. 4.2).

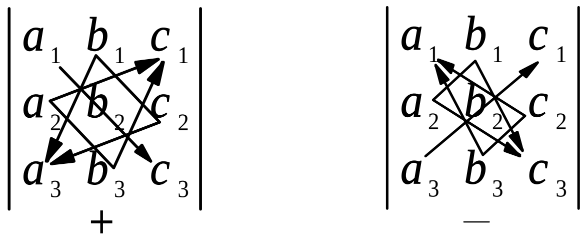


Рисунок 4.2

Например, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot(-5) + 2\cdot(-2)\cdot 3 + (-2)\cdot(-4)\cdot 3 -$

$$-3\cdot 3\cdot 3 - (-2)\cdot(-3)\cdot 1 - 2\cdot(-2)\cdot(-5) = -58.$$

2. Определитель третьего порядка можно вычислить по схеме, которая представлена на рисунке 4.3.

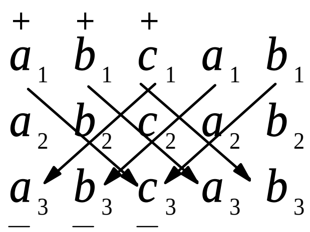


Рисунок 4.3

Например, $\begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 20 & 3 & -4 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ 6 & -2 & 3 & 6 & -2 \\ 20 & 3 & -4 & 20 & 3 \\ 6 & -2 & -5 & 6 & -2 \\ - & - & - & & \end{array} = 6\cdot 3\cdot(-5) +$

$$+(-2)\cdot(-4)\cdot 6 + 3\cdot 20\cdot(-2) - 6\cdot 3\cdot 3 - (-2)\cdot(-4)\cdot 6 - (-5)\cdot 20\cdot(-2) = -464.$$

3. Определитель третьего порядка можно разложить по элементам строки или столбца.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\cdot\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\cdot\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\cdot\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1\cdot\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\cdot\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\cdot\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Например, $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$

$$= 3\cdot(-5+16) - 2\cdot(1+32) + 2\cdot(2+20) = 11.$$

Систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными можно решить, используя правило Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta};\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta};\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \text{ если } \Delta \neq 0;\ \Delta_x \neq 0;\ \Delta_y \neq 0;\ \Delta z \neq 0.$$

Пример 44. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 7x - 3y + 5z = 32 \\ 5x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + 3z = 14 \end{cases}$.

Решение. Вычислим определители системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 43;$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 32 & -3 & 5 \\ 11 & 2 & 1 \\ 14 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 86;\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 7 & 32 & 5 \\ 5 & 11 & 1 \\ 2 & 14 & 3 \end{vmatrix} = -43;\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 32 \\ 5 & 2 & 11 \\ 2 & -1 & 14 \end{vmatrix} = 129.$$

Тогда $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{86}{43} = 2;\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-43}{43} = -1;\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{129}{43} = 3.$

Ответ. $\{(2;\ -1;\ 3)\}$.

Если система линейных алгебраических уравнений содержит более двух неизвестных, для ее решения удобно использовать ***метод Гаусса***. Этот метод состоит в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим использование этого метода с помощью примеров.

Пример 45. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + 3z = 13 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$.

Решение. Умножим первое уравнение системы на 2 и вычтем его из второго уравнения системы. Умножим первое уравнение системы на 3 и вычтем его из третьего уравнения системы. Получим систему уравнений, которая будет равносильна данной: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ y-z=-1 \\ y+z=5 \end{cases}$.

Вычтем из третьего уравнения системы второе, получим: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ y-z=-1 \\ z=3 \end{cases}$.

Последовательно из третьего, второго и первого уравнений находим: $z=3;\ y=z-1=2;\ x=6-y-z=1.$

Ответ. $\{(1;2;3)\}$.

<u>*Пример 46.*</u> Решите систему уравнений: $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=1 \\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=2 \\ 3x_1+2x_2-3x_3+2x_4=-5 \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=11 \end{cases}$.

Решение. Используя первое уравнение системы, исключаем неизвестную x_1 из второго, третьего и четвертого уравнений. Для этого:

– из второго уравнения вычтем первое уравнение, умноженное на 2;

– из третьего уравнения вычтем первое уравнение, умноженное на 3;

– из четвертого уравнения вычтем первое уравнение, умноженное на 2.

Получим систему уравнений, которая будет эквивалентна исходной:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=1 \\ 5x_2+8x_3-x_4=0 \\ 2x_2+5x_3-4x_4=4 \\ 7x_2+4x_3-5x_4=-9 \end{cases}.$$

Используем второе уравнение системы и исключим x_2 из третьего и четвертого уравнений системы. Для этого из третьего уравнения вычтем второе, умноженное на $\frac{2}{5}$, а из четвертого уравнения вычтем второе, умноженное на $\frac{7}{5}$. Получим систему: $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=1 \\ 5x_2+8x_3-x_4=0 \\ 9x_3-18x_4=20 \\ 4x_3+2x_4=5 \end{cases}$.

Исключим x_3 из четвертого уравнения. Для этого вычтем из него третье уравнение, умноженное на $\frac{4}{9}$, получим систему: $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=1 \\ 5x_2+8x_3-x_4=0 \\ 9x_3-18x_4=20 \\ 2x_4=-\frac{7}{9} \end{cases}$.

Решим полученную треугольную систему и найдем последовательно:

$x_4 = -\frac{7}{18}$; $\quad x_3 = 2x_4 + \frac{20}{9} = \frac{13}{9}$; $\quad x_2 = -\frac{8}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = -\frac{43}{18}$;

$x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = \frac{2}{3}$.

Ответ. $\left\{\left(\frac{2}{3}; -\frac{43}{18}; \frac{13}{9}; -\frac{7}{18}\right)\right\}$.

4.9.2. Решение систем нелинейных уравнений

Мы рассмотрели некоторые способы решения систем линейных уравнений. Теперь рассмотрим, какими способами целесообразно решать системы нелинейных уравнений.

Для решения ***нелинейных систем алгебраических*** уравнений используют такие же методы решения, которые используются для решения систем линейных уравнений:

1) метод подстановки;
2) метод алгебраического сложения;
3) метод замены переменных.

Пример 47. Решите систему $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ методом подстановки.

Решение. Из первого уравнения системы найдем $y = 7 - x$, для этого подставим во второе уравнение системы выражение $(7 - x)$ вместо y.

Получим: $\begin{cases} y = 7 - x \\ x^2 + (7 - x)^2 = 25. \end{cases}$

Находим x из второго уравнения системы: $x^2 + (7 - x)^2 = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25 \Leftrightarrow 2x^2 - 14x + 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 = 3; \Leftrightarrow x_2 = 4$.

Система имеет два решения:

а) $\begin{cases} y_1 = 7 - x_1 = 7 - 3 = 4 \\ x_1 = 3 \end{cases}$; $\quad$ б) $\begin{cases} y_2 = 7 - x_2 = 7 - 4 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases}$.

Ответ. $\{(3;\ 4);\ \ (4;\ 3)\}$.

<u>*Пример 48.*</u> Решите систему $\begin{cases} 4x^2+7y^2=148 \\ 3x^2-y^2=11 \end{cases}$ методом алгебраического сложения.

Решение. Умножим второе уравнение на 7 и сложим его с первым. Получим $25x^2=225$, т.е. $x^2=9$, $x_{1,2}=\pm 3$.

Подставим $x=\pm 3$ в одно из уравнений системы, найдем: $y=\pm 4$.

Ответ. $\left\{ (3;\ 4);\quad (-3;\ -4) \right\}$.

<u>*Пример 49.*</u> Решить систему $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y-1}-\dfrac{5}{2x-y+3}+\dfrac{5}{2}=0 \\ \dfrac{3}{x+y-1}-\dfrac{1}{2x-y+3}+\dfrac{7}{5}=0 \end{cases}$ методом замены переменных.

Решение. Пусть $\dfrac{1}{x+y-1}=t$; $\dfrac{1}{2x-y+3}=z$. Тогда для t и z получим систему: $\begin{cases} 8t-10z+5=0 \\ 16t+5z+7=0 \end{cases}$.

Умножим второе уравнение на 2 и сложим с первым. Получим: $38t=-19 \Rightarrow t=-\dfrac{1}{2}$. Тогда $z=\dfrac{1}{10}$.

Найдем x и y из системы: $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y-1}=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2x-y+3}=\dfrac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3. \end{cases}$

Ответ. $\left\{ (2;\ -3) \right\}$.

4.9.3. Однородные системы уравнений

Система уравнений называется ***однородной***, если левые части ее уравнений – это однородные многочлены степени n, а правые части уравнений – это числа.

Многочлен вида $P(x,y...z)=A_1x^{k_1}y^{l_1}...z^{q_1}+A_2x^{k_2}y^{l_2}...z^{q_2}+...$ называется ***однородным*** **многочленом степени n**, если все его члены имеют одинаковую степень, которая равна n: $k_1+l_1+...+q_1=k_2+l_2+...+q_2=...=n$.

Например, $3x^2-9xy+y^2$ – это однородный многочлен второй степени, а $7x^4+3x^3y-3x^2y^2+5xy^3+y^4$ – это однородный многочлен четвертой степени.

Однородные системы решают с помощью использования методов алгебраического сложения и введения новых переменных.

<u>*Пример 50.*</u> Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2-4xy+y^2=0 \\ x^2+2y^2=19 \end{cases}$.

Решение. Проверим, будет ли решение при $x=0$. Для этого подставим $x=0$ в первое уравнение системы и найдем значение y:

$$3\cdot 0^2-4\cdot 0\cdot y+y^2=0 \quad\Rightarrow\quad y^2=0 \quad\Rightarrow\quad y=0.$$

Но если $x=0$ и $y=0$ (из первого уравнения), значит: $0^2+2\cdot 0^2=19$ (из второго уравнения), т.е. $0=19$ – это неверное равенство. Следовательно, $x=0$ – это не корень системы, тогда можно разделить первое уравнение на x^2. Получим: $3-4\cdot\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}=0$.

Обозначим: $\dfrac{y}{x}=t$, получим систему: $\begin{cases} t^2-4t+3=0 \\ x^2\left(1+2t^2\right)=19 \end{cases}$.

Из первого уравнения системы находим: $t_1=1$, $t_2=3$. Подставим эти значения во второе уравнение:

а) если $t_1=1 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{19}{3}}$; и $y=t\cdot x \Rightarrow y_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{19}{3}}$;

б) если $t_2=3 \Rightarrow x_{3,4}=\pm 1$; и $y=t\cdot x \Rightarrow y_{3,4}=\pm 3$.

Ответ. $\left\{\left(\sqrt{\dfrac{19}{3}};\ \sqrt{\dfrac{19}{3}}\right);\ \left(-\sqrt{\dfrac{19}{3}};\ -\sqrt{\dfrac{19}{3}}\right);\ (1;\ 3);\ (-1;\ -3)\right\}$.

<u>*Пример 51.*</u> Решите систему $\begin{cases} 3x^3-4x^2y+xy^2=0 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$.

Решение. Проверим, есть ли решение, если $x=0$. Подставив $x=0$ во второе уравнение системы, находим: $y^2=2 \Rightarrow y_{1,2}=\pm\sqrt{2}$. Значит, имеем два решения: $\left(0;\ \sqrt{2}\right)$ и $\left(0;\ -\sqrt{2}\right)$.

Рассмотрим решения системы, если $x \neq 0$. Разделим первое уравнение системы на x^3 и обозначим $\dfrac{y}{x} = t$. Получим систему: $\begin{cases} t^2 - 4t + 3 = 0 \\ x^2 \cdot \left(1 + t^2\right) = 2. \end{cases}$

Из первого уравнения найдем $t_1 = 1$, $t_2 = 3$. Подставим эти значения во второе уравнение и получим: $x = \pm 1$ и $x = \pm\sqrt{0,2}$. Найдем соответствующие значения y.

Ответ. $\left\{\left(0;\ \sqrt{2}\right);\ \left(0;\ -\sqrt{2}\right);\ (1;\ 1);\ (-1;\ -1);\ \left(\sqrt{0,2};\ 3\sqrt{0,2}\right);\ \left(-\sqrt{0,2};\ -3\sqrt{0,2}\right)\right\}$.

<u>*Пример 52.*</u> Решите систему $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$.

Решение. Умножим первое уравнение на 13 и сложим со вторым уравнением, получим:

$$\begin{array}{r} 13x^2 - 39xy + 13y^2 = -13 \\ + \quad \underline{3x^2 \ \ - xy \quad + 3y^2 \ \ = 13} \\ 16x^2 - 40xy + 16y^2 = 0 \end{array}$$

Разделим обе части полученного уравнения на 8, получим: $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$. Получили систему уравнений, которая равносильна исходной системе: $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0. \end{cases}$

Из второго уравнения видно, что если $x = 0$, то и $y = 0$, но пара $(0;\ 0)$ не удовлетворяет первому уравнения системы. Поэтому второе уравнение последней системы можно разделить на $x^2 \neq 0$. Получим:

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0; \quad x^2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - 5 \cdot \left(\frac{y}{x}\right) + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0.$$

Пусть $\dfrac{y}{x} = t \ \Rightarrow\ 2t^2 - 5t + 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ t_1 = 2,\ t_2 = \dfrac{1}{2}$.

Тогда $\dfrac{y}{x} = 2 \ \Leftrightarrow\ y = 2x$ или $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ x = 2y$.

Получили, что исходная система равносильна совокупности систем: $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ y = 2x \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ x = 2y \end{cases}$.

Решения первой системы: $(1;\ 2)$; $(-1;\ -2)$.

Решения второй системы: $(2;\ 1)$; $(-2;\ -1)$

Ответ. $\left\{(1;\ 2);\quad (-1;\ -2);\quad (2;\ 1);\quad (-2;\ -1)\right\}$.

Пример 53. Решите систему $\begin{cases} x^2+xy+y^2=19\cdot(x-y)^2 \\ x^2-xy+y^2=7\cdot(x-y) \end{cases}$.

Решение. Приведем систему к виду однородной. Преобразуем первое уравнение: $x^2+xy+y^2=19x^2-38xy+19y^2 \Rightarrow 18x^2-39xy+18y^2=0$.

Ми получили однородное уравнение. Проверим, будет ли решение, если $x=0$. Для этого подставим $x=0$ в уравнение системы и найдем значения y: если $y=0 \Rightarrow x=0$. Так, система имеет решение: $(0;\ 0)$.

Если $y\neq 0$, разделим это уравнение на y^2. Получим:

$$18\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^2-39\left(\frac{x}{y}\right)+18=0. \quad \begin{cases} \frac{x}{y}=t \\ 18t^2-39t+18=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y}=t \\ t_1=\frac{3}{2};\quad t_2=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решаем две системы и находим совокупность решений.

à) $\begin{cases} \frac{y}{x}=\frac{3}{2} \\ x^2-xy+y^2=7(x-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{x}=\frac{3}{2} \\ y^2=2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ y_1=2 \end{cases};$

á) $\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{2}{3} \\ x^2-xy+y^2=7(x-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{2}{3} \\ y^2=-3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=-3 \end{cases}.$

Ответ. $\{(0;\ 0);(-2;\ -3);(3;\ 2)\}$.

4.9.4. Симметричные системы уравнений

Выражение $P(x;y)$ называется ***симметричным***, если при замене x на y или y на x оно не изменяется. Например, $P(x;y)=\sqrt{x^2+xy+y^2}$; $P(x;y)=x^2+y^2$; $P(x;y)=x^3+y^3$ – это симметричные выражения.

Выражения $(x+y)$ и xy называют ***основными симметричными многочленами с двумя переменными***.

Все симметричные выражения с двумя переменными можно выразить через основные симметричные многочлены, такие как:

$$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy; \qquad x^2+y^2=(x+y)^2-2xy;$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)=(x+y)^3-3(x+y)\cdot xy.$$

Симметричная система уравнений – это такая система, все уравнения которой симметричны.

Решать симметричные системы можно с помощью замены переменных, где новые переменные – это основные симметричные многочлены.

<u>*Пример 54.*</u> Решите систему $\begin{cases} x^2+y^2=2(xy+2) \\ x+y=6 \end{cases}$.

Решение. Сделаем замену: $u=x+y$; $v=xy$. Преобразуем многочлен x^2+y^2, получим $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$.

Получим новую систему относительно v и u:

$$\begin{cases} u^2-2v=2v+4 \\ u=6 \end{cases} \Rightarrow \quad 36-2v=2v+4 \quad \Rightarrow \quad v=8.$$

Поэтому, $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1=2;\ y_1=4; \\ x_2=4;\ y_2=2. \end{matrix}$

Ответ. $\{(2;\ 4);(4;\ 2)\}$.

<u>*Пример 55.*</u> Решите систему $\begin{cases} x^4+6x^2y^2+y^4=136 \\ x^3y+xy^3=30 \end{cases}$.

Решение. Сделаем преобразования:

а) $x^4+6x^2y^2+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2=\left((x+y)^2-2xy\right)^2+4(xy)^2$;

б) $x^3y+xy^3=xy\left(x^2+y^2\right)=xy\left((x+y)^2-2xy\right)$.

Сделаем замену: $u=x+y$; $v=xy$. Получим новую систему:

$$\begin{cases} \left(u^2-2v\right)^2+4v^2=136 & (\text{ŕ}) \\ v\left(u^2-2v\right)=30 & (\text{á}) \end{cases}.$$

Из уравнения (б) последней системы: $u^2-2v=\dfrac{30}{v}$. Подставляем в уравнение (а), получаем: $\left(\dfrac{30}{v}\right)^2+4v^2=136 \Leftrightarrow \dfrac{900}{v^2}+4v^2=136 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4v^4-136v^2+900=0 \Leftrightarrow v^4-34v^2+225=0 \Rightarrow v=\pm5;\ v=\pm3.$

Из уравнения (б): $u^2-2v=\dfrac{30}{v} \Leftrightarrow u^2=2v+\dfrac{30}{v}$.

Подставим найденные значения v, получим:

если $v=5 \Rightarrow u^2=16 \Rightarrow u=\pm 4$;

если $v=3 \Rightarrow u^2=16 \Rightarrow u=\pm 4$;

если $v=-5$ или $v=-3$, то действительных значений u не существует.

Тогда получаем: $\begin{cases} u_1=4 \\ v_1=5 \end{cases}$; $\begin{cases} u_2=-4 \\ v_2=5 \end{cases}$; $\begin{cases} u_3=4 \\ v_3=3 \end{cases}$; $\begin{cases} u_4=-4 \\ v_4=3 \end{cases}$.

Исходная система равносильна совокупности четырех систем:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=5 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y=-4 \\ xy=5 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y=-4 \\ xy=3 \end{cases}.$$

Первая и вторая системы решений не имеют. Решениями третьей системы будут: $(1;3)$; $(3;1)$. Решения четвертой системы: $(1;3)$; $(-3;-1)$.

Ответ. $\{(1;3); \quad (3;1); \quad (-1;-3); \quad (-3;-1)\}$.

Ответьте на вопросы

1. Что такое система уравнений?
2. Что значит решить систему уравнений?
3. Какие системы уравнений равносильны?
4. Какие системы уравнений называются линейными?
5. Назовите основные методы решений систем уравнений.
6. Сколько решений может иметь система линейных уравнений и в каких случаях?
7. Из каких элементов состоит главный и вспомогательные определители системы линейных уравнений?
8. Что такое однородная система уравнений?
9. Что такое симметричная система уравнений?

Задания для самостоятельной работы № 11

I. Вычислите определители третьего порядка.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 36 & 48 & 30 \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 5 & -7 & 2 \\ 9 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;   5) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 11 \\ 5 & 10 & 13 \end{vmatrix}$;   6) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

II. Решите системы уравнений при помощи определителя.

1) $\begin{cases} 5x-2y-6=0 \\ 7x-5y-4=0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 9x+3y-2=0 \\ 10x+6y-4=0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 4x-3y=7 \\ 8x-6y=14 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} 4x-3y=7 \\ 3x+2y-18=0 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ 2x-y+z=9 \\ x-4y+2z=11 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-3y+z=1 \\ 4x+y-5z=1 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} 5x+y-3z=-2 \\ 4x+3y+2z=10 \\ 2x-3y+z=17 \end{cases}$; 9) $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=20 \\ 3x-2y-5z=6 \end{cases}$.

III. Исследуйте системы уравнений.

1) $\begin{cases} x+ay-1=0 \\ ax-3ay-(2a+3)=0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} (a+5)\cdot x+(2a+3)\cdot y=3a+2 \\ (3a+10)\cdot x+(5a+6)\cdot y=2a+4 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 2x+\left(9a^2-2\right)\cdot y=3a \\ x+y=1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x-(a+1)\cdot y=a+2 \\ ax+y=a-3 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} (m+3)\cdot x+4y=5-3m \\ 2x+(5+m)\cdot y=8 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} (a+1)x+8y=4a \\ ax+(a+3)y=3a-1 \end{cases}$.

IV. Решите системы уравнений, используя метод Гаусса.

1) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+3z=7 \\ 2x+3y-z=0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y+4z=1 \\ -x+6y+3z=5 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x+2y+3z=8 \\ 3x+y+z=6 \\ 2x+y+2z=6 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x+2z=5 \\ 3x+2y+2z=7 \\ 5x+2y+6z=17 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3-5x_4=2 \\ 4x_1-7x_2-x_3-8x_4=-5 \\ 10x_1-18x_2+2x_3-23x_4=3 \\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$.

V. Решите системы уравнений, используя метод подстановки или метод алгебраического сложения.

1) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 6x + 5y = -8 \\ 4x + 7y = 2 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x - xy = -3 \\ y + xy = 8 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x + \dfrac{2}{x - y} = 3 \\ y - \dfrac{2}{x - y} = -1 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} x^2 - xy - 3y = 5 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x^3 + 2yx^3 = 24 \\ y - 3yx^3 = -23 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} x^2 + xy - 3y^2 = -3 \\ 3y - 2x = 2 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^4 + y^4 = 17 \end{cases}$.

VI. Решите системы уравнений, используя метод замены переменных.

1) $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2 - xy} - \dfrac{2}{y^2 - xy} = \dfrac{11}{12} \\ \dfrac{4}{x^2 - xy} + \dfrac{3}{y^2 - xy} = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \dfrac{x + y}{x - y} + \dfrac{x - y}{x + y} = \dfrac{10}{3} \\ 2x^2 + y^2 = 27 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x^{-1} + 2y^{-1} = 14 \\ x^{-2} + y^{-2} = 41 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 5\sqrt{x^2 - 3y - 88} + \sqrt{x + 6y} = 19 \\ 3\sqrt{x^2 - 3y - 88} = 1 + 2\sqrt{x + 6y} \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x - 3y = 2 \\ x^2 + y^2 - 5x - y = 2 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x - 2}{y - 1}} - \sqrt{\dfrac{y - 1}{3x - 2}} = 2 \\ x + y = 11 \end{cases}$.

VII. Решите системы однородных уравнений.

1) $\begin{cases} 3x^2 - 4xy + 2y^2 = 17 \\ x^2 - y^2 = -16 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2y^2x + y^3 = 2 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 16 \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 40 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29 \\ 7x^2 - 8xy + 17y^2 = 43 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} 2x^2+y^2+3xy=12 \\ (x+y)^2-\dfrac{1}{2}y^2=7 \end{cases}$;   6) $\begin{cases} x^3+3xy^2=158 \\ 3x^2y+y^3=-185 \end{cases}$.

VIII. Решите симметричные системы уравнений.

1) $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ x+y+2xy=38 \end{cases}$;   2) $\begin{cases} x+3xy+y=9 \\ x^2+y^2+xy=7 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} xy(x-2)(y-2)=-3 \\ (x+1)(y+1)=8 \end{cases}$;   4) $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ (xy+5)(x+y)=3 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=-\dfrac{5}{\sqrt{xy}}+3 \\ \sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{xy^3}=5\sqrt{6} \end{cases}$;   6) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3 \\ x^4+x^2y^2+y^4=21 \end{cases}$.

IX. Решите системы уравнений, используя разные методы.

1) $\begin{cases} \sqrt{x+7}-\sqrt{y-9}=2 \\ \sqrt{y+7}-\sqrt{x-9}=2 \end{cases}$;   2) $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4 \\ \sqrt[4]{x^3+x^2y-xy^2-y^3}=3 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} (x^2-xy+y^2)(x-y)=1+y^3 \\ (x^2+xy+y^2)(x+y)=1-y^3 \end{cases}$;   4) $\begin{cases} x^3=8x+3y \\ y^3=3x+8y \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ (xy+8)(x+y)=2 \end{cases}$;   6) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{3}{2}; \\ x+y+xy=9 \end{cases}$

7) $\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2)=16 \\ (x-y)(x^2+y^2)=40 \end{cases}$;   8) $\begin{cases} x^2+y^2=2(xy+2) \\ x+y=6 \end{cases}$;

9) $\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$.

5
ФУНКЦИЯ

Лексика раздела

аргумент	argument	论据
асимптота графика функции	asymptote of graph of function	渐近线的函数图象
величина	size, value	大小，价值
зависимая величина	dependent value	依附型价值(因变量)
независимая величина	independent value	独立型价值
переменная величина	variable value	变量值
постоянная величина	constant value	常数
график функции	graph of function	函数图像
график функции вогнутый	graph of concave function	函数图象（凹）
график функции выпуклый	graph of convex function	函数图象（凸）
интервал	interval	区间
замкнутый интервал	closed interval	封闭的区间
открытый интервал	open interval	打开的区间
критическая точка	critical point	临界点
область значений функции	area of function's meanings	价值的范围作用
область определения функции	range of function's definition	领域的作用
параллельный	parallel	平行
пересекать	intersect	相交
растяжение	stretching	伸展，拉长
сжатие	compression	压缩，挤压
функция	function	功能，函数
алгебраическая функция	algebraic function	代数函数
возрастающая функция	increasing function	上升函数

дробно-рациональная функция	fractional rational function	合理线性作用
иррациональная функция	irrational function	无理函数
линейная функция	linear function	线性函数
логарифмическая функция	logarithmic function	对数函数
монотонная функция	monotonous function	单调函数
непрерывная функция	continuous function	连续函数
нечетная функция	odd function	奇函数
обратная функция	inverse function	反函数
показательная функция	indicative function	指数函数
постоянная функция	constant function	常数的函数
разрывная функция	discontinuous function	不连续函数
рациональная функция	rational function	有理函数
степенная функция	sedate function	指数函数
трансцендентная функция	transcendental function	超自然函数
убывающая функция	decreasing function	下降函数
целая рациональная функция	whole rational function	整体的有理函数
четная функция	even function	偶函数

5.1. Понятие функции. Основные свойства функции. Элементарные функции

5.1.1. Определение функции

Соответствие между множествами X и Y называется ***функцией***, если каждому элементу "x" множества X соответствует только один элемент "y" множества Y (рис. 5.1).

Записывают так: $y = f(x)$. Читают: "Игрек равен эф от икс".

Переменную величину "x" называют ***независимой переменной*** или ***аргументом***. Переменную величину "y"

называют ***зависимой переменной*** или ***функцией***. Символ f – это закон, по которому каждому значению "x" поставлено в соответствие значение функции "y".

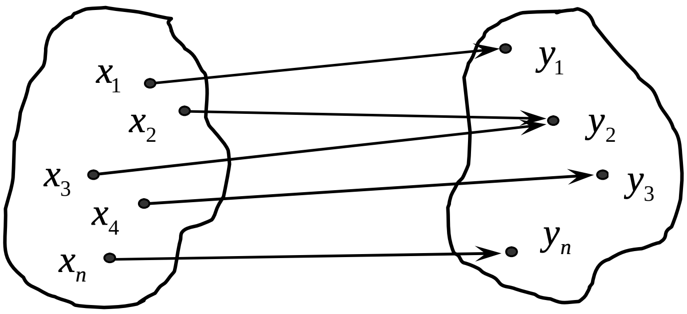


Рисунок 5.1

Множество значений аргумента "x", при которых выражение $f(x)$ имеет смысл, называется ***областью определения функции*** (***ООФ***) и обозначается $D(f)$.

Множество значений "y" называется ***множеством значений функции*** и обозначается $E(f)$.

5.1.2. Способы задания функций

Функция задана, если известны множества $D(f)$, $E(f)$ и закон соответствия.

Существуют три основных способа задания функции: аналитический, табличный и графический.

1. ***Аналитический*** способ состоит в том, что функцию задают формулой, например $y = x^2$, $y = 8mx$, $y = 5\sin 3x$.

2. ***Табличный*** способ состоит в том, что соответствие между аргументом и функцией задают в виде таблиц.

Например, существуют таблицы кубов чисел, квадратов чисел, тригонометрических функций, логарифмов и так далее.

3. ***Графический*** способ состоит в том, что график функции $y = f(x)$ изображают в системе координат xOy.

Чтобы построить систему координат xOy, возьмем на плоскости две взаимно-перпендикулярные координатные оси. Эти оси пересекаются в точке O (рис. 5.2.).

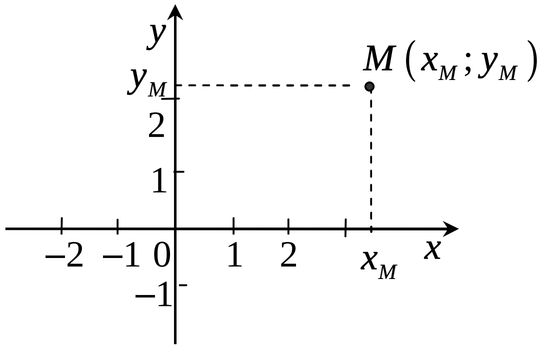


Рисунок 5.2.

Прямая Ox называется осью абсцисс, а прямая Oy – осью ординат. Точка $O(0;0)$ – это начало координат. На каждой оси выбирается положительное направление и единица измерения (масштаб).

Каждая точка M на координатной плоскости имеет две координаты: абсциссу x_M и ординату y_M.

График функции $y = f(x)$ – это множество точек плоскости с координатами x и y (рис. 5.3).

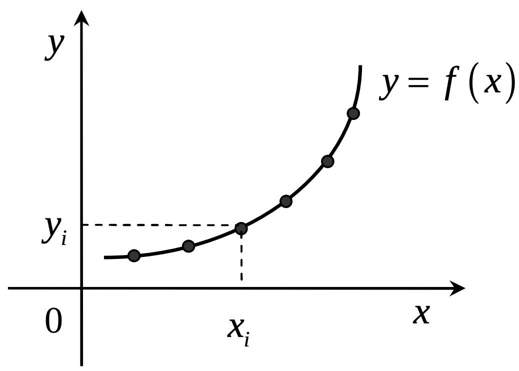


Рисунок 5.3

Если $a \in x$ и функция $y = f(x)$ определена при $x = a$, то значение функции записывают так:

$$y = f(a) \text{ или } y\big|_{x=a} = f(a), \text{ или } y(a).$$

Когда функция задана аналитически, считают, что она определена для тех значений аргумента, для которых математические операции в формуле выполнимы, то есть аналитическое выражение имеет смысл. Множество всех таких значений называют естественной областью определения функции и обозначают $D(f)$. Естественная область определения не всегда соответствует реальным (физическим) значениям аргумента.

Например, для функции $y = p x^2$ естественной областью определения будет $x \in R$, но если y – площадь круга радиуса x, то x может быть только положительным.

ЗАПОМНИТЕ!

Для нахождения $D(f)$ надо учитывать следующие четыре основных ограничения.

1. Если $y = \sqrt[2n]{A}$, то $A \geq 0$.

2. Если $y = \dfrac{A}{B}$, то $B \neq 0$.

3. Если $y = \log_a A$, то $A > 0$.

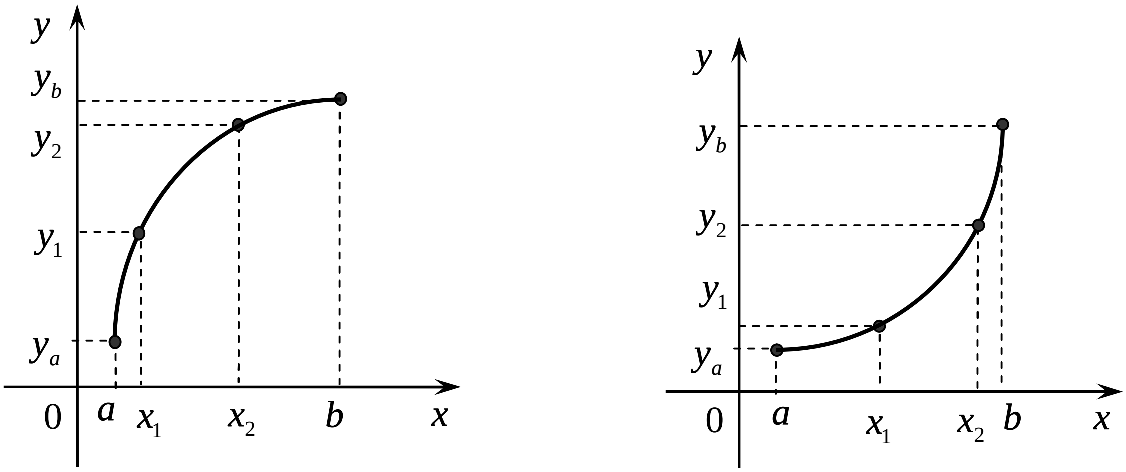
4. Если $y = \begin{Bmatrix} \arcsin A \\ \arccos A \end{Bmatrix}$, то $|A| \leq 1$.

Если аналитическое выражение функции содержит несколько таких выражений, область ее определения будет пересечением областей для отдельных ограничений.

Например, для функции $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}$ область определения $D(f)$ выражается условием $\dfrac{x-3}{x+2} \geq 0$. Это значит $x < -2 \cup x \geq 3$ или $D(f) =]-\infty;\ -2[\cup [3; +\infty[$.

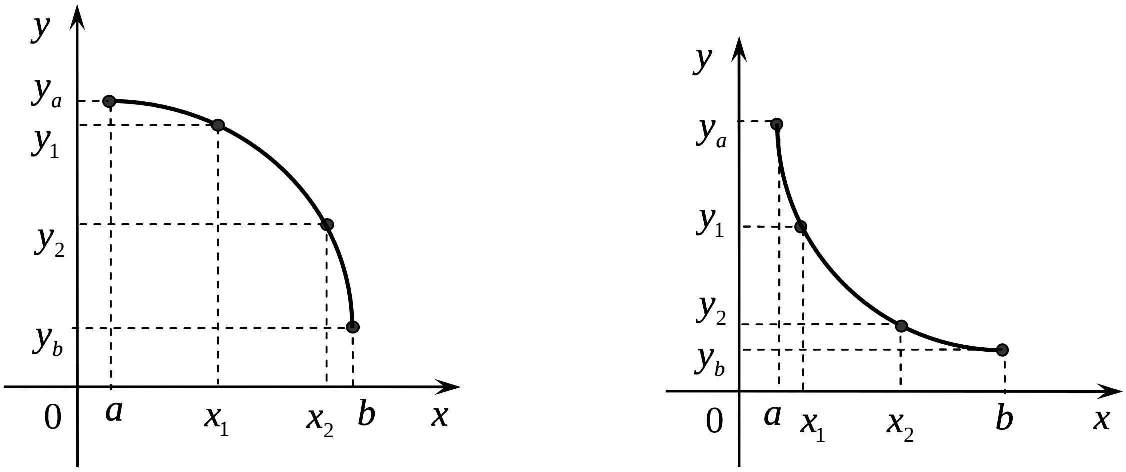
5.1.3. Монотонность функции

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** (ä) на некотором интервале $]a;b[$, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует большее значение функции (рис. 5.4 а, б).



а) б)

Рисунок 5.4



а) б)

Рисунок 5.5

Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей*** (å) на некотором интервале $]a;b[$, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала при

$x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции (рис. 5.5 а, б).

Только возрастающие и только убывающие функции на определенном интервале называют (строго) ***монотонными*** на этом интервале.

5.1.4. Четность и нечетность функции

Числовое множество называется ***симметричным***, если для всех x, принадлежащих этому множеству, их противоположные значения $(-x)$ также принадлежат этому множеству.

Например, если $x \in D(f)$, то и $-x \in D(f)$.

Функция $y = f(x)$, определенная на симметричном множестве $D(f)$, называется ***четной***, (рис. 5.6), если для $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

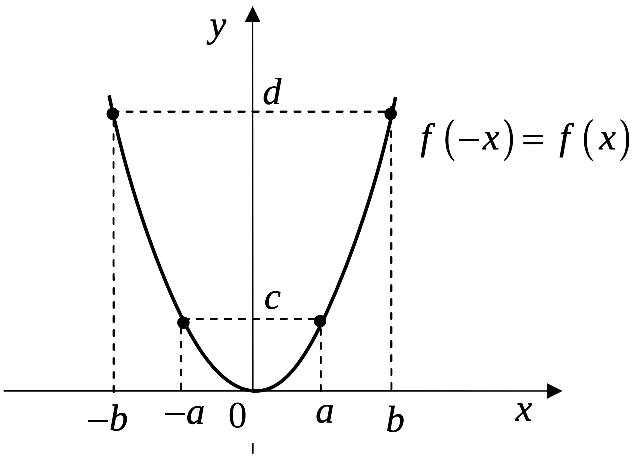


Рисунок 5.6

Например, $y = x^2$ – четная функция, так как $D(f) = R$ и $f(-x) = f(x)$. У четной функции для противоположных значений "x" ($+a$, $-a$) значение "y" одинаковое. График такой функции симметричен относительно оси Oy.

Функция $y = f(x)$, определенная на симметричном множестве $D(f)$, называется ***нечетной***, (рис. 5.7), если для $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

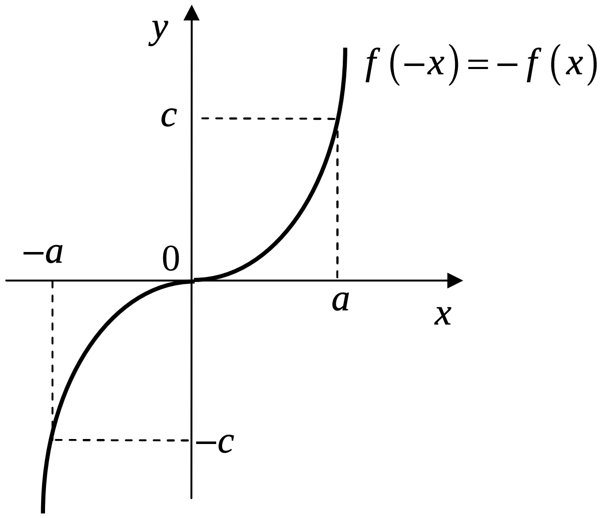


Рисунок 5.7

Например, $y = x^3$ – нечетная функция, так как $D(f) = R$ и $f(-x) = -x^3 = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно ***начала координат***.

ЗАПОМНИТЕ!

Функция есть ***четная*** или ***нечетная***, если:

1. область ее определения симметрична;
2. выполняется одно из равенств $f(-x) = \pm f(x)$.

Функции, которые не являются ни четными, ни нечетными, называются функциями ***общего вида.***

Например, $y = x + 2$ – функция общего вида, так как $f(-x) \neq \pm f(x)$; $y = \ln x$ – функция общего вида, так как область ее определения несимметрична ($D(f) = R^+$).

5.1.5. Периодичность и ограниченность функции

Функция $y = f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое число $T \neq 0$, что при любом x из области определения функции числа $(x - T)$ и $(x + T)$ так же принадлежат этой области и выполняется равенство $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$.

Число T называется ***периодом*** функции $y = f(x)$.

Например, $y = \sin x$ – это периодическая функция с периодом $T = 2p$ (рис. 5.8).

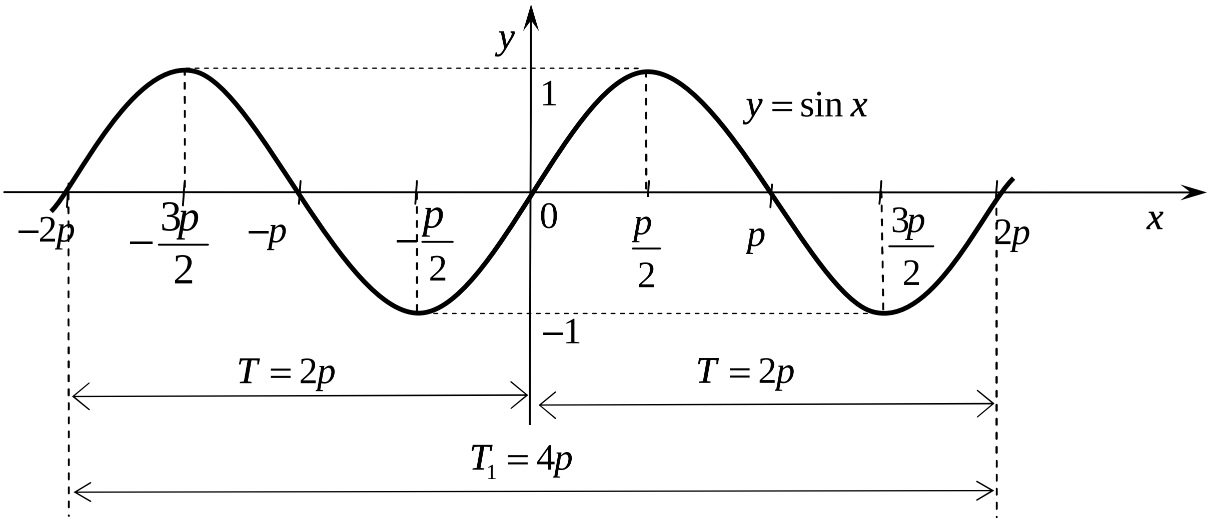


Рисунок 5.8

Числа $4p$, $6p$, $8p$, ... $n \cdot 2p$ так же являются периодом функции $y = \sin x$.

Наименьший положительный период называют ***основным периодом*** функции $y = f(x)$.

Для функции $y = \sin x$ основным периодом будет $T = 2p$.

<u>*Пример 1.*</u> Найдите период функций: а) $y = 5\sin 2x + 2\operatorname{ctg} 3x$;

б) $y = 3\sin p\,x + 8\operatorname{tg}(x + 5)$.

Решение. а) Период функции $y = 5\sin 2x$ равен $T_1 = \dfrac{2p}{2} = p$, а период функции $y = 2\operatorname{ctg} 3x$ равен $T_2 = \dfrac{p}{3}$. Наименьшее число, при делении которого на $T_1 = p$ и $T_2 = \dfrac{p}{3}$ получатся целые числа – это число p. Значит, период данной функции равен $T = p$.

б) Период функции $y = 3\sin p\,x$ равен $T_1 = \dfrac{2p}{p} = 2$, а период функции $y = 8\operatorname{tg}(x+5)$ равен $T_2 = \dfrac{p}{1} = p$. Периода, у заданной функции не существует, т.к. нет такого числа, при делении которого на 2 и на p получались бы целые числа.

Ответ. а) $T = p$; б) периода T не существует.

Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной***, если ее область значений ограничена.

Например, значение функции $y = \sin x$ не может быть больше 1 или меньше -1. $E(\sin x) = [-1;\ 1]$.

Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной во всей области определения*** $D(f)$, если существует такое число $c > 0$, что $|f(x)| < c$ для всех $x \in D(f)$.

5.1.6. Интервалы знакопостоянства, нули и экстремумы функции. Асимптоты

Значения переменной $x \in D(f)$, при которых функция $y = f(x)$ равна нулю, называются ***нулями*** (корнями) функции.

Например, для функции $y = \sin x$ (рис. 5.8) нулями функции будут точки $x = kp$, $k \in \mathrm{Z}$.

При переходе через ноль функция меняет знак. Числовые интервалы, на которых функция сохраняет знак, называются ***интервалами знакопостоянства***.

Например, ***интервалами положительности*** для функции $y=\sin x$ $(y>0)$ будут интервалы $x\in\,]2kp;\,p+2kp\,[$, а ***интервалами отрицательности*** $(y<0)$ будут интервалы $x\in\,]-p+2kp;\,2kp\,[$ (рис. 5.8)..

Значение переменной $x=x_0$ из области определения функции $y=f(x)$ называется ***точкой минимума***, если есть такая d-окрестность этой точки $x\in\,]x_0-d;\,x_0+d\,[$, что для всех $x\neq x_0$ выполняется неравенство $f(x_0)<f(x)$. Значение функции в этой точке $y=f(x_0)$ называется ***минимальным значением*** функции (***минимумом функции***).

Например, для функции $y=\sin x$ точками минимума будут точки $x=-\dfrac{p}{2}+2kp$, $k\in\mathrm{Z}$. Минимальное значение функции $y_{\min}=-1$ (рис. 5.8).

Значение переменной $x=x_0$ из области определения функции $y=f(x_0)$ называется ***точкой максимума***, если есть такая d-окрестность этой точки $x\in\,]x_0-d;\,x_0+d\,[$, что для всех $x\neq x_0$ выполняется неравенство $f(x_0)>f(x)$. Значение функции в этой точке $y=f(x_0)$ называется ***максимальным значением*** функции (***максимумом функции***).

Например, для функции $y=\sin x$ точками максимума будут точки $x=\dfrac{p}{2}+2kp$, $k\in\mathrm{Z}$. Максимальное значение функции $y_{\max}=1$ (рис. 5.8).

Точки максимума и минимума называются ***точками экстремума***. Значения функции в точках максимума и минимума называются ***экстремумами*** функции (максимумом и минимумом функции).

Асимптота графика функции – это прямая линия, к которой неограниченно приближается кривая при удалении ее от начала координат в бесконечность.

Асимптоты бывают: вертикальные ($x=a$) (рис. 5.9, 5.10), горизонтальные ($y=b$) (рис. 5.9) и наклонные ($y=kx+b$) (рис. 5.10).

Правило построения асимптот будет приведено в разделе 10.

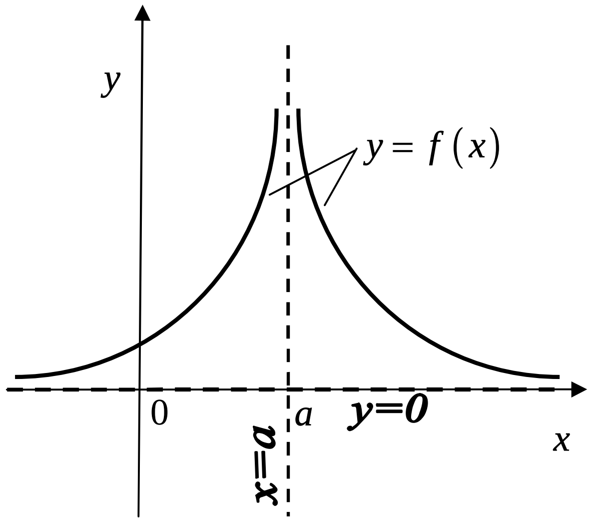


Рис. 5.9

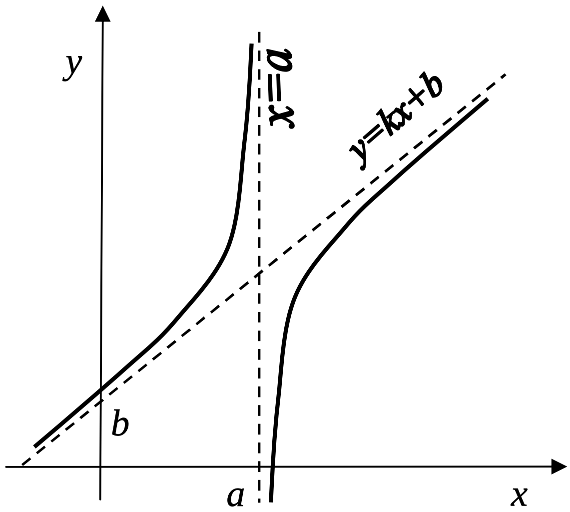


Рис. 5.10

ЗАПОМНИТЕ!

Основные свойства функции

1. Область определения функции $D(f)$.
2. Область значений функции $E(f)$.
3. Четность или нечетность функции.
4. Периодичность функции.
5. Нули (корни) функции.
6. Интервалы знакопостоянства.
7. Монотонность функции (интервалы возрастания, убывания функции).
8. Экстремумы функции (максимум, минимум).
9. Ограниченность функции.
10. Асимптоты функции.

5.1.7. Обратная функция

Выражение $y = f(x)$ определяет функциональную зависимость между аргументом x (независимой переменной) и функцией y (зависимой переменной). Рассмотрим теперь другую функциональную зависимость, где независимой переменной (аргументом) будет переменная y, а зависимой переменной (функцией) будет переменная x. Тогда выражение $x = j(y)$ будет определять функцию, ***обратную*** данной функции $y = f(x)$.

ЗАПОМНИТЕ!

Область определения обратной функции совпадает с областью значений исходной функции $\left(D(j) = E(f)\right)$, а множество значений обратной функции совпадает с областью определения исходной функции $\left(E(j) = D(f)\right)$.

Четная функция обратной функции не имеет.

Например, для функции $y = x^3$ ($D(f) = R$ и $E(f) = R$) обратная функция может быть определена из равенства $x = y^3$ или $y = \sqrt[3]{x}$ ($D(j) = R$ и $E(j) = R$). Значит, функция, обратная функции $y = x^3$, есть функция $y = \sqrt[3]{x}$ ($D(j) = E(f) = R$ и $E(j) = D(f) = R$).

Рассмотрим график прямой (I) и обратной (II) функций (рис. 5.11). На графике кривая I – это график функции $y = x^3$, а кривая II – это график функции $y = \sqrt[3]{x}$. На рисунке 5.11 показан так же график функции $y = x$. Из сравнения графиков можно сделать вывод: графики прямой ($y = x^3$) и обратной ($y = \sqrt[3]{x}$) функций ***симметричны относительно прямой*** $y = x$.

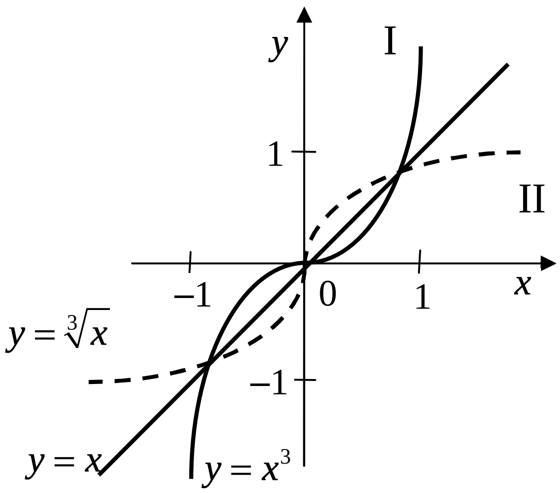


Рисунок 5.11

5.1.8. Элементарные функции

К основным элементарным функциям в математике относят следующие функции (табл. 5.1).

Таблица 5.1 – Основные элементарные функции

	Название функции	Формула	Как читать
1.	Степенная	$y = x^n,\ x \in R$	игрек равен иксу в степени эн
2.	Показательная	$y = a^x$	игрек равен *a* в степени икс
		$y = e^x$	игрек равен *e* в степени икс
3.	Логарифмическая	$y = \log_a x$ $a > 0,\ a \neq 1$	игрек равен логарифму по основанию *a* числа икс
		$y = \lg x$, $a = 10$	игрек равен десятичному логарифму числа икс
		$y = \ln x$, $a = e$	игрек равен натуральному логарифму числа икс
4.	Тригонометрические функции	$y = \sin x$	игрек равен синусу икс
		$y = \cos x$	игрек равен косинусу икс
		$y = \mathrm{tg} x$	игрек равен тангенсу икс
		$y = \mathrm{ctg}\, x$	игрек равен котангенсу икс
		$y = \sec x$	игрек равен секансу икс
		$y = \mathrm{cosec}\, x$	игрек равен косекансу икс

Продолжение таблицы 5.1

5.	Обратные тригонометрические функции	$y = \arcsin x$	игрек равен арксинусу икс
		$y = \arccos x$	игрек равен арккосинусу икс
		$y = \operatorname{arctg} x$	игрек равен арктангенсу икс
		$y = \operatorname{arcctg} x$	игрек равен арккотангенсу икс

Элементарные функции – это функции, которые можно получить из основных элементарных функций при помощи арифметических действий или операций взятия функции от функции.

Примерами элементарных функций могут быть функции: $y = 3x^2 + 5\sqrt{x}$; $y = \dfrac{5^x - 2}{3x}$; $y = \log_3\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$; $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 - 1}$; $y = \cos\sqrt{x}$.

Элементарные функции можно разделить на два класса (рис. 5.12).

Рисунок 5.12

Ответьте на вопросы

1. Что такое функция?
2. Что означает запись $y = f(x)$ и как мы ее читаем?
3. Какая переменная называется аргументом?
4. Какая переменная является зависимой?
5. Какое множество называется областью определения функции?
6. Что такое множество значений функции?
7. Какие способы задания функции вы знаете?
8. Что такое график функции?
9. Какие функции монотонно возрастают, а какие убывают?
10. Какие функции называют четными, а какие – нечетными?
11. Что такое обратная функция?
12. Назовите основные свойства функции.
13. Что такое период функции?
14. Дайте определение асимптоты графика функции.
15. Какая из этих функций степенная?

    а) $y = a^x$; б) $y = x^n$; в) $y = \log_a x$; г) $y = \operatorname{arctg} x$.
16. Какая из этих функций показательная?

    а) $y = \sin x$; б) $y = e^x$; в) $y = \ln x$; г) $y = \sqrt{x}$.
17. Назовите основные элементарные функции.
18. На какие классы можно разделить элементарные функции?
19. Приведите примеры целой и дробной рациональных функций.
20. Какая функция называется иррациональной?

Задания для самостоятельной работы № 12

I. Найдите область определения функций:

1) $y = 5x^7 + 8x^6 + 13x^3 - 18x - 7$; 2) $y = \sqrt{25 - x^2}$;

3) $y = \sqrt{\dfrac{x-5}{x-2}}$; 4) $y = \dfrac{2+x}{x^2 - 1}$;

5) $y=|x-1|$; 6) $y=1-\dfrac{1}{x}$; 7) $y=\lg(1-x)$;

8) $y=|\log_2 x|$; 9) $y=2^{\frac{1}{x-3}}$.

II. Найти область значений функций:

1) $y=3x-5$; 2) $y=2x^2+1$; 3) $y=2-3x^2$;

4) $y=\dfrac{x}{1-x}$; 5) $y=|x-1|+1$; 6) $y=\sqrt{x-4}$;

7) $y=5^x-5$; 8) $y=\lg(1-x)$; 9) $y=5^{\frac{1}{x}}$.

III. Определить четность или нечетность функций:

1) $y=3x^2+2$; 2) $y=5x^3+2$; 3) $y=x^2+|x|$;

4) $y=2x^5$; 5) $y=3x+8$; 6) $y=\sqrt{x}$.

IV. Найти функцию, обратную данной:

1) $y=x^2+2$; 2) $y=x-3$; 3) $y=x^5$; 4) $y=1+\dfrac{1}{x}$;

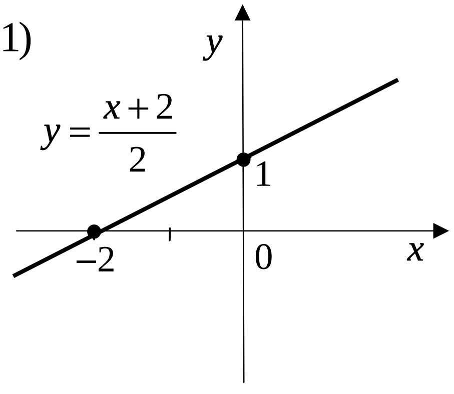
5) $y=\sqrt[3]{x}$; 6) $y=\sqrt{x-1}$; 7) $y=\lg x$; 8) $y=e^{x-1}$.

V. Найдите область определения $D(f)$ и область значений $E(f)$ для функции, обратной заданной.

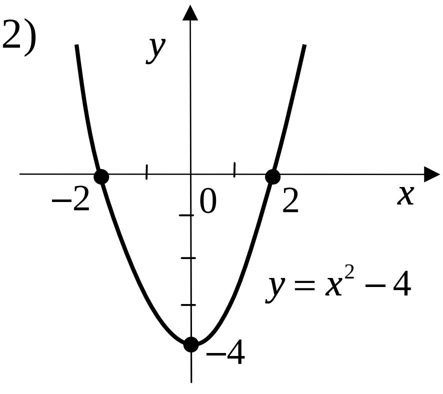
1) $y=x-2$; 2) $y=x^2+1$; 3) $y=2^x$.

VI. Укажите нули и интервалы знакопостоянства для данных функций. Какая из функций имеет асимптоты?

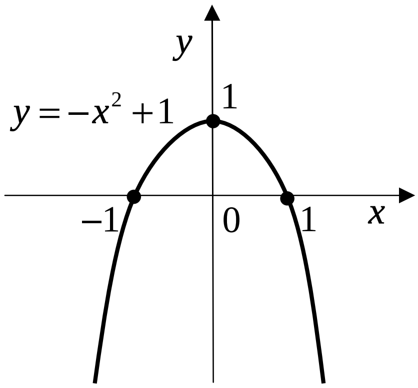
1)



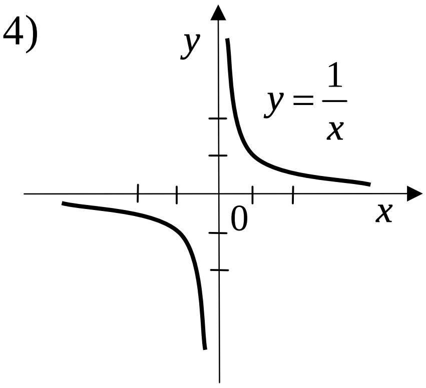
2)



3)

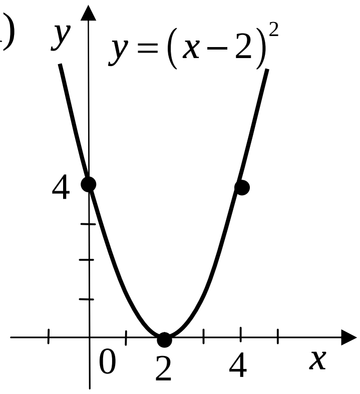


4)

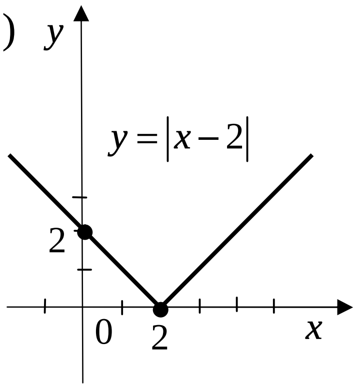


VII. Укажите интервалы возрастания и убывания. Какая из кривых имеет асимптоты?

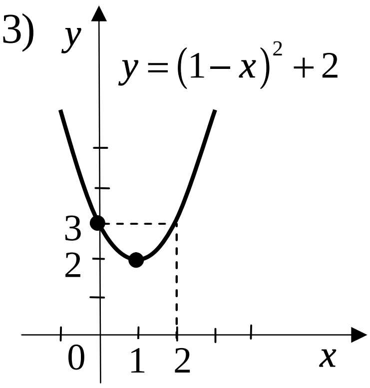
1)



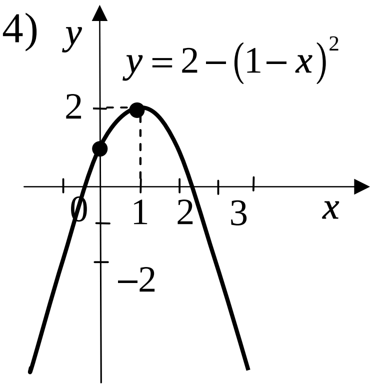
2)



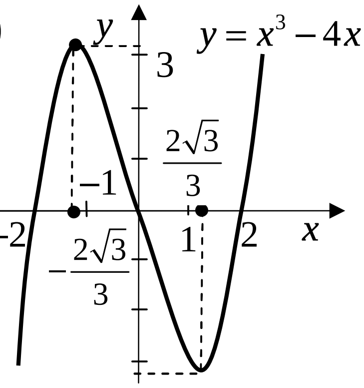
3)



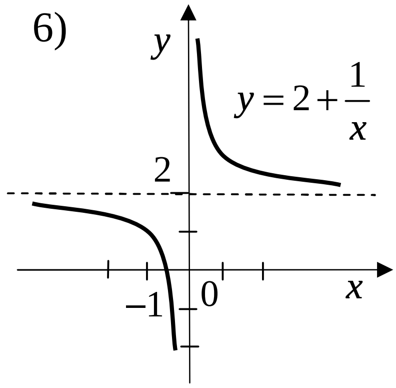
4)



5)



6)



VIII. Определите период функции.

1) $y=\sin 2x$; 2) $y=\sin\frac{3}{2}x$; 3) $y=\cos\frac{3}{5}x$;

4) $y=|\sin x|$; 5) $y=\cos|x|$; 6) $y=\mathrm{tg}\,4x$.

5.2. Алгебраические функции

Алгебраические функции можно классифицировать по виду формулы, которой они заданы (табл. 5.2).

Таблица 5.2 – Классификация алгебраических функций

Название функции	**Вид формулы**	**Пример функции**	**Алгебраические действия**
Целая рациональная функция	Функция задана многочленом $P_n(x) = a_0 x^n + $ $+ a_1 x^{n-1} + \mathbf{K} + a_n$	$y = x^3 - 2x + 5$	Сложение, вычитание, умножение, возведение в степень
Дробно-рациональная функция	Функция задана отношением двух многочленов $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$y = \dfrac{x^2 - 8x + 12}{x - 5}$	Сложение, вычитание, умножение, возведение в степень и деление. Переменная находится и в знаменателе
Иррациональная функция	$y = \left[P(x)\right]^{\frac{1}{n}}$	$y = \sqrt[3]{x^2 - 7}$	Переменная находится под знаком корня

5.2.1. Линейная функция

Рассмотрим целую рациональную функцию, которая задана многочленом $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \mathbf{K} + a_{n-1} x + a_n$.

При $n = 1$ в правой части равенства будет многочлен первой степени $y = a_0 x + a_1$. Это ***линейная функция***. Формулу этой функции чаще всего записывают в виде $y = kx + b$. Здесь k и b – это некоторые фиксированные числа.

Графиком линейной функции будет прямая линия. Чтобы построить график этой функции достаточно знать координаты двух точек в системе координат xOy.

Возьмем точку $A(0;\, y_A)$ и точку $B(x_B;0)$ и из формулы $y=kx+b$ получим, что $y_A=b$ и $x_B=-\dfrac{b}{k}$, $k\neq 0$.

На координатных осях Ox и Oy отложим значения координат точек $A(0;b)$ и $B\left(-\dfrac{b}{k};0\right)$. Соединим прямой линией точки A и B. Полученная прямая AB есть график функции $y=kx+b$ (. 5.13, если $k>0$ и рис. 5.14, если $k<0$).

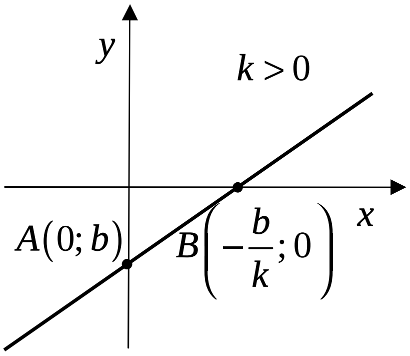


Рисунок 5.13

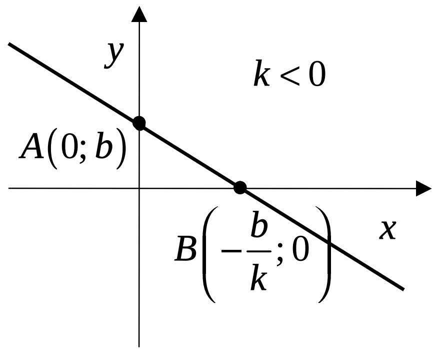


Рисунок 5.14

Свойства линейной функции $y=kx+b$.

1. Область определения линейной функции – это вся числовая ось: $D(y)=R$.
2. Область значений этой функции: $E(y)=(-\infty;\,+\infty)$.
3. Функция монотонно возрастает при $k>0$ (рис. 5.13) и монотонно убывает при $k<0$ (рис. 5.14).
4. Нули функции: $y=0$ при $x=-\dfrac{b}{k}$.
5. Если $k>0$, то $y>0$ при $x>-\dfrac{b}{k}$, $y<0$ при $x<-\dfrac{b}{k}$.

   Если $k<0$, то $y>0$ при $x<-\dfrac{b}{k}$, $y<0$ при $x>-\dfrac{b}{k}$.
6. Функция общего вида.
7. Функция не имеет экстремумов.

8. График функции не имеет асимптот.

Если в формуле $y = kx + b$ положить $k = 0$, то получим $y = b$ – это прямая, которая параллельна оси Ox (рис. 5.15). Это график постоянной функции.

Если в формуле $y = kx + b$ положить $k = 0$ и $b = 0$, то получим $y = 0$ – прямая совпадает с осью Ox (рис. 5.16).

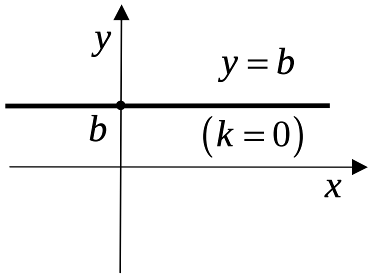


Рисунок 5.15

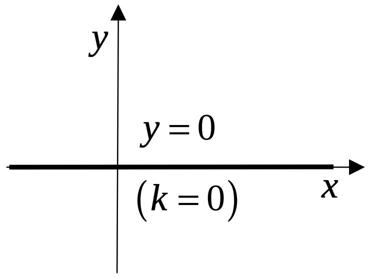


Рисунок 5.16

Если в формуле $y = kx + b$ положить что $b = 0$, а $k \neq 0$, то получим $y = kx$. Эта функция называется ***прямой пропорциональностью***. График функции $y = kx$ – это прямая линия, которая проходит через начало координат (рис. 5.17).

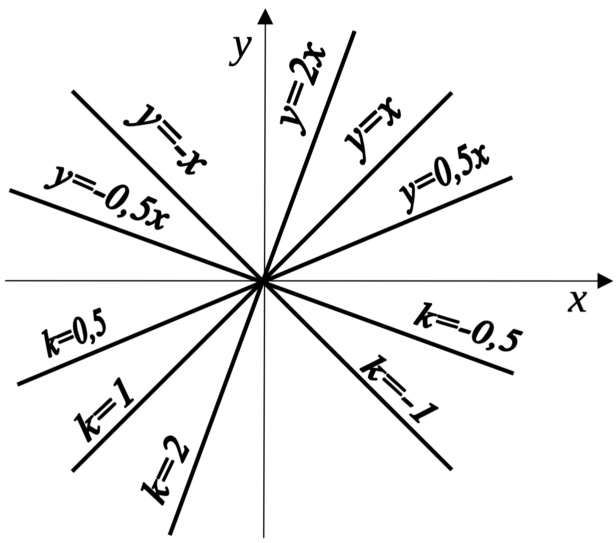


Рисунок 5.17

Рассмотрим свойства еще двух функций $y = x$ и $y = -x$. Эти функции получаются из формулы $y = kx$ при $k = \pm 1$.

Графиками функций $y = x$ (рис. 5.18) и $y = -x$ (рис. 5.19) будут прямые линии, которые проходят через начало координат.

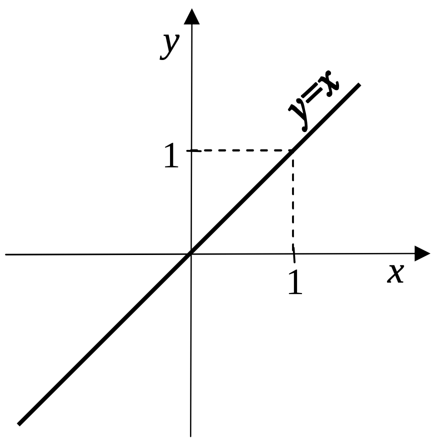


Рисунок 5.18

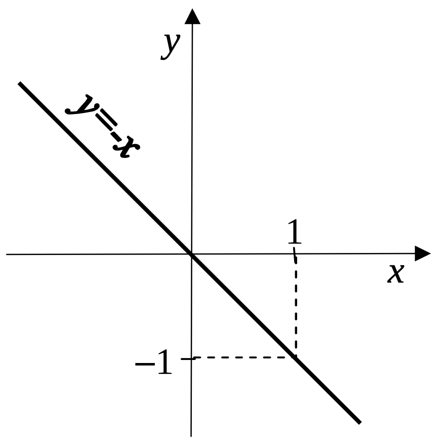


Рисунок 5.19

Свойства функции $y = x$

1. $D(y) = R$.
2. $E(y) = R$.
3. Нуль функции: $y=0$ при $x=0$.
4. $y < 0$ при $x \in \left]-\infty; 0\right[$;
   $y > 0$ при $x \in \left]0; +\infty\right[$.
5. Функция возрастает на всей области определения.
6. Функция нечетная
   $y(-x) = -y(x)$.

График функции симметричен относительно начала координат.

7. Функция не имеет экстремумов.
8. График функции не имеет асимптот.

Свойства функции $y = -x$

1. $D(y) = R$.
2. $E(y) = R$.
3. Нуль функции: $y=0$ при $x=0$.
4. $y < 0$ при $x \in \left]0; +\infty\right[$;
   $y > 0$ при $x \in \left]-\infty; 0\right[$.
5. Функция убывает на всей области определения.
6. Функция нечетная
   $y(-x) = -y(x)$.

График функции симметричен относительно начала координат.

7. Функция не имеет экстремумов.
8. График функции не имеет асимптот.

5.2.2. Степенная функция

Если в выражении для целой рациональной функции $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ положить, что $a_0 = k$ и $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, то получим $y = kx^n$.

Функция вида $y = kx^n$, где $n \in R$ называется ***степенной функцией***.

При $n = 1$ мы имеем $y = kx$ – ***прямую пропорциональность*** (k – коэффициент прямой пропорциональности), а при $n = -1$, $y = \dfrac{k_1}{x}$ – это ***обратная пропорциональность*** (k_1 – коэффициент обратной пропорциональности).

Если в формуле $y = x^n$ положить $n = 2$, то график функции $y = x^2$ есть ***парабола*** (рис. 5.20), а при $n = 3$ график функции $y = x^3$ это ***кубическая парабола*** (рис. 5.21).

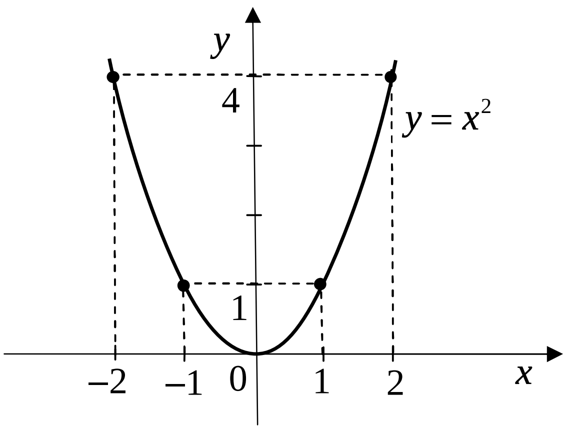


Рисунок 5.20

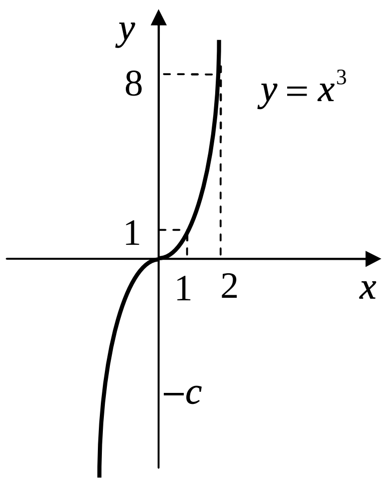


Рисунок 5.21

Свойства функции $y = x^2$

1. $D(f) = R$ или
   $D(f) =]-\infty;\ +\infty[$, или $x \in R$.

Свойства функции $y = x^3$

1. $D(f) = R$ или
   $D(f) =]-\infty;\ +\infty[$, или $x \in R$.

2. $E(f)=R^{+}$ или $E(f)=]0;\ \infty[$, y – положительное число.	2. $E(f)=R$ или $E(f)=]-\infty;\ +\infty[$.
3. Функция имеет один нуль ($y=0$ при $x=0$).	3. Функция имеет один нуль ($y=0$ при $x=0$).
4. $y>0$, когда $x\in\ ]-\infty;\ 0[\ \mathbf{U}\ ]0;\ +\infty[$.	4. $y>0$, когда $x\in\ ]0;\ +\infty[$ и $y<0$, когда $x\in\ ]-\infty;\ 0[$
5. Функция убывает на интервале $x\in\ ]-\infty;\ 0[$ и возрастает на интервале $x\in\ ]0;\ +\infty[$.	5. Функция монотонно возрастает во всей области определения.
6. Функция имеет минимум при $x=0$, $y_{\min}(0)=0$.	6. Функция не имеет экстремумов.
7. Функция четная ($y(-x)=y(x)$). График функции симметричен относительно оси OY.	7. Функция нечетная ($y(-x)=-y(x)$). График функции симметричен относительно начала координат.
8. График функции не имеет асимптот.	8. График функции не имеет асимптот.

Рассмотрим еще одну целую рациональную функцию $y=ax^2+bx+c$, которую можно получить из многочлена n-ой степени при $n=2$.

Функция вида $y=ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$, называется ***квадратичной функцией***. Областью определения этой функции есть вся числовая ось, $D(y)=R$.

Графиком функции является парабола. Ветви параболы направлены вверх при $a>0$ (рис. 5.22) и вниз при $a<0$ (рис. 5.23).

Осью симметрии параболы есть прямая $x=-\dfrac{b}{2a}$.

ЗАПОМНИТЕ!

Координаты вершины параболы находят по формулам:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \qquad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

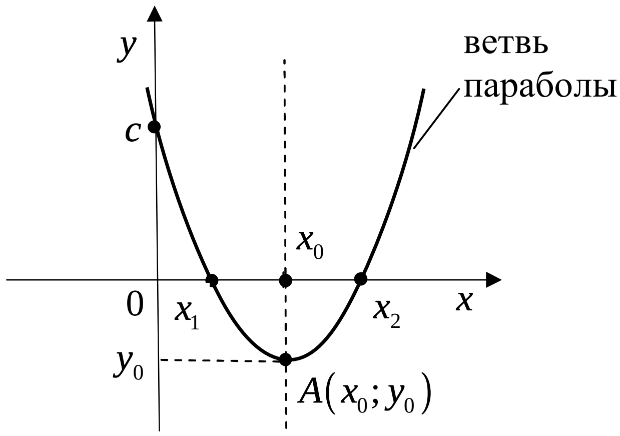


Рисунок 5.22

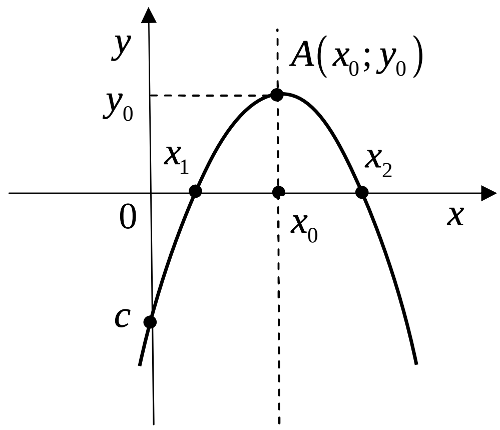


Рисунок 5.23

Для построения графика функции преобразуем выражение:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + x_0\right)^2 + y_0.$$

Такое преобразование называется выделением полного квадрата.

5.2.3. *Дробно-рациональная функция*

Дробно-рациональная функция $y(x)$ определяется отношением двух многочленов и имеет вид:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m} = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Областью определения такой функции будут все значения x кроме тех, в которых знаменатель функции обращается в нуль. Значения x_i $(i \le m)$, в которых $Q(x)=0$ называются ***точками разрыва функции***.

Дробно-рациональной функцией является и функция $y=\dfrac{k}{x}$ (обратная пропорциональность).

Функция $y=\dfrac{k}{x}$, если $k=1$, имеет вид $y=\dfrac{1}{x}$ (рис. 5.24), а если $k=-1$, имеет вид $y=-\dfrac{1}{x}$ (рис. 5.25). Рассмотрим данные функции более подробно.

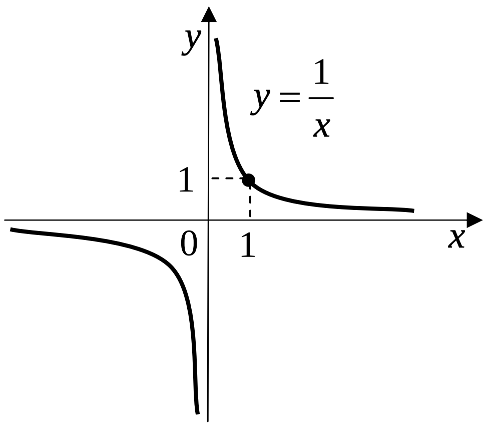


Рисунок 5.24

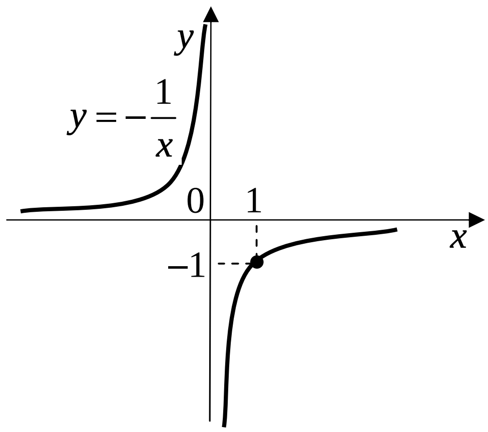


Рисунок 5.25

Свойства функции $y=\dfrac{1}{x}$

1. $D(f)=R$, кроме $x=0$ $(D(f)=]-\infty;0[\,\mathbf{U}\,]0;+\infty[)$.
2. $E(f)=R$, кроме $y=0$ $(E(f)=]-\infty;\ 0[\,\mathbf{U}\,]0;\ +\infty[)$.
3. Функция не имеет нулей. График функции не пересекает ось Ox.

Свойства функции $y=-\dfrac{1}{x}$

1. $D(f)=R$, кроме $x=0$ $(D(f)=]-\infty;0[\,\mathbf{U}\,]0;+\infty[)$.
2. $E(f)=R$, кроме $y=0$ $(E(f)=]-\infty;\ 0[\,\mathbf{U}\,]0;\ +\infty[)$.
3. Функция не имеет нулей. График функции не пересекает ось Ox.

4. $y<0$ при $x \in \left]-\infty;\ 0\right[$;
$y>0$ при $x \in \left]0;\ +\infty\right[$.
5. Функция монотонно убывает в каждом из интервалов $x \in \left]-\infty;\ 0\right[$ и $x \in \left]0;\ +\infty\right[$.
6. Функция не имеет экстремумов.
7. Функция нечетная ($f(-x)=-f(x)$). График функции симметричен относительно начала координат.
8. График функции не пересекает оси координат. Оси Ox и Oy – это асимптоты гиперболы.

4. $y<0$ при $x \in \left]0;\ +\infty\right[$;
$y>0$ при $x \in \left]-\infty;\ 0\right[$.
5. Функция монотонно возрастает в каждом из интервалов $x \in \left]-\infty;\ 0\right[$ и $x \in \left]0;\ +\infty\right[$.
6. Функция не имеет экстремумов.
7. Функция нечетная ($f(-x)=-f(x)$). График функции симметричен относительно начала координат.
8. График функции не пересекает оси координат. Оси Ox и Oy – это асимптоты гиперболы.

Графиком функции $y=\dfrac{k}{x}$ есть ***гипербола***. Ординаты ее графика в k раз по модулю больше ординат графика функции $y=\dfrac{1}{x}$ (рис. 5.26) или $y=-\dfrac{1}{x}$ (рис. 5.27).

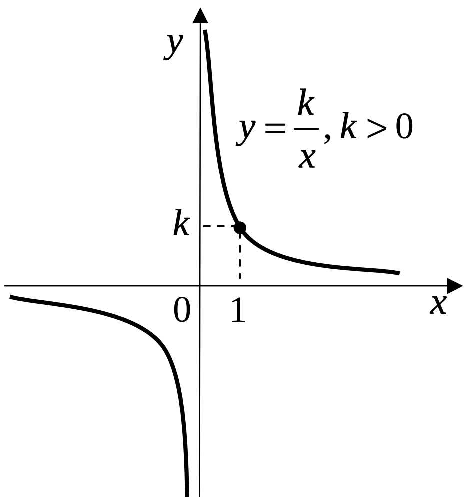


Рисунок 5.26

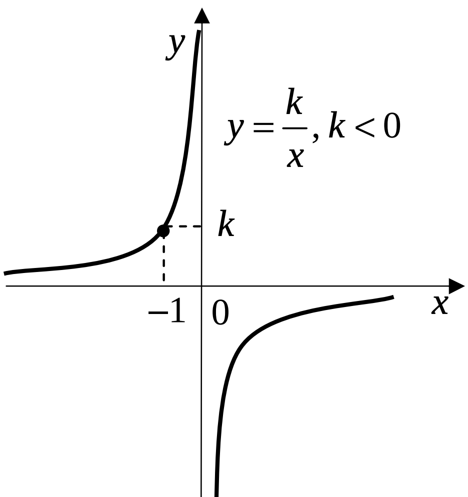


Рисунок 5.27

Отношение двух линейных функций представляет собой дробно-линейную функцию $y=\frac{ax+b}{cx+d}$.

Дробно-линейную функцию $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, где $c\neq 0$, можно записать в виде: $y=m+\frac{k}{x-n}$, где $m=\frac{a}{c}$, $k=\frac{bc-ad}{c^2}$ и $n=-\frac{d}{c}$. Получим эту формулу преобразованием формулы:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax}{cx+d}+\frac{b}{cx+d}=\frac{acx}{c(cx+d)}+\frac{b}{cx+d}=\frac{acx+ad-ad}{c(cx+d)}+$$

$$+\frac{b}{cx+d}=\frac{a(cx+d)-ad}{c(cx+d)}+\frac{b}{cx+d}=\frac{a}{c}-\frac{ad}{c(cx+d)}+\frac{b}{cx+d}=$$

$$=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}=m+\frac{k}{x-n}.$$

Полученная формула позволяет построить график функции $y=\frac{ax+b}{cx+d}=m+\frac{k}{x-n}$ сдвигом графика $y=\frac{k}{x}$ на n единиц вдоль оси Ox и на m единиц вдоль оси Oy (рис. 5.28).

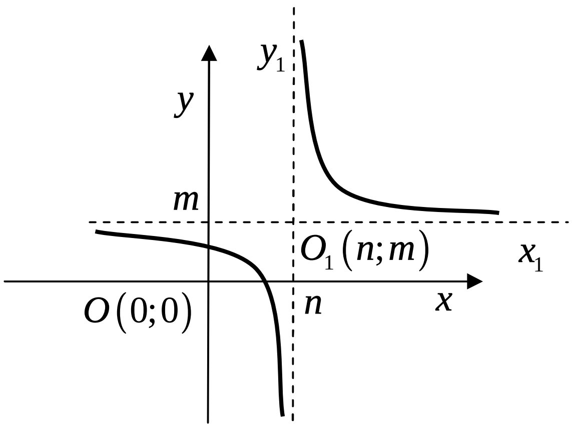


Рисунок 5.28

Уравнение вертикальной асимптоты имеет вид: $x_a=-\frac{d}{c}$, а уравнение горизонтальной асимптоты имеет вид: $y_a=\frac{a}{c}$.

<u>*Пример 2.*</u> Построить график функции $y=\dfrac{3x-2}{x+1}$.

Решение. В дробно-линейной функции $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ коэффициенты $a=3$, $b=-2$, $c=1$ и $d=1$.

Вычислим значения $m=\dfrac{a}{c}=3$, $n=-\dfrac{d}{c}=-1$ и $k=\dfrac{bc-ad}{c^2}=-5$. Запишем преобразованную формулу функции: $y=\dfrac{3x-2}{x+1}=m+\dfrac{k}{x-n}=3-\dfrac{5}{x+1}$.

Эту же формулу можно получить преобразованием заданной функции:

$$y=\frac{3x-2}{x+1}=\frac{3x}{x+1}-\frac{2}{x+1}=\frac{3(x+1-1)}{x+1}-\frac{2}{x+1}=3\left(1-\frac{1}{x+1}\right)-\frac{2}{x+1}=$$

$$=3-\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x+1}=3-\frac{5}{x+1}.$$

Построим график функций $y=-\dfrac{5}{x}$ (рис. 5.29) и $y=3-\dfrac{5}{x+1}$ (рис. 5.30).

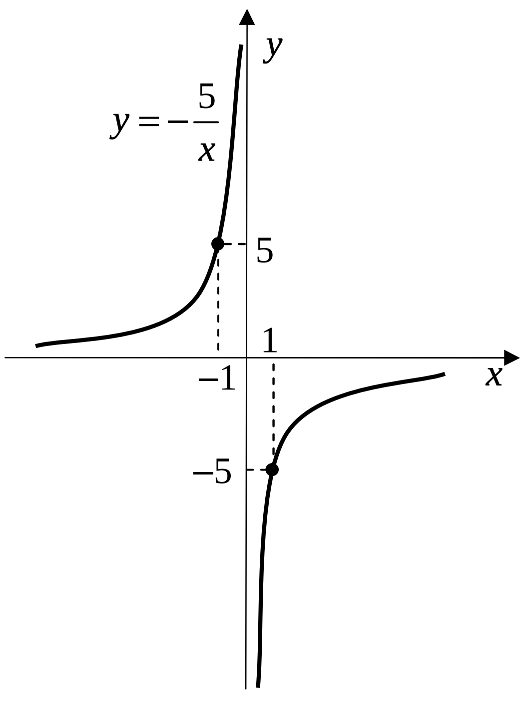


Рисунок 5.29

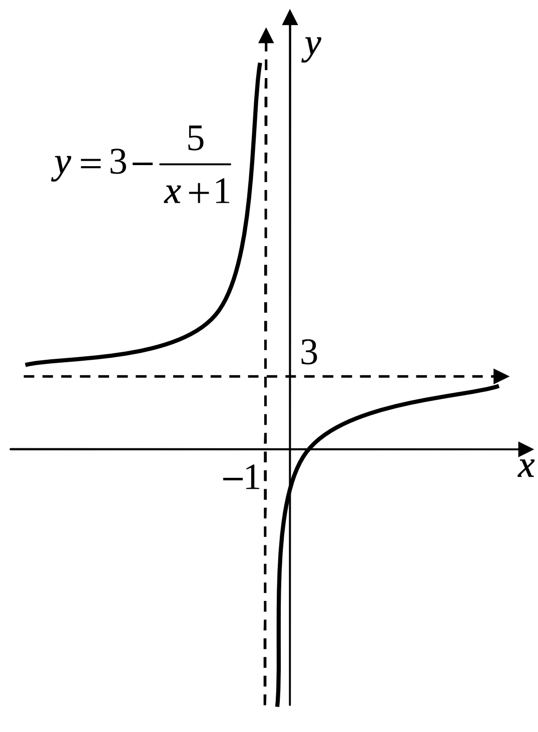


Рисунок 5.30

Ответ. График функции $y=\dfrac{3x-2}{x+1}$ получен сдвигом графика функции $y=-\dfrac{5}{x}$ на 1 единицу вдоль оси Ox влево и на 3 единицы вдоль оси Oy вверх.

5.2.4. Иррациональная функция

Если $0 < n < 1$, то функция $y = x^n$ будет иметь вид $y = \sqrt[n]{x}$. Читаем так: "игрек равен корню энной степени из икса".

Рассмотрим свойства функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$. Их графики изображены на рисунках 5.31 и 5.32.

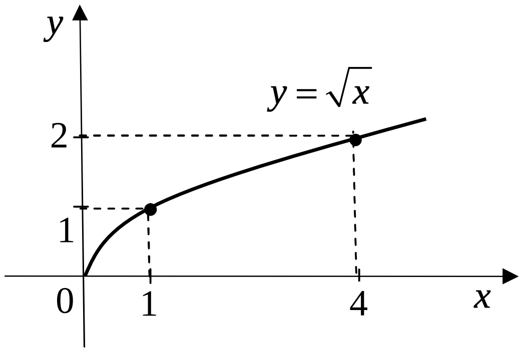


Рисунок 5.31

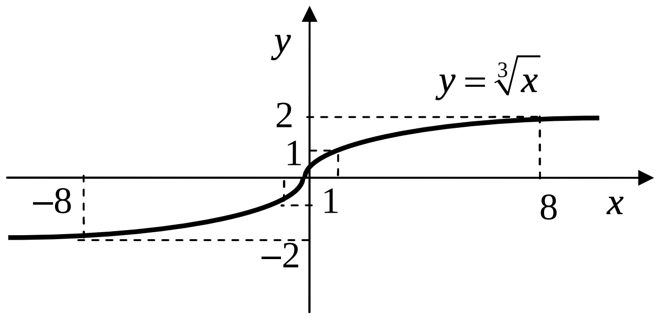


Рисунок 5.32

Свойства функции $y = \sqrt{x}$	**Свойства функции** $y = \sqrt[3]{x}$
1. $D(f) = R^+ = [0; +\infty[$.	1. $D(f) = R =]-\infty; +\infty[$.
2. $E(f) = R^+ = [0; +\infty[$.	2. $E(f) = R =]-\infty; +\infty[$.
3. Нуль функции $y=0$ при $x=0$.	3. Нуль функции $y=0$ при $x=0$.
4. $y > 0$ при $x \in]0; +\infty[$.	4. $y > 0$ при $x \in]0; +\infty[$; $y < 0$ при $x \in]-\infty; 0[$.
5. Функция монотонно возрастает при $x \in]0; +\infty[$.	5. Функция монотонно возрастает при $x \in]-\infty; +\infty[$.
6. Функция имеет минимум при $x = 0$, $\min y = y(0) = 0$	6. Функция не имеет экстремумов.
7. Функция общего вида $y(-x) \neq \pm y(x)$.	7. Функция нечетная $y(-x) = -y(x)$.
8. Функция не имеет асимптот.	8. Функция не имеет асимптот.

Функция $y = \sqrt[n]{x}$ имеет свойства функции $y = \sqrt{x}$ при четном n и свойства $y = \sqrt[3]{x}$ при нечетном n.

5.2.5. Функция с модулем

Рассмотрим функцию $y=|x|$. Эта функция определяется формулой: $|x|=\begin{cases} x, & \text{Íńëč } x \geq 0; \\ -x, & \text{Íńëč } x < 0. \end{cases}$ График функции показан на рисунке 5.33.

Запись $y=|x|$ читаем так: "игрек равен модулю икс".

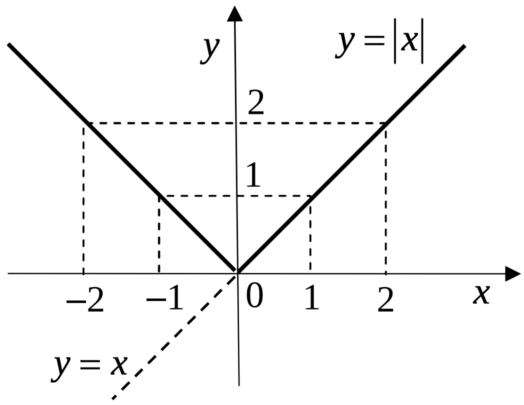


Рисунок 5.33

Свойства функции $y=|x|$

1. Область определения функции $D(f)=]-\infty;+\infty[$ или $x\in R$.
2. Область значений функции $E(f)=[0;+\infty[$ или $y=R^{+}$.
3. Функция обращается в нуль при $x=0$.
4. Функция положительна во всей области определения: $y>0$ при $x\in R$.
5. Функция убывает на интервале $]-\infty;0[$ и возрастает на интервале $]0;+\infty[$.
6. Функция имеет экстремум (точку минимума) при $x=0$, $y_{\min}=y(0)=0$
7. Функция четная: $y(x)=y(-x)$.
8. Функция не имеет асимптот.

В общем случае для функции $y=\left|f\left(x\right)\right|$ можно записать:

$$\left|f\left(x\right)\right|=\begin{cases} f\left(x\right), \text{ åñëè } f\left(x\right)\geq 0; \\ -f\left(x\right), \text{ åñëè } f\left(x\right)<0. \end{cases}$$

Например, функцию $y=\left|x^3-1\right|$ можно записать так: $y=\left|x^3-1\right|=\begin{cases} x^3-1, \text{ åñëè } x^3-1\geq 0 \text{ èëè } x\geq 1 \\ -x^3+1, \text{ åñëè } x^3-1<0 \text{ èëè } x<1 \end{cases}$. График функции показан на рис. 5.34.

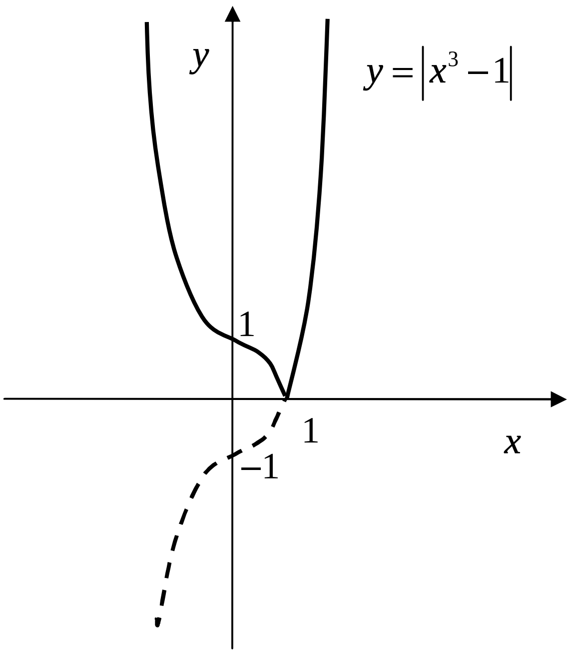


Рисунок 5.34

Ответьте на вопросы

1. Какая функция называется линейной?
2. Что такое прямая пропорциональность?
3. Какие свойства функции $y=x$ вы знаете?
4. Как называется точка $x=0$ для графика функции $y=\dfrac{1}{x}$?
5. Как называются линии графиков функций $y=kx$, $y=ax^2$, $y=\dfrac{k}{x}$?
6. Назовите интервалы возрастания и убывания функции $y=x^2$.

7. Приведите примеры целой рациональной функции.
8. Какая функция будет дробно-рациональной?
9. Что такое иррациональная функция?
10. Какие свойства имеет функция $y = |x|$?

Задания для самостоятельной работы № 13

I. Напишите формулы прямой и обратной пропорциональности с коэффициентом пропорциональности $k = 2$.

II. Найдите ось симметрии и координаты вершины параболы.

1) $y = x^2 - 7x + 6$; 2) $y = -2x^2 + 8x - 9$; 3) $y = x^2 + 7x + 10$.

III. Напишите уравнение вертикальной асимптоты графика функции $y = \dfrac{2}{x-3}$.

IV. Найдите $f(x+1)$, если $f(x) = \dfrac{2-x}{x-2}$.

V. Преобразуйте формулу функции $y=\dfrac{x+3}{x-2}$ к виду $y=m+\dfrac{k}{x-n}$.

VI. Постройте графики функций.

1) $y = |x-3|$; 2) $y = |x| + 3$; 3) $y = |x^2 - 5x + 6|$.

VII. Напишите основные свойства функции $y = \sqrt[7]{x-1}$.

5.3. Трансцендентные функции

5.3.1. Показательная функция

Функция, заданная формулой $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется ***показательной***.

Читаем так: "Игрек равен a в степени икс".

Рассмотрим свойства и график функции $y = a^x$ при $a > 1$ и при $0 < a < 1$.

Свойства функции $y = a^x$

при $a > 1$

1. Область определения функции: вся числовая прямая, т.е. $x \in R$.
2. Область значений функции: $y \in \left]0;\ +\infty\right[$.
3. Функция ни четная, ни нечетная, т.е. общего вида.
4. Функция монотонно возрастает на всей числовой прямой (рис. 5.35).

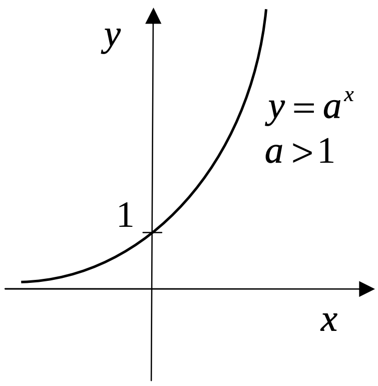


Рисунок 5.35

5. Функция не имеет нулей. График функции не пересекает ось Ox.
6. Функция положительна во всей области определения.
7. Функция экстремумов не имеет.
8. Горизонтальная асимптота $y = 0$.

при $0 < a < 1$

1. Область определения функции: $x \in R$.
2. Область значений функции: $y \in \left]0;\ +\infty\right[$.
3. Функция общего вида.
4. Функция монотонно убывает на всей числовой прямой (рис. 5.36).

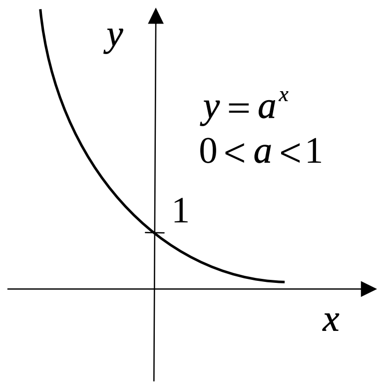


Рисунок 5.36

5. Функция не имеет нулей. График функции не пересекает ось Ox.
6. Функция положительна во всей области определения.
7. Функция экстремумов не имеет.
8. Горизонтальная асимптота $y = 0$.

5.3.2. Логарифмическая функция

Функция, заданная формулой $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 0)$ называется ***логарифмической.***

Читаем так: "Игрек равен логарифму икс по основанию a".

ЗАПОМНИТЕ!

Логарифмом положительного числа x по основанию a $(a > 0,\ a \neq 0)$ называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число x. Из определения логарифм мы получаем: $x = a^y$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является обратной для показательной функции $y = a^x$, графики этих функций симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 5.37, 5.38).

Рассмотрим свойства и график функции $y = \log_a x$ при $a > 1$ и $0 < a < 1$.

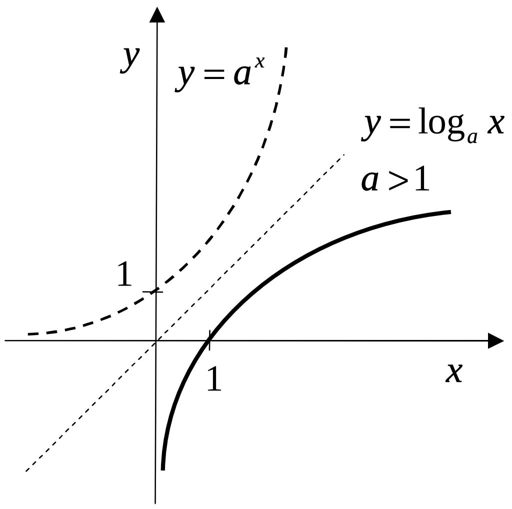


Рисунок 5.37

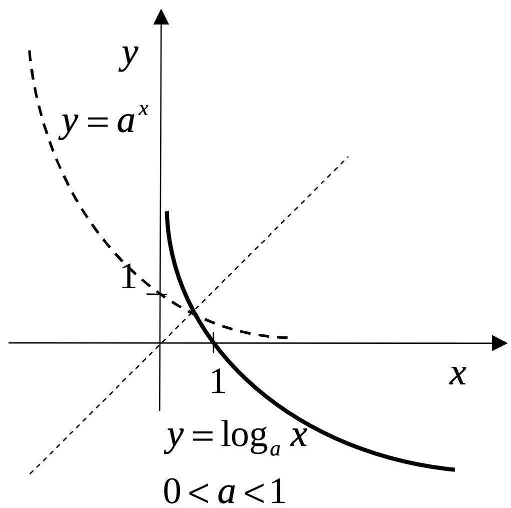


Рисунок 5.38

Свойства функции $y=\log_a x$

при $a>1$	**при** $0<a<1$
1. Область определения функции: $x\in\,]0;\,+\infty[$.	1. Область определения функции: $x\in\,]0;\,+\infty[$.
2. Область значений функции: $y\in R$.	2. Область значений функции: $y\in R$.
3. Функция ни четная, ни нечетная, т.е. общего вида.	3. Функция общего вида.
4. Функция возрастает при $x>0$.	4. Функция убывает при $x>0$.
5. Нули функции $(y=0)$ при $x=1$.	5. Нули функции $(y=0)$ при $x=1$.
6. $y>0$ при $x>1$ и $y<0$ при $0<x<1$.	6. $y>0$ при $0<x<1$ и $y<0$ при $x>1$.
7. Функция не имеет экстремумов.	7. Функция не имеет экстремумов.
8. Вертикальная асимптота $x=0$.	8. Вертикальная асимптота $x=0$.

5.3.3. Основные тригонометрические функции

Основными тригонометрическими функциями являются: $y=\sin x$; $y=\cos x$; $y=\operatorname{tg} x$; $y=\operatorname{ctg} x$.

Свойства и график функции $y=\sin x$

1. Область определения: $x\in R$ или $D(f)=R$.
2. Область значений: $y\in[-1;1]$ или $E(f)=[-1;\,1]$.
3. Функция нечетная, так как $\sin(-x)=-\sin x$. График функции симметричен относительно начала координат $O(0;\,0)$.
4. Функция периодическая; основной период $T=2p$.
5. Нули функции: $\sin x=0$ при $x=kp$, $k\in Z$.

6. Функция возрастает на интервалах $x \in \left[-\frac{p}{2} + 2kp ; \frac{p}{2} + 2kp \right]$ и убывает на интервалах $x \in \left[\frac{p}{2} + 2kp ; \frac{3p}{2} + 2kp \right]$, $k \in Z$.
7. Экстремумы функции: а) $y_{\max} = 1$ при $x = \frac{p}{2} + 2kp$, $k \in Z$;

   б) $y_{\min} = -1$ при $x = -\frac{p}{2} + 2kp$, $k \in Z$.
8. Функция не имеет асимптот.
9. $y > 0$ при $x \in \left] 2kp ; (2k+1)p \right[$; $y < 0$ при $x \in \left] (2k-1)p ; 2kp \right[$.
10. Функция ограниченная: $y \in [-1; 1]$.

График функции $y = \sin x$ изображен на рисунке 5.39. Он называется ***синусоидой***.

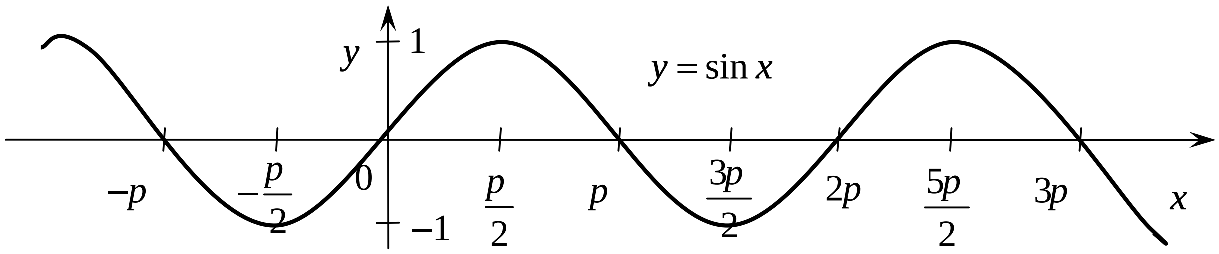


Рисунок 5.39

Свойства и график функции $y = \cos x$

1. Область определения: $x \in R$ или $D(f) = R$.
2. Область значений: $y \in [-1; 1]$ или $E(f) = [-1; 1]$.
3. Функция четная, так как $\cos(-x) = \cos x$. График функции симметричен относительно оси Oy.
4. Функция периодическая; основной период $T = 2p$.
5. Нули функции: $\cos x = 0$ при $x = \frac{p}{2} + kp$, $k \in Z$.
6. Функция возрастает на промежутках $x \in [-p + 2kp ; 2kp]$, $k \in Z$ и убывает на промежутках $x \in [kp ; p + 2kp]$, $k \in Z$.

7. Экстремумы функции: а) $y_{\max}=1$ при $x=2kp$, $k\in Z$;

   б) $y_{\min}=-1$ при $x=p+2kp$, $k\in Z$.
8. Функция не имеет асимптот.
9. $y>0$ при $x\in\left]2kp;(2k+1)p\right[$; $y<0$ при $x\in\left](2k-1)p;2kp\right[$.
10. Функция ограниченная: $y\in[-1;1]$.

График функции $y=\cos x$ изображен на рис. 5.40. Он называется ***косинусоидой***.

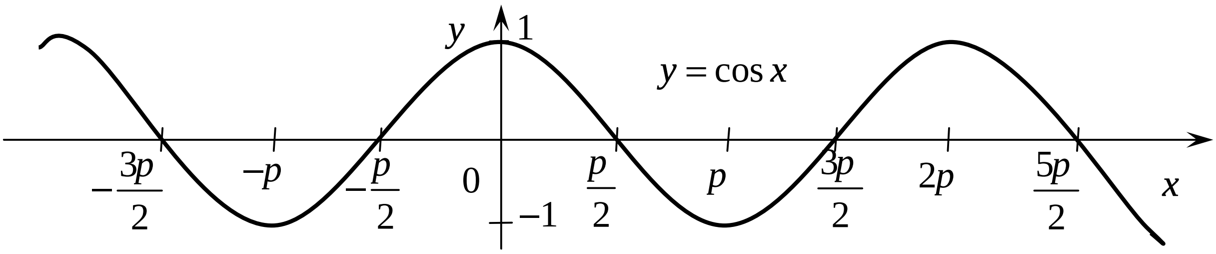


Рисунок 5.40

Свойства и график функции $y=\operatorname{tg}x$

1. Область определения: $x\neq\frac{p}{2}+kp$, $k\in Z$ или

$$D(f)=\left\{x\mid x\in R\setminus\left\{\frac{p}{2}+kp,\ k\in Z\right\}\right\}.$$

2. Область значений: $y\in R$ или $E(f)=R$.
3. Функция нечетная, так как $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x$. График функции симметричен относительно начала координат.
4. Функция периодическая; основной период $T=p$.
5. Нули функции: $\operatorname{tg}x=0\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}=0\Rightarrow\sin x=0\Rightarrow x=kp$, $k\in Z$.
6. Функция возрастает на промежутках $x\in\left]-\frac{p}{2}+kp;\frac{p}{2}+kp\right[$,

   $k\in Z$.

7. Функция не имеет экстремумов.
8. Прямые $x=\frac{p}{2}+kp$, $k\in \mathrm{Z}$, являются вертикальными асимптотами.
9. $y>0$ при $x\in \left]pk;\frac{p}{2}+pk\right[$; $y<0$ при $x\in \left]-\frac{p}{2}+pk;pk\right[$.
10. Функция неограниченная.

График функции $y=\operatorname{tg}x$ изображен на рис. 5.41. Он называется ***тангенсоидой***.

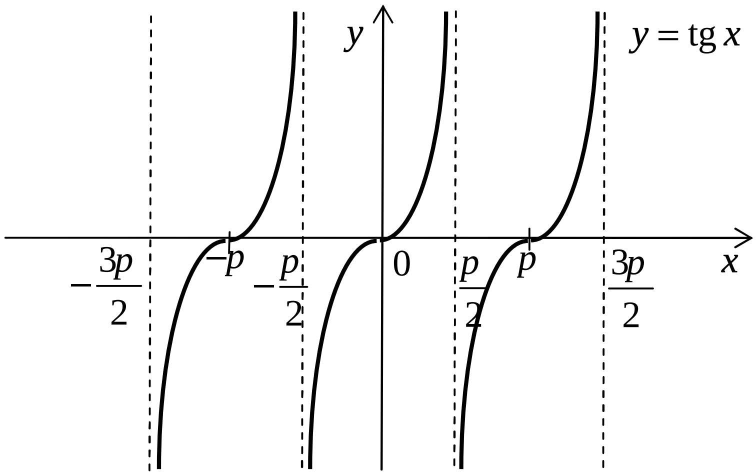


Рисунок 5.41

Свойства и график функции $y=\operatorname{ctg}x$

1. Область определения: $x\neq kp$, $k\in \mathrm{Z}$ или
$$D(f)=\{x\,|\,x\in R\setminus\{kp,\ k\in Z\}\}.$$
2. Область значений: $y\in R$ или $E(f)=R$.
3. Функция нечетная, так как $\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg}x$. График функции симметричен относительно начала координат.
4. Функция периодическая; основной период $T=p$.
5. Нули функции:
$$\operatorname{ctg}x=0\Rightarrow\frac{\cos x}{\sin x}=0\Rightarrow\cos x=0\Rightarrow x=\frac{p}{2}+kp,\ k\in \mathrm{Z}.$$

6. Функция убывает на промежутках $x \in \left] kp ; p + kp \right[$, $k \in \mathrm{Z}$.
7. Функция не имеет экстремумов.
8. Прямые $x = kp$, $k \in \mathrm{Z}$, являются вертикальными асимптотами.
9. $y > 0$ при $x \in \left] p k; \frac{p}{2} + p k \right[$; $y < 0$ при $x \in \left] \frac{p}{2} + p k; p\,(k+1) \right[$.
10. Функция неограниченная.

График функции $y = \mathrm{ctg}\,x$ изображен на рис. 5.42. Он называется ***котангенсоидой***.

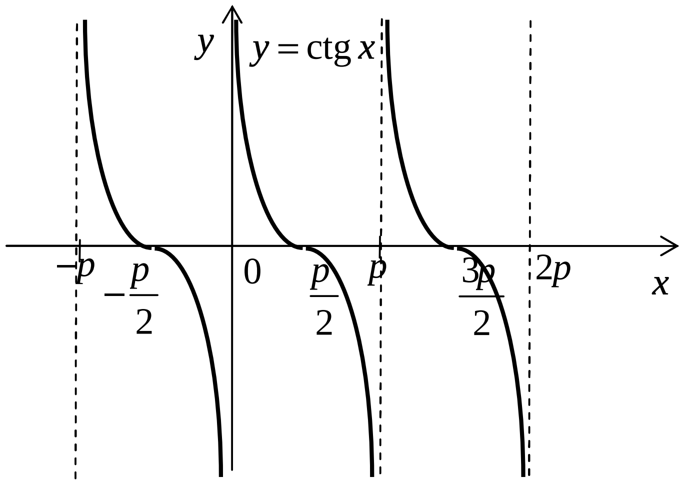


Рисунок 5.42

5.3.4. Обратные тригонометрические функции

Функции, обратные функциям $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\,x$, $y = \mathrm{ctg}\,x$ на соответствующих интервалах, называются ***обратными тригонометрическими функциями***. Они обозначаются: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\,x$, $y = \mathrm{arcctg}\,x$.

Тригонометрические функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ не являются монотонными во всей области их определения. Поэтому для построения обратных тригонометрических функций выделяют интервалы монотонности.

Функция $y = \arcsin x$

Функция $y = \sin x$ возрастает на отрезке (интервале) $\left[-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right]$ и принимает все значения от -1 до 1. Значит, для функции $y = \sin x$, $-\frac{p}{2} \le x \le \frac{p}{2}$, существует обратная функция. Эту функцию обозначают $y = \arcsin x$ (читается "арксинус икс").

ЗАПОМНИТЕ!

Арксинус числа x – это такое число y из отрезка $\left[-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right]$, синус которого равен x:

$$y = \arcsin x \Rightarrow \sin(\arcsin x) = x,\ -\frac{p}{2} \le y \le \frac{p}{2},\ -1 \le x \le 1.$$

Например: $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{p}{6}$ (так как $\sin\frac{p}{6} = \frac{1}{2}$; $-\frac{p}{2} \le \frac{p}{6} \le \frac{p}{2}$); $\arcsin 0 = 0$; $\arcsin 1 = \frac{p}{2}$; $\arcsin(-1) = -\frac{p}{2}$; $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{p}{3}$.

График функции $y = \arcsin x$ изображен на рис. 5.43. Этот график симметричен графику функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right]$ относительно прямой $y = x$.

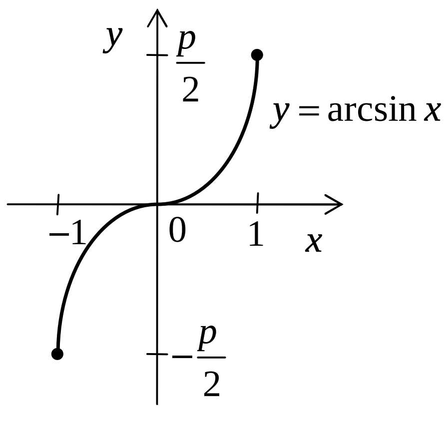


Рисунок 5.43

Основные свойства функции $y = \arcsin x$

1. Область определения: $D(f) = [-1;\ 1]$.
2. Множество значений: $E(f) = \left[-\frac{p}{2};\ \frac{p}{2}\right]$.
3. Функция нечетная, так как $\arcsin(-x) = \arcsin x$.
4. Нули функции: $y = 0$ при $x = 0$.
5. $y > 0$ при $x \in]0; 1]$ и $y < 0$ при $x \in [-1; 0]$.
6. Функция возрастает на всей области определения.
7. Функция не имеет экстремумов.
8. Функция не имеет асимптот.
9. $\sin(\arcsin x) = x$ при $x \in [-1;\ 1]$.
10. Функция непериодическая.

При рассмотрении обратной функции $y = \arcsin x$ на отрезке $y \in \left[-\frac{p}{2};\ \frac{p}{2}\right]$ значение y называют главным значением и обозначают $\arcsin x$. Другие значения $y = \mathrm{Arcsin}\, x$ выражаются через его главное значение формулой: $\mathrm{Arcsin}\, x = \arcsin x + 2kp\ \ (k \in Z)$.

Функция $y = \arccos x$

Функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $[0;\ p]$ и принимает все значения от -1 до 1. Значит, для функции $y = \cos x$, $0 \le x \le p$, существует обратная функция. Эту функцию обозначают $y = \arccos x$ (читается "арккосинус икс").

ЗАПОМНИТЕ!

Арккосинус числа x – это такое число y из отрезка $[0;\ p]$, косинус которого равен x:

$$y = \arccos x \Rightarrow \cos(\arccos x) = x,\ 0 \le y \le p,\ -1 \le x \le 1.$$

Например, $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$ (так как $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$; $0\le\frac{\pi}{3}\le\pi$); $\arccos 1=0$; $\arccos(-1)=\pi$; $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

Отметим, что имеет место следующее важное тождество:

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x.$$

В его справедливости можно убедиться с помощью графика функции $y=\arccos x$ (рис. 5.44). Этот график симметричен графику функции $y=\cos x$, $x\in[0;\pi]$ относительно прямой $y=x$.

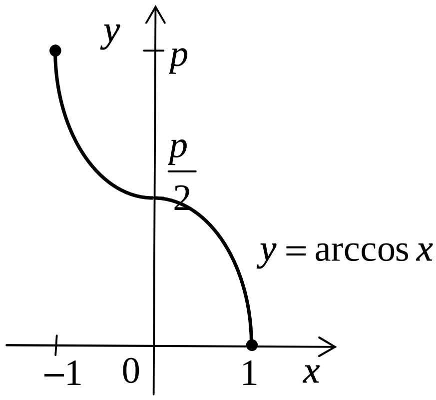


Рисунок 5.44

Основные свойства функции $y=\arccos x$

1. Область определения: $D(f)=[-1;\,1]$.
2. Множество значений: $E(f)=[0;\,\pi]$.
3. Функция общего вида: $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$.
4. Нули функции: $y=0$ при $x=1$.
5. $y>0$ при $x\in[-1;\,1]$.
6. Функция убывающая.
7. Функция не имеет экстремумов.
8. Функция не имеет асимптот.
9. $\cos(\arccos x)=x$ при $x\in[-1;\,1]$.
10. Функция непериодическая.

При рассмотрении обратной функции $y=\arccos x$ на отрезке $y\in\left[0;\,p\right]$ значение y называют главным значением и обозначают $\arccos x$. Другие значения $y=\mathrm{Arc}\cos x$ выражаются через его главное значение формулой: $\mathrm{Arc}\cos x=-\arccos x+2kp\ \left(k\in Z\right)$.

Функция $y=\mathrm{arctg}\,x$

Функция $y=\mathrm{tg}\,x$ возрастает на отрезке $\left]-\dfrac{p}{2};\,\dfrac{p}{2}\right[$ и принимает на нем все числовые значения, так как $E\left(f\right)=R$. Значит, на указанном интервале для функции $y=\mathrm{tg}\,x$ существует обратная функция. Эту функцию обозначают $y=\mathrm{arctg}\,x$ (читается "арктангенс икс").

ЗАПОМНИТЕ!

Арктангенс числа x – это такое число y из отрезка $\left]-\dfrac{p}{2};\,\dfrac{p}{2}\right[$, тангенс которого равен x:

$$y=\mathrm{arctg}\,x\Rightarrow\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\,x\right)=x,\ -\frac{p}{2}<y<\frac{p}{2},\ -\infty<x<+\infty.$$

Например, $\mathrm{arctg}\sqrt{3}=\dfrac{p}{3}$ (так как $\mathrm{tg}\sqrt{3}=\dfrac{p}{3}$; $-\dfrac{p}{2}<\dfrac{p}{3}<\dfrac{p}{2}$); $\mathrm{arctg}\,0=0$; $\mathrm{arctg}\,1=\dfrac{p}{4}$; $\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)=-\dfrac{p}{3}$; $\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{p}{6}$; $\mathrm{arctg}\left(-1\right)=-\dfrac{p}{4}$.

График функции $y=\mathrm{arctg}\,x$ изображен на рис. 5.45. Этот график симметричен графику функции $y=\mathrm{tg}\,x$, $x\in\left]-\dfrac{p}{2};\,\dfrac{p}{2}\right[$ относительно прямой $y=x$. Прямые $y=\pm\dfrac{p}{2}$ являются горизонтальными асимптотами графика функции $y=\mathrm{arctg}\,x$.

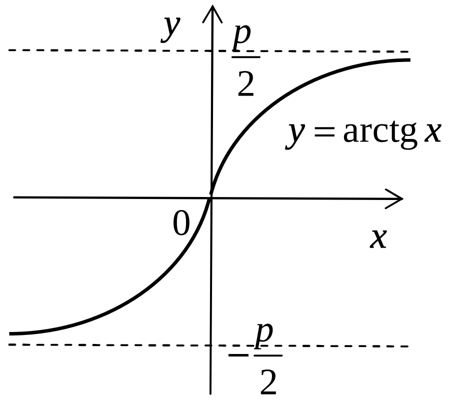


Рисунок 5.45

Основные свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$

1. Область определения: $D(f) = \left]-\infty; +\infty\right[$.
2. Множество значений: $E(f) = \left]-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right[$.
3. Функция нечетная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.
4. Нули функции: $y = 0$ при $x = 0$.
5. $y > 0$ при $x > 0$ и $y < 0$ при $x < 0$.
6. Функция возрастающая.
7. Функция не имеет экстремумов.
8. Асимптоты функции: $y = -\frac{p}{2}$ и $y = \frac{p}{2}$.
9. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ при $x \in \left]-\infty; +\infty\right[$.
10. Функция непериодическая.

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ определена для $x \in \left]-\infty; +\infty\right[$ и многозначна. Значение y называют ***главным значением*** и обозначают $\operatorname{arctg} x$. Другие значения $y = \operatorname{Arctg} x$ выражаются через его главное значение формулой:

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + kp \ (k \in Z).$$

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на отрезке $]0;\ p\,[$ и принимает на нем все числовые значения, так как $E(f) = R$. Значит, на указанном интервале для функции $y = \operatorname{ctg} x$ существует обратная функция. Эту функцию обозначают $y = \operatorname{arcctg} x$ (читается "арккотангенс икс").

ЗАПОМНИТЕ!

Арккотангенс числа x – это такое число y из отрезка $]0;\ p\,[$, котангенс которого равен x:

$y = \operatorname{arcctg} x \Rightarrow \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$, $0 < y < p$, $-\infty < x < +\infty$.

Например, $\operatorname{arcctg} 0 = \dfrac{p}{2}$ (так как $\operatorname{ctg}\dfrac{p}{2} = 0$; $0 < \dfrac{p}{3} < p$); $\operatorname{arcctg} 1 = \dfrac{p}{4}$; $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \dfrac{p}{6}$; $\operatorname{arcctg}(-1) = \dfrac{3p}{4}$; $\operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{p}{3}$; $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{5p}{6}$.

Отметим, что имеет место следующее важное тождество:

$$\operatorname{arcctg}(-x) = p - \operatorname{arcctg} x.$$

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ изображен на рис. 5.46.

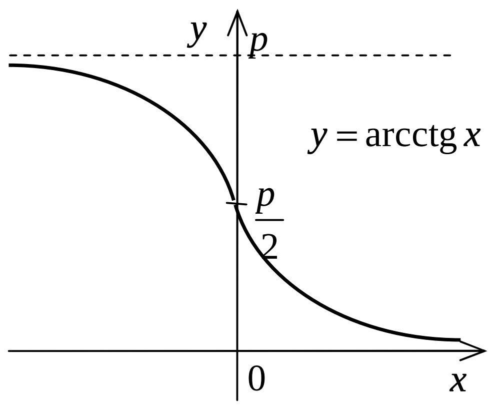


Рисунок 5.46

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ симметричен графику функции $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in \left] 0;\ p \right[$ относительно прямой $y = x$. Прямые $y = 0$ и $y = p$ являются горизонтальными асимптотами графика функции $y = \operatorname{arcctg} x$.

Основные свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$

1. Область определения: $D(f) = \left] -\infty;\ +\infty \right[$.
2. Множество значений: $E(f) = \left] 0; p \right[$.
3. Функция общего вида: $\operatorname{arcctg}(-x) = p - \operatorname{arcctg} x$.
4. Нулей функции нет.
5. $y > 0$ при $x \in \left] -\infty;\ +\infty \right[$.
6. Функция убывающая.
7. Функция не имеет экстремумов.
8. Асимптоты функции: $y = p$ и $y = 0$.
9. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ при $x \in \left] -\infty;\ +\infty \right[$.
10. Функция непериодическая.

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ определена для $x \in \left] -\infty; +\infty \right[$ и многозначна. Значение y называют главным значением и обозначают $\operatorname{arcctg} x$. Другие значения $y = \operatorname{Arcctg} x$ выражаются через его главное значение формулой: $\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + kp$ $(k \in Z)$.

Ответьте на вопросы

1. Назовите свойства графиков тригонометрических функций: а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$; в) $y = \operatorname{tg} x$; г) $y = \operatorname{ctg} x$.
   Какой вид имеют эти графики?
2. Назовите свойства графиков обратных тригонометрических функций: а) $y = \arcsin x$; б) $y = \arccos x$; в) $y = \operatorname{arctg} x$; г) $y = \operatorname{arcctg} x$.
   Какой вид имеют эти графики?

Задания для самостоятельной работы № 14

I. Вычислите значение функций.

1) $y=\log_2 8$; 2) $y=\log_{\sqrt{5}} 1$; 3) $y=\log_{\frac{1}{2}} 4$; 4) $y=\log_3 \dfrac{1}{243}$.

II. Найдите область определения функций.

1) $y=2^{\frac{1}{x}}$; 2) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^2-9}}$; 3) $y=3^{1-x}$.

III. Найти значения тригонометрических функций для $x=390^{\circ}$, $x=420^{\circ}$, $x=330^{\circ}$.

1) $y=\sin x$; 2) $y=\cos x$; 3) $y=\operatorname{tg} x$; 4) $y=\operatorname{ctg} x$.

IV. Найдите значения обратных тригонометрических функций (устно).

1) $\arcsin 0$; 2) $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$; 3) $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\arccos 0$; 5) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\arccos 1$;

7) $\operatorname{arctg} 1$; 8) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; 9) $\operatorname{arctg} 0$;

10) $\operatorname{arcctg}(-1)$; 11) $\operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 12) $\operatorname{arcctg} 0$.

5.4. Способы построения графиков функций

Анализ графиков элементарных функций показывает, что если известен график функции $y=f(x)$, то при помощи геометрических преобразований можно построить график более сложной функции.

Рассмотрим некоторые способы построения графиков при помощи геометрических преобразований.

1. График функции $y = A \cdot f(x)$ получается из графика $y = f(x)$ увеличением всех ординат этого графика в A раз, если $A > 1$ и уменьшение ординат графика в A раз, если $0 < A < 1$ (рис. 5.47).

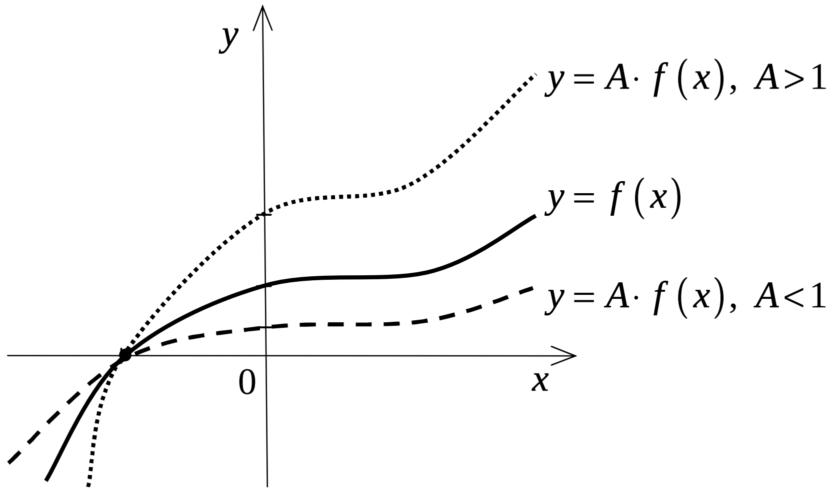


Рисунок 5.47

<u>*Пример 3.*</u> Постройте график функции $y = 2x^2$.

Решение. Сначала построим график функции $y = x^2$.

Увеличим все ординаты этого графика в 2 раза и получим график функции $y = 2x^2$ (рис. 5.48).

Ответ. График функции $y = 2x^2$ показан на рис. 5.48 сплошной линией.

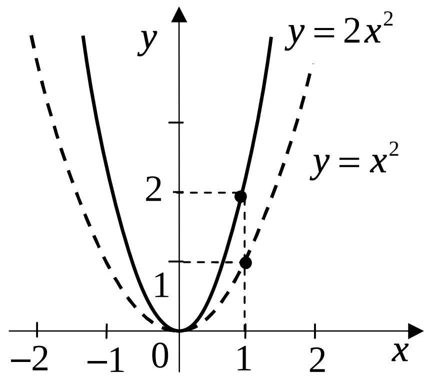


Рисунок 5.48

2. График функции $y = f(a \cdot x)$ получается из графика $y = f(x)$ сжатием графика вдоль оси Ox, если $a > 1$ и растяжением графика вдоль оси Ox, если $0 < a < 1$.

<u>*Пример 4.*</u> Постройте графики функций $y = \sin 2x$ и $y = \sin \frac{x}{2}$.

Решение. Составим таблицу некоторых значений функций $y = \sin x$, $y = \sin 2x$ и $y = \sin \frac{x}{2}$ (табл. 5.3).

Таблица 5.3 – Значения функций $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = \sin \frac{x}{2}$

x	$\pm 2p$	$-\frac{3p}{2}$	$-p$	$-\frac{p}{2}$	0	$\frac{p}{2}$	p	$\frac{3p}{2}$
$y = \sin \frac{x}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$y = \sin x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1
$y = \sin 2x$	0	0	0	0	0	0	0	0

Для функции $y = \sin x$ основным периодом будет $T = 2p$. Тогда основной период функции $y = \sin 2x$ равен $T_1 = \frac{2p}{2} = p$, а основной период функции $y = \sin \frac{x}{2}$ равен $T_2 = \frac{2p}{1/2} = 4p$.

По данным таблицы 5.3 построим графики всех трех функций (рис. 5.49).

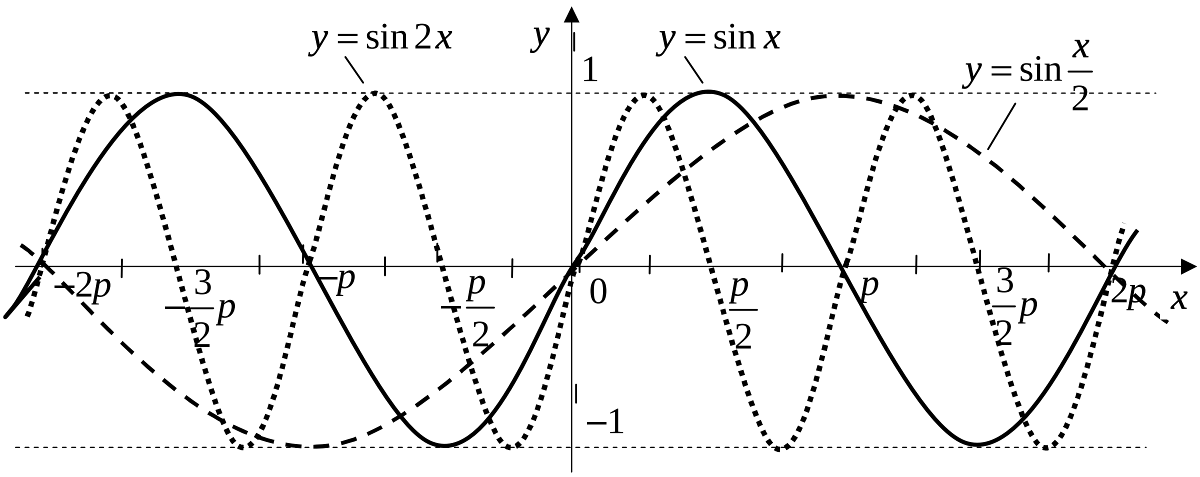


Рисунок 5.49

Вывод. Из графика функции $y = \sin x$ сжатием его вдоль оси Ox получается график функции $y = \sin 2x$, а график функции $y = \sin \frac{x}{2}$ получается растяжением графика функции $y = \sin x$ вдоль оси Ox

Ответ. График функции $y = \sin 2x$ показан на рис. 5.49 точечной линией. График функции $y = \sin \frac{x}{2}$ показан на рис. 5.49 пунктирной линией.

3. График функции $y = f(x+b)$ получается сдвигом графика $y = f(x)$ вдоль оси Ox на величину $x = |b|$ влево (в отрицательном направлении оси Ox), если $b > 0$ и вправо (в положительном направлении оси Ox), если $b < 0$.

<u>*Пример 5.*</u> Постройте графики функций $y = (x+2)^2$ и $y = (x-2)^2$.

Решение. Составим таблицу некоторых значений функций $y = (x-2)^2$, $y = x^2$ и $y = (x+2)^2$ (табл. 5.4).

Таблица 5.4 – Значения функций $y = (x-2)^2$, $y = x^2$, $y = (x+2)^2$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = (x-2)^2$	36	25	16	9	4	1	0	1	4
$y = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$y = (x+2)^2$	4	1	0	1	4	9	16	25	36

Построим графики этих функций по данным таблицы 5.4 (рис. 5.50).

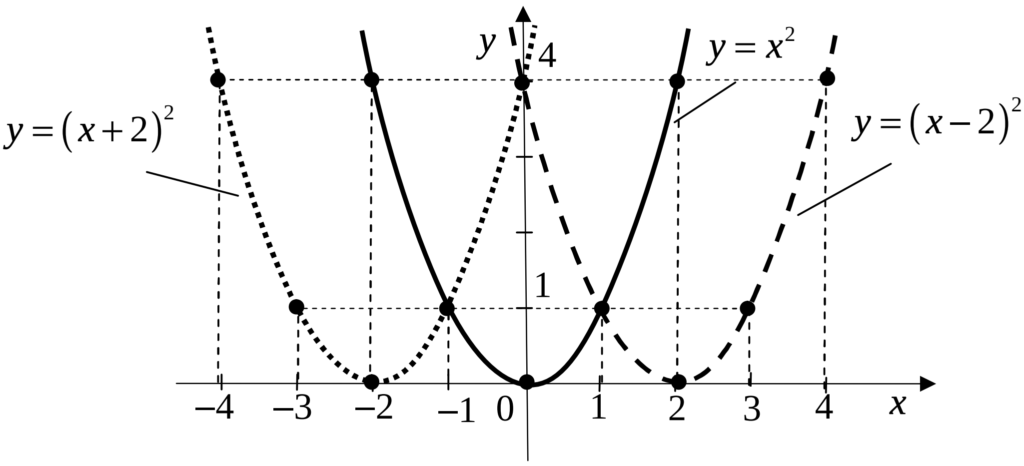


Рисунок 5.50

Вывод. График функции $y = (x+2)^2$ получается сдвигом графика $y = x^2$ на 2 единицы вдоль оси Ox влево (в отрицательном направлении оси Ox), а график функции $y = (x-2)^2$ получается сдвигом графика $y = x^2$ на 2 единицы вдоль оси Ox вправо (в положительном направлении оси Ox).

Ответ. График функции $y = (x+2)^2$ показан на рис. 5.50 точечной линией.

График функции $y = (x-2)^2$ показан на рис. 5.50 пунктирной линией.

<u>*Пример* 6.</u> Постройте график функции $y=\dfrac{1}{x+3}$.

Решение. Сначала построим график функции $y=\dfrac{1}{x}$. Сдвинем его на 3 единицы влево (по правилу построения графика функции $y=f\left(x+b\right)$). При этом вертикальная асимптота гиперболы $y=\dfrac{1}{x}$ тоже сдвинется на 3 единицы влево. Следовательно, график функции $y=\dfrac{1}{x}$ имеет две асимптоты: $x=-3$ и $y=0$. Найдем координаты точки пересечения графика с осью Oy: $x=0$; $y=\dfrac{1}{3}$.

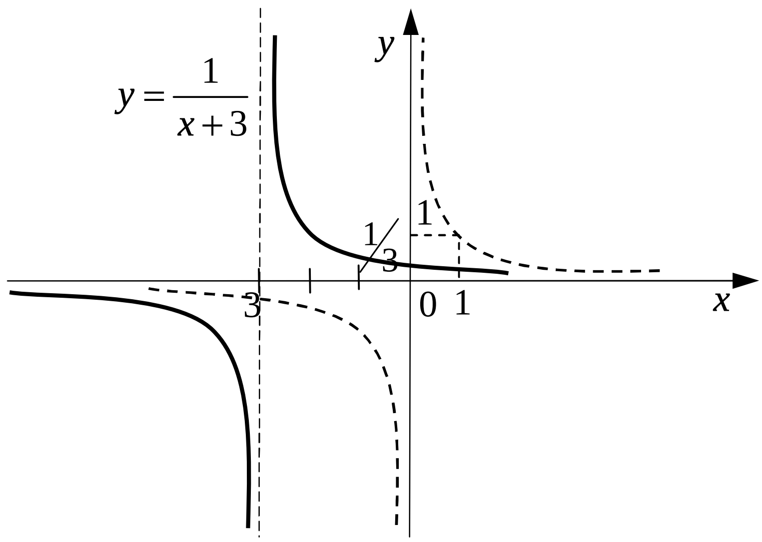


Рисунок 5.51

Ответ. График функции $y=\dfrac{1}{x+3}$ показан на рис. 5.51 сплошной линией.

4. График функции $y=f\left(x\right)+M$ получается сдвигом графика $y=f\left(x\right)$ на величину $y=\left|M\right|$ в положительном направлении оси Oy (вверх), если $M>0$ и в отрицательном направлении оси Oy (вниз), если $M<0$.

<u>*Пример* 7.</u> Постройте графики функций $y=x^2+2$ и $y=x^2-2$.

Решение. Составим таблицу некоторых значений функций $y=x^2-2$, $y=x^2$ и $y=x^2+2$ (табл. 5.5).

Таблица 5.5 – Значения функций $y = x^2 - 2$, $y = x^2$, $y = x^2 + 2$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = x^2 - 2$	7	2	-1	-2	-1	2	7
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y = x^2 + 2$	11	6	3	2	3	6	11

Построим графики этих функций по данным таблицы 5.5 (рис. 5.52).

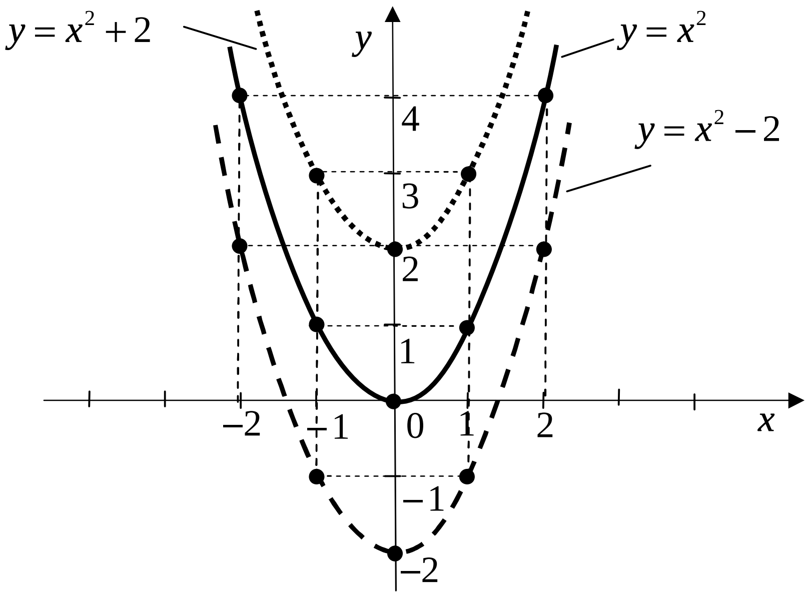


Рисунок 5.52

Вывод. График функции $y = x^2 - 2$ получается сдвигом графика $y = x^2$ на 2 единицы вниз вдоль оси Oy, а график функции $y = x^2 + 2$ получается сдвигом графика $y = x^2$ на 2 единицы вверх вдоль оси Oy.

Ответ. График функции $y = x^2 - 2$ показан на рис. 5.52 пунктирной линией. График функции $y = x^2 + 2$ показан на рис. 5.52 точечной линией.

<u>Пример 8.</u> Постройте график функции $y = \dfrac{1}{x} - 2$.

Решение. Сначала построим график функции $y = \dfrac{1}{x}$. Сдвинем его на 2 единицы вниз (по правилу построения графика функции $y = f(x) + M$). При этом горизонтальная асимптота гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ тоже сдвинется на 2 единицы вниз. Следовательно, график функции $y = \dfrac{1}{x} - 2$ имеет две асимптоты: $x=0$ и $y=-2$. График функции пересекает ось Ox. При $y=0$ получим: $\frac{1}{x}-2=0$, т.е. $x=\frac{1}{2}$ (рис. 5.53).

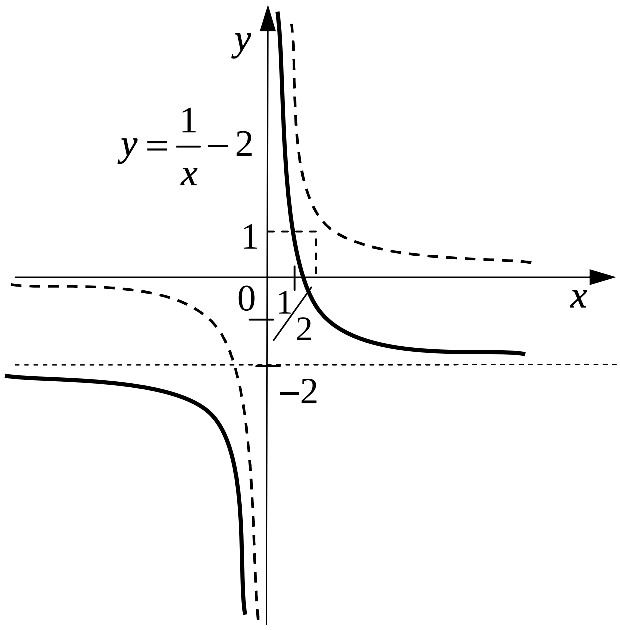


Рисунок 5.53

Ответ. График функции $y=\frac{1}{x}-2$ показан на рис. 5.53 сплошной линией.

5. График функции $y=-f(x)$ получается симметричным отображением графика функции $y=f(x)$ относительно оси Ox.

<u>*Пример 9.*</u> Постройте графики функций $y=(x-3)^2+2$ и $y=-(x-3)^2-2$.
Решение. Составим таблицу некоторых значений этих функций (табл. 5.6).

Таблица 5.6 – Значения функций $y=(x-3)^2+2$ та $y=-(x-3)^2-2$

x	1	2	3	4	5
$y=(x-3)^2+2$	6	3	2	3	6
$y=-(x-3)^2-2$	-6	-3	-2	-3	-6

Построим графики этих функций по данным таблицы 5.6 (рис. 5.54).
Вывод. График функции $y=-(x-3)^2-2$ получается симметричным отображение графика $y=(x-3)^2+2$ относительно оси Ox.

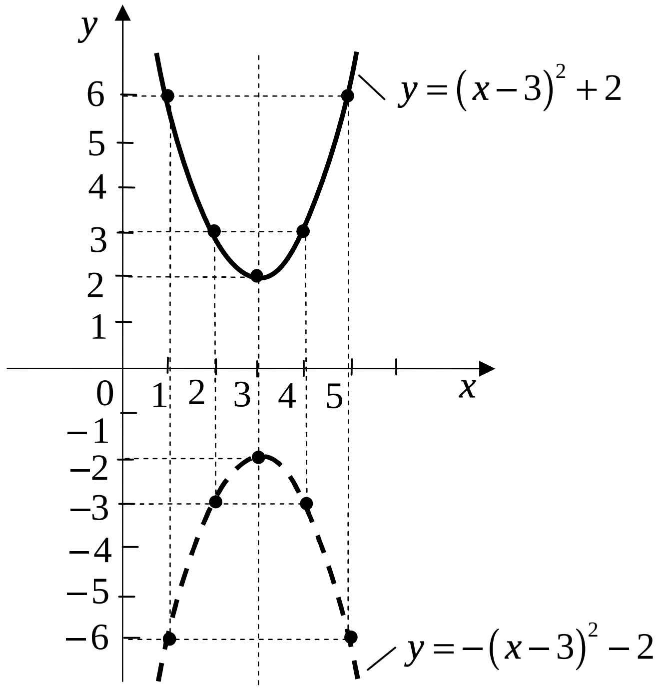


Рисунок 5.54

Ответ. График функции $y=(x-3)^2+2$ показан на рис. 5.54 сплошной линией. График функции $y=-(x-3)^2-2$ показан на рис. 5.54 пунктирной линией.

<u>*Пример 10.*</u> Постройте график функции $y=-2\cos 3x$.

Решение. Построим одну полуволну графика функции $y=\cos x$. Произведем ее сжатие вдоль оси Ox с коэффициентом 3 и растяжение вдоль оси Oy с коэффициентом 2, а затем симметричное преобразование относительно оси Ox. Получим график функции $y=-2\cos 3x$ (рис. 5.55 а).

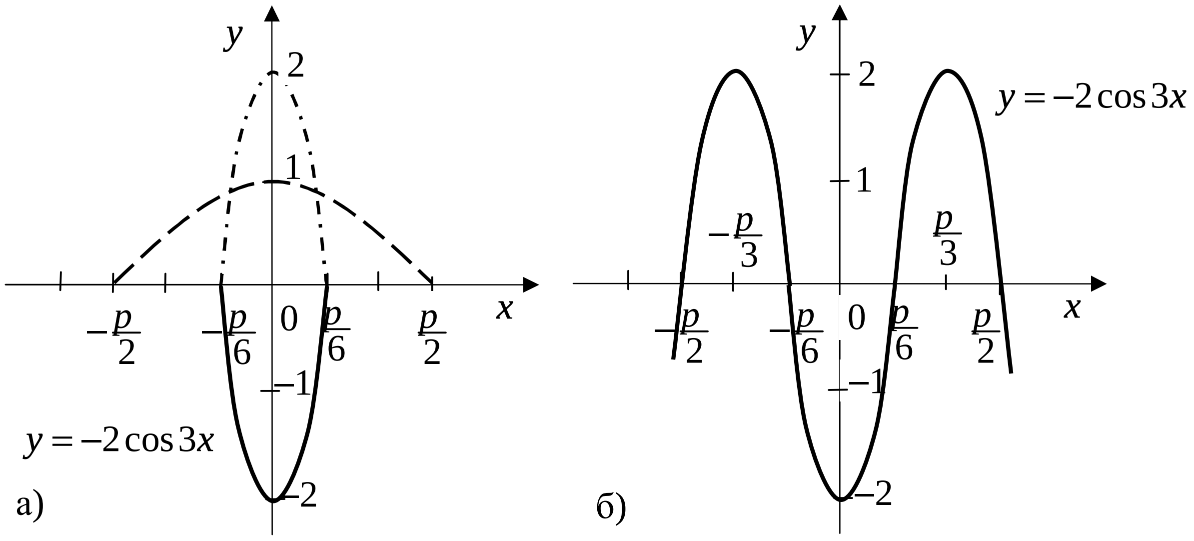


Рисунок 5.55

На рисунке 5.55 а показана одна полуволна графика, а на рисунке 5.55 б – весь график.

Ответ. График функции $y=-2\cos 3x$ показан на рис. 5.55 (б) сплошной линией.

6. График функции $y=f(-x)$ получается симметричным отображением графика функции $y=f(x)$ относительно оси Oy.

<u>*Пример 11.*</u> Постройте графики функций $y=2^x$ и $y=2^{-x}$.

Решение. Составим таблицу некоторых значений этих функций (табл. 5.7).

Таблица 5.7 – Значения функций $y=2^x$ та $y=2^{-x}$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y=2^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	9
$y=2^{-x}$	9	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

Построим графики этих функций по данным табл. 5.7 (рис. 5.56).

Вывод. График функции $y=2^{-x}$ получается симметричным отображение графика $y=2^x$ относительно оси Oy.

Ответ. График функции $y=2^x$ показан на рис. 5.56 сплошной линией. График функции $y=2^{-x}$ показан на рис. 5.56 пунктирной линией.

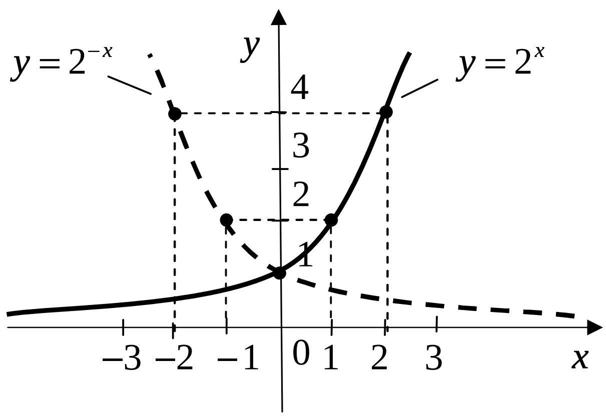


Рисунок 5.56

<u>*Пример 12.*</u> Постройте график функции $y=\sqrt{-x}$.

Решение. Строим график функции $y=\sqrt{x}$ и симметрично отображаем его относительно оси Oy.

Ответ. График функции $y=\sqrt{-x}$ показан на рис. 5.57 сплошной линией.

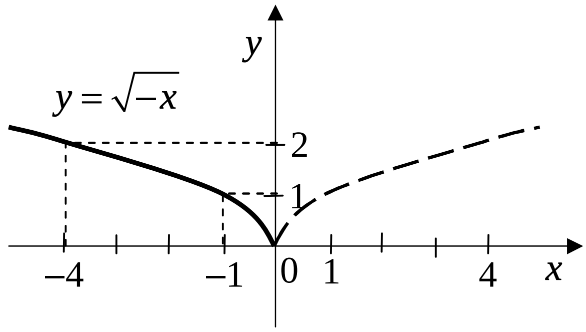


Рисунок 5.57

7. График функции $y = \left| f\left(x\right) \right|$ получается из графика функции $y = f\left(x\right)$ симметричным отображением относительно оси Ox части графика, которая лежит под осью Ox ($f\left(x\right) < 0$). Часть графика над осью Ox ($f\left(x\right) > 0$) остается без изменений.

<u>*Пример 13.*</u> Постройте график функции $y = \left| x^2 - 4x + 3 \right|$.

Решение. Составим таблицу некоторых значений функции $y = x^2 - 4x + 3$ (табл. 5.8).

Таблица 5.8 – Значения функции $y = x^2 - 4x + 3$

x	0	1	2	3	4
$y = x^2 - 4x + 3$	3	0	-1	0	3

Из решения уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$ находим, что нулями функции будут два значения: $x = 1$ и $x = 3$.

Найдем координаты вершины параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2; \qquad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 3 - 16}{4} = -1.$$

По полученным результатам построим график функции $y = x^2 - 4x + 3$ (рис. 5.58).

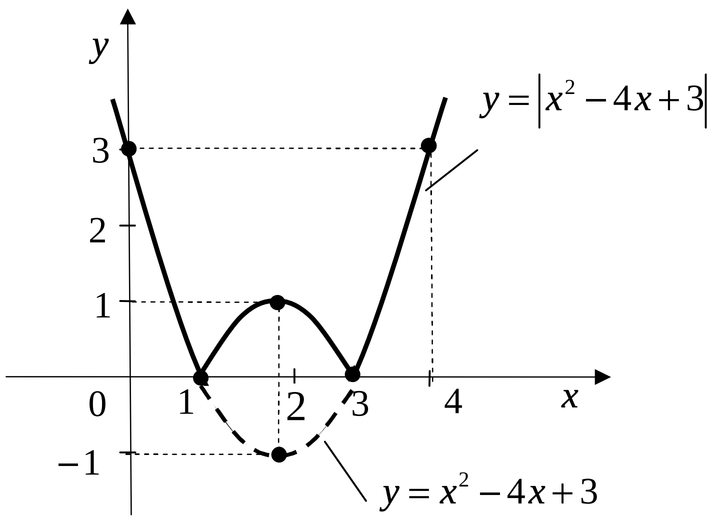


Рисунок 5.58

Интервалами положительности $\left(y > 0\right)$ для этой функции будут интервалы $x \in \left]-\infty; 1\right[\cup \left]3; +\infty\right[$. Интервалом отрицательности будет $x \in \left]1; 3\right[$.

Из определения модуля функции запишем:

$$\left|x^2-4x+3\right|=\begin{cases} x^2-4x+3, & \text{åñëè }\ x\in\left]-\infty;1\right[\ \mathbf{U}\left]3;+\infty\right[\\ -\left(x^2-4x+3\right), & \text{åñëè }\ x\in\left]1;3\right[\end{cases}$$

На интервале $x\in\left]-\infty;1\right[\mathbf{U}\left]3;+\infty\right[$ значения функций $y=x^2-4x+3$ и $y=\left|x^2-4x+3\right|$ совпадают и по величине и по знаку, а на интервале $x\in\left]1;3\right[$ значения функций совпадают по величине, но противоположны по знаку.

Вывод. График функции $y=\left|x^2-4x+3\right|$ получается из графика функции $y=x^2-4x+3$ симметричным отображением относительно оси Ox той части графика, которая лежит ниже оси Ox.

Ответ. График функции $y=\left|x^2-4x+3\right|$ показан на рис. 5.58 сплошной линией.

8. График функции $y=f\left(|x|\right)$ получается из графика функции $y=f\left(x\right)$ так: график функции $y=f\left(x\right)$ сохраняется только при $x\geq 0$, и отображается симметрично относительно оси Oy (рис. 5.59).

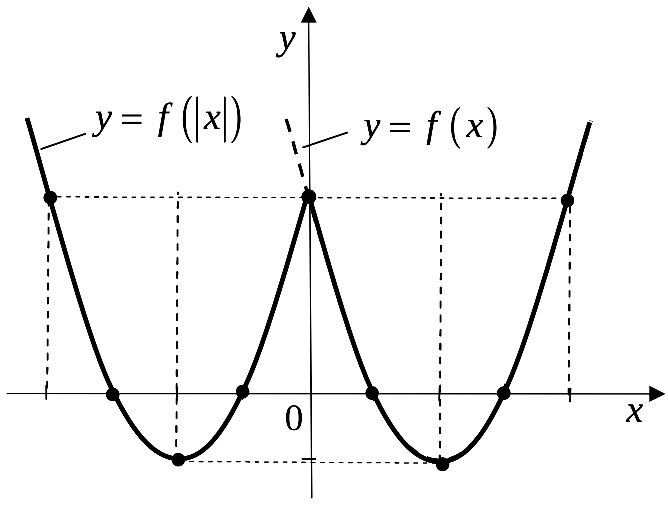


Рисунок 5.59

<u>*Пример 14.*</u> Постройте график функции $y=x^2-2|x|+1$.

Решение. Учитывая определение модуля, функцию $y=x^2-2|x|+1$ можно записать так: $y=x^2-2|x|+1=\begin{cases} x^2-2x+1, & \text{åñëè } x\in\left]-\infty;0\right]; \\ x^2+2x+1, & \text{åñëè } x\in\left]0;+\infty\right[. \end{cases}$

Составим таблицу значений функции по этим формулам на соответствующих интервалах (табл. 5.9).

Таблица 5.9 – Значения функции $y = x^2 - 2|x| + 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	0	1	4

По данным этой таблицы построим график функции (рис. 5.60).

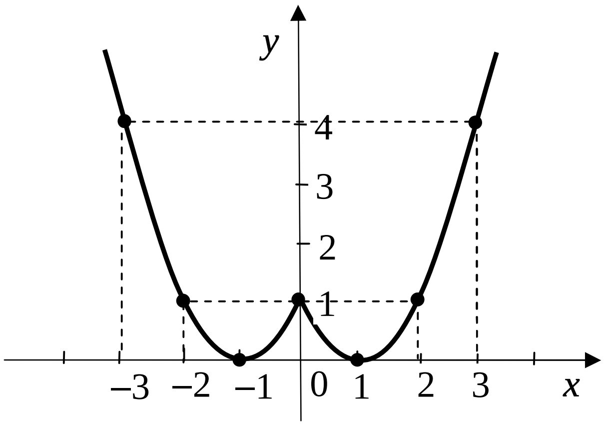


Рисунок 5.60

Вывод. Как видно из рис. 5.60 график функции $y = x^2 - 2|x| + 1$ получается из графика функции $y = x^2 - 2x + 1$ симметричным отображение части графика при $x \ge 0$ относительно оси Oy.

Ответ. График функции $y = x^2 - 2|x| + 1$ показан на рис. 5.60 сплошной линией.

<u>*Пример 15.*</u> Постройте график функции $y = \left|x^2 - 2|x| - 3\right|$.

Решение. Заданная функция содержит как модуль аргумента, так и модуль функции.

Перепишем формулу заданной функции в виде: $y = \left|\left(|x| - 1\right)^2 - 4\right|$.

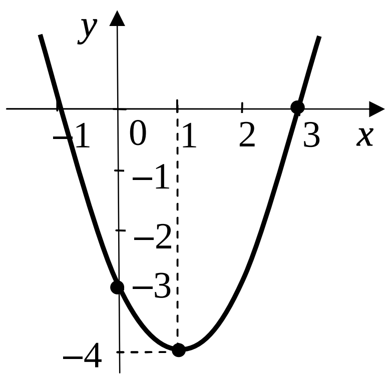


Рисунок 5.61

Построим параболу квадратичной функции $y = (x-1)^2 - 4$ без модуля аргумента. Это будет график функции $y = x^2$, смещенный на 1 вправо вдоль оси Ox и на 4 вниз вдоль оси Oy. Осью симметрии графика будет прямая $x = 1$. Координатами вершины параболы будут $x_0 = 1$ и $y_0 = -4$ (рис. 5.61).

График функции $y=\left(|x|-1\right)^2-4$ будет получен из графика $y=\left(x-1\right)^2-4$ симметричным отображением части графика при $x\geq 0$ относительно оси Oy (рис. 5.62).

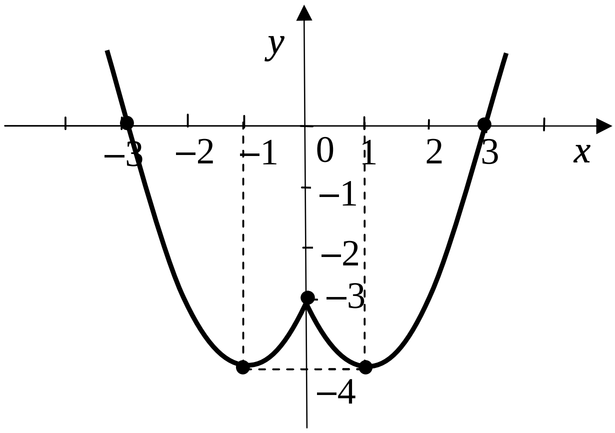


Рисунок 5.62

График модуля функции $y=\left|\left(|x|-1\right)^2-4\right|$ получается симметричным отображением относительно оси Ox части графика функции $y=\left(|x|-1\right)^2-4$, которая находится под осью Ox (рис. 5.63).

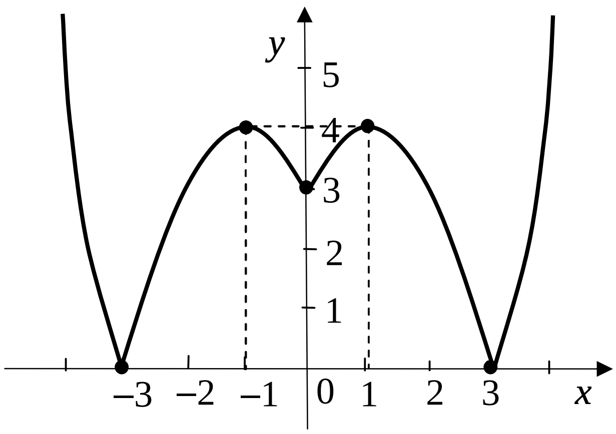


Рисунок 5.63

Ответ. График функции $y=\left|x^2-2|x|-3\right|$ показан на рис. 5.63 сплошной линией.

Ответьте на вопросы

1. Как построить графики функций: а) $y = A \cdot f(x)$; б) $y = f(a \cdot x)$; в) $y = f(x + a)$; г) $y = f(x) + A$, если известен график функции $y = f(x)$?
2. Как построить графики функций $y = -f(x)$ и $y = f(-x)$, если известен график функции $y = f(x)$?
3. Как построить графики функций $y = \left| f(x) \right|$ и $y = f|x|$, если известен график функции $y = f(x)$?

Задания для самостоятельной работы № 15

I. Построить эскизы графиков функций.

1) $y = 1 - 3x$;	2) $3x + 2y = 6$;	3) $y = x^2 - 2$;
4) $y = (x-2)^2$;	5) $y = \dfrac{3}{x}$;	6) $y = -\dfrac{5}{x}$;
7) $y = 3 - \dfrac{5}{x}$;	8) $y = \dfrac{x-3}{x+5}$;	9) $y = \sqrt{x+1}$;
10) $y = 1 + 2\sqrt{x}$;	11) $y = e^{x-5}$;	12) $y = \log_3(x+2)$;
13) $y = \sin 2x$;	14) $y = \sin\dfrac{x}{3}$;	15) $y = \cos\left(\dfrac{x}{2} + p\right)$.

6

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Лексика раздела

в общем виде	in whole	以公共形式
вне окружности	outside of circle	圆外
внутри окружности	inside of circle	圆内
возможно	possible	可能
выше, чем	higher than	比...大
графически	graphically	曲线图
графическое решение	graphic solution	曲线图解
заштриховать	hatch	画（曲线）图
иметь смысл	have sense	有含义
исключить	eliminate	排除
исходный	basic	基础
координатный угол	angle of coordinate	角度
метод интервалов	method of intervals	求区间的方法
наибольшее число	the biggest number	最大值
неравенство	inequality	不等式
иррациональные неравенства	irrational inequality	无理不等式
квадратное неравенство	quadratic inequality	二次不等式
линейное неравенство	linear inequality	一次不等式
ниже, чем	lower than	比...小
определение модуля	determination of modulus	绝对值得绝对性
отдельно	separately	分离的
отметить	point	标出
отрицательный	negative	负的
плоскость	surface	平面
положительный	positive	正的
противоположный	opposite	相反的，对立的
совокупность	unit	最小整数；基数
совпадать	concur (with)	一致，相符
содержать	contain	包含

удовлетворять	satisfy	符合，适应

6.1. Неравенства. Основные теоремы равносильности неравенств

Выражения, соединенные знаками больше (>), меньше (<), больше или равно (≥), меньше или равно (≤) называются ***неравенствами***.

$f(x)>g(x)$; $f(x)<g(x)$; $f(x)\geq g(x)$; $f(x)\leq g(x)$ – это неравенства.

Решения неравенства – это такие значения переменной, при которых данное неравенство будет верным числовым неравенством.

Решить неравенство – это значит найти все его решения или доказать что их нет.

Два неравенства с одной переменной называются ***равносильными*** (эквивалентными), если решения этих неравенств совпадают.

При решении неравенств используют теоремы о равносильности неравенств. При этом области определения полученного и исходного неравенств совпадают.

Теорема 1. Если к обеим частям неравенства прибавить (вычесть) одно и то же число (выражение), то получим неравенство, равносильное данному.

$$P(x)>Q(x)\Leftrightarrow P(x)\pm T(x)>Q(x)\pm T(x).$$

Например, $x^2+7x<x^2 \Leftrightarrow 7x<0 \Leftrightarrow x<0$.

Теорема 2. Если любое слагаемое неравенства перенести в другую часть с противоположным знаком, то получим неравенство, равносильное данному.

$$P(x)+T(x)>Q(x)\Leftrightarrow P(x)>Q(x)-T(x).$$

Например, $x^2-4x>-3\Leftrightarrow x^2-4x+3>0$.

Теорема 3. Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же положительное число (выражение), то получим неравенство, равносильное данному.

$$P(x)>Q(x);\ T(x)>0; x\in R\Leftrightarrow P(x)\cdot T(x)>Q(x)\cdot T(x).$$

Например, $\frac{1}{6}x\geq-5\Leftrightarrow x\geq-30$.

Теорема 4. Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же отрицательное число (выражение) и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

$$P(x)>Q(x);\ T(x)<0; x\in R\Leftrightarrow P(x)\cdot T(x)<Q(x)\cdot T(x).$$

Например, $-7x\leq21\Leftrightarrow x\geq-3$.

6.2. Линейные и квадратные неравенства

Линейными неравенствами с одной переменной называются неравенства вида $ax>b$; $ax<b$; $ax\leq b$; $ax\geq b$.

<u>*Пример 1*</u>. Решите неравенство $3(x+2)-4(x-6)>2(x-5)$.

Решение. Раскроем скобки и сделаем необходимые преобразования:

$$3(x+2)-4(x-6)>2(x-5)\Leftrightarrow 3x+6-4x+24>2x-10\Leftrightarrow -x+30>2x-10\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x-2x>-30-10\Leftrightarrow -3x>-40\Leftrightarrow x<\frac{-40}{-3}\Leftrightarrow x<\frac{40}{3}\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;\ \frac{40}{3}\right[.$$

Решением исходного неравенства будет открытый интервал от "минус" бесконечности до сорока третьих.

Ответ. $x\in\left]-\infty;\ \frac{40}{3}\right[$.

<u>*Пример 2*</u>. Решите неравенство $\frac{4,2+2x}{3}>1,5x-1,1$.

Решение. Умножим обе части неравенства на 3 и сделает преобразования:

$$\frac{4,2+2x}{3}>1,5x-1,1\Leftrightarrow 4,2+2x>3\cdot(1,5x-1,1)\Leftrightarrow 4,2+2x>4,5x-3,3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-4,5x>-3,3-4,2\Leftrightarrow -2,5x>-7,5\Leftrightarrow x<\frac{-7,5}{-2,5}\Leftrightarrow x<3.$$

Ответ. $x\in\,]-\infty;\,3[$.

Неравенства вида $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c<0$ или $ax^2+bx+c\leq 0$, где $a\neq 0$ называются ***квадратными неравенствами*** или неравенствами второй степени.

Если есть неравенство, где $a<0$, то можно умножить обе части неравенства на (-1) и изменить знак неравенства на противоположный. Тогда получим неравенство, равносильное данному, где $a>0$.

На основании вышесказанного, рассмотрим только решение неравенств вида $ax^2+bx+c>0$, и $ax^2+bx+c<0$, где $a>0$. При решении квадратных неравенств учитывают свойства квадратной функции, графиком которой является парабола.

Рассмотрим три случая.

I. Если $D<0$, $a>0$, то неравенство $ax^2+bx+c>0$ верно при всех $x\in R$ (парабола расположена выше оси Ox), а неравенство $ax^2+bx+c<0$ не имеет решений (парабола расположена ниже оси Ox), т.е. $x\in\varnothing$.

<u>*Пример 3.*</u> Решите неравенство $3x^2+x+4>0$.

Решение. Найдем значение дискриминанта данного квадратного уравнения: $D=-47<0$. Так как $a=3>0$, то выражение $3x^2+x+4$ имеет положительные значения на всей числовой оси, т.е. $x\in R$.

Ответ. $x\in\,]-\infty;+\infty[$.

II. а) Если $D>0$, $a>0$ и $ax^2+bx+c>0$, тогда это неравенство можно записать в виде:

$$a(x-x_1)(x-x_2)>0 \Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2)>0 \Rightarrow x\in \left]-\infty;\, x_1\right[\cup \left]x_2;+\infty\right[.$$

(Парабола пересекает ось Ox в двух точках x_1 и x_2, ее ветви направлены вверх. Решением данного неравенства будут интервалы, на которых парабола расположена выше оси Ox).

б) Если $D>0$, $a>0$ и $ax^2+bx+c<0$, тогда это неравенство можно записать в виде:

$$a(x-x_1)(x-x_2)<0 \Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2)<0 \Rightarrow x\in \left]x_1;\, x_2\right[.$$

(Парабола пересекает ось Ox в двух точках x_1 и x_2, ее ветви направлены вверх. Решением данного неравенства будут интервалы, на которых парабола расположена ниже оси Ox).

Пример 4. Решите неравенство $x^2-2x-3>0$.

Решение. Рассмотрим квадратный трехчлен x^2-2x-3, у которого $a=1>0$; $D=16>0$, тогда его корни $x_1=-1;\, x_2=3$. Представим левую часть неравенства в виде произведения $(x+1)(x-3)>0 \Rightarrow x\in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]3;+\infty\right[$.

Ответ. $x\in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]3;+\infty\right[$.

III. а) Если $D=0$, $a>0$ и $ax^2+bx+c>0$, тогда это неравенство можно записать в виде:

$$a\cdot(x-x_0)^2>0 \Leftrightarrow (x-x_0)^2>0 \Rightarrow x\in \left]-\infty;\, x_0\right[\cup \left]x_0;+\infty\right[.$$

(Парабола имеет с осью Ox одну общую точку x_0, ее ветви направлены вверх. Решением данного неравенства будет вся числовая ось Ox, за исключением общей точки x_0).

б) Если $D=0$, $a>0$ и $ax^2+bx+c<0$, тогда это неравенство можно записать в виде:

$$a\cdot(x-x_0)^2<0 \Leftrightarrow (x-x_0)^2<0 \Rightarrow x\in \varnothing.$$

(Парабола имеет с осью Ox одну общую точку x_0, ее ветви направлены вверх. Так как левая часть неравенства может принимать только неотрицательные значения, то решений нет).

<u>*Пример 5.*</u> Решите неравенство $-4x^2+12x-9>0$.

Решение. Умножим обе части неравенства на (-1), получим: $4x^2-12x+9<0.$

Тогда: $a=4>0;\ D=0 \Rightarrow x_1=x_2=\frac{3}{2}.$

Поэтому $4x^2-12x+9<0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2<0 \Rightarrow x\in\varnothing$.

Ответ. $x\in\varnothing$.

6.3. Решение рациональных неравенств методом интервалов

Рациональным неравенством называется неравенство, в которое входят только рациональные функции (выражения).

Неравенства вида $P_n(x)>0$ (или $P_n(x)<0;$ $P_n(x)\ge 0;$ $P_n(x)\le 0$), $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0$ (или $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}<0;$ $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\ge 0;$ $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\le 0$) обычно решают ***методом интервалов***. Здесь $P_n(x)$, $Q_m(x)$, $R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – это рациональные функции (многочлены степеней n и m, т.е. $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n;$

$$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+...+b_{m-1}x+b_m).$$

Метод интервалов основывается на важном свойстве рациональной функции: в интервале между двумя соседними критическими точками рациональная функция принимает либо только положительные, либо только отрицательные значения, т.е. сохраняет знак.

Если мы рассматриваем двучлен $(x-a)$, тогда точка $x=a$ делит числовую ось на две части: справа от точки a двучлен $(x-a)$ принимает положительные значения, а слева от точки a двучлен $(x-a)$ принимает отрицательные значения (рис. 6.1).

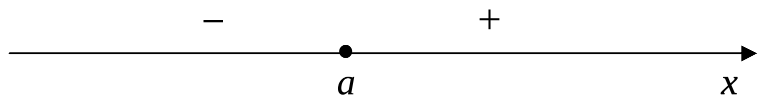


Рисунок 6.1

При использовании метода интервалов нужно придерживаться приведенной ниже последовательности действий.

1. Рациональное неравенство приводим к стандартному виду: $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ или $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0$ (в случае строгого неравенства), $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0$ или $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} \leq 0$ (в случае нестрогого неравенства).

2. Числитель и знаменатель левой части неравенства раскладываем на множители.

3. Находим все критические точки рациональной функции.

4. Разбиваем числовую ось критическими точками на конечное число интервалов.

5. Определяем знак левой части неравенства на каждом интервале, то есть на интервале справа от наибольшего значения критической точки ставим знак "+", на следующем за ним интервале (справа налево) ставим знак "–", потом – знак "+", потом – знак "–" и так далее. Важно помнить, что все вышесказанное имеет место только для многочленов ***стандартного вида:*** когда перед переменной такого многочлена стоит знак "+", то есть, например, $(x-a_i)$, а не (a_i-x).

Если многочлен имеет нестандартный вид (a_i-x), тогда справа от наибольшей критической точки (числа) не обязательно будет стоять знак "+". Потому, неравенства нестандартного вида можно решать таким образом: найти знак левой части неравенства на любом интервале (не обязательно на последнем интервале справа), а дальше на соседних интервалах будут противоположные знаки.

6. Записываем решение неравенства в виде интервалов. Тогда множеством всех решений неравенств вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0$ или $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\geq 0$ будет объединение всех интервалов, где стоит знак "+". А множеством всех решений неравенств вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}<0$ или $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\leq 0$ будет объединение всех интервалов, где стоит знак "–".

При этом, если неравенство нестрогое, то точки, которые соответствуют множителям числителя, отмечаем на числовой оси полными кружками. А точки, которые соответствуют множителям знаменателя, – отмечаем пустыми кружками. Если неравенство строгое, тогда отмечаем все точки пустыми кружками.

ЗАПОМНИТЕ!

При решении неравенств нужно найти ОДЗ неравенства и с его помощью проверить полученные результаты.

ОДЗ неравенства – это множество всех значений переменных, при которых обе части неравенства имеют смысл.

Рассмотрим более подробно использование метода интервалов для решения целых рациональных и дробно-рациональных неравенств с одним неизвестным.

Любое рациональное неравенство n-ой степени с одним неизвестным можно привести к стандартному (или каноническому) виду:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n > 0;$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \geq 0;$$

или $$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n < 0;$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \leq 0.$$

Рассмотрим ***общую схему решения*** таких неравенств методом интервалов на примере неравенства вида:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n > 0\,.$$

1. Разложим левую часть неравенства на множители:

$$a_0\left(x - x_1\right)^{m_1} \cdot \left(x - x_2\right)^{m_2} \cdot \ldots \cdot \left(x - x_k\right)^{m_k} > 0\,.$$

2. Запишем множители левой части неравенства с нечетными показателями как множители первой степени. Множители с четными показателями можно опустить (не писать), т.к. они не изменяют знак неравенства. При этом обязательно выпишем те значения x, при которых множители с четными показателями обращаются в нуль. Тогда неравенство примет вид:

$$a_0\left(x - x_{j_1}\right)\cdot\left(x - x_{j_2}\right)\cdot \ldots \cdot\left(x - x_{j_n}\right) > 0;$$

при $a_0>0$ оно равносильно неравенству $\left(x-x_{j_1}\right)\left(x-x_{j_2}\right)\ldots\left(x-x_{j_n}\right)>0$,
при $a_0<0$ оно равносильно неравенству $\left(x-x_{j_1}\right)\left(x-x_{j_2}\right)\ldots\left(x-x_{j_n}\right)<0$.

3. Отметим на числовой оси числа $x_{j_1}, x_{j_2}, \mathbf{K}, x_{j_n}$ (x_{j_n} – наибольшее число) (рис. 6.2).

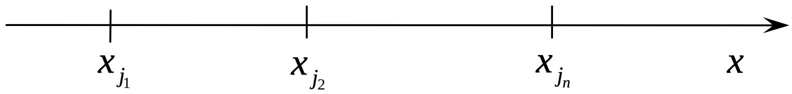


Рисунок 6.2

4. Справа от x_{j_n} ставим знак "+" и проводим "кривую знаков" через каждое число x_{j_n} (рис. 6.3).

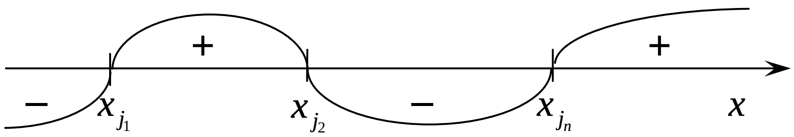


Рисунок 6.3

5. Выбираем нужный нам знак (в нашем случае это знак "+") и записываем ответ в виде интервалов (рис. 6.4). При этом исключаем из найденных решений те значения переменных, при которых множители левой части неравенства с четными показателями обращаются в ноль.

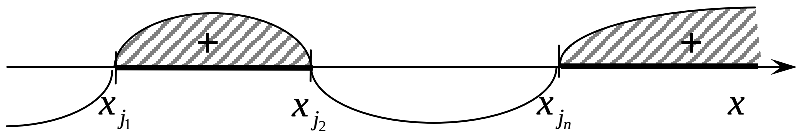


Рисунок 6.4

Записываем ответ в виде: $x \in \left]x_{j_1}; x_{j_2}\right[\mathbf{U} \left]x_{j_n}; +\infty\right[$.

<u>*Пример 6.*</u> Решите неравенство $(x+1)(x-5) > 0$.

Решение. ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$. Найдем нули выражения $(x+1)(x-5) = 0$, это будут значения $x = -1$ или $x = 5$. Отметим найденные значения на числовой прямой (с учетом ОДЗ) и найдем знак выражения на каждом интервале. Знак исходного неравенства "+", потому решением неравенства будет объединение двух интервалов $x \in \left]-\infty; -1\right[\mathbf{U} \left]5; +\infty\right[$ (рис. 6.5).

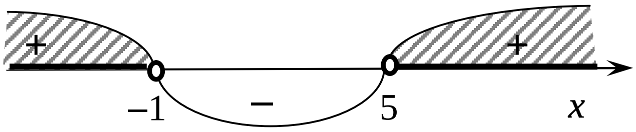


Рисунок 6.5

Ответ. $x \in \left]-\infty; -1\right[\mathbf{U} \left]5; +\infty\right[$.

<u>*Пример 7.*</u> Решите неравенство $(3-x)(x+1)(x-4) \le 0$.

Решение. Изменяем знак перед переменной x в первой скобке и получаем неравенство $(x-3)(x+1)(x-4) \ge 0$, равносильное данному. Разбиваем область допустимых значений на три интервала (в соответствии со значениями в критических точках): $x = 3$; $x = -1$; $x = 4$. Находим знак на каждом интервале. Знак исходного неравенства "–", поэтому решением неравенства будет объединение двух интервалов $x \in [-1; 3] \mathbf{U} \left[4; +\infty\right[$ (рис. 6.6).

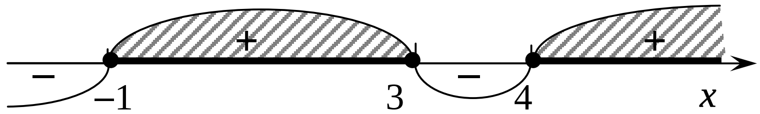


Рисунок 6.6

Ответ. $x \in [-1; 3] \mathbf{U} \left[4; +\infty\right[$.

<u>Пример 8.</u> Решите неравенство $x^2 \cdot (x-1)^3 \cdot (x-2)^5 < 0$.

Решение. Множитель x^2 не изменит знак неравенства $x^2 \geq 0$ при $x \in R$. Тогда исходное неравенство можно записать в виде $(x-1)\cdot(x-2) < 0$. Разбиваем область допустимых значений на два интервала (в соответствии со значениями в критических точках) $x=1$, $x=2$ и находим знак на каждом интервале. Знак исходного неравенства "+", поэтому решением неравенства будет объединение двух интервалов $x \in \left]1;2\right[$ (рис. 6.7)

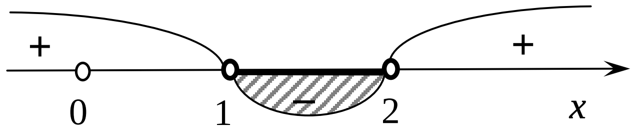


Рисунок 6.7

Ответ. $x \in \left]1;2\right[$.

<u>Пример 9.</u> Решите неравенство $(2-x)^5 \cdot (x+1)^3 \cdot (x-1)^2 \cdot \left(x^2+2x+7\right) < 0$.

Решение. 1. Дискриминант квадратного трехчлена x^2+2x+7 равен: $D = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 7 = -24 < 0$; первый коэффициент $a=1$, значит, выражение $x^2+2x+7 > 0$ при $x \in R$ и не изменяет знак неравенства.

2. Выражение $(x-1)^2 \geq 0$ при $x \in R$. Следовательно, это выражение также не изменяет знак неравенства.
3. Изменим знак перед переменной x в первой скобке. Для этого умножим обе части неравенства на (-1) и запишем все множители неравенства как множители в первой степени. Выражение $(x-1)^2 \geq 0$ не изменяет знак неравенства, потому его можно не записывать, однако нужно проверить, является ли точка $x=1$ решением исходного неравенства. Получим: $(x-2)^5 \cdot (x+1)^3 \cdot (x-1)^2 \cdot \left(x^2+2x+7\right) > 0$ (рис. 6.8).

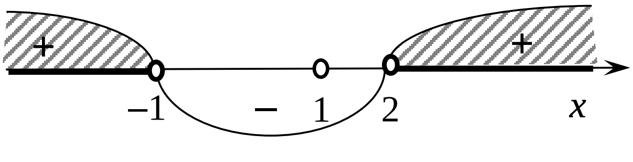


Рисунок 6.8

Точка $x=1$ не принадлежит области решений исходного неравенства, поэтому эта точка не будет решением неравенства.

Ответ. $x \in \left\{ \left]-\infty;-1\right[\cup \left]2;+\infty\right[\right\}$.

При решении дробно-рациональных неравенств используют следующие утверждения:

1. Неравенства $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ и $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0$ равносильны неравенствам $P_n(x) \cdot Q_m(x) > 0$ и $P_n(x) \cdot Q_m(x) < 0$ соответственно.

2. Неравенства $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \ge 0$ и $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \le 0$ равносильны системам неравенств $\begin{cases} P_n(x) \cdot Q_m(x) \ge 0 \\ Q_m(x) \ne 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} P_n(x) \cdot Q_m(x) \le 0 \\ Q_m(x) \ne 0 \end{cases}$ соответственно.

Таким образом, решение дробно-рациональных неравенств, как правило, сводится к решению целых рациональных неравенств.

<u>*Пример 10.*</u> Решите неравенство $\frac{2x}{(x+2)(x-3)} < 0$.

Решение. ОДЗ неравенства: $x \ne -2$, $x \ne 3$. Запишем исходное неравенство в виде $2x(x+2)(x-3) < 0$. Нули этого неравенства: $x = 0$, $x = -2$, $x = 3$. Обозначим эти точки на числовой прямой (с учетом ОДЗ) и найдем знак выражения на каждом интервале (рис. 6.9).

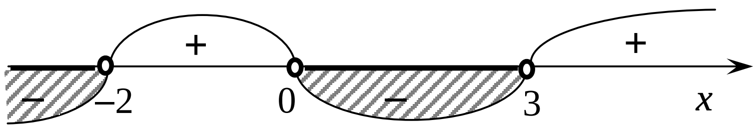


Рисунок 6.9

Ответ. $x \in \left]-\infty; -2\right[\cup \left]0; 3\right[$.

<u>*Пример 11.*</u> Решите неравенство $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \ge 1$.

Решение. ОДЗ неравенства: $x \ne -2$, $x \ne -1$. Выполним тождественные преобразования выражения: $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \ge 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} - 1 \ge 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2-x^2-3x-2}{x^2+3x+2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{-6x}{(x+1)(x+2)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{6x}{(x+1)(x+2)} \le 0.$$

Запишем исходное неравенство в виде: $6x(x+1)(x+2) \le 0$.

Нули этого неравенства: $x=0$, $x=-2$, $x=-1$. Обозначим эти точки на числовой прямой (с учетом ОДЗ) и найдем знак выражения на каждом интервале (рис. 6.10).

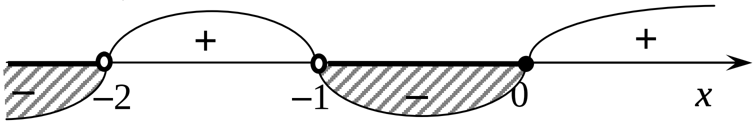


Рисунок 6.10

Ответ. $x\in\,]-\infty;-2[\,\cup\,]-1;0\,]$.

Метод интервалов удобно использовать и для решения неравенств вида: $(x-a_1)^{k_1}\cdot(x-a_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1})^{k_{n-1}}\cdot(x-a_n)^{k_n}>0$,

а также $\dfrac{(x-a_1)^{n_1}\cdot(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}\cdot(x-b_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-b_p)^{m_p}}>0$.

<u>*Пример 12.*</u> Решите неравенство $\dfrac{(x-6)^2\cdot(x-2)\cdot x}{(x+1)^4\cdot(x+5)}\geq 0$.

Решение. В выражениях $(x+1)^4$ и $(x-6)^2$ показатели степени – это четные числа, поэтому $(x+1)^4>0$; $(x-6)^2\geq 0$ при $x\in R$. Следовательно, эти выражения не изменяют знак неравенства (рис. 6.11). Запишем исходное неравенство в виде равносильного неравенства: $x\cdot(x-2)(x+5)\geq 0$.

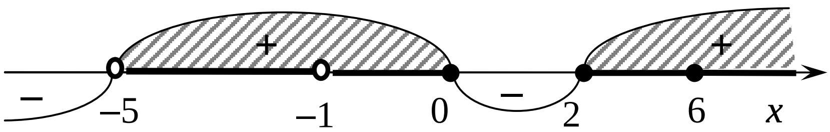


Рисунок 6.11

Значения $x=-1$ и $x=-5$ не могут быть решением неравенства, поэтому их нужно исключить из интервала решений.

Ответ. $x\in\{\,]-5;-1[\,\cup\,]-1;0\,]\cup[\,2;+\infty[\,\}$.

6.4. Решение систем неравенств

Система неравенств с одной переменной может содержать два или более неравенств. Значение переменной, при котором каждое неравенство системы будет верным числовым неравенством, называется ***решением системы***.

Решить систему неравенств – значит найти множество всех ее решений или доказать, что решений нет.

Чтобы решить систему неравенств с одной переменной, нужно решить каждое неравенство отдельно и найти пересечение множеств решений всех неравенств, входящих в систему.

Пример 13. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 - 10x + 25 > 0 \\ x + 5 < 0 \end{cases}$.

Решение. $\begin{cases} x^2 - 10x + 25 > 0 \\ x + 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2 > 0 \\ x < -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left]-\infty; 5\right[\cup \left]5; +\infty\right[\\ x \in \left]-\infty; -5\right[\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \left]-\infty; -5\right[$. Покажем это на рисунке (рис. 6.12).

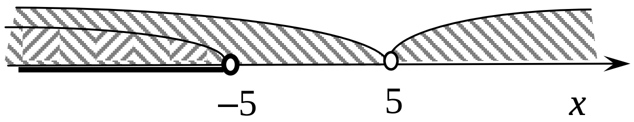


Рисунок 6.12

Ответ. $x \in \left]-\infty; -5\right[$.

Пример 14. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ 2x^2 - 1 < x^2 + 3 \\ 2x + 3 \geq 0 \end{cases}$.

Решение. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ 2x^2 - 1 < x^2 + 3 \\ 2x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-3) > 0 \\ x^2 - 4 < 0 \\ x \geq -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left]-\infty; -1\right[\cup \left]3; +\infty\right[\\ x \in \left]-2; 2\right[\\ x \in \left[-\dfrac{3}{2}; +\infty\right[\end{cases}$

$\Rightarrow x \in \left[-\dfrac{3}{2}; -1\right[$. Покажем это на рисунке (рис. 6.13).

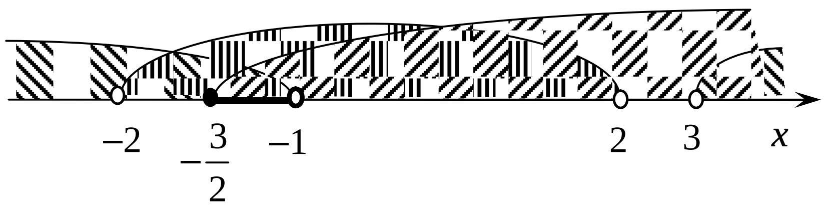


Рисунок 6.13

Ответ. $x \in \left[-\dfrac{3}{2}; -1\right[$.

6.5. Неравенства, которые содержат переменную под знаком модуля

При решении неравенств, которые содержат переменную под знаком модуля, используют определение модуля выражения:

$$\left|f(x)\right|=\begin{cases} f(x), \text{Íńëč } f(x)\ge 0 \\ -f(x), \text{Íńëč } f(x)<0. \end{cases}$$

Поэтому неравенство, которое содержит переменную под знаком модуля, равносильно двум системам неравенств, которые можно записать в виде пересечения или объединения двух неравенств.

1. Если $\left|f(x)\right|>g(x)$, то $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ f(x)>g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0 \\ -f(x)>g(x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>g(x) \\ f(x)<-g(x) \end{array}\right.$.

2. Если $\left|f(x)\right|<g(x)$, то $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ f(x)<g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0 \\ -f(x)<g(x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x) \\ f(x)>-g(x) \end{cases}$.

При решении неравенств, содержащих более одного модуля, также используют метод интервалов.

<u>*Пример 15.*</u> Решите неравенство $\left|3x-2\right|>-2$.

Решение. По определению модуля имеем: $\left|3x-2\right|\ge 0$, поэтому неравенство $\left|3x-2\right|>-2$ выполняется для любого действительного x, т.е. $x\in\left]-\infty;+\infty\right[$.

Ответ. $x\in\left]-\infty;+\infty\right[$.

<u>*Пример 16.*</u> Решите неравенство $\left|3x-2\right|>7$.

Решение. $\left|3x-2\right|>7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-2>7 \\ 3x-2<-7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-\frac{5}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-\frac{5}{3}\right[\,\mathbf{U}\,\left]3;+\infty\right[$.

Ответ. $x\in\left]-\infty;-\frac{5}{3}\right[\,\mathbf{U}\,\left]3;+\infty\right[$.

<u>*Пример 17.*</u> Решите неравенство $|3x+61|<-1$.

Решение. По определению модуля имеем: $|3x+61|\geq 0,$ поэтому неравенство $|3x+61|<-1$ решений не имеет.

Ответ. $\varnothing$.

<u>*Пример 18.*</u> Решите неравенство $|2x-4|<x-1$.

Решение. $|2x-4|<x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4<x-1 \\ 2x-4>1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ 3x>5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x>\dfrac{5}{3}. \end{cases}$

Ответ. $x\in \left]\dfrac{5}{3};\ 3\right[$.

<u>*Пример 19.*</u> Решите неравенство $x^2>|5x+6|$.

Решение. Поскольку $|5x+6|=\begin{cases} 5x+6, & x\geq -\dfrac{6}{5} \\ -5x-6, & x<-\dfrac{6}{5} \end{cases}$, то исходное неравенство можно записать как объединение систем: à) $\begin{cases} x\geq -\dfrac{6}{5} \\ x^2>5x+6 \end{cases}$ и á) $\begin{cases} x<-\dfrac{6}{5} \\ x^2>-5x-6 \end{cases}$.

Решим эти системы и объединим решения а) и б).

à) $\begin{cases} x\geq -\dfrac{6}{5} \\ x^2>5x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\dfrac{6}{5} \\ x<-1;\ x>6 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{6}{5}\leq x<-1;\ x>6.$

á) $\begin{cases} x<-\dfrac{6}{5} \\ x^2>-5x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-\dfrac{6}{5} \\ x<-3;\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow x<-3;\ -2<x<-\dfrac{6}{5}.$

Ответ. $x\in \left]-\infty;-3\right[\mathbf{U} \left]-2;-1\right[\mathbf{U} \left]6;+\infty\right[$.

<u>*Пример 20.*</u> Решите неравенство $|x+2|+|x-2|<6$.

Решение. Рассмотрим три случая (раскроем модули на интервалах):

1) $\begin{cases} x<-2 \\ -(x+2)-(x-2)<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow x\in \left]-3;2\right[;$

2) $\begin{cases} -2\leq x\leq 2 \\ x+2-(x-2)<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\leq x\leq 2 \\ 4<6 \end{cases} \Leftrightarrow x\in \left[-2;2\right];$

3) $\begin{cases} x > 2 \\ x + 2 + x - 2 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \,]2; 3[\,.$

Объединим полученные решения, получим: $-3 < x < 3$.

Ответ. $x \in \,]-3; 3[\,$.

<u>*Пример 21.*</u> Решите неравенство $|x-2|^3 + |x-2| > 2$.

Решение. Сделаем замену: $|x-2| = t,\ t \geq 0$. Получим:

$$\begin{cases} t^3 + t > 2 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 + t - 2 > 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(t^2 + t + 2) > 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 > 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow t > 1$. Тогда: $|x-2| > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 > 1 \\ x - 2 < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \,]-\infty; 1[\, \mathbf{U} \,]3; +\infty[\,.$

Ответ. $x \in \,]-\infty; 1[\, \mathbf{U} \,]3; +\infty[\,$.

6.6. Иррациональные неравенства

Неравенства, которые содержат переменную под знаком корня, называются ***иррациональными***.

Например, $\sqrt{x+5} > x$; $\sqrt[3]{x^2+5} < x - 7$ – это иррациональные неравенства.

При решении иррациональных неравенств возможны два случая.

1. $\sqrt{P(x)} < Q(x)$.

Это неравенство имеет смысл, если $P(x) \geq 0$. Поскольку $\sqrt{P(x)} \geq 0$, то $Q(x) > 0$. Поэтому обе части неравенства можно возвести в квадрат, т.е. освободиться от иррациональности и получить такую систему неравенств:

$$\sqrt{P(x)} < Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ P(x) < [Q(x)]^2 \\ Q(x) > 0 \end{cases}.$$

Решение данной системы – это решение исходного неравенства.

2. $\sqrt{P(x)} > Q(x)$.

Это неравенство имеет смысл, если $P(x) \ge 0$. Правая часть $Q(x)$ может принимать положительные значения, отрицательные значения или может быть равна нулю. Поэтому:

$$\sqrt{P(x)} > Q(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P(x) \ge 0 \\ Q(x) \ge 0 \\ \left(P(x)\right)^2 > \left(Q(x)\right)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} P(x) \ge 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Решение иррационального неравенства $\sqrt{P(x)} > Q(x)$ – это объединение решений двух систем.

<u>*Пример 22.*</u> Решите неравенство $\sqrt{x+31} < x+1$.

Решение. $\sqrt{x+31} < x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+31 \ge 0 \\ x+1 > 0 \\ \left(\sqrt{x+31}\right)^2 < (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -31 \\ x > -1 \\ x+31 < x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -31 \\ x > -1 \\ x^2+x-30 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -31 \\ x > -1 \\ (x+6)(x-5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -31 \\ x > -1 \\ x < -6 \ \mathbf{U} \ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -31 \\ x > -1 \\ x < -6 \ \mathbf{U} \ x > 5 \end{cases}$

Найдем пересечение решений графически (рис. 6.14):

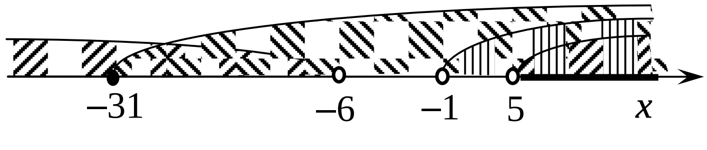


Рисунок 6.14

Ответ. $x \in \left]5; +\infty\right[$.

<u>*Пример 23.*</u> Решите неравенство $\sqrt{x+2} > x+\frac{1}{2}$.

Решение.

$$\sqrt{x+2} > x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2\ge 0 \\ x+\frac{1}{2}\ge 0 \\ \left(\sqrt{x+2}\right)^2 > \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+2\ge 0 \\ x+\frac{1}{2}<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge -2 \\ x\ge -\frac{1}{2} \\ x^2<\frac{7}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge -2 \\ x< -\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x\ge -2 \\ x\ge -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{7}}{2}<x<\frac{\sqrt{7}}{2} \end{cases} & (ŕ) \\ \begin{cases} x\ge -2 \\ x< -\frac{1}{2} \end{cases} & (á) \end{array}\right.$$

Решение системы (а): $-\frac{1}{2}\le x<\frac{\sqrt{7}}{2}$ (рис. 6.15).

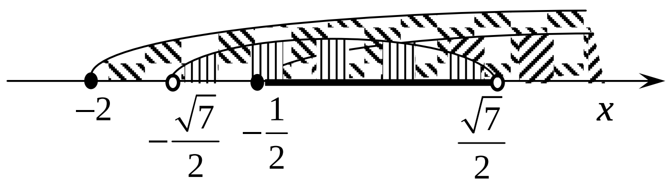


Рисунок 6.15

Решение системы (б): $-2\le x<-\frac{1}{2}$ (рис. 6.16).

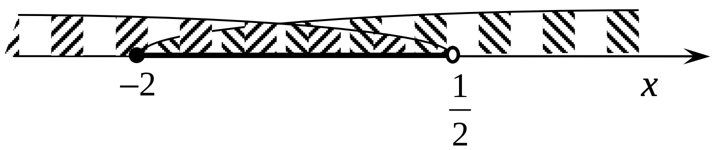


Рисунок 6.16

Решение исходного неравенства – это объединение решений (а) и (б):

$$\left[-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{7}}{2}\right[\mathbf{U} \left[-2;-\frac{1}{2}\right[= \left[-2;\frac{\sqrt{7}}{2}\right[.$$

Ответ. $x\in\left[-2;\frac{\sqrt{7}}{2}\right[$.

6.7. Графическое решение неравенств и систем неравенств

Неравенства с одной или двумя переменными и системы неравенств можно решить графически.

Рассмотрим графическое решение неравенства с одной переменной $f(x) > g(x)$. Для этого построим в одной системе координат графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

Решением неравенства будет множество значений переменной x, при которых график функции $y = f(x)$ находится выше графика функции $y = g(x)$, так как $f(x) > g(x)$. Это показано на рисунке 6.17 (здесь решение: $x \in \left]a; +\infty\right[$) и на рисунке 6.18 (здесь решение: $x \in \left]-\infty; c\right[\cup \left]d; +\infty\right[$).

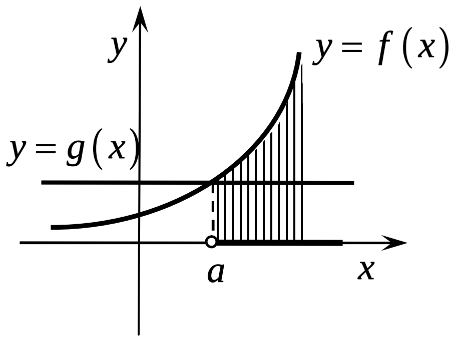


Рисунок 6.17

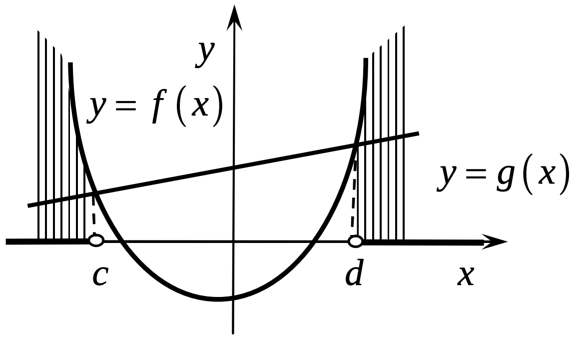


Рисунок 6.18

Рассмотрим неравенство $f(x; y) > g(x; y)$. Известно, что решением неравенства с двумя переменными есть множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому неравенству. Рассмотрим на примерах решение некоторых неравенств с двумя переменными.

<u>*Пример 24.*</u> Решите графически неравенство $x + y - 1 > 0$.

Решение. Запишем неравенство в виде $y > -x + 1$. Построим прямую $y = -x + 1$.

Ответ. Координаты точек плоскости, которые лежат выше этой прямой, будут решением неравенства (на рис. 6.19 – это заштрихованная область).

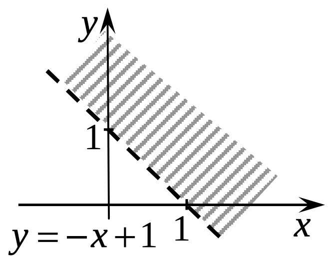


Рисунок 6.19

<u>*Пример 25.*</u> Решите неравенство

$$x(x-2) \le y-3.$$

Решение. Запишем неравенство в виде $y \ge x^2 - 2x + 3$. Построим параболу – это график функции $y = x^2 - 2x + 3$.

Ответ. Решение неравенства – это множество точек плоскости, лежащих на параболе $y = x^2 - 2x + 3$ и выше нее (рис. 6.20).

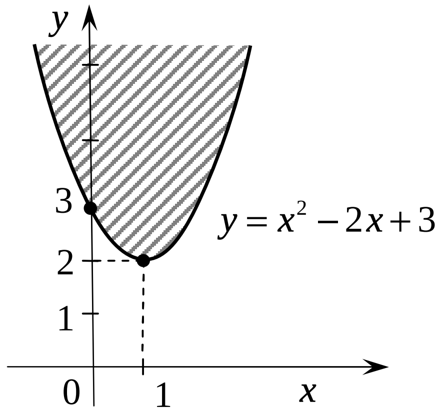


Рисунок 6.20

<u>*Пример 26.*</u> Решите неравенство

$$x^2 - y > 0.$$

Решение. Запишем неравенство в виде $y < x^2$. Построим параболу $y = x^2$.

Ответ. Решение неравенства – это множество точек плоскости, которые лежат в заштрихованной области (ниже построенной параболы) (рис. 6.21).

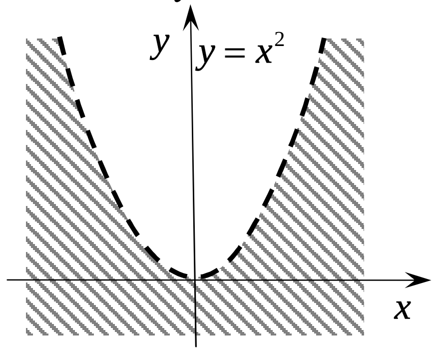


Рисунок 6.21

ЗАПОМНИТЕ!

При решении систем неравенств с двумя переменными находят пересечение областей решений этих неравенств.

<u>*Пример 27.*</u> Решите графически систему неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 > 0; \\ y > 0; \\ x > 0. \end{cases}$

Решение. Решение первого неравенства – это множество точек плоскости, которые лежат вне окружности $x^2 + y^2 = 4$. Решение второго неравенства – это множество точек выше оси *Ox* (верхняя полуплоскость). Решение третьего неравенства – это множество точек справа от оси *Oy* (правая полуплоскость).

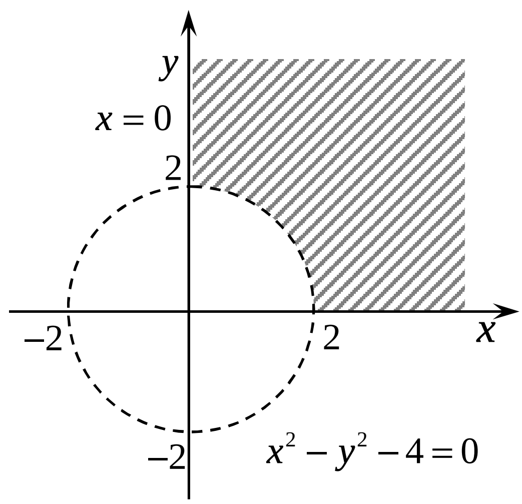


Рисунок 6.22

Решением исходной системы неравенств будет пересечение решений этих трех неравенств.

Ответ. Решение системы неравенств – это множество точек, лежащих в заштрихованной области (рис. 6.22).

<u>*Пример 28.*</u> Решите систему неравенств

$$\begin{cases} y \geq 1 - x; \\ y \leq -x^2 + 5x. \end{cases}$$

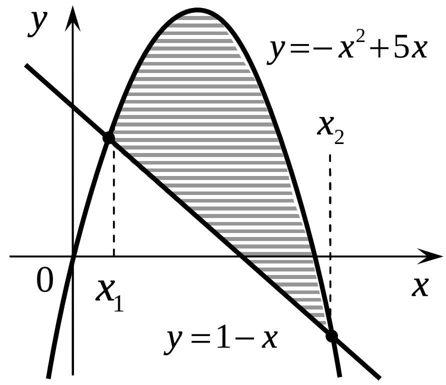


Рисунок 6.23

Решение. Решение первого неравенства– это множество точек плоскости, которые лежат выше прямой $y=1-x$. Решение второго неравенства – это множество точек плоскости внутри параболы $y=-x^2+5x$. Решением исходной системы неравенств будет пересечение решений этих двух неравенств.

Найдем точки пересечения графиков функций $y=-x^2+5x$ и $y=1-x$:

$$-x^2+5x=1-x \Rightarrow x^2-6x+1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{32}}{2}=\frac{6\pm4\sqrt{2}}{2}=3\pm2\sqrt{2}.$$

Ответ. Решение системы неравенств – это множество точек, лежащих в заштрихованной области (рис. 6.23).

<u>*Пример 29.*</u> Решите систему неравенств $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ xy > 4 \\ x+y < 5 \end{cases}$

Решение. Решение первого и второго неравенств – это множество точек первого координатного угла (рис. 6.24). Решением третьего неравенства $y>\dfrac{4}{x}$ является множество точек, лежащих выше ветви гиперболы $y=\dfrac{4}{x}$ при $x>0$ (рис. 6.25).

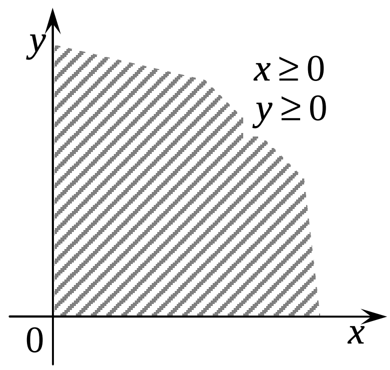


Рисунок 6.24

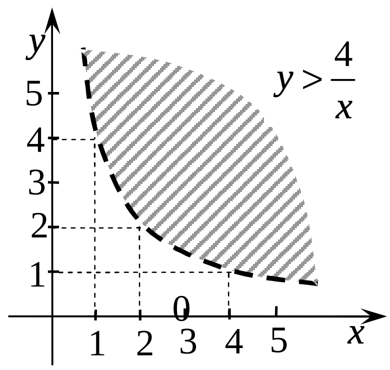


Рисунок 6.25

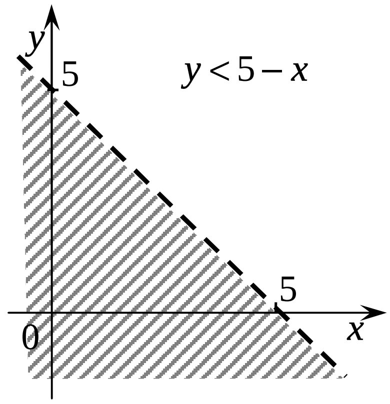


Рисунок 6.26

Решением четвертого неравенства $y<5-x$ является множество точек, лежащих ниже прямой $y=5-x$ (рис. 6.26).

Ответ. Решение системы – это множество точек, лежащих в первой координатной четверти ниже прямой $y=5-x$ и выше гиперболы $y=\dfrac{4}{x}$ (рис. 6.27).

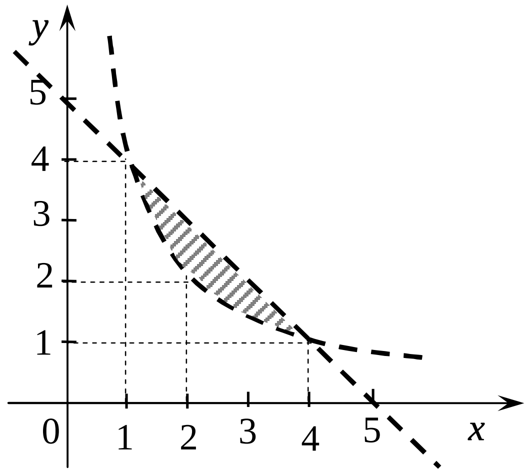


Рисунок 6.27

Ответьте на вопросы

1. Какие неравенства называют равносильными?
2. Назовите теоремы о равносильности неравенств.
3. Какие неравенства вы знаете?
4. Каким методом удобно решать рациональные неравенства?
5. Приведите примеры рациональных неравенств.
6. Что значит решить систему неравенств?
7. Как решают неравенства с модулем?
8. Что такое иррациональные неравенства?
9. Как решают иррациональные неравенства?

Задания для самостоятельной работы № 16

I. Решите неравенства.

1) $\dfrac{x-1}{4}+\dfrac{x+3}{2}>1-\dfrac{x}{6}$; 2) $\dfrac{2-x}{4}+1<\dfrac{2x-1}{10}-\dfrac{2x-3}{6}$; 3) $3x^2<8$;

4) $x+1<\dfrac{x}{2}<x+2$; 5) $\dfrac{2x-1}{6}<\dfrac{x+3}{12}<\dfrac{3x+7}{18}$; 6) $4x^2\ge 9$;

7) $\dfrac{x-6}{9}\le\dfrac{x-3}{4}<\dfrac{x+7}{24}$; 8) $(x-1)^2<16$; 9) $(4x+3)^2\ge 0$;

10) $x^2-x+6<0$; 11) $-x^2+2x+8\le 0$; 12) $-4<x^2-4x\le 0$;

13) $2 \le x^2 + x < 6$; 14) $0 < (6x-7)^2 \le 3$; 15) $3x^2 + x - 2 \ge 0$;
16) $0 < 5x - 7x^2 \le 1$.

II. Решите неравенства методом интервалов.

1) $(x-1)(x-4) > 0$; 2) $(3x+2)(4x+3) \ge 0$;
3) $(x-3)(x+2) \le 0$; 4) $(4x+5)(2x-3) < 0$;
5) $\dfrac{x-2}{x+3} < 0$; 6) $\dfrac{2x-4}{x-6} \le 0$; 7) $\dfrac{x}{x^2+9} \ge 0$; 8) $\dfrac{2-x}{x-8} \le 1$;
9) $(x-1)(x+3)(x-4) < 0$; 10) $(x^2-3)(x^2+3) < 0$;
11) $(x+4)(x+1)(x-1)(x-2) > 0$; 12) $3 + \dfrac{4}{x+2} > \dfrac{3}{x}$;
13) $\dfrac{x-3}{x} - \dfrac{x+3}{x-3} < 2$; 14) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8} \le 0$; 15) $\dfrac{x^2+8}{x^2-4} < -3$;
16) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 < 0$; 17) $x^3 - 3x^2 + x + 1 \ge 0$;
18) $x \cdot (x+1)^7 \cdot (x+3)^3 \le 0$; 19) $x^4 \cdot (x+6)^5 \cdot (x-9)^3 \ge 0$;
20) $\dfrac{x \cdot (x+2)^5}{(x-1)^3 \cdot (x-3)^6} \le 0$; 21) $\dfrac{5x^2 \cdot (x-2)^8 \cdot (x-4)^5}{(x+2)^3} < 0$;
22) $\dfrac{(-x^2+2x-5)^3 \cdot (x+2)^4 \cdot (3-x)}{(x+4)^5 \cdot (x-1)^3} > 0$;
23) $\dfrac{(9x^2-12x+4)^5 \cdot (4-3x-x^2)}{(x^2+2x-8) \cdot (x+3)^{11}} \ge 0$; 24) $\dfrac{(7x-12-x^2)^5}{2x^2-x-3} < 0$.

III. Решите системы неравенств.

1) $\begin{cases} 1 < 2x - 1 < 9 \\ -1 \le 1 - x \le 4 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \dfrac{9}{x^2} \ge 1 \\ \dfrac{1}{x-2} \le 0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 0 < (x-2)^2 < 25 \\ \dfrac{x^2+4x+4}{x+1} \ge 0 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} 1 - x^2 > 0 \\ \dfrac{x-1}{2-x} + \dfrac{1}{2} > 0 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 < 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} 1 < 3x - 2 \le 4 \\ -3 < 4x + 5 < 1 \end{cases}$.

IV. Решите неравенства, которые содержат знак модуля.

1) $|x-2|<0$; 2) $|-3x|\le 0$; 3) $|x^2-9x|>0$;

4) $-1<|2x-1|<7$; 5) $|x^2+6x|\le 0$; 6) $|x^2-x+1|\ge|x^2-3x+4|$;

7) $x^2-|x|-2\ge 0$; 8) $|x-1|+|x+1|<4$; 9) $|2x^2-12x+13|\ge 3$;

10) $\left|\dfrac{2x+5}{4x+1}\right|<1$; 11) $|x^2+x-6|\ge -x^2-x+6$; 12) $|x^3-1|\le 1-x$.

V. Решите иррациональные неравенства.

1) $\sqrt{-6x}<0$; 2) $\sqrt[3]{2x}<0$; 3) $\sqrt{2+x}\ge 4$;

4) $\sqrt[6]{-7x}<0$; 5) $\sqrt{2x-4}\le -2$; 6) $\sqrt{3-x}>-6$;

7) $\sqrt{2x+4}+\sqrt{x-3}\ge -3$; 8) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\ge 0$;

9) $(x-3)\sqrt{x}>0$; 10) $(x+1)\sqrt{x-3}\le 0$;

11) $\sqrt{-x-3}\le\sqrt[4]{x+9}$; 12) $\sqrt{x^2-3x-10}<8-x$;

13) $\sqrt{x^2+2x-8}>x-1$; 14) $\sqrt{-x^2-3x+4}>x+1$;

15) $\sqrt{(2x+1)^2}<x+5$; 16) $(x+4)\sqrt{x^2+x-6}\ge 0$;

17) $\sqrt{2x^2-3x-5}<x-1$; 18) $\sqrt{x^2+6x+5}<1+\sqrt{x^2+2x+4}$;

19) $\dfrac{6x}{x-2}-\sqrt{\dfrac{12x}{x-2}}-2\cdot\sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}}>0$; 20) $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0$;

21) $(x-2)\sqrt{x^2+1}<x^2+2$; 22) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}<4$;

23) $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\ge 2$; 24) $\dfrac{1-\sqrt{8x-3}}{4x}\ge 1$.

VI. Решите графически неравенства.

1) $x^2+y^2\le 1$; 2) $x^2+y^2>4$; 3) $(x-2)(y-3)>0$.

VII. Решите графически системы неравенств

1) $\begin{cases}3x-4y+12>0\\ x+y-2<0\end{cases}$; 2) $\begin{cases}y+3\ge x^2+2x\\ x+y\le 3\end{cases}$.

7

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Лексика раздела

в зависимости от	in dependence of	与...独立
возможный (случай)	possible (case)	可能性
деление обеих частей	division of both parts	两部分的分割
логарифм	logarithm	对数
десятичный логарифм	decimal logarithm	以十为底的对数
логарифм числа "a" по основанию "b"	logarithm of "a" to "b"	以 b 为底的 a 的对数
натуральный логарифм	natural logarithm	以e为底的对数
метод замены переменной	method of variables substitution	换元法
можно привести	it is possible to reduce	得出（结论）
обозначать	mean (signify)	表示
обращается в ноль	equal to zero	归零
обычный метод	traditional method	普通的方法
основание логарифма	base of logarithm	底数
основное логарифмическое тождество	basic logarithmic identity	对数恒等性
перейти	go on to …	走过
подставить значение	substitute the meaning	将y换元
потенцирование	exponentiation	求幂
преобразование	transformation	变换
применение	application	运用，请求
принадлежать	belong	属于

проверить	check up	检查
промежуток	interval	区间
с учетом	with consideration	原因
свойство монотонности	property of monotonous	单调性
случай	case	事件
упростить	simplify	简化
уравнение	equation	方程式
логарифмическое уравнение	logarithmic equation	对数方程式
показательное уравнение	exponential equation	方程式指数

7.1. Определение логарифма. Основное логарифмическое тождество

Логарифм числа b по основанию a обозначается символом $\log_a b$.

Логарифм положительного числа b по основанию a $(a>0, a\neq 1)$ – это показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.

Например, $\log_2 8=3$ так как $2^3=8$; $\log_3\frac{1}{9}=-2$, так как $(3)^{-2}=\frac{1}{9}$.

ЗАПОМНИТЕ!

1. Основное логарифмическое тождество:
$$a^{\log_a b}=b,\ a>0,\ a\neq 1,\ b>0.$$
2. Десятичные логарифмы обозначают: $\log_{10} b=\lg b$.
3. Натуральные логарифмы обозначают: $\log_e b=\ln b$ ($e=2,7$ – основание натурального логарифма).

Например, используя основное логарифмическое тождество, можно записать: $5^{\log_5 3}=3$; $7^{\log_7 9}=9$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 7}=7$.

<u>*Пример 1.*</u> Вычислите, используя определение логарифма:

а) $\log_2 64$; б) $\log_{\sqrt{3}} 3$; в) $\log_3 \frac{1}{27}$; г) $\ln\sqrt{e}$; д) $\lg\frac{1}{100}$.

Решения и ответы.

а) $\log_2 64=6$ т.к. $2^6=64$; б) $\log_{\sqrt{3}} 3=2$ т.к. $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$;

в) $\log_3\frac{1}{27}=-3$ т.к. $3^{-3}=\frac{1}{27}$; г) $\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}$ т.к. $e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$;

д) $\lg\frac{1}{100}=-2$ т.к. $10^{-2}=\frac{1}{100}$.

<u>*Пример 2.*</u> Вычислите, используя основное логарифмическое тождество.

а) $5^{\log_5 7}$; б) $27^{\log_3 2}$; в) $3^{\log_3 7-2}$; г) $10^{3\lg 2}$; д) $2,4^{\log_{2,4}10+1}$; е) $e^{5\ln\sqrt{6}}$.

Решения и ответы. Основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b}=b$, тогда:

а) $5^{\log_5 7}=7$; б) $27^{\log_3 2}=\left(3^3\right)^{\log_3 2}=\left(3^{\log_3 2}\right)^3=2^3=8$; в) $3^{\log_3 7-2}=\frac{3^{\log_3 7}}{3^2}=\frac{7}{9}$;

г) $10^{3\lg 2}=\left(10^{\lg 2}\right)^3=2^3=8$; д) $2,4^{1+\log_{2,4}10}=2,4^{\log_{2,4}10}\cdot 2,4=10\cdot 2,4=24$;

е) $e^{5\ln\sqrt{6}}=\left(e^{\ln\sqrt{6}}\right)^5=\left(\sqrt{6}\right)^5=\sqrt{6^5}=36\sqrt{6}$.

7.1.1. Свойства логарифмов

1) $a^{\log_a b}=b$ (основное логарифмическое тождество);
2) $\log_a a=1$ (логарифм по основанию a от числа a равен единице);
3) $\log_a 1=0$ (логарифм по основанию a от единицы равен нулю);
4) $\log_a bc=\log_a b+\log_a c$, если $b>0$, $c>0$ (логарифм произведения двух положительных множителей равен сумме их логарифмов);
5) $\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$, если $b>0$, $c>0$ (логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя);

6) $\log_a b^p = p\cdot\log_a b$, если $b>0$ (логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм основания степени);

7) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, если $b>0$ (формула перехода к новому основанию);

7а) если $c=b$, тогда $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$;

8) $\log_a b = \log_{a^p} b^p$ (если основание логарифма и число, стоящее под знаком логарифма, возвести в одну и ту же степень, не Равную нулю, то значение логарифма не изменится);

9) $\log_a \sqrt[k]{m} = \log_a m^{\frac{1}{k}} = \dfrac{1}{k}\cdot\log_a m$ (логарифм корня из положительного числа равен логарифму подкоренного выражения, деленному на показатель корня);

10) $\log_a b = -\log_a \dfrac{1}{b}$ (логарифмы взаимно обратных чисел по одинаковому основанию отличаются только знаком);

11) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

<u>*Пример 3.*</u> Упростите: а) $2^{\log_4 9+1}$; б) $5^{\frac{3-\lg 5}{\lg 25}}$; в) $a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}}$;

г) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\mathbf{K}\cdot\log_8 9\cdot\log_9 10$.

Решение. а) Сделаем преобразования показателя степени:

$$2^{\log_4 9+1} = 2^{\log_4 9}\cdot 2 = 2^{\log_{2^2} 3^2}\cdot 2 = 2^{\log_2 3}\cdot 2 = 3\cdot 2 = 6.$$

б) Выполним преобразования показателя степени, для этого используем свойства логарифма:

$$3-\lg 5 = \lg 10^3 - \lg 5 = \lg\left(\frac{10^3}{5}\right) = \lg 200,$$

$$\frac{1}{\lg 25} = \log_{25} 10 = \log_{\sqrt{25}} \sqrt{10} = \log_5 \sqrt{10}\text{, тогда:}$$

$$5^{\frac{3-\lg 5}{\lg 25}}=5^{\log_5\sqrt{10}\cdot\lg 200}=\left(5^{\log_5\sqrt{10}}\right)^{\lg 200}=\left(\sqrt{10}\right)^{\lg 200}=\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{\lg 200}=10^{\frac{1}{2}\lg 200}=$$

$$=10^{\lg\left(200^{\frac{1}{2}}\right)}=10^{\lg\sqrt{200}}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}\,.$$

в) Используя свойство логарифма $\dfrac{1}{\log_b a}=\log_a b$, получим:

$$a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}}=a^{\log_a b\cdot\log_b(\log_b a)}=\left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b(\log_b a)}=b^{\log_b(\log_b a)}=\log_b a\,.$$

г) Запишем все множители через основание 10, получим:

$$\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\mathbf{K}\cdot\log_8 9\cdot\log_9 10=\frac{\lg 3}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 3}\cdot\frac{\lg 5}{\lg 4}\cdot\mathbf{K}\cdot\frac{\lg 9}{\lg 8}\cdot\frac{\lg 10}{\lg 9}=$$

$$=\frac{\lg 10}{\lg 2}=\frac{1}{\lg 2}=\log_2 10\,.$$

Ответ. а) $2^{\log_4 9+1}=6$; б) $5^{\frac{3-\lg 5}{\lg 25}}=10\sqrt{2}$; в) $a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}}=\log_b a$;
г) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\mathbf{K}\cdot\log_8 9\cdot\log_9 10=\log_2 10$.

<u>*Пример 4.*</u> а) Найдите $\log_5 12$, если $\log_5 2=a$; $\log_5 3=c$;
б) найдите $\lg 56$, если $\lg 2=a$; $\log_2 7=b$.

Решение. а) Используя свойства логарифма, выполним преобразования данного выражения: $\log_5 12=\log_5\left(2^2\cdot 3\right)=\log_5 2^2+\log_5 3=2\log_5 2+\log_5 3$;
если $\log_5 2=a$; $\log_5 3=c$, тогда $2\log_5 2+\log_5 3=2a+c$.

б) Используя свойства логарифма, выполним преобразования данного выражения: $\lg 56=\lg\left(2^3\cdot 7\right)=\lg 2^3+\lg 7=3\lg 2+\dfrac{\log_2 7}{\log_2 10}=3\lg 2+\log_2 7\cdot\lg 2$;
если $\lg 2=a$; $\log_2 7=b$, тогда $3\lg 2+\log_2 7\cdot\lg 2=3a+ba=ab+3a$.

Ответ. а) $2a+c$; б) $ab+3a$.

<u>*Пример 5.*</u> Упростите $\log_2\log_2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=A$.

Решение. Представим выражение под знаком логарифма в виде степени:
$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=\sqrt{2\sqrt{2^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt{2\cdot 2^{\frac{3}{4}}}=\sqrt{2^{\frac{7}{4}}}=2^{\frac{7}{8}}$, тогда:

$$A=\log_2\left(\log_2 2^{\frac{7}{8}}\right)=\log_2\left(\frac{7}{8}\right)=\log_2 7-\log_2 8=\log_2 7-3.$$

Ответ. $A=\log_2 7-3$.

<u>Пример 6.</u> Вычислите $\sqrt{2^{2+\frac{1}{\log_3 2}}+25^{\frac{1}{2\log_3 5}}+1}=A$.

Решение. Используя свойства логарифма, преобразуем выражения:

$$\frac{1}{\log_3 2}=\log_2 3;\ \frac{1}{2\log_3 5}=\frac{1}{2}\log_5 3;\ \text{тогда } A=\sqrt{2^{2+\frac{1}{\log_3 2}}+25^{\frac{1}{2\log_3 5}}+1}=$$

$$=\sqrt{2^{2+\log_2 3}+25^{\frac{1}{2}\log_5 3}+1}=\sqrt{2^2\cdot 2^{\log_2 3}+\left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_5 3}+1}=\sqrt{4\cdot 3+5^{\log_5 3}+1}=$$

$$=\sqrt{12+3+1}=\sqrt{16}=4.$$

Ответ. $A=4$.

7.1.2. Логарифмирование и потенцирование

Логарифмирование – это нахождение логарифма числа или выражения.

<u>Пример7.</u> Дано $A=\frac{a^3b^8}{c^{31}}$. Найдите $\lg A$, если $a>0,\ b>0,\ c>0$.

Решение. Прологарифмируем данное выражение:

$$\lg A=\lg\left(\frac{a^3b^8}{c^{31}}\right)=\lg\left(a^3b^8\right)-\lg c^{31}=\lg a^3+\lg b^8-\lg c^{31}=3\lg a+8\lg b-31\lg c.$$

Ответ. $\lg A=3\lg a+8\lg b-31\lg c$.

Потенцирование – это действие, обратное логарифмированию. При потенцировании находят выражение по его логарифму.

<u>Пример 8.</u> Найдите X, если $\log_5 X=1+\frac{1}{3}\log_5 3-\log_5 3-2\log_5 2$.

Решение. Преобразуем правую часть равенства:

$$1+\frac{1}{3}\log_5 3-\log_5 3-2\log_5 2=\log_5 5+\log_5 3^{\frac{1}{3}}-\left(\log_5 3+\log_5 2^2\right)=$$

$$=\log_5\left(5\cdot\sqrt[3]{3}\right)-\log_5\left(3\cdot 2^2\right)=\log_5\left(\frac{5\cdot\sqrt[3]{3}}{12}\right),\ \text{тогда } \log_5 X=\log_5\left(\frac{5\cdot\sqrt[3]{3}}{12}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=\frac{5\cdot\sqrt[3]{3}}{12}.$$

Ответ. $X=\frac{5\cdot\sqrt[3]{3}}{12}$.

<u>*Пример 9.*</u> Найдите X, если $\lg X = \frac{2}{3}(\lg a - \lg b) - \lg(a-b)$.

Решение. Преобразуем правую часть равенства, получим:

$$\frac{2}{3}(\lg a - \lg b) - \lg(a-b) = \lg\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} - \lg(a-b) = \lg\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}}{a-b} \Rightarrow \lg X = \lg\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}}{a-b}.$$

Выполним потенцирование полученного выражения:

$$X = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}}{a-b} = \frac{1}{a-b}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{a-b}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2}.$$

Ответ. $X = \frac{1}{a-b}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2}$.

7.2. Показательные уравнения. Методы их решения

Показательные уравнения – это такие уравнения, в которых переменная содержится в показателе степени.

Например, $2^x = 3^{x-1}$; $5^{x^2-8} - 2 = 0$; $a^{f(x)} = a^{j(x)}$ – это показательные уравнения.

Решение показательных уравнений основано на свойствах показательной функции. Рассмотрим решение некоторых видов показательных уравнений разными методами.

I. Метод приведения к одинаковому основанию

а) $a^{f(x)} = a^{j(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Если равны степени с одинаковыми положительными основаниями (не равными единице), то равны и показатели степеней, т.е. $f(x) = j(x)$.

б) $a^{f(x)} = 1$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Степень с положительным основанием равна единице, если показатель этой степени равен нулю, т. е. $a^0 = 1$, тогда $a^{f(x)} = a^0$, значит $f(x) = 0$.

<u>*Пример 10.*</u> Решите уравнение $(0,25)^{2-x}=\dfrac{256}{2^{x-3}}$.

Решение. Приведем обе части уравнения к одинаковому основанию "2" и решим полученное линейное уравнение:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}=\frac{2^8}{2^{x-3}}\Rightarrow 2^{-2(2-x)}=2^{8-(x-3)}\Rightarrow 2^{2x-4}=2^{11-x}\Rightarrow 2x-4=11-x\Rightarrow x=5.$$

Ответ. $\{5\}$.

<u>*Пример 11.*</u> Решить уравнение $3^{3x-3}=1$.

Решение. $3^{3(x-1)}=3^0\Rightarrow 3(x-1)=0\Rightarrow x=1$.

Ответ. $\{1\}$.

II. Метод деления обеих частей уравнения на $a^{f(x)}$ или $b^{f(x)}$

$$a^{f(x)}=b^{f(x)},\ a>0,\ b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1.$$

<u>*Пример 12.*</u> Решите уравнение $3^x=19^x$.

Решение. $3^x=19^x\Leftrightarrow\dfrac{3^x}{19^x}=\dfrac{19^x}{19^x}\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{19}\right)^x=1\Leftrightarrow x=0$.

Ответ. $\{0\}$.

III. Метод логарифмирования обеих частей уравнения по одному и тому же основанию

$$A\cdot a^{f(x)}=B\cdot b^{g(x)},\ a>0,\ b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1.$$

Для того чтобы найти решения этого уравнения, нужно сделать преобразования, а потом логарифмировать обе части уравнения по одному и тому же основанию.

<u>*Пример 13.*</u> Решите уравнение $2\cdot 5^x=3^{x-1}\cdot 7$.

Решение. Преобразуем уравнение: $2\cdot 5^x=3^{x-1}\cdot 7\Leftrightarrow\dfrac{5^x}{3^x}=\dfrac{7}{3\cdot 2}\Leftrightarrow\left(\dfrac{5}{3}\right)^x=\dfrac{7}{6}$.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию $\dfrac{5}{3}$:

$$\log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{5}{3}\right)^x=\log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{7}{6}\right)\Leftrightarrow x=\log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{7}{6}\right)$$

Ответ. $\left\{\log_{\frac{5}{3}}\left(\dfrac{7}{6}\right)\right\}$.

<u>*Пример 14.*</u> Решите уравнение $7^{x^2-4}=8^{2x}$.

Решение. Прологарифмируем исходное уравнение по основанию "7" (можно логарифмировать и по основанию "8" или по любому положительному основанию, не равному "1").

$$\log_7\left(7^{x^2-4}\right)=\log_7\left(8^{2x}\right)\Leftrightarrow\left(x^2-4\right)\log_7 7=2x\log_7 8\Leftrightarrow x^2-4-2x\log_7 8=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2-2\left(\log_7 8\right)\cdot x-4=0$. Решим это квадратное уравнение, найдем его корни: $x_{1,2}=\log_7 8\pm\sqrt{\left(\log_7 8\right)^2+4}$. Это и будут решения исходного уравнения.

Ответ. $\left\{\log_7 8\pm\sqrt{\left(\log_7 8\right)^2+4}\right\}$.

IV. Метод вынесения общего множителя за скобки

<u>*Пример 15.*</u> Решите уравнение $5^{x+1}+3\cdot5^{x-1}-6\cdot5^x+10=0$.

Решение. Преобразуем уравнение: $5^{x-1}\cdot5^2+3\cdot5^{x-1}-6\cdot5^{x-1}\cdot5+10=0$.

Вынесем общий множитель 5^{x-1} за скобки: $5^{x-1}\cdot\left(5^2+3-6\cdot5\right)+10=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow5^{x-1}\cdot(-2)+10=0\Leftrightarrow5^{x-1}=5\Leftrightarrow x-1=1\Leftrightarrow x=2$.

Ответ. $\{2\}$.

V. Метод приведения к квадратному уравнению

а) Уравнения вида $A\cdot a^{2\cdot f(x)}+B\cdot a^{f(x)}+C=0$ $(a>0,\ a\neq1)$ с помощью подстановки $a^{f(x)}=y$ можно привести к квадратному уравнению $Ay^2+By+C=0$.

<u>*Пример 16.*</u> Решите уравнение $3^{2x^2}-12\cdot3^{x^2}+27=0$.

Решение. Пусть $3^{x^2}=y$, тогда $3^{2x^2}=\left(3^{x^2}\right)^2=y^2$. Подставим эти значения в исходное уравнение, получим: $y^2-12y+27=0\Leftrightarrow y_1=3;\ y_2=9\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}3^{x^2}=3\\3^{x^2}=9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=\pm\sqrt2\end{array}\right..$$

Ответ. $\left\{\pm1;\pm\sqrt2\right\}$.

б) Уравнения вида $M\cdot\left(\sqrt[n]{a-\sqrt b}\right)^x+N\cdot\left(\sqrt[n]{a+\sqrt b}\right)^x=p$, где $a^2-b=1$ приводят к квадратным уравнениям путем замены: $\left(\sqrt[n]{a-\sqrt b}\right)^x=y$ или $\left(\sqrt[n]{a+\sqrt b}\right)^x=y$.

<u>*Пример 17.*</u> Решите уравнение $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$.

Решение. Делаем замену: $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=y$. Получим:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=\left(\sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{3}}}\right)^x=\left(\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x=\frac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x}=\frac{1}{y}.$$

Тогда исходное уравнение эквивалентно уравнению:

$$y+\frac{1}{y}=4\Leftrightarrow y^2-4y+1=0\Leftrightarrow y_{1,2}=2\pm\sqrt{4-1}=2\pm\sqrt{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2+\sqrt{3}\\ \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2-\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=2+\sqrt{3}\\ \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=2-\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=2+\sqrt{3}\\ \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=1\\ \frac{x}{2}=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-2\end{array}\right..$$

Ответ. $\{-2;2\}$.

VI. *Метод введения новой переменной*

Уравнения вида $a^{mx}+p\cdot a^{nx}\cdot b^{(m-n)x}+q\cdot b^{mx}=0$, где $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$, а сумма показателей степеней чисел a и b в каждом члене равна mx, решаем делением каждого члена уравнения на b^{mx} ($b^{mx}\neq0$):

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{mx}+p\cdot\frac{a^{nx}\cdot b^{(m-n)\cdot x}}{b^{mx}}+q\cdot\frac{b^{mx}}{b^{mx}}=0\Rightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^{mx}+p\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{mx}+q=0.$$

Полученное уравнение решаем методом замены перемены $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x$, что приводит к уравнению $y^m+py^n+q=0$. Его корнями будут y_1, y_2, ..., y_k. Решая уравнения: $y_1=\left(\frac{a}{b}\right)^x$, ..., $y_k=\left(\frac{a}{b}\right)^x$, получим k значений x.

<u>*Пример 18.*</u> Решите уравнение $27^x+12^x=2\cdot 8^x$.

Решение. Запишем данное уравнение так: $3^{3x}+2^{2x}\cdot 3^x-2\cdot 2^{3x}=0$.

Разделим каждый член уравнения на 2^{3x}, получим: $\left(\frac{3}{2}\right)^{3x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-2=0$.

Пусть $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=y$, $y>0$, тогда $y^3+y-2=0\Rightarrow\left(y^3-1\right)+\left(y-1\right)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\ \left(y-1\right)\left(y^2+y+2\right)=0\Rightarrow y_1=1$.

Уравнение $y^2+y+2=0$ не имеет действительных корней, т.к. его дискриминант менше нуля $\left(D=-7<0\right)$. Поэтому, $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=1\Rightarrow x=0$.

Ответ. $\left\{0\right\}$.

Уравнения вида $\left(f\left(x\right)\right)^{j\left(x\right)}=\left(f\left(x\right)\right)^{g\left(x\right)}$ называются ***показательно-степенными***.

При решении таких уравнений проверяют случаи, когда основание степени может быть равно: $f\left(x\right)=-1$; $f\left(x\right)=0$; $f\left(x\right)=1$, потому что корни этих трех уравнений могут быть корнями данного уравнения.

Если $f\left(x\right)\neq-1$; $f\left(x\right)\neq 0$; $f\left(x\right)\neq 1$, то используем условие равенства степеней с равными основаниями: $j\left(x\right)=g\left(x\right)$. В этом случае обязательно нужно сделать проверку, т.к. левая или правая части уравнения могут не иметь смысла.

<u>*Пример 19.*</u> Решите уравнение $\left(x-2\right)^{10x^2-3x-1}=1$.

Решение. Рассмотрим случаи равенства основания единице, минус единице и нулю: $x-2=1$; $x-2=-1$; $x-2=0$.

а) $x-2=1\Rightarrow x=3$. Проверим это значение: $\left(3-2\right)^{10\cdot 9-3\cdot 3-1}=\left(-1\right)^{80}=1$.
Значит, $x_1=3$ – это корень уравнения.

б) $x-2=-1\Rightarrow x=1$. Проверим это значение: $\left(1-2\right)^{10\cdot 1-3\cdot 1-1}=\left(-1\right)^{6}=1$.
Значит, $x_2=1$ – это корень уравнения.

в) $x-2=0\Rightarrow x=2$. Проверим это значение: $\left(2-2\right)^{10\cdot 4-3\cdot 2-1}=0^{33}=0\neq 1$.
Значит, $x=2$ – это не корень уравнения.

г) Пусть $x-2\neq -1$; $x-2\neq 0$; $x-2\neq 1$. Тогда $(x-2)^{10x^2-3x-1}=(x-2)^0\Rightarrow$

$\Rightarrow 10x^2-3x-1=0\Rightarrow x_3=-\frac{1}{5}$; $x_4=\frac{1}{2}$. Проверим эти значение:

$$x_3=-\frac{1}{5}\Rightarrow\left(-\frac{1}{5}-2\right)^{10\cdot\frac{1}{25}+3\cdot\frac{1}{5}-1}=(-2,2)^0=1;$$

$$x_4=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\frac{1}{2}-2\right)^{10\cdot\frac{1}{4}-3\cdot\frac{1}{2}-1}=(-1,5)^0=1.$$

Значит, $x_3=-\frac{1}{5}$ и $x_4=\frac{1}{2}$ – это корни уравнения.

Ответ. $\left\{-\frac{1}{5};\ \frac{1}{2};\ 1;\ 3\right\}$.

7.3. Логарифмические уравнения. Методы их решения

Уравнение называется ***логарифмическим***, если переменная в нем содержится под знаком логарифма или в основании логарифма.

Например, уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x)$; $\log_x 4=-2$; $\log_3 x=2$ – это логарифмические уравнения.

Решение логарифмических уравнений основано на свойствах логарифмической функции.

Простейшие логарифмические уравнения – это уравнения вида: а) $\log_a x=b$; б) $\log_a f(x)=b$; в) $\log_a f(x)=g(x)$; г) $\log_a f(x)=\log_a g(x)$; д) $\log_{j(x)} f(x)=\log_{j(x)} g(x)$.

Рассмотрим решение некоторых простейших логарифмических уравнений разными методами.

I. Решение простейших логарифмических уравнений с использованием свойств логарифма

а) $\log_a x=b\Leftrightarrow x=a^b,\ a>0,\ a\neq 1$.

<u>Пример 20.</u> Решите уравнение $\log_3 x=2$.

Решение. (ОДЗ: $x>0$); $\log_3 x=2\Leftrightarrow x=3^2\Rightarrow x=9$.

Ответ. $\{9\}$.

б) $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b,\ a>0,\ a\neq 1$**.**

Пример 21. Решите уравнение $\log_4(x+2)=3$.

Решение. (ОДЗ: $x>-2$); $\log_4(x+2)=3 \Leftrightarrow x+2=4^3=64 \Leftrightarrow x=64-2=62$.

Ответ. $\{62\}$.

в) $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)},\ a>0,\ a\neq 1$**.**

Пример 22. Решите уравнение $\log_2(4^x-2)=x$.

Решение. $\log_2(4^x-2)=x \Leftrightarrow 4^x-2=2^x \Leftrightarrow (2^x)^2-2^x-2=0 \Leftrightarrow 2^x=y$.

$$y^2-y-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=2 \\ 2^x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x\in f \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1.$$

Проверка. Если $x=1 \Rightarrow \log_2(4-2)=\log_2 2=1 \Rightarrow 1=1$, значит $x=1$ – это корень исходного уравнения.

Ответ. $\{1\}$.

г) $\log_a f(x)=\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$, где $a>0,\ a\neq 1$**.**

Пример 23. Решите уравнение $\log_6(x^2-1)=\log_6(7x-7)$.

Решение. $\log_6(x^2-1)=\log_6(7x-7) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=7x-7 \\ x^2-1>0 \\ 7x-7>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+6=0 \\ x<-1;\ x>1 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1;\quad x=6 \\ x<-1;\ x>1 \Rightarrow x=6. \\ x>1 \end{cases}$$

$x=6$ – это единственный корень исходного уравнения.

Ответ. $\{6\}$.

д) $\log_{j(x)} f(x)=\log_{j(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ j(x)>0 \\ j(x)\neq 1 \end{cases}$ **.**

<u>*Пример 24.*</u> Решите уравнение $\log_{2x}\left(x^2-3x\right)=\log_{2x}\left(6x-8\right)$.

Решение. $\log_{2x}\left(x^2-3x\right)=\log_{2x}\left(6x-8\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x=6x-8\\x^2-3x>0\\6x-8>0\\2x>0\\2x\neq1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-9x+8=0\\x<0;\ x>3\\x>\dfrac{4}{3}\\x>0\\x\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1;\ x=8\\x>3\end{cases}\Rightarrow x=8.$$

Ответ. $\{\,8\,\}$.

II. Решение логарифмических уравнений потенцированием.

<u>*Пример 25.*</u> Решите уравнение $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8$.

Решение. Сделаем преобразования:

$$\log_4\frac{x+3}{x-1}=\log_4 4^2-\log_4 8\Leftrightarrow\log_4\frac{x+3}{x-1}=\log_4 2.$$

Решаем систему: $\begin{cases}\log_4\dfrac{x+3}{x-1}=\log_4 2\\x+3>0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+3}{x-1}=2\\x>-3\\x>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\x>-3\\x>1\end{cases}\Rightarrow x=5.$

Ответ. $\{\,5\,\}$.

III. Решение уравнений с применением основного логарифмического тождества $a^{\log_a b}=b$.

<u>*Пример 26.*</u> Решите уравнение $9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-5$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения: $9^{\log_3(1-2x)}=\left(3^2\right)^{\log_3(1-2x)}=$

$=3^{2\log_3(1-2x)}=3^{\log_3(1-2x)^2}=\left(1-2x\right)^2$, тогда $9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-5\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(1-2x)^2=5x^2-5\\1-2x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-4x+4x^2=5x^2-5\\x<\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x-6=0\\x<\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\pm\sqrt{10}\\x<\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow x=-2-\sqrt{10}$ – это единственный корень исходного уравнения.

Ответ. $\left\{\,-2-\sqrt{10}\,\right\}$.

IV. *Решение логарифмических уравнений методом замены переменной.*

Пример 27. Решите уравнение $2\cdot\lg^2\left(x^3\right)-3\lg x-1=0$.

Решение. ОДЗ: $x>0$.

Поскольку $\lg^2\left(x^3\right)=\left(\lg x^3\right)^2=\left(3\lg x\right)^2=3^2\left(\lg x\right)^2=9\lg^2 x$, значит

$2\cdot 9\lg^2 x-3\lg x-1=0 \Leftrightarrow 18\lg^2 x-3\lg x-1=0$.

Пусть $\lg x=t$, тогда: $18t^2-3t-1=0 \Leftrightarrow t_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9+4\cdot 18}}{2\cdot 18}=\dfrac{3\pm 9}{36}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t_1=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}\\ t_2=-\dfrac{6}{36}=-\dfrac{1}{6}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lg x=\dfrac{1}{3}\\ \lg x=-\dfrac{1}{6}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=10^{\frac{1}{3}}\\ x=10^{-\frac{1}{6}}\end{array}\right.$$

Ответ. $\left\{10^{\frac{1}{3}};\ 10^{-\frac{1}{6}}\right\}$.

V. *Решение уравнений методом логарифмирования.*

Пример 28. Решите уравнение $x^{2\lg^3 x-1,5\lg x}=\sqrt{10}$.

Решение. (ОДЗ: $x>0$). Прологарифмируем обе части уравнения и сделаем преобразования: $x^{2\lg^3 x-1,5\lg x}=\sqrt{10}\Leftrightarrow \lg\left(x^{2\lg^3 x-1,5\lg x}\right)=\lg\sqrt{10}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(2\lg^3 x-1,5\lg x\right)\lg x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4\lg^4 x-3\lg^2 x-1=0.$$

Пусть $\lg^2 x=t$, получим: $4t^2-3t-1=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lg^2 x=1\\ \lg^2 x=-\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lg x=1;\ \lg x=-1\\ x\in\varnothing\end{array}\right.\Leftrightarrow x=10;\ x=10^{-1}=0,1.$$

Ответ. $\{10;\ 0,1\}$.

VI. *Решение уравнений методом деления обеих частей на показательно-логарифмическую функцию.*

Пример 29. Решите уравнение $7^{\lg x}-5^{\lg x+1}=3\cdot 5^{\lg x-1}-13\cdot 7^{\lg x-1}$.

Решение. (ОДЗ: $x>0$). $7^{\lg x}-5\cdot 5^{\lg x}=\dfrac{3}{5}\cdot 5^{\lg x}-\dfrac{13}{7}\cdot 7^{\lg x}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(1+\frac{13}{7}\right)\cdot 7^{\lg x}=\left(5+\frac{3}{5}\right)\cdot 5^{\lg x}\Leftrightarrow\frac{20}{7}\cdot 7^{\lg x}=\frac{28}{5}\cdot 5^{\lg x}\Leftrightarrow\frac{7^{\lg x}}{5^{\lg x}}=\frac{28\cdot 7}{5\cdot 20}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^{\lg x} = \left(\frac{7}{5}\right)^{2} \Leftrightarrow \lg x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 = 100.$$

Ответ. $\{100\}$.

VII. *Решение уравнений с использованием формулы перехода к другому основанию.*

Пример 30. Решите уравнение $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$.

Решение. (ОДЗ: $x > 0$). Перейдем к основанию 2:

$$\log_{16} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 16} = \frac{\log_2 x}{4}; \ \log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}.$$

Пусть $\log_2 x = t$, тогда $\frac{t}{4} + \frac{t}{2} + t = 7 \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 2^4 = 16$.

Ответ. $\{16\}$.

7.4. Системы показательных и логарифмических уравнений

Для решения систем показательных и логарифмических уравнений используют разные методы решения, такие как: метод подстановки, использование свойств логарифма и т.д. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 31. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12 \\ 2^y \cdot 3^x = 18 \end{cases}$.

Решение. Перемножим первое и второе уравнения системы. Получим:

$$2^x \cdot 3^y \cdot 2^y \cdot 3^x = 12 \cdot 18 \Leftrightarrow 2^{x+y} \cdot 3^{x+y} = 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 \Leftrightarrow (2 \cdot 3)^{x+y} = 6^3 \Leftrightarrow 6^{x+y} = 6^3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + y = 3 \Leftrightarrow y = 3 - x.$$

Подставим вместо y его значение $(3 - x)$ в первое уравнение исходной системы. Получим: $2^x \cdot 3^{3-x} = 12 \Leftrightarrow \frac{2^x \cdot 3^3}{3^x} = 12 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{12}{3^3} = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2$. Тогда, $y = 3 - x = 3 - 2 = 1$.

Ответ. $\{(2;1)\}$.

Пример 32. Решить систему уравнений $\begin{cases} \lg x + 2\lg y = -3 \\ \lg x^3 - \lg y^2 = 9 \end{cases}$.

Решение. ОДЗ системы: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$. Преобразуем уравнения системы с учетом следующих тождеств: $\lg x^3 = 3\lg x$; $\lg y^2 = 2\lg y$.

Тогда исходную систему уравнений можно записать и решить в виде:
$\begin{cases} \lg x + 2\lg y = -3 \\ \lg x^3 - \lg y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \lg x + 2\lg y + 3\lg x - 2\lg y = -3 + 9$, или

$$4\lg x = 6 \Leftrightarrow \lg x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{10^3} = 10\sqrt{10}.$$

Из первого уравнения системы получим: $2\lg y = -\lg x - 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lg y = \frac{-\lg x - 3}{2} = \left(-\frac{3}{2} - 3\right) : 2 = -\frac{9}{4} \Leftrightarrow y = 10^{-\frac{9}{4}} = \frac{1}{100 \cdot \sqrt[4]{10}}.$$

Ответ. $\left\{\left(10\sqrt{10}; \frac{1}{100 \cdot \sqrt[4]{10}}\right)\right\}$.

<u>*Пример 33.*</u> Решите систему уравнений $\begin{cases} 5^{\log_6(x-4y)} = 1 \\ 4^{x-2y} - 7 \cdot 2^{x-2y} = 8 \end{cases}$.

Решение. ОДЗ системы: $x - 4y > 0$.

Пусть $2^{x-2y} = t$, тогда второе уравнение системы: $t^2 - 7t - 8 = 0$ имеет корни: $t_1 = 8$; $t_2 = -1$. Корень уравнения $t_2 = -1$ не удовлетворяет ОДЗ исходной системы. Значит $2^{x-2y} = 8 = 2^3 \Leftrightarrow x - 2y = 3$.

Из первого уравнения исходной системы можно записать, что $\log_6(x-4y) = 0 \Leftrightarrow x - 4y = 1$. Получаем систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} x - 4y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Ответ. $\{(5;1)\}$.

7.5. Показательные неравенства

Неравенство, которое содержит переменную в показателе степени, называется ***показательным неравенством***.

Общий вид показательного неравенства: $a^{f(x)} > b^{g(x)}$.

Решение любого показательного неравенства можно привести к решению неравенства с одинаковым основанием: $a^{f(x)} > a^{j(x)}$.

Решение такого неравенства основано на свойстве монотонности показательной функции: при $a > 1$ показательная функция монотонно возрастает; при $0<a<1$ показательная функция монотонно убывает. Поэтому могут быть два случая:

а) $a>1$, $a^{f(x)}>a^{j(x)} \Rightarrow f(x)>j(x)$;

б) $0<a<1$, $a^{f(x)}>a^{j(x)} \Rightarrow f(x)<j(x)$.

Если выражение с переменной находится и в основании, и в показателе степени, то это неравенство называется ***показательно-степенным***. Решение такого неравенства сводится к решению системы неравенств.

При решении неравенства $u(x)^{f(x)}>u(x)^{j(x)}$ рассматривают два случая: а) $\begin{cases} u(x)>1 \\ f(x)>j(x) \end{cases}$; б) $\begin{cases} 0<u(x)<1 \\ f(x)<j(x) \end{cases}$.

Решением показательного неравенства будет объединение множеств решений этих систем.

<u>*Пример 34.*</u> Решите неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-6x-2,5}>16\sqrt{2}$.

Решение. Правую часть неравенства запишем так: $16\sqrt{2}=2^{4,5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4,5}$.

Тогда исходное неравенство будет иметь вид: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-6x-2,5}>\left(\frac{1}{2}\right)^{-4,5}$.

Основание $\frac{1}{2}<1$, поэтому это неравенство равносильно квадратному неравенству $x^2-6x-2,5<-4,5$ или $x^2-6x+2<0$. Решением этого неравенства будут: $x_1=3-\sqrt{7}$; $x_2=3+\sqrt{7}$, а решением исходного неравенства будет: $3-\sqrt{7}<x<3+\sqrt{7}$.

Ответ. $x\in\left]3-\sqrt{7};\ 3+\sqrt{7}\right[$.

<u>*Пример 35.*</u> Решите неравенство $2^x>5$.

Решение. Преобразуем обе части неравенства: $2^x>5 \Leftrightarrow 2^x>2^{\log_2 5}$.

Основание $2>1$, поэтому можно записать: $x>\log_2 5$.

Ответ. $x\in\left]\log_2 5;+\infty\right[$.

<u>*Пример 36.*</u> Решите неравенство $4^x - 2\cdot 5^{2x} - 10^x > 0$.

Решение. Исходное неравенство запишем так: $2^{2x} - 2\cdot 5^{2x} - 2^x\cdot 5^x > 0$.

В левой части неравенства находятся функции, однородные относительно 2^x и 5^x. Разделим обе части исходного неравенства на $5^{2x} = 25^x$. Получим: $\left(\frac{4}{25}\right)^x - 2 - \left(\frac{10}{25}\right)^x > 0 \Leftrightarrow \left(\left(\frac{2}{5}\right)^x\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^x - 2 > 0$.

Пусть $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$, $t > 0$, тогда $t^2 - t - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -1 \\ t > 2 \end{array}\right.$. Т.к. $t > 0$, тогда $t < -1$ не может быть решением неравенства. Если $t > 2 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x > 2$ $\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{2}{5}} 2} \Leftrightarrow x < \log_{\frac{2}{5}} 2$ будет решением исходного неравенства.

Ответ. $x \in \left]-\infty;\ \log_{\frac{2}{5}} 2\right[$.

<u>*Пример 37.*</u> Решите неравенство $x^{\frac{2x-1}{2-x}} > 1$.

Решение. Запишем исходное неравенство так: $x^{\frac{2x-1}{2-x}} > x^0$. Решением этого неравенства будет объединение решений нижеприведенных систем 1) и 2).

1) $\begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{2x-1}{2-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2$; 2) $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ \dfrac{2x-1}{2-x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$.

Ответ. $x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[\mathbf{U} \left]1; 2\right[$.

<u>*Пример 38.*</u> Решите неравенство $(x+4)^{8-7x} \le (x+4)^{1-9x}$.

Решение. (ОДЗ: $x > -4$). Это показательно-степенное неравенство равносильно двум системам неравенств:

1) $\begin{cases} x+4 > 1 \\ 8-7x \le 1-9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x \le -3{,}5 \end{cases}$; т.е. $x \in \varnothing$.

2) $\begin{cases} 0 < x+4 < 1 \\ 8-7x \ge 1-9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < -3 \\ x \ge -3{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow -3{,}5 \le x < -3$.

Значение $x = -3$ принадлежит ОДЗ исходного неравенства, т.к. $x+4=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = -3$. Поэтому $x = -3$ – это решение исходного неравенства.

Ответ. $x \in [-3{,}5; -3]$.

<u>*Пример 39.*</u> Решите неравенство $(x+1)^x \geq (x+2)^x$.

Решение. Найдем ОДЗ: $\begin{cases} x+1>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>-1.$

Разделим обе части исходного неравенства на $(x+2)^x > 0$.

Получаем неравенство, равносильное исходному: $\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^x \geq 1.$

Рассмотрим три возможных случая в зависимости от величины основания:

1) $\dfrac{x+1}{x+2}=1 \Leftrightarrow x+1=x+2 \Leftrightarrow 1=2 \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

2) $\begin{cases} 0<\dfrac{x+1}{x+2}<1 \\ x\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x+1<x+2 \\ x\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\,]-1;0\,]$.

3) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x+2}>1 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>x+2 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\varnothing \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$

Ответ. $x\in\,]-1;0\,]$.

7.6. Логарифмические неравенства

Неравенство, которое содержит переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется ***логарифмическим***.

Решение логарифмических неравенств обычно сводится к решению неравенств вида: $\log_a f(x) > \log_a j(x)$. Это простейшее логарифмическое неравенство.

При решении логарифмических неравенств нужно помнить следующее:

1) выражение с переменной под знаком логарифма может быть только положительным;
2) логарифмическая функция монотонно возрастает при $a>1$ и монотонно убывает при $0<a<1$.

Решение логарифмических неравенств сводится к решению системы неравенств.

ЗАПОМНИТЕ!

Если основание логарифма содержит переменную, то решение неравенства $\log_{u(x)} f(x) > \log_{u(x)} j(x)$ сводится к решению двух систем неравенств:

а) $\begin{cases} u(x) > 1 \\ f(x) > 0 \\ j(x) > 0 \\ f(x) > j(x) \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0 < u(x) < 1 \\ f(x) > 0 \\ j(x) > 0 \\ f(x) < j(x) \end{cases}$

Решение исходного неравенства – это объединение множеств решений этих двух систем.

<u>*Пример 40.*</u> Решите неравенство $\log_2(1-x) > -2$.

Решение. (ОДЗ: $1-x>0 \Leftrightarrow x<1$).

В этом примере для решения неравенства не нужно записывать две системы неравенств, которые приведены выше. Из условия мы знаем, что основание данного логарифма "2", а это больше единицы, поэтому здесь достаточно записать обе части неравенства как логарифмы с одинаковым основанием "2" и получить линейное неравенство: $\log_2(1-x) > -2 \Leftrightarrow \log_2(1-x) > \log_2\left(2^{-2}\right) \Leftrightarrow 1-x > 2^{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow x < \frac{3}{4}$.

Проверим, принадлежит ли найденное решение ОДЗ исходного неравенства и убедимся, что это решение входит в ОДЗ неравенства.

Ответ. $x \in \left]-\infty; \frac{3}{4}\right[$.

<u>*Пример 41.*</u> Решите неравенство $\log_2(8-x) > \log_2(4-2x)$.

Решение. Основание логарифмов больше "1", поэтому можно записать только одну систему неравенств:

$$\begin{cases} 8-x>0 \\ 4-2x>0 \\ 8-x>4-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<8 \\ x<2 \\ x>-4 \end{cases} \Leftrightarrow -4<x<2.$$

Ответ. $x \in \left]-4; 2\right[$.

<u>*Пример 42.*</u> Решите неравенство $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \le \dfrac{1}{2}$.

Решение. Запишем логарифм по основанию "4" как логарифм по основанию "2", получим: $\log_4 x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2 x}{2} = \dfrac{1}{2}\log_2 x$.

Пусть $\log_2 x = t$, тогда запишем исходное неравенство так:

$$\frac{1-\frac{t}{2}}{1+t} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2-t}{2\cdot(1+t)} - \frac{1}{2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{1-2t}{2\cdot(1+t)} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-1 \\ t \ge \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x < -1 \\ \log_2 x \ge \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x < \log_2 \frac{1}{2} \\ \log_2 x \ge \log_2 2^{\frac{1}{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \frac{1}{2} \\ x \ge \sqrt{2} \end{array}\right. .$$

Ответ. $x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[\mathbf{U} \left[\sqrt{2}; +\infty\right[$.

<u>*Пример 43.*</u> Решите неравенство $\left(\dfrac{x}{10}\right)^{\log x - 2} \le 100$.

Решение. Прологарифмируем неравенство по основанию "10". Знак неравенства не изменится, т.к. $10 > 1$, поэтому:

$$\lg\left(\frac{x}{10}\right)^{\log x-2} \le \lg 100 \Leftrightarrow (\lg x - 2)\cdot \lg\frac{x}{10} \le 2 \Leftrightarrow (\lg x - 2)(\lg x - 1) \le 2.$$

Пусть $\lg x = t$, тогда $(t-2)(t-1) \le 2 \Leftrightarrow t^2 - 3t \le 0 \Leftrightarrow 0 \le t \le 3$ или $0 \le \lg x \le 3 \Leftrightarrow \lg 1 \le \lg x \le 10^3 \Leftrightarrow 1 \le x \le 1000$.

Ответ. $x \in [1; 1000]$.

<u>*Пример 44.*</u> Решите неравенство $\log_x(2{,}5 - x) > -1$.

Решение. Запишем неравенство так: $\log_x(2{,}5-x) > \log_x \dfrac{1}{x}$.

Решение этого неравенства будет объединение решений систем а) и б).

а) $\begin{cases} 2{,}5 - x > 0 \\ x > 1 \\ 2{,}5 - x > \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}5 - x > 0 \\ x > 1 \\ 2{,}5 - x > \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2{,}5 \\ x > 1 \\ 0{,}5 < x < 2 \end{cases} \Rightarrow x \in]1;\ 2[$;

б) $\begin{cases} 2{,}5 - x > 0 \\ 0 < x < 1 \\ 2{,}5 - x < \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}5 - x > 0 \\ 0 < x < 1 \\ 2{,}5 - x < \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; 2{,}5[\\ x \in]0; 1[\\ x \in]-\infty; 0[\ \mathbf{U}\ ]0; 0{,}5[\ \mathbf{U}\ ]2; +\infty[\end{cases} \Rightarrow x \in]0; 0{,}5[$.

Ответ. $x \in]0;\ 0{,}5[\ \mathbf{U}\ ]1;\ 2[$.

<u>*Пример* 45.</u> Решите неравенство $\dfrac{\log_2 2x\cdot\log_5(x+1)}{x-2}>0$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}2x>0\\ x+1>0\\ x-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<2\ \mathbf{U}\ x>2$.

Найдем значения x, при которых каждый множитель обращается в ноль:

$\log_2 2x=0\Leftrightarrow 2x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$;

$\log_5(x+1)=0\Leftrightarrow x+1=1\Leftrightarrow x=0$;

$x-2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2$.

Отметим на числовой прямой точки: $x=\dfrac{1}{2}$; $x=0$; $x=2$ (рис. 7.1).

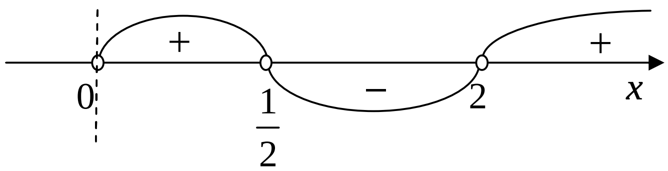


Рисунок 7.1

Числовая прямая с учетом ОДЗ разбивается на три промежутка:

$\left]0;\ \dfrac{1}{2}\right[$; $\left]\dfrac{1}{2};\ 2\right[$; $]\,2;\ +\infty[$.

Обозначим $f(x)=\dfrac{\log_2 2x\cdot\log_5(x+1)}{x-2}$ и определим знак $f(x)$ на каждом из промежутков. Для этого возьмем любое значение из каждого интервала, подставим в $f(x)$ и узнаем знак $f(x)$ на этом интервале.

1) $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{\log_2\dfrac{1}{2}\cdot\log_5\dfrac{5}{4}}{-\dfrac{7}{4}}>0$; 2) $f(1)<0$; 3) $f(3)>0$.

Так, $f(x)>0$ при $x\in\left]0;\ \dfrac{1}{2}\right[\ \mathbf{U}\ ]\,2;\ +\infty\,[$, значит это и есть решение исходного неравенства.

Ответ. $x\in\left]0;\dfrac{1}{2}\right[\ \mathbf{U}\ ]\,2;+\infty\,[$.

Ответьте на вопросы

1. Что такое логарифмическое уравнение?
2. Что такое показательное уравнение?
3. Что такое логарифм?
4. Назовите основное логарифмическое тождество.
5. Назовите основные свойства логарифмов.
6. Что такое потенцирование?
7. Какие методы решения логарифмических уравнений вы знаете?
8. Какие методы решения показательных уравнений вы знаете?
9. Что такое логарифмическое неравенство?
10. Что такое показательное неравенство?

Задания для самостоятельной работы № 17

I. Вычислите.

1) $\log_{27} 243$; 2) $\log_{\frac{1}{3\sqrt{3}}} 9$; 3) $\dfrac{\lg\left(3+2\sqrt{2}\right)}{\lg\left(\sqrt{2}+1\right)}$;

4) $2^{3\cdot\log_2 3}$; 5) $4^{\log_2 5}$; 6) $2^{2\cdot\log_4 6-1}$;

7) $25^{\frac{1}{\log_3 5}}$; 8) $2^{3\cdot\log_{2\sqrt{2}}\sqrt{3}}$.

II. Упростите выражения.

1) $\left(\sqrt{2}\right)^{\log_4 49+7}$; 2) $\log_7 \log_7 \sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}}$; 3) $\log_3 5\cdot\log_{25} 27$;

4) $6^{\frac{2-\lg 18}{\lg 36}}\cdot 14^{\frac{1+\lg 5}{\lg 196}}$; 5) $81^{0,5\log_9 7}$.

III. Определите, какое из чисел больше.

а) $\log_4 60$ или $\log_3 30$; б) $\log_9 10$ или $\lg 11$;

в) $\log_4 2$ или $\log_{0,0625} 0,25$; г) $\log_7 27$ или $\log_3 7$.

Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

IV. Решите простейшие показательные уравнения.

1) $5^x=625$; 2) $2^{-x}=32$; 3) $7^{x-3}=0$; 4) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-2}$;

5) $9^{x-4}=9^{\sqrt{x}+2}$; 6) $(0{,}04)^{8-x}=\frac{1}{625}$; 7) $(0{,}5)^{x^2}\cdot 2^{2x+2}=\frac{1}{64}$;

8) $5^{2x}\cdot 6^{2x}=900$; 9) $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{7^x}=196$; 10) $5^{2x}\cdot 4^{x+2}=16\cdot 10^{4-2x}$.

V. Решите показательные уравнения.

1) $3^x+3^{x+1}=108$; 2) $7^x-7^{x-1}=6$; 3) $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}=448$;
4) $5^{2x-1}+2^{2x}-5^{2x}+2^{2x+2}=0$; 5) $5^x=8^x$; 6) $2\cdot 5^x=7\cdot 3^{x-1}$;
7) $4^x+4^{x+1}+4^{x+2}=9^x$; 8) $16^x+20^x=25^x$;
9) $7^{2x}-6\cdot 7^x+5=0$;
10) $2\cdot 4^x+25^{x+1}=15\cdot 10^x$; 11) $12^x+27^x=2\cdot 8^x$; 12) $x^{5x-1}=1$;
13) $\left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^x+\left(\sqrt{6-\sqrt{35}}\right)^x=12$; 14) $(x+5)^{x-9}=1$;

15) $(5x-8)^{3x^2+3}=(5x-8)^{10x}$; 16) $|x|^{x-8x^2}=1$;

17) $|x-2|^{10x^2-3x-1}=1$.

VI. Решите простейшие логарифмические уравнения.

1) $\log_3 x=2$; 2) $\log_2(2x-1)=4$; 3) $\log_5(9-x^2)=\log_5(9-4x)$;

4) $\log_{6x}(x^2-8x)=\log_{6x}(2x-9)$; 5) $\log_2\log_3\log_4 x=0$;

6) $\log_{3-x}(x^2-x-1)=1$; 7) $\lg(3x-2)=3-\lg 25$;

8) $\log_3(9^x-72)=x$; 9) $\log_3\log_{\frac{1}{4}}(2-x)^2=0$.

VII. Решите логарифмические уравнения.

1) $\log_2(3+x)+\log_2(x+2)=1$; 2) $\log_5\frac{x+3}{3x-1}=\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{2}$;

3) $\log_9(x^2+7x)-\log_9(-x-3)=2-\log_9 27$; 4) $7^{\log_{49}(x-5)}=4$;

5) $\lg(x-5)-\lg(3x-20)^{\frac{1}{2}}=\lg 2$; 6) $x^{\log_{\sqrt{x}}(7-x)}=16$;

7) $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$; 8) $\lg^6 x - 9\lg^3 x + 8 = 0$;

9) $4\log_9^2(-x) + 6\log_9 x^2 = -9$; 10) $4\lg x^2 - \lg^2(-x) = 16$;

11) $1{,}25^{\log_5 x} + 0{,}8^{\log_5 x} = 2{,}05$; 12) $x^{\lg x} + 13x^{-\lg x} = 14$;

13) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{81} x = 7$; 14) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{16x} 2$;

15) $\log_3 x + \log_4 x = 2$; 16) $3\log_{25x} 5 + 2\log_{5x} 5 + 3\log_x 5 = 0$;

17) $x^{\log_3 x - 2} = 27$; 18) $\log_{3x+7}(5x+3) + \log_{5x+3}(3x+7) = 2$;

19) $x^{\log_2 \sqrt{x}} = 16x$; 20) $\dfrac{1 + 2\log_9 2}{\log_9 x} - 1 = 2\log_x 3 \cdot \log_9(12 - x)$;

21) $x^{2 - \lg\frac{x}{2}} = 20$; 22) $\dfrac{1 + 2\log_9 2}{\log_9 x} - 1 = 2\log_x 3 \cdot \log_9(12 - x)$;

23) $\left|\log_2(3x - 1) - \log_2 3\right| = \left|\log_2(5 - 2x) - 1\right|$;

24) $x \cdot \log_3\left(x^4\right) + 1 = 4x + 2 \cdot \log_9 x$; 25) $25^{\lg x} = 5 + 4 \cdot x^{\lg 5}$.

VIII. Решите системы уравнений.

1) $\begin{cases} x + y = 34 \\ \log_2 x + \log_2 y = 6 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 7 \\ 3 \cdot 2^x \cdot 2 \cdot 3^y = 18 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81 \\ \lg(x + y)^2 - \lg x = 2\lg 3 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 5 \\ \lg x - \lg y = 3 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} x - y = 90 \\ \lg x + \lg y = 3 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} \log_x 10 + \log_y 10 = 5 \\ \log_{10} x + \log_{10} y = \dfrac{5}{4} \end{cases}$;

7) $\begin{cases} \log_4 x + \log_2 y = 0 \\ x^2 - 9y^2 + 8 = 0 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} \log_{xy}(x - y) = 1 \\ \log_{xy}(x + y) = 0 \end{cases}$; 9) $\begin{cases} \lg x + 4\lg y = -7{,}5 \\ \lg x^2 - 4\lg y^3 = 30 \end{cases}$.

IX. Решите показательные неравенства.

1) $3^x > 81$; 2) $\left(\dfrac{1}{2}\right) \le \dfrac{1}{32}$; 3) $0{,}5^{x^2 - 4x} < 8$;

4) $3^{x^2 - 8x + 6} \le \sqrt{3}$; 5) $\left(\dfrac{10}{\sqrt{3}}\right)^{x^2 - 45} \ge 0{,}81^x$; 6) $0{,}5^x > 3$;

7) $2^x > 3$; 8) $7^{x^2-4x-2} > \frac{1}{49}$; 9) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^2+2x+1}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$;

10) $4^x < 2^{x+1} + 3$; 11) $3^{2x+5} \leq 3^{x+2} + 2$;

12) $5 \cdot 2^{3x} - 24 \cdot 2^{5-3x} + 56 \leq 0$; 13) $25^x > 6 \cdot 5^x + 55$;

14) $\frac{1}{3^x+5} < \frac{1}{3^{x+1}-1}$; 15) $x^3 \cdot 3^x - 3^{x+3} \leq 0$;

16) $(x-3)^{x^2-7x} > 1$; 17) $\left(x^2-8x+8\right)^{x-0,2} < 1$;

18) $|x|^{x^2-x-2} < 1$; 19) $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x < 0$.

X. Решите логарифмические неравенства.

1) $\log_2(3x+1) > \log_2(x-1)$; 2) $\log_{0,5}(2x+3) \leq \log_{0,5}(4x-1)$;

3) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) > 0$; 4) $\log_2 x \leq \frac{4}{\log_2 x - 3}$;

5) $(x-2)\log_{0,5} x < 0$; 6) $\log_x(3x-1) > 1$;

7) $\log_{x-4}\left(2x^2-9x+4\right) > 1$; 8) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x+1} > -1$;

9) $\log_2 \frac{3x-1}{2-x} < 0$; 10) $\frac{\lg^2 x - 1}{x-5} < 0$;

11) $\frac{1-\log_4 x}{1-\log_2 x} \leq \frac{1}{2}$; 12) $\log_{3-x^2}(1-x) \leq 1$;

13) $\log_x \frac{4x+7}{5-x} > -1$; 14) $\log_2 \log_4 \frac{2x-1}{x+4} > -1$.

XI. Решите неравенства.

1) $\left(\frac{x}{7}\right)^{\log_7 x - 2} < 49$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1-x}{2-x}} > 1$;

3) $0,2^{\log_{0,7} \frac{2x+1}{2x-3}} < 1$; 4) $\left|5^{9x^2-7} - 15\right| \leq 10$;

5) $\left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leq \left(\sqrt{2}+1\right)^{-x}$; 6) $9^{\log_3^2 x} < 4 \cdot x^{\log_3 x} - 3$.

8
ТРИГОНОМЕТРИЯ

Лексика раздела

вершина угла	vertex of angle	顶角
вращать	turn around	转动
выразить	express	表示；计算
геометрическая фигура	geometrical figure	几何图形
градус	degree	度数
длина	length	长；长度
дуга окружности	arc of circle	弧形
измерять	measure	测量
луч	ray	射线
начальная точка	first point	起点
определить	determine	算出；给....下定义
переход	transition	转换
по часовой стрелке	by the clocks	从顺时针方向
против часовой стрелки	back to the clocks	逆时针方向
радиус	radius	半径
сколь угодно большие значения	as big as possible meanings	最大可能的数值
соответствие	correspondence	相符合
точка	point	点
требовать	insist	要求
угол	angle	角
полный угол	whole angle	全角
центральный угол	central angle	圆心角
часть	part	部分

• ❦ œ

8.1. Углы и их измерения

Угол – это геометрическая фигура, образованная двумя лучами, которые выходят из одной точки. Эта точка называется вершиной угла (рис. 8.1а).

Луч можно вращать вокруг начальной точки в двух направлениях: по часовой стрелке (отрицательное направление) и против часовой стрелки (положительное направление). Соответственно углы и дуги, которые получены вращением луча против часовой стрелки, называют ***положительными***. А углы и дуги, которые получены вращением луча по часовой стрелке, называют ***отрицательными*** (рис. 8.1 б).

а) $\angle AOB = \angle BOA = \angle a$ á)

Рисунок 8.1

Оси абсцисс (Ох) и ***ординат*** (Оу) делят полный угол (окружность) на четыре четверти (квадранта) (рис. 8.2).

Центральный угол в окружности – это угол, вершина которого находится в ее центре.

Центральный угол измеряется длиной дуги, на которую он опирается.

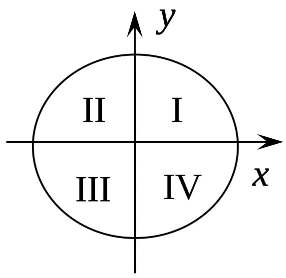


Рисунок 8.2

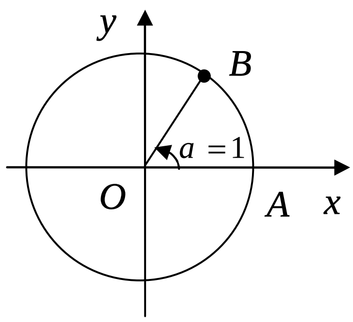


Рисунок 8.3

ЗАПОМНИТЕ!

Углы измеряются в градусах и радианах.

Градус – это центральный угол, длина дуги которого равна $\frac{1}{360}$ части длины окружности.

$\frac{1}{60}$ часть градуса называется минутой $(1')$.

$\frac{1}{60}$ часть минуты называется секундой $(1'')$.

Радиан – это центральный угол, который опирается на дугу, длина которой равна радиусу. Слово "радиан" не пишут.

Если $|\overset{\smile}{AB}| = R$; $|OA| = |OB| = R$, то $\angle AOB = \angle a = 1$, т.е. угол a равен одному радиану (рис. 8.3).

Связь между радианной и градусной мерой угла

Так как длина окружности равна $2pR$, то полный угол составляет $2p$ радиан:

$$a = \frac{2pR}{R} = 2p\ .$$

Полный угол равен 360°, поэтому $2p = 360^{\circ}$. Отсюда радианная и градусная единицы измерения углов связаны равенствами:

$$1\ \text{радиан} = \frac{360^{\circ}}{2p} = \frac{180^{\circ}}{p} \approx 57^{\circ}17'45''$$

(57 градусов, 17 минут, 45 секунд).

$$1^{\circ} = \frac{2p}{360^{\circ}} = \frac{p}{180^{\circ}}\,\text{радиан} \approx 0{,}017453\ \text{радиан}.$$

ЗАПОМНИТЕ!

Формула перехода от градусов к радианам (и наоборот):

$$a_{\text{рад}} = \frac{p}{180} \cdot a^{\circ}.$$

Используя формулу перехода, запишем соответствие между градусами и радианами для некоторых углов (табл. 8.1).

Таблица 8.1 – Соответствие между градусами и радианами

Град	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Рад	0	$\frac{p}{6}$	$\frac{p}{4}$	$\frac{p}{3}$	$\frac{p}{2}$	p	$\frac{3p}{2}$	$2p$

<u>*Пример 1.*</u> Выразите в радианах углы: а) 40°; б) 60°.

Решение. а) $a = \frac{p}{180} \cdot 40^{\circ} = \frac{2p}{9}$; б) $a = \frac{p}{180} \cdot 60^{\circ} = \frac{p}{3}$.

Ответ. а) $a = \frac{2p}{9}$; б) $a = \frac{p}{3}$.

<u>*Пример 2.*</u> Выразите в градусах угол в 3 радиана.

Решение. $3 = \frac{p}{180} \cdot a^{\circ} \Rightarrow a^{\circ} = \frac{3 \cdot 180}{p} = \frac{3 \cdot 180}{3{,}14} \approx 171^{\circ}53'$.

Ответ. $a \approx 171^{\circ}53'$.

8.2. Определение тригонометрических функций

Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале плоской системы координат xOy (рис. 8.4). Такая окружность называется ***единичной окружностью*** или ***тригонометрической окружностью***.

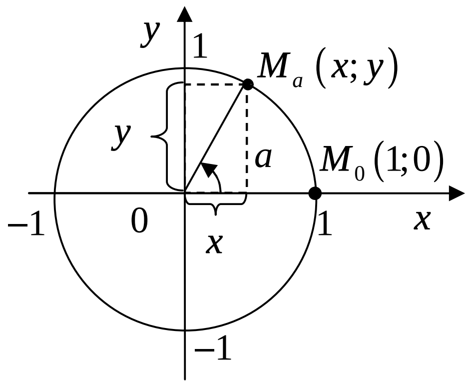


Рисунок 8.4

Отметим на оси Ox справа от начала координат точку M_0, лежащую на тригонометрической окружности: $M_0(1;0)$.

Радиус OM_0 называется начальным радиусом. Точка $M_0(1;0)$ переходит в точку $M_a(x;y)$ при повороте начального радиуса OM_0 около центра O на угол a ($\overrightarrow{OM_a}$ – это единичный радиус-вектор).

Синус угла – это отношение ординаты точки M_a к радиусу окружности: $$\sin a = \frac{y}{R}.$$

Косинус угла – это отношение абсциссы точки M_a к радиусу окружности: $$\cos a = \frac{x}{R}.$$

Радиус единичной окружности равен единице $(R=1)$, поэтому: $\sin a = y$; $\cos a = x$. Синус угла a – это ордината единичного вектора; косинус угла a – это абсцисса единичного вектора.

Ось Oy называют ***осью синусов***, а ось Ox называют ***осью косинусов***.

Тангенс угла a – это отношение ординаты точки M_a к ее абсциссе: $$\operatorname{tg} a = \frac{y}{x} = \frac{\sin a}{\cos a}.$$

Прямая $x=1$ называется ***осью тангенсов*** (рис. 8.5).

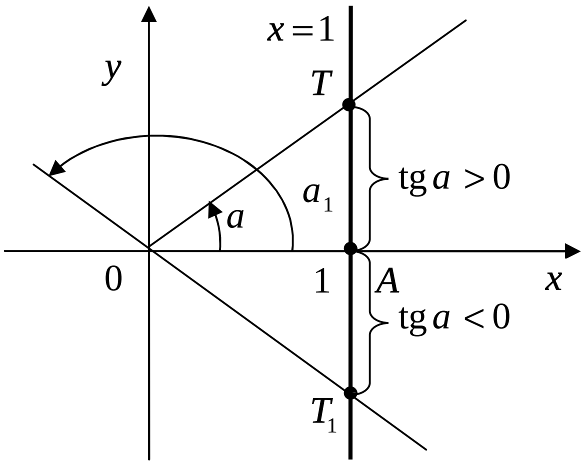


Рисунок 8.5

Тангенс угла a равен ординате соответствующей точки T на оси тангенсов.

Котангенсом угла a называется отношение абсциссы точки M_a к ее ординате: $\mathrm{ctg}\,a = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\cos a}{\sin a}$.

Прямая $y=1$ называется ***осью котангенсов*** (рис. 8.6)

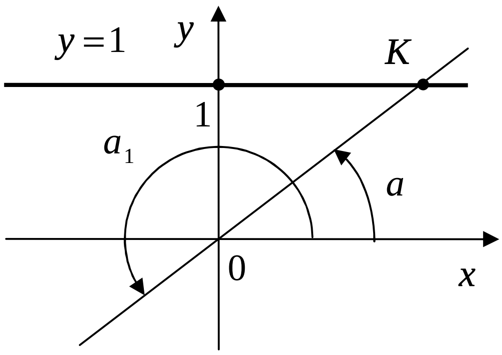


Рисунок 8.6

Котангенс угла a равен абсциссе соответствующей точки K на оси котангенсов.

Кроме функций синуса, косинуса, тангенса и котангенса используются еще две тригонометрические функции угла a – это секанс и косеканс.

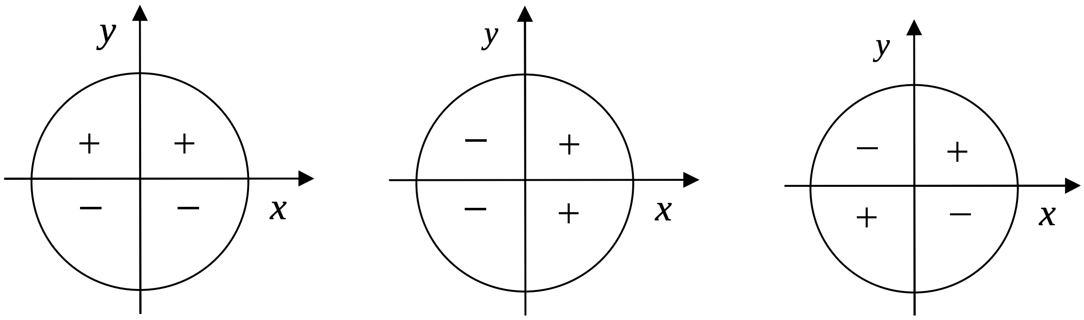
Секанс угла a – это величина, обратная $\cos a$:

$$\sec a = \frac{1}{\cos a};\ \cos a \neq 0.$$

Косеканс угла a – это величина, обратная $\sin a$:

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a};\ \sin a \neq 0.$$

Рассмотрим знаки тригонометрических функций $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{ctg} a$ в различных четвертях (квадрантах) (рис. 8.7)



Знаки $\sin a$ Знаки $\cos a$ Знаки $\operatorname{tg} a$ и $\operatorname{ctg} a$

Рисунок 8.7

<u>*Пример 3.*</u> Определите знак выражений: а) $\sin 2$; б) $\cos 6$.

Решение. Отметим углы в 2 и 6 радиан на тригонометрической окружности (рис. 8.8)

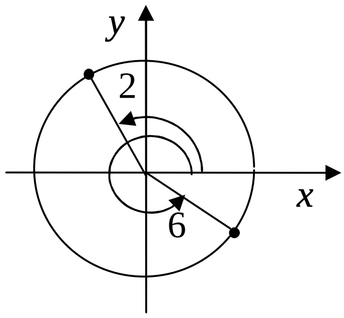


Рисунок 8.8

Мы знаем, что $p = 180^{\circ}$ и $p \approx 3{,}14$ радиан. Поэтому $\frac{p}{2} < 2 < p$; $\frac{3p}{2} < 6 < 2p$.

Поэтому угол $a = 2$ оканчивается во II четверти, а угол $a = 6$ оканчивается в III четверти. Тогда $\sin 2 > 0$; $\cos 6 > 0$.

Ответ. а) $\sin 2 > 0$; б) $\cos 6 > 0$.

Рассмотрим значения тригонометрических функций некоторых углов (табл. 8.2).

Таблица 8.2 – Значения тригонометрических функций некоторых углов

a	0	$\frac{p}{6}$	$\frac{p}{4}$	$\frac{p}{3}$	$\frac{p}{2}$	p	$\frac{3p}{2}$	$2p$
	0^{o}	30^{o}	45^{o}	60^{o}	90^{o}	180^{o}	270^{o}	360^{o}
$\sin a$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos a$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\, a$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\mathrm{ctg}\, a$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

Символ ∞ (бесконечность) означает, что $\mathrm{tg}\, a$ или $\mathrm{ctg}\, a$ при соответствующих значениях аргумента не определены и принимают сколь угодно большие значения по модулю.

Пример 4. Найдите значение выражений:

а) $5\sin 90^{o}+2\cos 0^{o}-2\sin 270^{o}+10\cos 180^{o}$;

б) $\mathrm{ctg}\frac{p}{2}+\mathrm{tg}p-\sin\frac{3p}{2}-\cos\frac{p}{2}+\sin p$.

Решение. а) $5\sin 90^{o}+2\cos 0^{o}-2\sin 270^{o}+10\cos 180^{o}=$

$=5\cdot 1+2\cdot 1-2\cdot(-1)+10\cdot(-1)=5+2+2-10=-1;$

б) $\mathrm{ctg}\frac{p}{2}+\mathrm{tg}p-\sin\frac{3p}{2}-\cos\frac{p}{2}+\sin p=0+0-(-1)-0+0=1.$

Ответ. а) -1; б) 1.

Пример 5. Упростите выражение: $x^2\sin^2\frac{p}{2}+y^2\cos^2 0+2xy\sin\frac{3p}{2}$.

Решение. $x^2\sin^2\frac{p}{2}+y^2\cos^2 0+2xy\sin\frac{3p}{2}=x^2\cdot 1^2+y^2\cdot 1^2+2xy(-1)=(x-y)^2$.

Ответ. $(x-y)^2$.

8.3. Основные тригонометрические тождества

Координаты любой точки $M_a(x;y)$ единичной окружности удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=1$. Мы знаем, что $\sin a=y$, а $\cos a=x$, поэтому: $\cos^2 a+\sin^2 a=1$.

ЗАПОМНИТЕ!

Соотношение $\cos^2 a+\sin^2 a=1$ называется ***основным тригонометрическим тождеством***.

Кроме этого, к основным тригонометрическим тождествам относят также выражения:

$$\operatorname{tg} a=\frac{\sin a}{\cos a};\quad \operatorname{ctg} a=\frac{\cos a}{\sin a};\quad \operatorname{ctg} a=\frac{1}{\operatorname{tg} a}\Rightarrow \operatorname{tg} a\cdot\operatorname{ctg} a=1;$$

$$1+\operatorname{tg}^2 a=\frac{1}{\cos^2 a}\Rightarrow 1+\operatorname{tg}^2 a=\sec^2 a\ ;$$

$$1+\operatorname{ctg}^2 a=\frac{1}{\sin^2 a}\Rightarrow 1+\operatorname{ctg}^2 a=\operatorname{cosec}^2 a\ .$$

<u>*Пример 6.*</u> Найдите значения остальных тригонометрических функций, если $\sin a=\frac{3}{5}$.

Решение. $\operatorname{cosec} a=\frac{1}{\sin a}=\frac{1}{3/5}\Rightarrow \operatorname{cosec} a=\frac{5}{3}$. Мы не знаем, в какой четверти находится угол a, поэтому $\cos a=\pm\sqrt{1-\sin^2 a}=\pm\sqrt{1-\frac{9}{25}}\Rightarrow \cos a=\pm\frac{4}{5}$;

$$\sec a=\frac{1}{\cos a}=\frac{1}{\pm\frac{4}{5}}\Rightarrow \sec a=\pm\frac{5}{4};$$

$$\operatorname{tg} a=\frac{3}{5}:\left(\pm\frac{4}{5}\right)=\pm\frac{3}{4};\qquad \operatorname{ctg} a=\frac{1}{\operatorname{tg} a}=\pm\frac{4}{3}.$$

Ответ. $\cos a=\pm\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} a=\pm\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} a=\pm\frac{4}{3}$; $\sec a=\pm\frac{5}{4}$; $\operatorname{cosec} a=\frac{5}{3}$.

<u>*Пример 7.*</u> Упростите выражение $A=\sqrt{\dfrac{1+\sin a}{1-\sin a}}+\sqrt{\dfrac{1-\sin a}{1+\sin a}}$, если $180^\circ < a < 270^\circ$.

Решение. $\sqrt{\dfrac{1+\sin a}{1-\sin a}}+\sqrt{\dfrac{1-\sin a}{1+\sin a}}=\sqrt{\dfrac{(1+\sin a)(1+\sin a)}{(1-\sin a)(1+\sin a)}}+\sqrt{\dfrac{(1-\sin a)(1-\sin a)}{(1+\sin a)(1-\sin a)}}=$

$$=\sqrt{\frac{(1+\sin a)^2}{1-\sin^2 a}}+\sqrt{\frac{(1-\sin a)^2}{1-\sin^2 a}}=\sqrt{\frac{(1+\sin a)^2}{\cos^2 a}}+\sqrt{\frac{(1-\sin a)^2}{\cos^2 a}}=$$

$$=\frac{|1+\sin a|}{|\cos a|}+\frac{|1-\sin a|}{|\cos a|}.$$

Учитывая, что $1+\sin a>0$ и $1-\sin a>0$, имеем:

$$\frac{|1+\sin a|}{|\cos a|}+\frac{|1-\sin a|}{|\cos a|}=\frac{1+\sin a+1-\sin a}{|\cos a|}=\frac{2}{|\cos a|}.$$

Если $180^\circ < a < 270^\circ$, то $\cos a<0$ и $\dfrac{2}{|\cos a|}=-\dfrac{2}{\cos a}$.

Ответ. $A=-\dfrac{2}{\cos a}$.

<u>*Пример 8.*</u> Докажите тождество: $3\left(\sin^4 a+\cos^4 a\right)-2\left(\sin^6 a+\cos^6 a\right)=1$.

Решение. $3\left(\sin^4 a+\cos^4 a\right)-2\left(\sin^6 a+\cos^6 a\right)=3\left(\sin^4 a+\cos^4 a\right)-$

$-2\left(\sin^2 a+\cos^2 a\right)\left(\sin^4 a-\sin^2 a\cos^2 a+\cos^4 a\right)=$

$=3\sin^4 a+3\cos^4 a-2\sin^4 a+2\sin^2 a\cos^2 a-2\cos^4 a=$

$=\sin^4 a+\cos^4 a+2\sin^2 a\cos^2 a=\left(\sin^2 a+\cos^2 a\right)^2=1$, что и требовалось доказать.

8.4. Формулы приведения

Формулами приведения называются соотношения, с помощью которых можно привести тригонометрические функции аргументов вида $\dfrac{p}{2}\pm a$, $p\pm a$, $\dfrac{3p}{2}\pm a$, $2p\pm a$ к тригонометрическим функциям $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{ctg} a$.

Таблица 8.3 – Формулы приведения

Функция	Аргумент t						
	$\frac{p}{2}-a$	$\frac{p}{2}+a$	$p-a$	$p+a$	$\frac{3p}{2}-a$	$\frac{3p}{2}+a$	$2p-a$
$\sin t$	$\cos a$	$\cos a$	$\sin a$	$-\sin a$	$-\cos a$	$-\cos a$	$-\sin a$
$\cos t$	$\sin a$	$-\sin a$	$-\cos a$	$-\cos a$	$-\sin a$	$\sin a$	$\cos a$
$\mathrm{tg}\, t$	$\mathrm{ctg}\, a$	$-\mathrm{ctg}\, a$	$-\mathrm{tg}\, a$	$\mathrm{tg}\, a$	$\mathrm{ctg}\, a$	$-\mathrm{ctg}\, a$	$-\mathrm{tg}\, a$
$\mathrm{ctg}\, t$	$\mathrm{tg}\, a$	$-\mathrm{tg}\, a$	$-\mathrm{ctg}\, a$	$\mathrm{ctg}\, a$	$\mathrm{tg}\, a$	$-\mathrm{tg}\, a$	$-\mathrm{ctg}\, a$

ЗАПОМНИТЕ!

Для того чтобы легче запомнить формулы приведения, можно использовать следующие правила:

1. Знак полученного выражения определяется знаком исходного выражения, если условно считать угол a острым: $0<a<\frac{p}{2}$.
2. Если к числу a прибавляется число kp $(k\in Z)$ (т.е. число, которое изображается на горизонтальном диаметре единичной окружности), то название функции не меняется. А если прибавляется число $(2k+1)\cdot\frac{p}{2}$ (на вертикальном диаметре), то функция меняется на кофункцию (синус – на косинус, тангенс – на котангенс и наоборот) (табл. 8.3).

<u>*Пример 9.*</u> Вычислите без калькулятора: $A=\sin\frac{8p}{3}\cdot\mathrm{ctg}\frac{11p}{6}+\cos\frac{29p}{6}\cdot\mathrm{tg}\frac{4p}{3}$.

Решение. Используя формулы приведения и периодичность функций, получим:

$$\sin\frac{8p}{3}=\sin\left(2p+\frac{2p}{3}\right)=\sin\frac{2p}{3}=\sin\left(p-\frac{p}{3}\right)=\sin\frac{p}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\mathrm{ctg}\frac{11p}{6}=\mathrm{ctg}\frac{12p-p}{6}=\mathrm{ctg}\left(2p-\frac{p}{6}\right)=-\mathrm{ctg}\frac{p}{6}=-\sqrt{3};$$

$$\cos\frac{29\pi}{6}=\cos\frac{30\pi-\pi}{6}=\cos\left(5\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2\pi\cdot 2+\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=$$
$$=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3};$$
$$A=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt{3}=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=-3.$$

Ответ. $A=-3$.

8.5. Основные формулы тригонометрии

Приведем основные формулы тригонометрии, которые используются для тождественных преобразований тригонометрических выражений.

1. ***Формулы сложения аргументов:***

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha;$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\ \left(\alpha,\beta,\alpha\pm\beta\neq\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z\right);$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\pm 1}{\operatorname{ctg}\beta\pm\operatorname{ctg}\alpha}\ (\alpha,\beta,\alpha\pm\beta\neq n\pi,\ n\in Z).$$

2. ***Формулы двойного и тройного аргументов:***

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\ \left(\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z;\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z\right);$$
$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}\ \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z;\quad \alpha\neq k\pi,\ k\in Z\right);$$
$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$$
$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}\ \left(\alpha\neq\frac{\pi}{6}(2n+1),\ k\in Z\right);$$

$$\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{3\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha}\ \left(\alpha\neq\frac{\pi}{3}n,\ n\in Z\right).$$

3. *Формулы понижения степени:*

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2};\qquad\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}.$$

4. *Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:*

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right).$$

5. *Формулы преобразования суммы и разности одноименных тригонометрических функций:*

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\quad\left(\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z\right);$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\quad\left(\alpha,\beta\neq n\pi,\ n\in Z\right).$$

6. ***Формулы универсальной подстановки или формулы выражения тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента:***

$$\sin a = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{a}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}} \quad (a \neq p + np,\ n \in \mathrm{Z});$$

$$\cos a = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}} \quad (a \neq p + np,\ n \in \mathrm{Z});$$

$$\mathrm{tg}\, a = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{a}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}} \quad (a \neq p + 2np,\ n \in \mathrm{Z},\quad a \neq \frac{p}{2} + kp,\ k \in \mathrm{Z}).$$

7. ***Формулы тригонометрических функций половинного аргумента:***

$$\sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}};\ \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}};$$

$$\mathrm{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} \quad (a \neq p + 2np,\ n \in \mathrm{Z});$$

$$\mathrm{tg}\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{\sin a} \quad (a \neq np,\ n \in \mathrm{Z});$$

$$\mathrm{tg}\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1+\cos a} \quad (a \neq p + 2np,\ n \in \mathrm{Z});$$

$$\mathrm{ctg}\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1-\cos a} \quad (a \neq 2np,\ n \in \mathrm{Z});$$

$$\mathrm{ctg}\frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{\sin a} \quad (a \neq np,\ n \in \mathrm{Z});$$

8. *Формула введения вспомогательного аргумента:*

$$a\sin a + b\cos a = \sqrt{a^2 + b^2}\sin\left(a + j\right),$$

где угол $j \in \left]-p\,;p\right[$ однозначно определяется системой:

$$\begin{cases}\sin j = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \cos j = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases} \quad \left(|a|+|b|\neq 0\right).$$

<u>*Пример 10.*</u> Преобразуйте выражение $\sin x + \cos x$.

Решение. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\sin x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos x\right) =$

$$= \sqrt{2}\left(\sin x\cdot\cos\frac{p}{4} + \sin\frac{p}{4}\cdot\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{p}{4}\right).$$

Ответ. $\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{p}{4}\right)$.

<u>*Пример 11.*</u> Преобразуйте в произведение $A = \dfrac{\sin 4a + \sin 5a + \sin 6a}{\cos 4a + \cos 5a + \cos 6a}$.

Решение. Используем формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение. Получим:

$$A = \frac{\sin 4a + \sin 5a + \sin 6a}{\cos 4a + \cos 5a + \cos 6a} = \frac{2\sin 5a\cdot\cos(-a) + \sin 5a}{2\cos 5a\cdot\cos(-a) + \cos 5a} =$$

$$= \frac{\sin 5a\cdot\left(2\cos a + 1\right)}{\cos 5a\cdot\left(2\cos a + 1\right)} = \operatorname{tg} 5a$$

Ответ. $A = \operatorname{tg} 5a$.

<u>*Пример 12.*</u> Вычислите $A = \dfrac{\operatorname{tg}(a+b)}{\operatorname{tg} a}$, если $\sin(2a+b) = 3\sin b$.

Решение. Преобразуем исходное выражение: $A = \operatorname{tg}(a+b)\cdot\operatorname{ctg} a =$

$$= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}\cdot\frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\sin(a+b)\cdot\cos a}{\sin a\cdot\cos(a+b)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\sin(2a+b) + \sin b\right)}{\frac{1}{2}\left(\sin(2a+b) + \sin(-b)\right)} =$$

$$= \frac{\sin(2a+b) + \sin b}{\sin(2a+b) - \sin b} = \frac{3\sin b + \sin b}{3\sin b - \sin b} = \frac{4\sin b}{2\sin b} = 2,$$ так как $\sin(2a+b) = 3\sin b$.

Ответ. $A = 2$.

8.6. Простейшие тригонометрические уравнения

Тригонометрические уравнения – это уравнения, в которых неизвестная величина находится под знаком тригонометрических функций.

Простейшие тригонометрические уравнения – это уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

Решить простейшее тригонометрическое уравнение – это значит найти множество всех углов, для которых функция равна a.

Если тригонометрическое уравнение не является простейшим, то его нужно привести к одному или нескольким простейшим уравнениям. Для этого используют тождественные преобразования.

Рассмотрим решение простейших тригонометрических уравнений.

1. ***Уравнение*** $\mathbf{\sin x = a}$**.**

Мы знаем, что $|\sin x| \le 1$, поэтому уравнение имеет решение только, при $|a| \le 1$.

Известно, что $\sin x$ – это ордината единичного вектора. Поэтому, отложим величину a на оси OY и изобразим тригонометрическую окружность. Тогда получим два угла ($\arcsin a$ и $p - \arcsin a$), синус которых равен a (рис. 8.9).

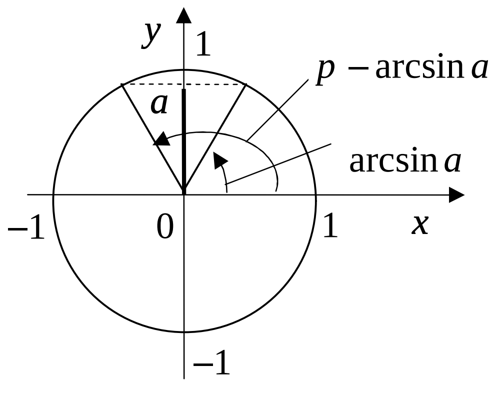


Рисунок 8.9

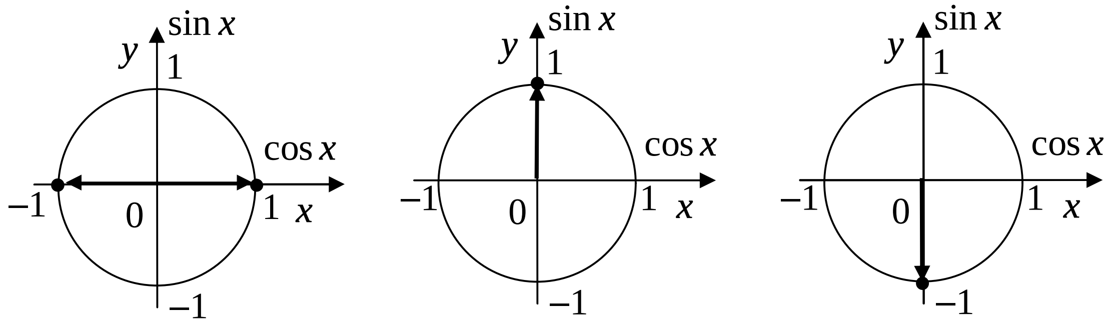
С учетом периодичности синуса получим два множества решений: $x_1 = \arcsin a + 2mp$ и $x_2 = p - \arcsin a + 2mp$, где $m \in Z$.

Приведем подобные члены в выражении для x_2, получим: $x_2 = -\arcsin a + (2m+1)p$, $m \in Z$.

Объединим полученные множества решений ($2m$ – четные числа; $2m+1$ – нечетные числа), получим:

$$x = (-1)^k \arcsin a + kp\ ,\ k \in Z;\ -\frac{p}{2} \le \arcsin a \le \frac{p}{2}.$$

При четном k $(k = 2m)$, получим множество решений x_1; при нечетном k $(k = 2m+1)$ получим множество решений x_2. Однако, если $a = 0$, $a = \pm 1$, то этой формулой пользоваться нецелесообразно. Рассмотрим соответствующие решения, используя тригонометрическую окружность (рис. 8.10).



$\sin x = 0$ $\qquad$ $\sin x = 1$ $\qquad$ $\sin x = -1$

$x = np\,,\, n \in Z$ $\qquad$ $x = \frac{p}{2} + 2np\,,\, n \in Z$ $\qquad$ $x = -\frac{p}{2} + 2np\,,\, n \in Z$

Рисунок 8.10

<u>*Пример 13.*</u> Решите уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + kp = (-1)^k \cdot \frac{p}{3} + kp$.

Ответ. $x = (-1)^k \cdot \frac{p}{3} + kp$, $k \in Z$.

<u>*Пример 14*</u>. Решите уравнение $\sin\left(2x-\frac{p}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. $\sin\left(2x-\frac{p}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2x-\frac{p}{4}=(-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+kp \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{p}{4}+(-1)^k\cdot\left(-\frac{p}{4}\right)+kp \Leftrightarrow x=\frac{p}{8}+(-1)^{k+1}\cdot\frac{p}{8}+\frac{kp}{2}.$$

Запишем результат в виде двух множеств решений:

при $k=2m$, тогда $x_1=\frac{p}{8}+(-1)^{2m+1}\cdot\frac{p}{8}+\frac{2mp}{2}=\frac{p}{8}-\frac{p}{8}+mp=mp$, $m\in Z$;

при $k=2m+1$, тогда $x_2=\frac{p}{8}+(-1)^{2m+2}\cdot\frac{p}{8}+\frac{(2m+1)p}{2}=\frac{p}{8}+\frac{p}{8}+\frac{p}{2}+mp=$

$$=\frac{3p}{4}+mp,\ m\in Z.$$

Ответ. $x=\frac{p}{8}+(-1)^{k+1}\cdot\frac{p}{8}+\frac{kp}{2}$, $k\in Z$.

2. *Уравнение* $\cos x = a$.

Уравнение имеет решение при $|a|\le 1$. Рассмотрим тригонометрическую окружность. Отложим на оси OX величину a и получим два угла ($\arccos a$ и $-\arccos a$), косинус которых равен a (рис. 8.11).

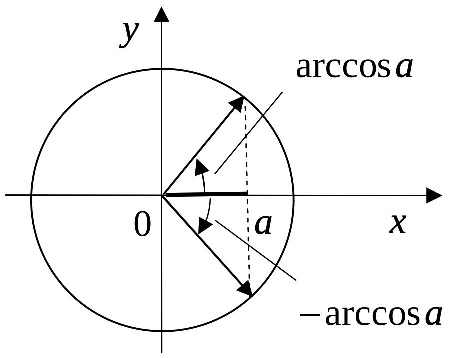


Рисунок 8.11

С учетом периодичности косинуса получим два множества решений: $x_1=\arccos a+2kp$ и $x_2=-\arccos a+2kp$, $k\in Z$.

Эти два множества можно объединить в одно:

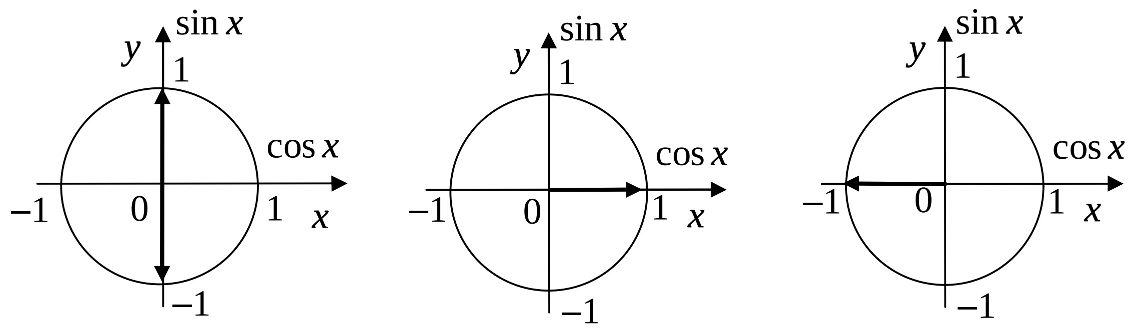
$$x=\pm\arccos a+2kp,\ k\in Z,\ \text{где } 0\le\arccos a\le p.$$

Для частных случаев $a = 0$; $a = \pm 1$:

а) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{p}{2} + kp$, $k \in \mathrm{Z}$;

б) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2kp$, $k \in \mathrm{Z}$;

в) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = p + 2kp$, $k \in \mathrm{Z}$ (рис. 8.12).



$\cos x = 0$ $\quad$ $\cos x = 1$ $\quad$ $\cos x = -1$

$x = \frac{p}{2} + kp, k \in \mathrm{Z}$ $\quad$ $x = 2kp, k \in \mathrm{Z}$ $\quad$ $x = p + 2kp, k \in \mathrm{Z}$

Рисунок 8.12

<u>*Пример 15*</u>. Решите уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Решение. При решении уравнений вида $\cos x = a$, где $a < 0$, важно помнить, что: $x = \pm(p - \arccos a) + 2kp$, $(k \in Z)$. Поэтому запишем:

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \arccos\left(p - \frac{1}{2}\right) + 2kp \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\left(p - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2kp \Leftrightarrow x = \left(p - \frac{p}{3}\right) + 2kp \Leftrightarrow x = \pm\frac{2p}{3} + 2kp,\ k \in \mathrm{Z}.$$

Ответ. $\left\{\pm\frac{2p}{3} + 2kp,\ k \in \mathrm{Z}\right\}$.

3. *Уравнения* $\mathbf{tg}\, x = a$ *и* $\mathbf{ctg}\, x = a$.

Известно, что функции тангенс и котангенс – функции неограниченные. Рассмотрим тригонометрическую окружность. Проведем оси тангенсов и котангенсов. Отложим на них величину a. Найдем значения углов при различных значениях a (рис. 8.13).

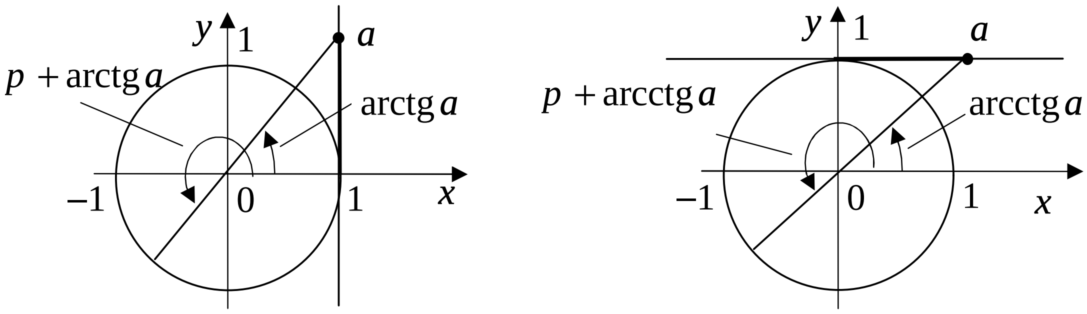


Рисунок 8.13

Для произвольного a получим:

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + kp,\ k \in Z, \text{ где } -\frac{p}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{p}{2};$$

$$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + kp,\ k \in Z, \text{ где } -\frac{p}{2} < \operatorname{arcctg} a < \frac{p}{2}.$$

Для частных случаев $a = 0$; $a = \pm 1$ получим:

а) $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = kp,\ k \in Z;$ $\quad \operatorname{ctg} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{p}{2} + kp,\ k \in Z;$

б) $\operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{p}{4} + kp,\ k \in Z;$ $\quad \operatorname{ctg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{p}{4} + kp,\ k \in Z;$

в) $\operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{p}{4} + kp,\ k \in Z;$ $\quad \operatorname{ctg} x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3p}{4} + kp,\ k \in Z.$

__Пример 16__. Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{p}{5}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. При решении уравнений, в которые входят функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$,

находим ОДЗ: $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{p}{5}\right) = \dfrac{\sin\left(2x + \frac{p}{5}\right)}{\cos\left(2x + \frac{p}{5}\right)} \Rightarrow \cos\left(2x + \frac{p}{5}\right) \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x + \frac{p}{5} \neq \frac{p}{2} + kp \Rightarrow 2x \neq \frac{p}{4} + \frac{kp}{2} - \frac{p}{10} \Rightarrow x \neq \frac{3p}{20} + \frac{kp}{2},\ k \in Z.$$

Решим исходное уравнение $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{p}{5}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 2x + \frac{p}{5} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + kp \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{p}{5} = -\frac{p}{6} + kp \Leftrightarrow 2x = -\frac{p}{5} - \frac{p}{6} + kp \Leftrightarrow x = -\frac{11}{60}p + \frac{kp}{2},\ k \in Z.$$

Ответ. $\left\{-\frac{11}{60}p + \frac{kp}{2},\ k \in Z\right\}$.

<u>*Пример 17.*</u> Решите уравнение $\operatorname{ctg}\left(3x+\frac{p}{4}\right)=-\sqrt{3}$.

Решение. Найдем ОДЗ: $\operatorname{ctg}\left(3x+\frac{p}{4}\right)=\frac{\cos\left(3x+\frac{p}{4}\right)}{\sin\left(3x+\frac{p}{4}\right)} \Rightarrow \sin\left(3x+\frac{p}{4}\right)\neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3x+\frac{p}{4}\neq kp \Rightarrow x\neq -\frac{p}{12}+\frac{kp}{3},\ k\in \mathrm{Z}.$$

Решим исходное уравнение:

$$\operatorname{ctg}\left(3x+\frac{p}{4}\right)=-\sqrt{3} \Leftrightarrow 3x+\frac{p}{4}=\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)+kp \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x=-\frac{p}{4}+\left(p-\operatorname{arcctg}\sqrt{3}\right)+kp \Leftrightarrow 3x=-\frac{p}{4}+p-\frac{p}{6}=kp \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{7p}{36}+\frac{kp}{3},\ k\in \mathrm{Z}.$$

Ответ. $\left\{\frac{7p}{36}+\frac{kp}{3},\ k\in \mathrm{Z}\right\}$

Приведем обобщенную таблицу решений простейших тригонометрических уравнений (табл. 8.4). Во всех формулах таблицы $k\in \mathrm{Z}$.

Таблица 8.4 – Решение простейших тригонометрических уравнений

a	$\sin x=a$	$\cos x=a$	$\operatorname{tg} x=a$	$\operatorname{ctg} x=a$
$\lvert a\rvert<1$	$(-1)^k\arcsin a+kp$	$\pm\arccos a+2kp$	$\operatorname{arctg} a+kp$	$\operatorname{arcctg} a+kp$
$\lvert a\rvert>1$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\operatorname{arctg} a+kp$	$\operatorname{arcctg} a+kp$
$a=0$	kp	$\frac{p}{2}+kp$	kp	$\frac{p}{2}+kp$
$a=1$	$\frac{p}{2}+2kp$	$2kp$	$\frac{p}{4}+kp$	$\frac{p}{4}+kp$
$a=-1$	$-\frac{p}{2}+2kp$	$p+2kp$	$-\frac{p}{4}+kp$	$-\frac{p}{4}+kp$

8.7. Основные методы решения тригонометрических уравнений

Рассмотрим основные методы решения тригонометрических уравнений. Эти уравнения сводятся к простейшим тригонометрическим уравнениям, решение которых мы уже рассмотрели.

1. Метод приведения к одной функции

При решении уравнений часто используется основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, а также замена переменных.

<u>Пример 18.</u> Решите уравнение $\sin x + 2\cos^2 x - 1 = 0$.

Решение. Заменим $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получим:

$$\sin x + 2\cdot\left(1 - \sin^2 x\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$$

Сделаем замену $\sin x = t$, получим квадратное уравнение $2t^2 - t - 1 = 0$. Найдем решения:

а) $t_1 = \sin x = 1$ или $x_1 = \dfrac{p}{2} + 2kp$, $k \in \mathrm{Z}$;

б) $t_2 = \sin x = -\dfrac{1}{2}$ или $x_2 = (-1)^{k+1}\dfrac{p}{6} + kp$, $k \in \mathrm{Z}$.

Ответ. $\left\{\dfrac{p}{2} + 2kp; (-1)^{k+1}\dfrac{p}{6} + kp,\ k \in \mathrm{Z}\right\}$.

2. Решение уравнений, однородных относительно $\sin x$ *и* $\cos x$*, а также приводимых к однородным*

Однородное тригонометрическое уравнение относительно $\sin x$ и $\cos x$ – это такое уравнение, каждый член которого имеет одинаковую степень $\sin x$ и $\cos x$, а правая часть уравнения равна нулю.

Так, $a_0 \sin^k x + a_1 \sin^{k-1} x \cos x + a_2 \sin^{k-2} x \cos^2 x + \mathbf{K} + a_k \cos^k x = 0$ – это однородное уравнение k-й степени.

При решении однородных уравнений k-й степени используется деление каждого члена уравнения на $\cos^k a x$. При этом исходное уравнение сводится к уравнению относительно $\mathrm{tg}\, a x$.

Необходимо проверять, не приведет ли такое деление к потере решений: 1) если $a_0 \neq 0$, то потери решений не будет; 2) если $a_0 = 0$, то такое деление приведет к потере корней. Следовательно, в ответ нужно включить и решения уравнения $\cos a x = 0$, т.е. $x = \frac{p}{2a} + \frac{kp}{a}$, $k \in Z$.

Пример 19. Решите уравнение $2\sin x + 3\cos x = 0$.

Решение. Разделим обе части исходного однородного уравнения первой степени на $\cos x \neq 0$, получим:

$$2\operatorname{tg} x + 3 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{2}\right) + kp \Leftrightarrow x = -\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + kp,\ k \in Z.$$

Ответ. $\left\{-\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + kp,\ k \in Z\right\}$.

Пример 20. Решите уравнение $2\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$.

Решение. Разделим обе части исходного однородного уравнения второй степени на $\cos^2 x \neq 0$. Получим квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$: $2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x + 1 = 0$. Найдем решения этого уравнения относительно $\operatorname{tg} x$:

а) $\operatorname{tg} x_1 = -1 \Rightarrow x_1 = \operatorname{arctg}(-1) + kp \Rightarrow x_1 = -\frac{p}{4} + kp, k \in Z$;

б) $\operatorname{tg} x_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + kp \Rightarrow x_2 = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + kp$, $k \in Z$

Ответ. $\left\{-\frac{p}{4} + kp, k \in Z; -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + kp, k \in Z\right\}$.

Пример 21. Решите уравнение $\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0$.

Решение. Исходное уравнение не является однородным, но его можно привести к однородному при помощи замены $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$. Получим:

$$\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - 3\sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\sin x \cos x + \sin^2 x = 0.$$

Разделим все члены уравнения на $\cos^2 x \neq 0$. Получим:

$$\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = 1\\ \operatorname{tg} x = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{p}{4} + kp,\ k \in Z\\ x = \operatorname{acrtg} 2 + kp,\ k \in Z\end{array}\right. .$$

Ответ. $\left\{\frac{p}{4} + kp, k \in Z;\ \operatorname{arctg} 2 + kp, k \in Z\right\}$.

3. *Метод разложения на множители*

Использование этого метода основано на том, что уравнение $f\left(x\right)\cdot j\left(x\right)=0$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=0 \\ j\left(x\right)=0 \end{array}\right.$ в области определения уравнения $f\left(x\right)\cdot j\left(x\right)=0$.

<u>*Пример 22*</u>. Решите уравнение $\cos 2x=\cos 3x$.

Решение. $\cos 2x=\cos 3x \Leftrightarrow \cos 2x-\cos 3x=0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}=0$.

Решим совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{5x}{2}=0 \\ \sin\frac{x}{2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{5x}{2}=kp \\ \frac{x}{2}=kp \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{2k_1p}{5},\, k_1\in Z \\ x_2=2k_2p,\, k_2\in Z \end{array}\right..$$

Если приравнять x_1 и x_2, то увидим, что эти решения образуют одно множество: $x_1=x_2 \Leftrightarrow \frac{2k_1p}{5}=2k_2p \Leftrightarrow k_1=5k_2 \Rightarrow x_2\subset x_1 \Rightarrow x=\frac{2kp}{5}$.

Ответ. $\left\{\frac{2kp}{5};\; k\in Z\right\}$.

ЗАПОМНИТЕ!

При решении уравнений методом разложения на множители возможно появление посторонних корней. Чтобы исключить ошибки в ответе, рекомендуется находить ОДЗ. В ответе необходимо исключить решения, не удовлетворяющие ОДЗ.

<u>*Пример 23*</u>. Решите уравнение $\left(\sin x-1\right)\left(\operatorname{tg} x+1\right)=0$.

Решение. Найдем ОДЗ: $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{p}{2}+kp,\, k\in Z$. Решим совокупность уравнений: $\left[\begin{array}{l} \sin x-1=0 \\ \operatorname{tg} x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=1 \\ \operatorname{tg} x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{p}{2}+2np,\; n\in Z \\ x=-\frac{p}{4}+2mp,\; m\in Z \end{array}\right..$

Заметим, что решения $x=\frac{p}{2}+2np$ не входят в ОДЗ (ОДЗ: $x\neq\frac{p}{2}+kp$).

Поэтому ответом будут только решения $x=-\frac{p}{4}+2mp$, $m\in Z$.

Ответ. $\left\{-\frac{p}{4}+2mp,\ m\in Z\right\}$.

4. Метод понижения степени

При решении уравнений используют формулы понижения степени: $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$; $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$.

Пример 24. Решите уравнение $\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=\frac{3}{2}$.

Решение. Используем формулы понижения степени, получим:

$$\frac{1+\cos 6x}{2}+\frac{1+\cos 8x}{2}+\frac{1+\cos 10x}{2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \cos 6x+\cos 8x+\cos 10x=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \cos 10x+\cos 6x+\cos 8x=0$. Применим к первым двум слагаемым формулу преобразования суммы одноименных тригонометрических функций в произведение: $\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$.

Получим, $2\cos 8x\cos 2x+\cos 8x=0\Leftrightarrow \cos 8x\cdot(2\cos 2x+1)=0$.

Решим совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\cos 8x=0\\ 2\cos 2x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{p}{16}+\frac{kp}{8},\ k\in Z\\ x=\pm\frac{p}{3}+np,\ n\in Z\end{array}\right..$$

Ответ. $\left\{\frac{p}{16}+\frac{kp}{8};\ \pm\frac{p}{3}+np,\ \ k,n\in Z\right\}$.

Пример 25. Решите уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$.

Решение. Степень можно понизить выделением квадрата суммы:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}\Leftrightarrow\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{5}{8}.$$

Используя формулы $\sin^2 a+\cos^2 a=1$ и $\sin 2a=2\sin a\cdot\cos a$, получим:

$$1-\frac{\sin^2 2x}{2}=\frac{5}{8}\Leftrightarrow 2-\sin^2 2x=\frac{10}{8}\Leftrightarrow \sin^2 2x=\frac{3}{4}\Leftrightarrow \sin 2x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=\pm\frac{p}{3}+kp \Leftrightarrow x=\pm\frac{p}{6}+\frac{kp}{2}, k\in Z.$$

Ответ. $\left\{\pm\frac{p}{6}+\frac{kp}{2}, k\in Z\right\}.$

5. *Метод преобразования произведения функций в сумму*

При решении уравнений целесообразно использовать следующие формулы:

$$\sin a\cos a=\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2};$$

$$\sin a\sin b=\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2};$$

$$\cos a\cos b=\frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}.$$

<u>*Пример 26*</u>. Решите уравнение $\cos 3x\cos 9x=\cos x\cos 7x$.

Решение. Используем формулу преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, получим:

$$\frac{1}{2}(\cos 12x+\cos 6x)=\frac{1}{2}(\cos 8x+\cos 6x)\Leftrightarrow \cos 12x-\cos 8x=0.$$

Теперь используем формулу $\cos a-\cos b-=2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$ и выполним обратное преобразование. Получим: $-2\sin 10x\sin 2x=0$. Решим совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sin 10x=0\\ \sin 2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}10x=np\\ 2x=kp\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\frac{np}{10},\ n\in Z\\ x_2=\frac{kp}{2},\ k\in Z\end{array}\right..$$

Решения $x_2=\frac{kp}{2},\ k\in Z$ являются подмножеством решений $x_1=\frac{np}{10},\ n\in Z$ (при $n=5k$ решения x_1 и x_2 совпадают). Поэтому в ответе запишем только $x=\frac{np}{10},\ n\in Z$.

Ответ. $\left\{\frac{np}{10},\ n\in Z\right\}.$

6. *Метод введения вспомогательного аргумента*

Этот метод удобно использовать при решении уравнений вида $a\sin x + b\cos x = c$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Разделим обе части уравнения на первый коэффициент: $a\sin x + b\cos x = c \Leftrightarrow \sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$. Теперь заменим $\frac{b}{a}$ через $\operatorname{tg} j$ (j – это вспомогательный аргумент или вспомогательный угол), т.е.: $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} j \Rightarrow j = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

Подставим в уравнение вместо $\frac{b}{a}$ значение $\operatorname{tg} j = \frac{\sin j}{\cos j}$ и освободим левую часть от знаменателя:

$$\sin x + \frac{\sin j}{\cos j}\cos x = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos j + \sin j \cdot \cos x = \frac{c}{a}\cos j \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + j) = \frac{c}{a}\cos j .$$

Уравнение имеет решение только при $\left|\frac{c}{a}\cos j\right| \leq 1$.

Определим $\cos j$ через коэффициенты a, b, c:

$$1 + \operatorname{tg}^2 j = \sec^2 j \Rightarrow 1 + \frac{b^2}{a^2} = \sec^2 j \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{1}{\cos^2 j} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 j = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow \cos j = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Аналогично найдем: $\sin j = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Подставим значение $\cos j$ в уравнение $\sin(x + j) = \frac{c}{a}\cos j$. Получим:

$$\sin(x + j) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow x + j = (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + kp,\ k \in \mathrm{Z}.$$

ЗАПОМНИТЕ!

При решении тригонометрических уравнений методом введения вспомогательного аргумента используют следующие формулы:

1) $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+j\right)$;

2) $\cos j = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin j = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

3) $\sin\left(x+j\right) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow x+j = \left(-1\right)^k \arcsin\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + kp,\ k\in \mathrm{Z}.$

<u>*Пример 27.*</u> Решите уравнение $2\sin x + 3\cos x = 4$.

Решение. В нашем случае $a=2$, $b=3$, $c=4$. Найдем $\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2^2+3^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{13}} > 1$. Тогда исходное уравнение можно привести к уравнению $\sin\left(x+j\right) = \dfrac{4}{\sqrt{13}} > 1 \Rightarrow x\in\varnothing$.

Ответ. $\{\varnothing\}$.

<u>*Пример 28.*</u> Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \dfrac{1}{2}\sin 5x = 1$.

Решение. Вспомогательный угол можно ввести следующим образом: $\sin j = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos j = \dfrac{1}{2}$, тогда $j = \dfrac{p}{3}$.

Подставим значения $\sin\dfrac{p}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos\dfrac{p}{3} = \dfrac{1}{2}$ в уравнение. Получим:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\sin 5x = 1 \Leftrightarrow \sin\frac{p}{3}\cos 5x + \sin 5x\cos\frac{p}{3} = 1 \Leftrightarrow \sin\left(5x+\frac{p}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x + \frac{p}{3} = \frac{p}{2} + 2kp \Leftrightarrow x = \frac{p}{30} + \frac{2kp}{5},\ k\in \mathrm{Z}.$$

Ответ. $\left\{\dfrac{p}{30} + \dfrac{2kp}{5},\ k\in \mathrm{Z}\right\}$.

<u>*Пример 29.*</u> Решите уравнение $3\sin x + 2\cos x = 1$.

Решение. По формулам $\cos j = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin j = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ найдем значения $\cos j = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$ и $\sin j = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

Преобразуем исходное уравнение: $3\sin x + 2\cos x = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{13}\cdot\left(\sin x\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\cos x\right) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{13}\cdot\sin(x+j) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(x+j) = \frac{1}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow x + j = (-1)^k \arcsin\frac{1}{\sqrt{13}} + kp,\ k \in \mathrm{Z}.$$

Мы знаем, что $\cos j = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin j = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\mathrm{tg}\, j = \dfrac{2}{3}$, тогда $j = \mathrm{arctg}\dfrac{2}{3}$ или $j = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{13}}$, или $j = \arcsin\dfrac{2}{\sqrt{13}}$. Поэтому решение уравнения можно записать так:

а) $x = -\mathrm{arctg}\dfrac{2}{3} + (-1)^k \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{13}} + kp$, $k \in \mathrm{Z}$; или

б) $x = -\arccos\dfrac{3}{\sqrt{13}} + (-1)^k \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{13}} + kp$, $k \in \mathrm{Z}$; или

в) $x = -\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{13}} + (-1)^k \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{13}} + kp$, $k \in \mathrm{Z}$.

Ответ. $\left\{-\mathrm{arctg}\dfrac{2}{3} + (-1)^k \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{13}} + kp,\ k \in \mathrm{Z}\right\}$.

7. Метод универсальной подстановки $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$

При использовании метода универсальной подстановки значения $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$ и $\mathrm{ctg}\, x$ удобно выражать через $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$ по следующим формулам:

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}};\ \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}};\ \mathrm{tg}\, x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}};\ \mathrm{ctg}\, x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}.$$

ЗАПОМНИТЕ!

Использование универсальной подстановки возможно при $\frac{x}{2} \neq \frac{p}{2} + kp$, т.е. $x \neq p + 2kp$, $k \in Z$. Поэтому при решении нужно проверять, не являются ли числа вида $x = p + 2kp$, $k \in Z$ решениями исходного уравнения.

<u>*Пример 30.*</u> Решите уравнение $2\sin x + \cos x = 2$.

Решение. Заменим $\sin x$ и $\cos x$ на $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, получим:

$$2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 2 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1;\ t_2 = \frac{1}{3}.$$

Тогда из уравнения $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$ получаем: $\frac{x}{2} = \frac{p}{4} + kp \Leftrightarrow x = \frac{p}{2} + 2kp$, $k \in Z$.

Из уравнения $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$ получаем: $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + np \Leftrightarrow x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2np$, $n \in Z$.

Проверим, удовлетворяют ли исходному уравнению числа $x = p + 2mp$, $m \in Z$. Для этого подставим $x = p + 2mp$ в исходное уравнение: $2\sin(p + 2mp) + \cos(p + 2mp) = 2 \cdot 0 + (-1) = -1 \neq 2$; значит, числа $x = p + 2mp$, $m \in Z$ не являются решениями исходного уравнения.

Ответ. $\left\{x = \frac{p}{2} + 2kp;\ 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2np,\ k, n \in Z\right\}$.

<u>*Пример 31*</u>. Решите уравнение $\sin x + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 2$.

Решение. Найдем ОДЗ уравнения: $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \Rightarrow \sin\frac{x}{2} \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \neq kp \Rightarrow$.

$\Rightarrow x \neq 2kp$, $k \in Z$. Используем подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$:

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{2t^3 - t^2} - 2t^2 \underline{+t} + t - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \cdot (2t^2 - t + 1) - (2t^2 - t + 1) = 0 \Leftrightarrow (2t^2 - t + 1) \cdot (t - 1) = 0.$$

Дискриминант трехчлена $2t^2 - t + 1$ меньше нуля $(D = 1 - 8 < 0)$, следовательно: $2t^2 - t + 1 > 0$.

Тогда $t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{p}{4} + kp \Leftrightarrow x = \dfrac{p}{2} + 2kp,\ k \in \mathrm{Z}$.

Проверим, удовлетворяет ли значение $x = p$ исходному уравнению: $\sin p + \operatorname{ctg}\dfrac{p}{2} = 0 + 0 \neq 2 \Rightarrow x \neq p + 2kp,\ k \in \mathrm{Z}$.

Ответ. $\left\{\dfrac{p}{2} + 2kp,\ k \in \mathrm{Z}\right\}$.

8. *Метод подстановки* $\sin x \pm \cos x = t$

Подстановку удобно выполнять, когда в уравнении есть сумма (разность) и произведение функций синуса и косинуса.

Для того чтобы выразить через t произведение синуса на косинус, возведем в квадрат сумму $(\sin x + \cos x = t)$, а затем определим произведение $\sin x \cdot \cos x$ через t:

$$\sin x + \cos x = t \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 = t^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = t^2 \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Аналогично для $\sin x - \cos x = t$: $(\sin x - \cos x)^2 = t^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = t^2 \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{1 - t^2}{2}.$$

Следовательно, имеем две подстановки:

$$1)\ \begin{cases} \sin x + \cos x = t \\ \sin x \cdot \cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2} \end{cases};\quad 2)\ \begin{cases} \sin x - \cos x = t \\ \sin x \cdot \cos x = \dfrac{1 - t^2}{2} \end{cases}.$$

<u>*Пример 32.*</u> Решите уравнение $-\sin x + \cos x - \sin x \cdot \cos x = 1$.

Решение. Используем вторую подстановку:

$$-t - \frac{1 - t^2}{2} = 1 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2.$$

Тогда $t_1 = -1,\ t_2 = 3$. Но $|\sin x - \cos x| < 2$, поэтому $t = -1$: $\sin x - \cos x = -1$.

Для решения этого уравнения заменим $\cos x$ через $\sin\left(\dfrac{p}{2} - x\right)$ и по формуле $\sin a - \cos a = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$ преобразуем разность синусов в произведение:

$$\sin x - \cos x = -1 \Leftrightarrow \sin x - \sin\left(\frac{p}{2} - x\right) = -1 \Leftrightarrow 2\cos\frac{p}{4}\cdot\sin\left(x - \frac{p}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\left(x - \frac{p}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot\sin\left(x - \frac{p}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{p}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{p}{4} = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + kp \Leftrightarrow x - \frac{p}{4} = (-1)^k\left(-\frac{p}{4}\right) + kp \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{p}{4} = (-1)^{k+1}\cdot\frac{p}{4} + kp \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1}\cdot\frac{p}{4} + \frac{p}{4} + kp,\ k \in \mathrm{Z}.$$

Ответ. $\left\{(-1)^{k+1}\cdot\frac{p}{4} + \frac{p}{4} + kp,\ k \in \mathrm{Z}\right\}$.

8.8. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

Пример 33. Решите уравнение $\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{p}{3}$.

Решение. Найдем ОДЗ уравнения: $\begin{cases} |x| \le 1 \\ |2x| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$.

Пусть $\arcsin x = a$, $\arcsin 2x = b$, где $a, b \in \left[-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right]$. Данное уравнение может быть записано в виде: $a + b = \frac{p}{3} \Leftrightarrow a = \frac{p}{3} - b$.

Тогда $\sin a = \sin\left(\frac{p}{3} - b\right) \Leftrightarrow \sin a = \sin\frac{p}{3}\cos b - \cos\frac{p}{3}\sin b$. Значит:

$$\sin(\arcsin x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\arcsin 2x) - \frac{1}{2}\sin(\arcsin 2x) \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1-4x^2} - \frac{1}{2}\cdot 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1-4x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 = 3\cdot(1-4x^2) \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28x^2 = 3 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} \\ x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} \end{array}\right. \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Ответ. $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right\}$.

<u>*Пример 34*</u>. Решите уравнение $\operatorname{arctg}(1+x)+\operatorname{arctg}(1-x)=\frac{p}{4}$.

Решение. Область определения уравнения: $D=R$.

Обозначим $\operatorname{arctg}(1+x)=a$, $\operatorname{arctg}(1-x)=b$, где $a, b \in \left]-\frac{p}{2};\ \frac{p}{2}\right[$. Данное уравнение запишем в виде: $a+b=\frac{p}{4} \Leftrightarrow a=\frac{p}{4}-b$.

Тогда $\operatorname{tg} a=\operatorname{tg}\left(\frac{p}{4}-b\right) \Leftrightarrow \operatorname{tg} a=\frac{1-\operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg} b}$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(1+x)\right)=\frac{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(1-x)\right)}{1+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(1-x)\right)} \Leftrightarrow 1+x=\frac{1-1+x}{1-1-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+x=\frac{x}{2-x} \Leftrightarrow (1+x)(2-x)-x=0 \Leftrightarrow x^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Ответ. $\left\{\pm\sqrt{2}\right\}$.

<u>*Пример 35*</u>. Решите уравнение $2\operatorname{arctg}(x-1)=2\arccos\frac{x}{2}$.

Решение. ОДЗ уравнения: $\left|\frac{x}{2}\right| \le 1 \Leftrightarrow x \in [-2;\ 2]$. Обозначим $\operatorname{arctg}(x-1)=a$, $\arccos\frac{x}{2}=b$, где $a \in \left]-\frac{p}{2};\ \frac{p}{2}\right[$, $b \in [0;\ p]$, и запишем данное уравнение в виде $2a=b \Leftrightarrow a=\frac{b}{2}$. Тогда: $\operatorname{tg} a=\operatorname{tg}\frac{b}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} a=\sqrt{\frac{1-\cos b}{1+\cos b}}$ ($\operatorname{tg}\frac{b}{2} \ge 0$, т.к. $0 \le b \le \frac{p}{2}$). Значит, $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(x-1)\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\left(\arccos\frac{x}{2}\right)}{1+\cos\left(\arccos\frac{x}{2}\right)}} \Leftrightarrow x-1=\sqrt{\frac{1-\frac{x}{2}}{1+\frac{x}{2}}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x-1=\sqrt{\frac{2-x}{2+x}} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1=\frac{2-x}{2+x} \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2+x)\left(x^2-2x+1\right)=2-x \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2x=0 \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=2 \end{array}\right. \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right. \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}.$$

Ответ. $\left\{\sqrt{2}\right\}$.

8.9. Системы тригонометрических уравнений

Системы тригонометрических уравнений решают теми же методами, которые используются для решения алгебраических систем: метод подстановки, метод алгебраического сложения, метод замены переменных и другие.

<u>*Пример 36.*</u> Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x = 2\sin y \\ x - y = \dfrac{5p}{3} \end{cases}$.

Решение. Найдем ОДЗ: $D = (x; y \in R)$.

Выразим y из второго уравнения и подставим его в первое:

$$\begin{cases} y = x - \dfrac{5p}{3} \\ \sin x - 2\sin\left(x - \dfrac{5p}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - \dfrac{5p}{3} \\ \sin x - 2\left(\sin x \cdot \cos\dfrac{5p}{3} - \cos x \cdot \sin\dfrac{5p}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - \dfrac{5p}{3} \\ \sin x - 2\left(\dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - \dfrac{5p}{3} \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{p}{2} + pn \\ y = \dfrac{p}{2} - \dfrac{5p}{3} + pn,\ n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{p}{2} + pn \\ y = \dfrac{7}{6}p + pn,\ n \in Z \end{cases}$$

Ответ. $\left\{\left(\dfrac{p}{2}(2n+1);\ \dfrac{p}{6}(6n-7), n \in Z\right)\right\}$.

<u>*Пример 37*</u>. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 0,25 \\ \sin y \cdot \cos x = 0,75 \end{cases}$.

Решение. Область определения системы уравнений $D: x \in R;\ y \in R$.

Сложим и вычтем уравнения системы: $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x = 1 \\ \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 1 \\ \sin(x-y) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{p}{2} + 2np,\ n \in Z \\ x - y = (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{p}{6} + mp,\ m \in Z \end{cases}.$$

Обратите внимание, что нельзя в обоих уравнениях записать решения, используя только n, например, если: $\begin{cases} x+y=\dfrac{p}{2}+2np \\ x-y=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{p}{6}+np,\ n\in Z \end{cases}$, то это может привести к потере решений.

Рассмотрим для второго уравнения сначала $m=2k$, а затем $m=2k+1$:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=\dfrac{p}{2}+2np,\ n\in Z \\ x-y=\dfrac{p}{6}+p\cdot(2k+1),\ k\in Z \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=\dfrac{p}{2}+2np,\ n\in Z \\ x-y=-\dfrac{p}{6}+2kp,\ k\in Z \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=\dfrac{p}{2}+2np,\ n\in Z \\ x-y=\dfrac{7}{6}p+2kp,\ k\in Z \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=\dfrac{p}{2}+2np,\ n\in Z \\ x-y=-\dfrac{p}{6}+2kp,\ k\in Z \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{5}{6}p+p\cdot(n+k) \\ y=-\dfrac{p}{3}+p\cdot(n-k),\ n,k\in Z \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{p}{6}+p\cdot(n+k) \\ y=\dfrac{p}{3}+p\cdot(n-k),\ n,k\in Z \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. $\left\{\left(\dfrac{5}{6}p+p\cdot(n+k);\ -\dfrac{p}{3}+p\cdot(n-k)\right);\right.$

$$\left.\left(\dfrac{p}{6}+p\cdot(n+k);\ \dfrac{p}{3}+p\cdot(n-k)\right);\ n,k\in Z\right\}.$$

<u>*Пример 38.*</u> Решите систему уравнений $\begin{cases} 6\cos x+4\cos y=5 \\ 3\sin x+2\sin y=0 \end{cases}$.

Решение. Область определения системы уравнений $x\in R;\ y\in R$.

Запишем систему уравнений в виде: $\begin{cases} 6\cos x=5-4\cos y \\ 6\sin x=-4\sin y \end{cases}$.

Возведем оба уравнения в квадрат и сложим их:

$$36=25-40\cos y+16 \Leftrightarrow \cos y=\frac{1}{8} \Leftrightarrow y=\pm\arccos\frac{1}{8}+2np,\ n\in Z.$$

Учитывая, что $\cos y = \frac{1}{8}$, из первого уравнения системы находим: $\cos x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \pm\arccos\frac{3}{4} + 2mp,\ m \in Z$. Итак, получаем четыре множества решений, а именно:

а) $\begin{cases} x_1 = -\arccos\frac{3}{4} + 2mp,\ m \in Z \\ y_1 = -\arccos\frac{1}{8} + 2np,\ n \in Z \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_2 = -\arccos\frac{3}{4} + 2mp,\ m \in Z \\ y_2 = \arccos\frac{1}{8} + 2np,\ n \in Z \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x_3 = \arccos\frac{3}{4} + 2mp,\ m \in Z \\ y_3 = -\arccos\frac{1}{8} + 2np,\ n \in Z \end{cases}$; г) $\begin{cases} x_4 = \arccos\frac{3}{4} + 2mp,\ m \in Z \\ y_4 = \arccos\frac{1}{8} + 2np,\ n \in Z \end{cases}$.

Так как мы возводили уравнения системы в квадрат, то это могло привести к посторонним решениям. Поэтому полученные решения нужно проверить, подставив их в исходную систему. После проверки определяем, что решения $(x_1; y_1)$ и $(x_4; y_4)$ – посторонние, а $(x_2; y_2)$ и $(x_3; y_3)$ – это множество решений исходной системы.

Ответ. $\left\{\left(-\arccos\frac{3}{4} + 2mp;\ \arccos\frac{1}{8} + 2np\right);\right.$

$\left.\left(\arccos\frac{3}{4} + 2mp;\ -\arccos\frac{1}{8} + 2np\right);\ n, m \in Z\right\}$.

8.10. Тригонометрические неравенства

При решении неравенств с тригонометрическими функциями используются периодичность этих функций и их монотонность на соответствующих интервалах.

Рассмотрим решение простейших тригонометрических неравенств.

1. $\sin x > a$, $\sin x \ge a$, $\sin x < a$, $\sin x \le a$, $|a| \le 1$.

Множество решений этих неравенств найдем с помощью графика функции $y = \sin x$. Функция $y = \sin x$ имеет наименьший положительный период $2p$. Поэтому такие неравенства удобно решать сначала на интервале $[0;\ 2p]$.

Для решения таких неравенств, как правило, используют следующую последовательность действий:

– строим график функции $y = \sin x$;
– проводим прямую $y = a$;
– находим точки пересечения этой прямой с частью графика $y = \sin x$ (на отрезке длиной в $2p$);
– проецируем эти точки на ось Ox;
– получаем множество решений данного неравенства на рассматриваемом интервале;
– прибавим числа вида $2np$, $n \in Z$ к каждому из найденных решений (на отрезке длиной $2p$). Получим множество всех решений исходного неравенства.

<u>*Пример 39*</u>. Решите неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$.

Решение. Построим график функции $y = \sin x$ (рис. 8.14).

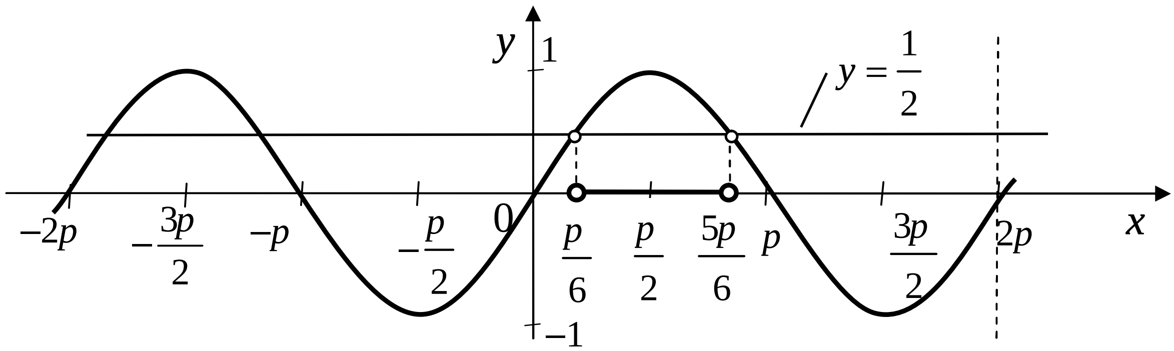


Рисунок 8.14

Выберем отрезок $[0;\ 2p]$ и проведем прямую $y = \frac{1}{2}$. Найдем точки пересечения этой прямой с синусоидой. Спроецируем эти точки на ось Ox, получим точки $x = \frac{p}{6}$ и $x = \frac{5p}{6}$. На графике видно, что при $x \in \left]\frac{p}{6};\ \frac{5p}{6}\right[$, $\sin x > \frac{1}{2}$. Поэтому, точки интервала $\left]\frac{p}{6};\ \frac{5p}{6}\right[$ являются множеством решений неравенства $\sin x > \frac{1}{2}$ на отрезке $[0;\ 2p]$.

Множество всех решений неравенства – совокупность интервалов:

$$\left\{ \left] \frac{p}{6} + 2np;\ \frac{5p}{6} + 2np \right[,\ n \in Z \right\}.$$

Ответ. $\left\{ \left] \frac{p}{6} + 2np;\ \frac{5p}{6} + 2np \right[,\ n \in Z \right\}.$

2. $\cos x < a$**,** $\cos x \le a$**,** $|a| \le 1$**.**

Множество решений этих неравенства найдем с помощью графика функции $y = \cos x$. Функция $y = \cos x$ имеет наименьший положительный период $2p$. Поэтому такие неравенства удобно решать сначала на каком-либо интервале длиной в $2p$, а именно на интервале $[0;\ 2p]$ ("впадина" на графике $y = \cos x$).

Далее решение исходных неравенств осуществляется по аналогии с тем, как решались неравенства $\sin x > a$, $\sin x \ge a$, $\sin x < a$, $\sin x \le a$. Рассмотрим это на примерах.

<u>*Пример 40.*</u> Решите неравенство $\cos x \le -\frac{1}{2}$.

Решение. Построим график функции $y = \cos x$ (рис. 8.15)

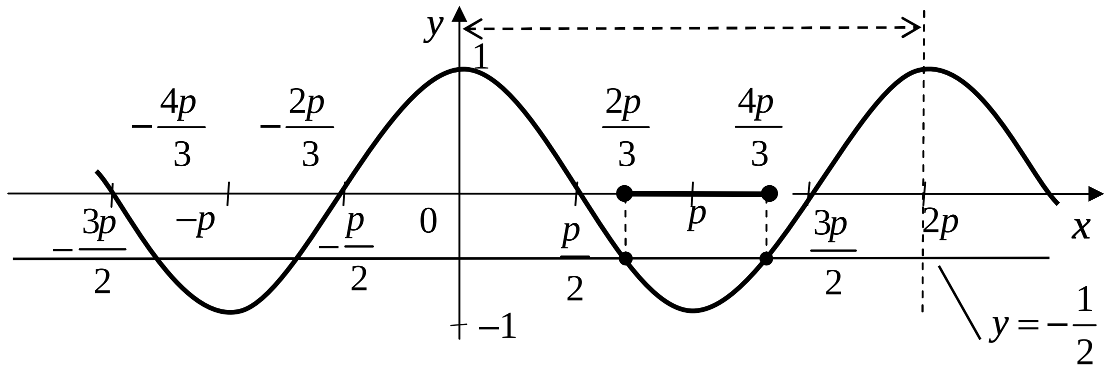


Рисунок 8.15

Выберем отрезок $[0;\ 2p]$ и проведем прямую $y = -\frac{1}{2}$. Найдем точки пересечения этой прямой с косинусоидой. Спроецируем эти точки на ось Ox, получим точки $x = \frac{2p}{3}$ и $x = \frac{4p}{3}$. Поэтому точки интервала $\left[\frac{2p}{3};\ \frac{4p}{3}\right]$ являются множеством решений неравенства $\cos x \le -\frac{1}{2}$ на отрезке $[0;\ 2p]$.

Множество всех решений неравенства – совокупность интервалов: $\left\{\left[\frac{2p}{3}+2np\,;\ \frac{4p}{3}+2np\right],\ n\in Z\right\}$.

Ответ. $\left\{\left[\frac{2p}{3}+2np\,;\ \frac{4p}{3}+2np\right],\ n\in Z\right\}$.

2 а. $\cos x > a$**,** $\cos x \ge a$**,** $|a|\le 1$**.**

Множество решений этих неравенств найдем также с помощью графика функции $y=\cos x$. Такие неравенства также удобно решать на интервале длиной в $2p$, а именно на интервале $[-p\,;\ p]$ ("холмик" на графике $y=\cos x$). Далее решают аналогично неравенствам $\cos x < a$ и $\cos x \le a$. Рассмотрим это на примере.

<u>*Пример 41*</u>. Решить неравенство $\cos x > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Постоим график функции $y = \cos x$ (рис. 8.16).

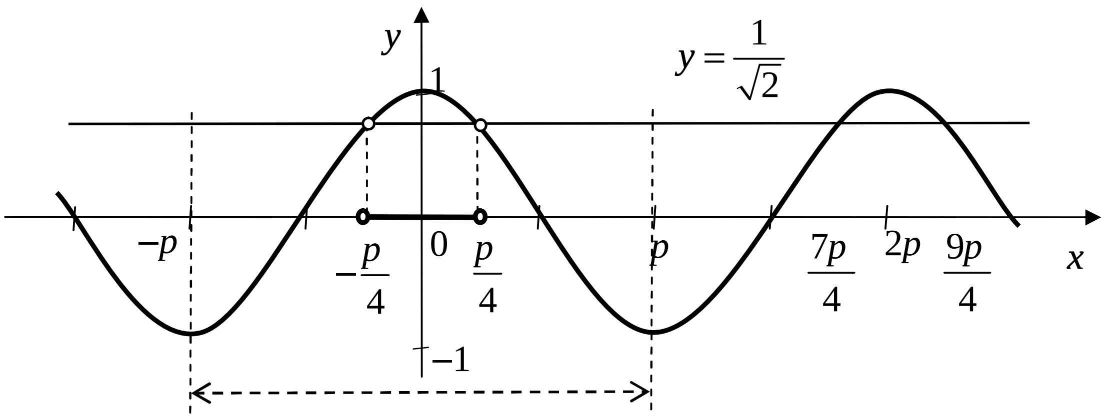


Рисунок 8.16

Выберем отрезок $[-p\,;\ p]$ и проведем прямую $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Найдем точки пересечения этой прямой с косинусоидой.

Спроецируем эти точки на ось Ox, получим точки $x=-\frac{p}{4}$ и $x=\frac{p}{4}$.

Значит, точки интервала $\left]-\frac{p}{4};\ \frac{p}{4}\right[$ являются множеством решений неравенства $\cos x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ на отрезке $\left[-p;\ p\right]$.

Множество всех решений неравенства – совокупность интервалов $\left\{\left]-\dfrac{p}{4}+2np;\ \dfrac{p}{4}+2np\right[,\ n\in Z\right\}$.

Ответ. $\left\{\left]-\dfrac{p}{4}+2np;\ \dfrac{p}{4}+2np\right[,\ n\in Z\right\}$.

<u>*Пример 42*</u>. Решите неравенство $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \le \cos x < \dfrac{1}{2}$.

Решение. Рассмотрим график функции $y = \cos x$ на отрезке $\left[-p;\ p\right]$ (рис. 8.17)

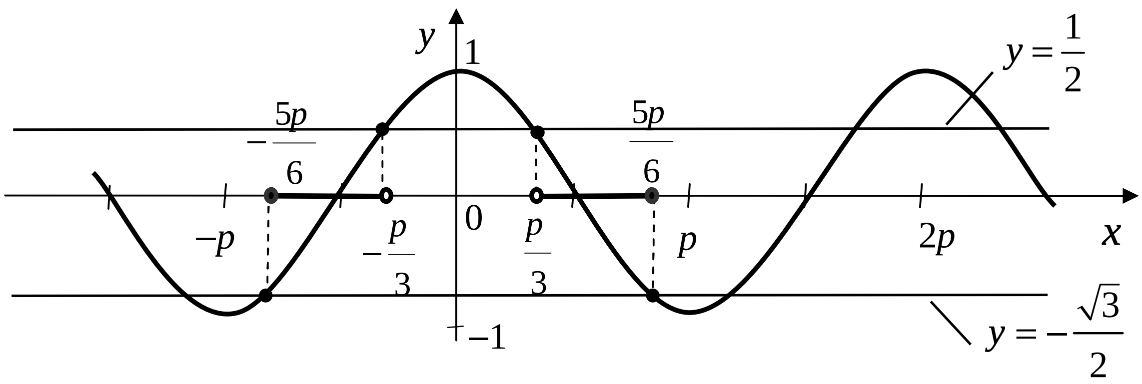


Рисунок 8.17

Рассмотрим части косинусоиды, которые лежат между прямыми $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $y=\dfrac{1}{2}$. Тогда, на отрезке $\left[-p;\ p\right]$ множеством решений неравенства будет объединение интервалов: $\left[-\dfrac{5}{6}p;\ -\dfrac{p}{3}\right[\ \mathbf{U}\ \left]\dfrac{p}{3};\ \dfrac{5}{6}p\right]$.

Следовательно, множество всех решений данного неравенства – это совокупность множеств:

$$\left[-\frac{5}{6}p+2np;\ -\frac{p}{3}+2np\right[\ \mathbf{U}\ \left]\frac{p}{3}+2np;\ \frac{5}{6}p+2np\right],\ n\in Z.$$

Ответ. $\left\{\left[-\dfrac{5}{6}p+2np;\ -\dfrac{p}{3}+2np\right[\ \mathbf{U}\ \left]\dfrac{p}{3}+2np;\ \dfrac{5}{6}p+2np\right],\ n\in Z\right\}$

3. $\operatorname{tg} x > a$**,** $\operatorname{tg} x \geq a$**,** $\operatorname{tg} x < a$**,** $\operatorname{tg} x \leq a$**.**

Множество решений этих неравенств найдем с помощью графика функции $y = \operatorname{tg} x$. Функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет наименьший положительный период p. Такие неравенства удобно сначала решать на интервале $\left]-\frac{p}{2};\ \frac{p}{2}\right[$. Далее решают аналогично предыдущим неравенствам.

Прибавляя числа вида np, $n \in \mathrm{Z}$ к найденным решениям на интервале $\left]-\frac{p}{2};\ \frac{p}{2}\right[$, получим все решения неравенств $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x \geq a$, $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{tg} x \leq a$.

Из графика $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 8.18) следует, что множество всех решений неравенства $\operatorname{tg} x \geq a$ – это совокупность интервалов $\left\{\left[\operatorname{arctg} a + np;\ \frac{p}{2} + np\right[,\ n \in \mathrm{Z}\right\}$.

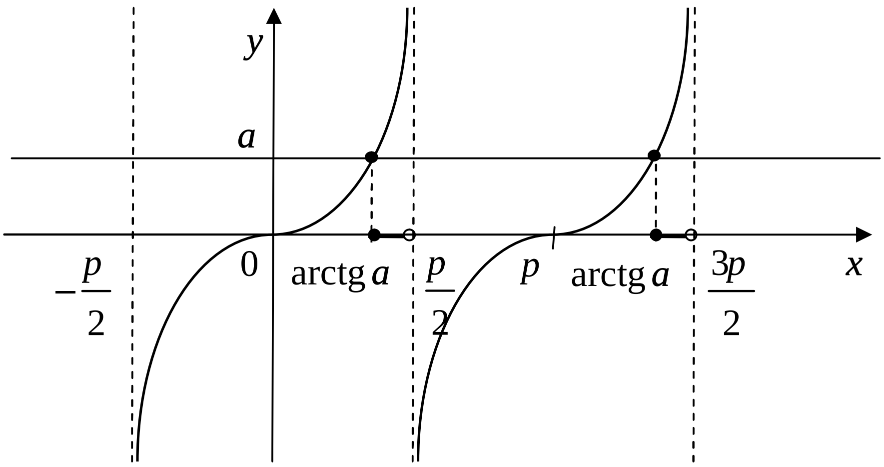


Рисунок 8.18

Рассмотрим решения неравенств $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x \geq a$, $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{tg} x \leq a$ на примерах.

Пример 43. Решить неравенство $\operatorname{tg} x < 2$.

Решение. Построим график функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 8.19).

Проведем прямую $y = 2$. Найдем точки пересечения этой прямой с тангенсоидой. Спроецируем эти точки на ось Ox, получим точки $x = -\frac{p}{2}$ и $x = \operatorname{arctg} 2$. Поэтому точки интервала $\left]-\frac{p}{2};\ \operatorname{arctg} 2\right[$ являются множеством решений неравенства $\operatorname{tg} x < 2$ на интервале $\left]-\frac{p}{2};\ \frac{p}{2}\right[$.

Множество всех решений неравенства $\operatorname{tg} x < 2$ – это совокупность интервалов $\left\{\left]-\frac{p}{2} + np;\ \operatorname{arctg} 2 + np\right[,\ n \in \mathrm{Z}\right\}$.

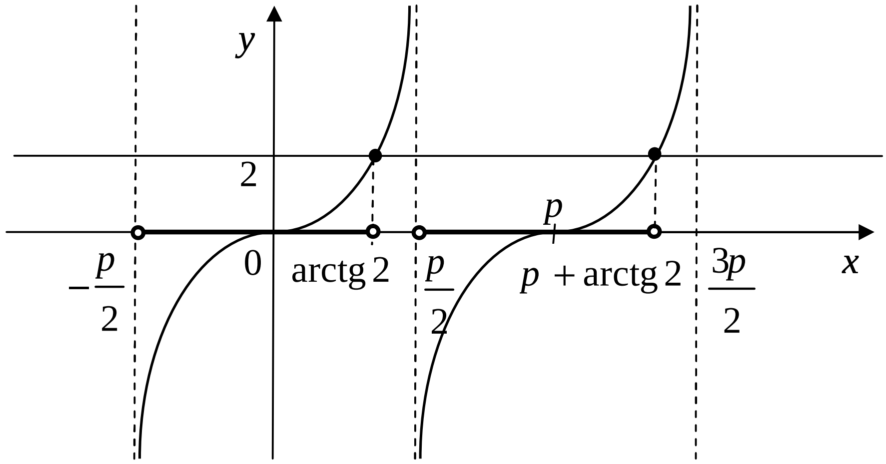


Рисунок 8.19

Ответ. $\left\{\left]-\frac{p}{2} + np;\ \operatorname{arctg} 2 + np\right[,\ n \in \mathrm{Z}\right\}$.

<u>Пример 44</u>. Решите неравенство $-1 \le \operatorname{tg}\left(2x - \frac{p}{4}\right) < \sqrt{3}$.

Решение. Сделаем замену $2x - \frac{p}{4} = t$. Получим неравенство: $-1 \le \operatorname{tg} t < \sqrt{3}$.

Рассмотрим график функции $y = \operatorname{tg} t$ на интервале $\left]-\frac{p}{2};\ \frac{p}{2}\right[$ и найдем множество решений данного неравенства на этом интервале (рис. 8.20). Множество решений неравенства $-1 \le \operatorname{tg}\left(2x - \frac{p}{4}\right) < \sqrt{3}$ на интервале $\left]-\frac{p}{2};\ \frac{p}{2}\right[$ – это интервал $\left[-\frac{p}{4};\ \frac{p}{3}\right[$.

Тогда, все решения исходного неравенства будут такими:

$$-\frac{p}{4}+np \le 2x-\frac{p}{4}<\frac{p}{3}+np,\ n\in \mathrm{Z} \Leftrightarrow \frac{p}{2}n \le x < \frac{7}{24}p+\frac{p}{2}n,\ n\in \mathrm{Z}.$$

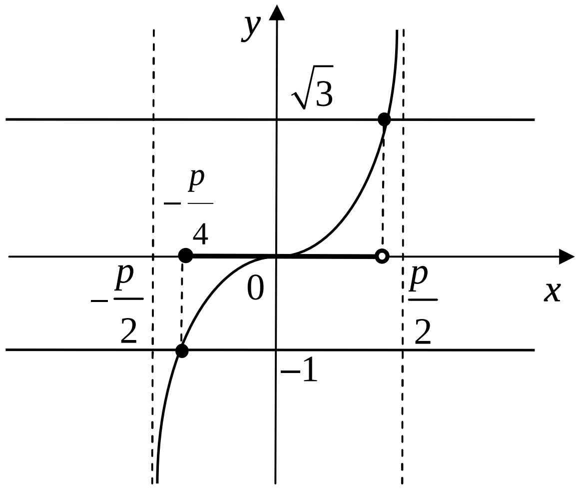


Рисунок 8.20

Ответ. $\left\{\left]\frac{p}{2}n;\ \frac{7}{24}p+\frac{p}{2}n\right],\ n\in \mathrm{Z}\right\}.$

4. $\mathrm{ctg}\,x>a$**,** $\mathrm{ctg}\,x\ge a$**,** $\mathrm{ctg}\,x<a$**,** $\mathrm{ctg}\,x\le a$**.**

Множество решений этих неравенств найдем с помощью графика функции $y=\mathrm{ctg}\,x$. Функция $y=\mathrm{ctg}\,x$ имеет наименьший положительный период p. Такие неравенства удобно сначала решать на интервале $]0;\,p\,[$. Далее решают аналогично предыдущим неравенствам.

Прибавляя числа вида np, $n\in \mathrm{Z}$ к найденным решениям на интервале $]0;\,p\,[$, получим все решения неравенств $\mathrm{ctg}\,x>a$, $\mathrm{ctg}\,x\ge a$, $\mathrm{ctg}\,x<a$, $\mathrm{ctg}\,x\le a$.

Из графика $y=\mathrm{ctg}\,x$ (рис. 8.21) следует, что множество всех решений неравенства $\mathrm{ctg}\,x\ge a$ – это совокупность интервалов $\left\{\left]np;\ \mathrm{arcctg}\,a+np\,\right],\ n\in \mathrm{Z}\right\}$.

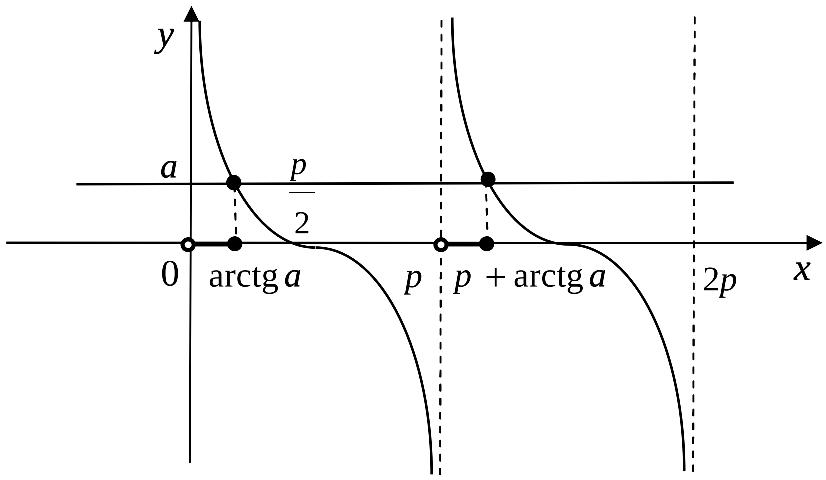


Рисунок 8.21

Рассмотрим решение неравенств вида $\operatorname{ctg} x > a$, $\operatorname{ctg} x \ge a$, $\operatorname{ctg} x < a$, $\operatorname{ctg} x \le a$ на примерах.

<u>Пример 45.</u> Решите неравенство $\operatorname{ctg} x \ge -2$.
Решение. Построим график функции $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 8.22).

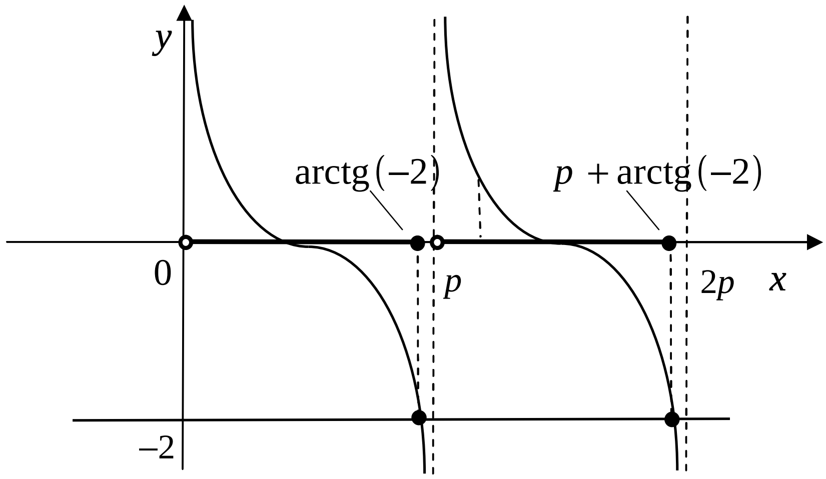


Рисунок 8.22

Проведем прямую $y = -2$. Найдем точки пересечения этой прямой с котангенсоидой. Спроецируем эти точки на ось Ox, получим точки $x = 0$ и $x = \operatorname{arcctg}(-2)$. Поэтому точки интервала $\left]0;\ \operatorname{arcctg}(-2)\right]$ являются множеством решений неравенства $\operatorname{ctg} x \ge -2$ на интервале $\left]0;\ p\right[$.

Множество всех решений неравенства – это совокупность интервалов:

$$\left\{\left]np;\ \operatorname{arcctg}(-2) + np\right],\ n \in \mathrm{Z}\right\}.$$

Ответ. $\left\{\left]np;\ \operatorname{arcctg}(-2) + np\right],\ n \in \mathrm{Z}\right\}$.

<u>*Пример 46.*</u> Решите неравенство $-\sqrt{3} < \operatorname{ctg}\left(3x + \dfrac{p}{8}\right) \le 1$.

Решение. Сделаем замену: $3x + \dfrac{p}{8} = t$.

Рассмотрим неравенство $-\sqrt{3} < \operatorname{ctg} t \le 1$ (рис. 8.23).

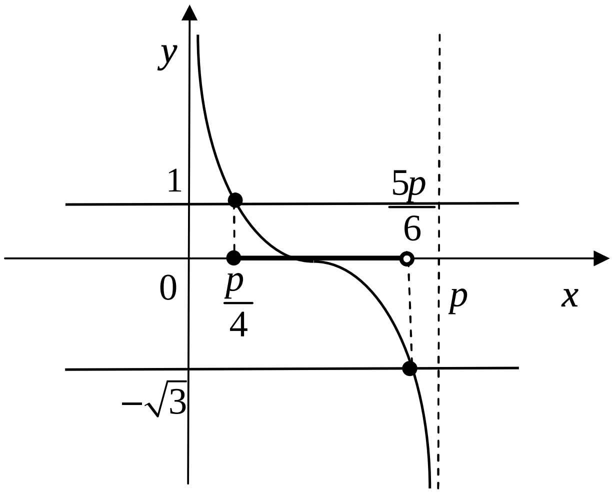


Рисунок 8.23

На интервале $]0;\ p[$ множество решений данного неравенства – это интервал $\left[\dfrac{p}{4};\ \dfrac{5p}{6}\right[$. Множество решений данного неравенства – это совокупность промежутков $\left[\dfrac{p}{4} + np;\ \dfrac{5p}{6} + np\right[$, $n \in \mathrm{Z}$. Тогда все решения исходного неравенства будут такими:

$$\frac{p}{4} + np \le 3x + \frac{p}{8} < \frac{5p}{6} + np,\ n \in \mathrm{Z} \Leftrightarrow \frac{p}{8} + np \le 3x < \frac{17p}{24} + np,\ n \in \mathrm{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{24} + n\frac{p}{3} \le x < \frac{17p}{72} + n\frac{p}{3},\ n \in \mathrm{Z}.$$

Ответ. $\left\{\left[\dfrac{p}{24} + n\dfrac{p}{3};\ \dfrac{17p}{72} + n\dfrac{p}{3}\right[,\ n \in \mathrm{Z}\right\}$.

<u>*Пример 47*</u>. Решите неравенство $\sin x \cdot \left(\cos x + \dfrac{1}{2}\right) \le 0$.

Решение. Данное неравенство эквивалентно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x \ge 0\\ \cos x + \dfrac{1}{2} \le 0\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x \le 0\\ \cos x + \dfrac{1}{2} \ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x \ge 0\\ \cos x \le -\dfrac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x \le 0\\ \cos x \ge -\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

Рассмотрим решение совокупности этих систем, используя графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ на отрезке $\left[0;\ 2p\right]$ (рис. 8.24).

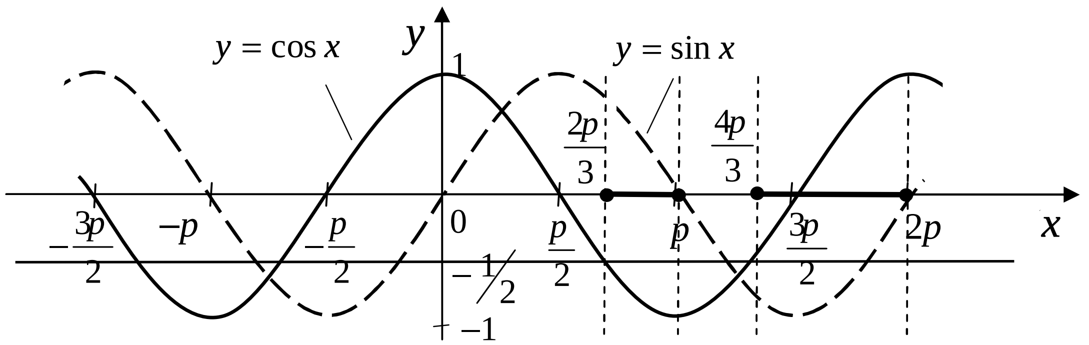


Рисунок 8.24

На отрезке $\left[0;\ 2p\right]$ решение данного неравенства – множество $\left[\dfrac{2}{3}p;\ p\right] \mathbf{U} \left[\dfrac{4}{3}p;\ 2p\right]$. Так, множество всех решений данного неравенства – это совокупность множеств

$$\left[\frac{2}{3}p + 2np;\ p\left(2n+1\right)\right] \mathbf{U} \left[\frac{4}{3}p + 2np;\ 2p\left(n+1\right)\right],\ n \in \mathrm{Z}.$$

Ответ. $\left\{\left[\dfrac{2}{3}p + 2np;\ p\left(2n+1\right)\right] \mathbf{U} \left[\dfrac{4}{3}p + 2np;\ 2p\left(n+1\right)\right],\ n \in \mathrm{Z}\right\}.$

<u>*Пример 48.*</u> Решите неравенство $\dfrac{\cos x + 2\cos^2 x + \cos 3x}{\cos x + 2\cos^2 x - 1} > 1.$

Решение. Найдем область определения данного неравенства:

$$D: 2\cos^2 x + \cos x - 1 \ne 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \ne -1\\ \cos x \ne \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \ne \left(2n+1\right)p,\ n \in \mathrm{Z}\\ x \ne \pm\dfrac{p}{3} + 2kp,\ k \in \mathrm{Z}.\end{cases}$$

Так, $D = R \setminus \left\{\left(2n+1\right)p;\ \pm\dfrac{p}{3} + 2kp,\ n,k \in \mathrm{Z}\right\}$.

Учитывая, что $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, запишем данное неравенство в виде: $\dfrac{\cos x + 2\cos^2 x + 4\cos^3 x - 3\cos x}{\cos x + 2\cos^2 x - 1} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 2\cos x}{\cos x + 2\cos^2 x - 1} > 1.$

Сделаем замену $\cos x = t$, $|t| \le 1$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} |t| \le 1 \\ \dfrac{4t^3 + 2t^2 - 2t}{t + 2t^2 - 1} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |t| \le 1 \\ t \ne 1 \\ t \ne \dfrac{1}{2} \\ 2t - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left]\frac{1}{2};\, 1\right].$$

Возвращаемся к неизвестной x и учитываем, что $\cos x \le 1$ при $x \in R$, тогда получим неравенство:

$$\cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{p}{3} + 2np;\, \frac{p}{3} + 2np\right[,\ n \in \mathrm{Z}.$$

Ответ. $\left\{\left]-\dfrac{p}{3} + 2np;\, \dfrac{p}{3} + 2np\right[,\ n \in \mathrm{Z}\right\}.$

<u>Пример 49</u>. Решите неравенство $\sin x \cdot \cos x < \dfrac{1}{4}$.

Решение. Умножим обе части исходного неравенства на 2 и используем формулу $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$. Получим:

$$\sin x \cdot \cos x < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos x < 2 \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5p}{6} + 2np < 2x < \frac{13p}{6} + 2np,\ n \in \mathrm{Z} \Leftrightarrow \frac{5p}{12} + np < x < \frac{13p}{12} + np,\ n \in \mathrm{Z}.$$

Ответ. $\left\{\dfrac{5p}{12} + np < x < \dfrac{13p}{12} + np,\ n \in \mathrm{Z}\right\}.$

<u>Пример 50</u>. Решите неравенство $|\sin x| > |\cos x|$.

Решение. По определению модуля можно записать, что: $|\sin x| \ge 0$ и $|\cos x| \ge 0$, значит можно возвести обе части исходного неравенства в квадрат. Получим:

$$|\sin x| > |\cos x| \Leftrightarrow |\sin x|^2 > |\cos x|^2 \Leftrightarrow (\sin x)^2 > (\cos x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x > 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x < 0 \Leftrightarrow \cos 2x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{2} + 2np < 2x < \frac{3p}{2} + 2np,\ n \in \mathrm{Z} \Leftrightarrow \frac{p}{4} + np < x < \frac{3p}{4} + np,\ n \in \mathrm{Z}.$$

Ответ. $\left\{\dfrac{p}{4} + np < x < \dfrac{3p}{4} + np,\ n \in \mathrm{Z}\right\}.$

Ответьте на вопросы

1. Что такое угол?
2. Какой угол называют положительным?
3. Какой угол называют отрицательным?
4. Что такое развернутый угол?
5. Что такое полный угол?
6. Что такое центральный угол?
7. В каких единицах измеряют углы?
8. Назовите связь между радианной и градусной мерой угла.
9. Дайте определение тригонометрическим функциям произвольного аргумента ($\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{ctg} a$).
10. Назовите основное тригонометрическое тождество.
11. Приведите таблицу значений тригонометрических функций некоторых, наиболее часто используемых углов.
12. Назовите знаки тригонометрических функций $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{ctg} a$ в различных квадрантах.
13. Какой основной период функций $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{ctg} a$?
14. Назовите основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.
15. Приведите формулы сложения аргументов.
16. Приведите формулы понижения степени.
17. Приведите формулы преобразования суммы и разности одноименных тригонометрических функций.
18. Приведите формулы универсальной подстановки.
19. Объясните, как использовать метод введения вспомогательного угла для выражений вида $c = a\sin x + b\cos x$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$.
20. Назовите формулы решения простейших тригонометрических уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

Задания для самостоятельной работы № 18

I. Выразите в радианах углы: 20°; 135^{o}; 240°; 50°; 150°; 315°.

II. Выразите в градусах данные углы: $\frac{p}{18}$; $\frac{p}{10}$; $\frac{2p}{3}$; $\frac{3p}{2}$; $\frac{5p}{2}$; $3p$.

III. Вычислите без использования таблиц и калькулятора значения тригонометрических выражений: $\sin 990^{\circ}$; $\sin\frac{37p}{2}$; $\cos 2760^{\circ}$; $\sin\frac{2003p}{3}$.

IV. Найдите значения тригонометрических функций угла a по следующим данным:

1) $\sin a = \frac{1}{3};\ 0 < a < \frac{p}{2}$; 2) $\cos a = -0,4;\ 90^{\circ} < a < 180^{\circ}$;

3) $\operatorname{tg} a = 0,5;\ 0^{\circ} < a < 90^{\circ}$; 4) $\operatorname{ctg} a = 3;\ 180^{\circ} < a < 270^{\circ}$.

V. Упростите выражения.

1) $\frac{\cos^2 a}{1-\cos^2 a}$; 2) $\operatorname{tg}^5 3a \cdot \operatorname{ctg}^5 3a$; 3) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 a} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 a}$;

4) $(\sin a + \cos a)^2 + (\sin a - \cos a)^2 + 19$; 5) $\frac{1-\operatorname{tg} 29^{\circ}\cdot\operatorname{tg} 31^{\circ}}{\operatorname{tg} 29^{\circ} + \operatorname{tg} 31^{\circ}}$;

6) $\cos 19^{\circ}\cos 41^{\circ} - \sin 19^{\circ}\sin 41^{\circ}$; 7) $\frac{(\sin a + \cos a)^2}{1+\sin 2a}$;

8) $2\sin(a+b)\sin(a-b) + \cos 2a$;

9) $(\sin a + \cos a)^3 + (\sin a - \cos a)^3 - 6(\sin a - \sin^3 a)$;

10) $\frac{1-2\sin^2 a + \sin^4 a}{1-2\cos^2 a + \cos^4 a}$; 11) $\frac{(\sin a + \cos a)^2 - 1}{\operatorname{tg} a - \sin a \cdot \cos a}$;

12) $\cos\left(a - \frac{p}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{p}{2}\right)$;

13) $8\operatorname{tg} 945^{\circ} + \operatorname{tg}(810^{\circ} + a) - \operatorname{ctg}(950^{\circ} - a)$;

14) $\operatorname{tg}(13p-a)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{13p}{2}+a\right)-\sin(a-22p)$;

15) $\sin(7p-a)\cdot\cos\left(\frac{15p}{2}+b\right)-\sin\left(\frac{19p}{2}-a\right)\cdot\cos(6p-b)$;

16) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{11p}{2}+a\right)\cdot\cos\left(\frac{7p}{2}-a\right)\cdot\cos(a-4p)}{\operatorname{ctg}(5p-a)\cdot\sin\left(\frac{11p}{2}+a\right)}$.

VI. Запишите выражения в виде произведения.

1) $\cos 15a+2\cos^2 15a-1$; 2) $\operatorname{tg}a+\sin a$; 3) $\sin 3a+\sin 6a+\sin 9a$;
4) $\cos 2a-\cos 3a-\cos 4a+\cos 5a$; 5) $\sin^2(a+b)+\sin^2(a-b)-1$;
6) $3-4\cos\frac{a}{2}+\cos a$; 7) $\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2(a+b)-2$.

VII. Докажите тригонометрические тождества (в области допустимых значений).

1) $6\sin^2 a+5\cos^2 a=\sin^2 a+5$;
2) $\operatorname{ctg}^2 a-\cos^2 a=\operatorname{ctg}^2 a\cdot\cos^2 a$;
3) $\sin^4 a+\sin^2 a\cdot\cos^2 a+\cos^2 a=1$;
4) $\sin^4 a+2\sin^2 a\cdot\cos^2 a+\cos^4 a=1$;
5) $\sin a\cdot\cos a\cdot(\operatorname{tg}a+\operatorname{ctg}a)=1$;
6) $\cos 5a\cdot\cos 4a-\sin 2a\cdot\sin a=\cos 6a\cdot\cos 3a$;
7) $\dfrac{1-2\cos^2 a}{\sin a\cdot\cos a}=\operatorname{tg}a-\operatorname{ctg}a$; 8) $\dfrac{1-2\cos^2 a}{\sin a\cdot\cos a}=\operatorname{tg}a-\operatorname{ctg}a$;
9) $\dfrac{\operatorname{ctg}(45^\circ-a)+1}{\operatorname{ctg}a+1}=\operatorname{tg}2a$; 10) $\operatorname{tg}^2 a+\operatorname{ctg}^2 a=\dfrac{2(3+\cos 4a)}{1-\cos 4a}$.

VIII. Вычислите без использования калькулятора.

1) $\sin(\arcsin 0,4)$; 2) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$; 3) $\arcsin\left(\sin\frac{p}{8}\right)$;
4) $\cos\left(\arccos\frac{1}{5}\right)$; 5) $\sin\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$; 6) $\arcsin\left(\sin\frac{p}{8}\right)$;

7) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{1}{4}\right)$; 8) $\sin(\mathrm{arctg}\,7-\mathrm{arctg}\,2)$;

9) $\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{1}{4}\right)$; 10) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{6}\right)$.

IX. Решите простейшие тригонометрические уравнения.

1) $\sin 3x=0$; 2) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sin x=\frac{1}{3}$; 4) $\cos\frac{x}{4}=0$;

5) $\mathrm{tg}\,6x=-1$; 6) $\mathrm{ctg}\,x=2$;

7) $\sin\left(2x-\frac{p}{6}\right)=0$; 8) $\cos\left(5x-\frac{5p}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

9) $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{3}+\frac{3p}{4}\right)=\sqrt{3}$; 10) $\mathrm{ctg}\left(4x-\frac{p}{9}\right)=-\sqrt{3}$;

11) $\sin\left(x-\frac{p}{3}\right)=\frac{p}{6}$; 12) $\frac{\sin x+1}{\cos x}=0$;

13) $\frac{\cos\left(x+\frac{p}{3}\right)}{2\sin x-1}=0$; 14) $\frac{\sin\left(x+\frac{p}{4}\right)}{\mathrm{tg}\,x+1}=0$.

X. Решите уравнения методом разложения на множители.

1) $\sin^2 x-\sin x=0$; 2) $\cos^3 x+\cos^2 x=0$;

3) $9\sin x\cdot\cos x=\sin x$; 4) $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,x\cdot\cos 4x=0$;

5) $2\cos x\cdot\cos 4x+\cos x-2\cos 4x-1=0$;

6) $\mathrm{ctg}\,x-\sin 2x\cdot\mathrm{ctg}\,x=0$; 7) $(\sin x-1)\cdot\mathrm{tg}\,x-3\sin x+3=0$;

8) $\mathrm{tg}\frac{3x}{2}\cdot\cos\left(\frac{p}{6}+x\right)=\cos\left(\frac{p}{6}+x\right)$.

XI. Решите уравнения методом приведения к одной функции.

1) $3\sin x-2\cos^2 x=-3$; 2) $2\sin^2 x+3\cos x=0$;

3) $\mathrm{tg}\,x=\mathrm{ctg}\,x$; 4) $2\,\mathrm{ctg}\,x-\mathrm{tg}\,x-1=0$;

5) $8\cos^2\frac{x}{2}+6\sin\frac{x}{2}-3=0$; 6) $3\sin\frac{x}{5}=2\cos^2\left(\frac{x}{5}+p\right)$;

7) $\sin^4 8x-4\cos^2 8x=-\frac{7}{16}$; 8) $3\operatorname{tg}^4 3x-\frac{7}{\operatorname{ctg}^2 3x}+2=0$.

XII. Решите уравнения методом универсальной подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.

1) $9\sin x+\cos x=9$; 2) $\sin x+4\cos x=-4$;
3) $5\sin x-\cos x=1$; 4) $\sin x+\cos x=1$;
5) $\sin x-\cos x=1$; 6) $\sin 2x+\cos 2x=\operatorname{tg} x$.

XIII. Решите однородные уравнения и уравнения, которые приводятся к однородным.

1) $6\sin x+7\cos x=0$;
2) $2\sin^2 x-5\sin x\cdot\cos x+3\cos^2 x=0$;
3) $2\sin^2 x+\cos^2 x=5\sin x\cdot\cos x$;
4) $6\sin^2 3x+\sin 3x\cdot\cos 3x-\cos^2 3x=2$;
5) $\sin^3 x-4\sin x\cdot\cos^2 x=-3\cos^3 x$;
6) $5\sin^3 x+4\sin^2 x\cdot\cos x-3\cos^3 x=3\sin x$;
7) $\sin^4 x+\sin^3 x\cdot\cos x+\sin x\cdot\cos^3 x+\cos^4 x=1$;
8) $2\sin^3 x+7\sin^2 x\cdot\cos x+3\sin x\cdot\cos^2 x=2\cos^3 x$.

XIV. Решите уравнения, используя формулы преобразования суммы (разности) тригонометрических функций в произведение и обратные преобразования.

1) $\sin 3x-\sin 2x-\sin x=0$;
2) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$;
3) $\cos x=\sin 3x$;
4) $\sin x\cdot\sin 7x=\sin 3x\cdot\sin 5x$;
5) $\cos x\cdot\cos 3x=\cos 5x\cdot\cos 7x$;
6) $2\sin 2x\cdot\sin 4x-\cos 2x=\sin 3x$.

XV. Решите уравнения методом введения вспомогательного аргумента.

1) $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 1$;

3) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2$; 4) $\sin 2x - \cos 2x = 1$;

5) $\sin\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{3} = 1$; 6) $\sin\frac{x}{5} + \cos\frac{x}{5} = \sqrt{5}$.

XVI. Решите уравнения, используя формулы понижения степени.

1) $\sin^2 3x = \frac{3}{4}$; 2) $\sin^2 2x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$;

3) $\cos^2 x + 3\cos^2\frac{x}{2} = 2$; 4) $4\cos^2 6x + 16\cos^2 3x = 13$;

5) $4\sin^4 x + \sin^2 2x = 1$; 6) $\cos^2 2x + \cos^2 4x - \sin^2 6x = \sin^2 8x$.

XVII. Решите уравнения, используя различные методы решения.

1) $\cos^4 x - \sin^4 x = \sin\left(\frac{9p}{2} - x\right)$; 2) $1 + 2\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{p}{4}\right) = 2\sin x$;

3) $\frac{\sin x - \sin 2x}{\cos x - 1 - \cos 2x} = \sqrt{3}$; 4) $2\sin 3x - 3\cos x = \cos 3x$;

5) $5\sin^4 x - \sin^2 2x - \cos^4 x + 2\cos 2x = 0$;

6) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 4 + 6\cos 4x$;

7) $(\sin x + \cos x)^2 - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0$;

8) $\sqrt{2\cos x - 1} = -\sin x$.

XVIII. Решите системы тригонометрических уравнений.

1) $\begin{cases} x + y = 2p \\ \sin x + \cos y = 1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = -\frac{3}{4} \\ \cos x \cdot \sin y = \frac{1}{4} \end{cases}$; 3) $\begin{cases} \cos(x + y) = 1 \\ \cos(x - y) = -1 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 \\ x + y = \dfrac{p}{4} \end{cases}$; 5) $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x + y = \dfrac{p}{2} \\ \sin x + \sin y = \sqrt{2} \end{cases}$.

XIX. Решите тригонометрические неравенства.

1) $\sin x \le 0$;

2) $\cos x \ge 0$;

3) $\operatorname{tg} 3x \le 0$;

4) $\operatorname{ctg} \dfrac{x}{5} \ge 0$;

5) $\sin\left(\dfrac{3x}{4} + \dfrac{p}{9}\right) \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

6) $3\sin^2 x + \sin 2x - \cos^2 x \ge 2$;

7) $2\cos x - 8\cos x \cdot \sin^2 x \ge \sqrt{3}$;

8) $2\cos^2\left(x + \dfrac{p}{4}\right) - \sqrt{3}\cos 2x \le 0$.

9

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬИ ЕЕ ПРЕДЕЛ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Лексика раздела

бесконечно большая величина	indefinitely large value	无限最大的价值
бесконечно малая величина	infinitesimal value	无限最小的价值
в соответствие	in correspondence	相符合的
в частности	particularly	特殊的
всегда	always	总是
вычислять	calculate	计算
для любого "n"	for any "n"	为求n
конец	end	结束
неопределенность	uncertainty	不确定性
окрестность точки	vicinity of point	附近的一点
последовательность	sequence	连续性
возрастающая последовательность	increasing sequence	上涨的连续性
монотонная последовательность	monotonous sequence	单一的连续性
убывающая последовательность	decreasing sequence	渐减的连续性
числовая последовательность	numerical sequence	数字的连续性
последующий член	next term	下一组
предел	limit	极限
замечательный предел	remarkable limit	卓越的极限

предел последовательности	limit of sequence	极限的序列
предел слева	limit at the left	极限到左边
предел справа	limit at the right	极限到右边
предел функции	limit of function	函数极限
предыдущий член	previous term	上一组
прогрессия	progression	级数
арифметическая прогрессия	arithmetical progression	算数上的级数
геометрическая прогрессия	geometrical progression	几何级数
равноотстоящие члены	equal exterminating terms	相等项
разделить почленно	divide term by term	一组一组分开
раскрыть	open	开始
расходиться	diverge	分散
ряд чисел	row of numbers	数列
скачок	jump	跳跃
совместное применение	complete using	全部采用；全部使用
составлять	compose	组成
существовать	exist	存在
сходиться	converge	衔接
точка разрыва	point of break	点的突破
условие	condition	前提条件
устранить	eliminate	删除
число членов прогрессии	number of terms of progression	一组数字的级数
член последовательности	term of the consequence	组成部分常见的连续性

9.1. Последовательности. Прогрессии

9.1.1. Числовые последовательности

Числовая последовательность – это функция натурального аргумента, область определения которой – это множество всех натуральных чисел.

Например, 1; 2; 3; 4; ...; n – это натуральный ряд чисел. Поставим в соответствие каждому натуральному числу его квадрат. Получим новый ряд чисел: 1, 4, 9, 16 ... n^2. Такое соответствие и будет числовой последовательностью.

Числовую последовательность обозначают так: $x_n = f(n)$ где $n \in N$. Тогда, $f(1)$ – первый член последовательности, $f(2)$ – второй член последовательности, ..., $f(n)$ – энный член последовательности.

Формула $x_n = f(n)$ называется ***формулой n-го члена последовательности*** x_n, $n \in N$.

Числовые последовательности бывают:

– конечные;	– бесконечные;
– возрастающие;	– убывающие;
– постоянные;	– невозрастающие (неубывающие);
– монотонные;	– немонотонные.

Например, 1) последовательность однозначных четных чисел: 2; 4; 6; 8 – конечная, число ее членов равно четырем;

2) последовательность двухзначных натуральных чисел, оканчивающихся цифрой "7": 17; 27; 37; 47; 57; 67; 77; 87; 97 – конечная, число ее членов равно девяти;

3) последовательность дробей с числителем "1" – бесконечная;

4) последовательность десятичных дробей, у которых после запятой повторяется цифра "9": 0,9; 0,99; 0,999; ...; 0,99...9; ... – бесконечная.

Если в последовательности для любого n выполняется условие $x_{n+1} > x_n$, то последовательность возрастает (последующий член всегда больше предыдущего). Такая последовательность называется ***возрастающей***.

Например, 1; 3; 5; 7; 9; ...; $(2n+1)$; ... – это возрастающая последовательность.

Если в последовательности для любого n выполняется условие $x_{n+1} < x_n$, то последовательность убывает (последующий член всегда меньше предыдущего). Такая последовательность называется ***убывающей***.

Например, 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; ...; $\frac{1}{n}$; ... – это убывающая последовательность.

Последовательность $(x(n))$ называется ***невозрастающей***, если для любого ее члена выполняется неравенство $x_{n+1} \le x_n$.

Например, 1; 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{7}$ – это невозрастающая последовательность.

Последовательность $(x(n))$ называется ***неубывающей***, если для любого ее члена выполняется неравенство $x_{n+1} \ge x_n$.

Например, $1;\ 1;\ 3;\ 3;\ 5;\ 5;\ 7;\ 7;\ 9;\ 9$ – это неубывающая последовательность.

Неубывающие и невозрастающие последовательности называются ***монотонными*** (в частности, возрастающие и убывающие последовательности тоже монотонны).

Существуют последовательности, которые не являются монотонными. Так, $x_n = (-1)^n \cdot 9$ – n-й член последовательности: $-9;\ 9;\ -9;\ 9;\ -9;\ ...$ – это ***колеблющаяся*** последовательность.

Для этой последовательности условие монотонности не выполняется.

Если все члены последовательности равны между собой, то она называется ***постоянной***.

Например, $y_n = 5$: 5; 5; 5; ... – постоянная последовательность.

9.1.2. Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия – это числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и постоянного числа d, где d – это разность прогрессии: $a_n = a_{n-1} + d$, $n \in N$.

Общий вид арифметической прогрессии:

$$\div\ a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots .$$

Очевидно, что прогрессия является возрастающей, если $d > 0$, и убывающей, если $d < 0$.

Например, 2; 5; 8; 11; ... ($d = 3$) – возрастающая прогрессия;

12; 10; 8; 6; ... ($d = -2$) – убывающая прогрессия.

ЗАПОМНИТЕ!

Если заданы первый член a_1 и разность d, то ***n-й член прогрессии*** (любой член) ***определяют по формуле***:

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии вычисляется по формулам:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \text{ или } S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n,$$

где n – количество членов прогрессии.

Свойства арифметической прогрессии.

1. Каждый средний член равен полусумме равноотстоящих от него членов: $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$, $(k < n)$.

2. В конечной арифметической прогрессии суммы двух членов, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны сумме крайних членов:

$$\div\ a_1;\ a_2;\ a_3;\ ...;\ a_k;\ ...\ ;\ a_{n-k+1};\ ...;\ a_{n-2};\ a_{n-1};\ a_n\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \mathbf{K} = a_k + a_{n-k+1} = \mathbf{K} = 2a_1 + (n-1)d\ .$$

Пример 1. Найдите семнадцатый член арифметической прогрессии: 3; 7; 11: 15; ... .

Решение. Найдем разность прогрессии: $d = 7 - 3 = 4$. Тогда $a_{17} = a_1 + 16d = 3 + 16 \cdot 4 = 3 + 64 = 67$.

Ответ. $\{67\}$.

Пример 2. Разность арифметической прогрессии равна 3, а сумма первых ее шести членов равна 57. Найдите a_1, a_6.

Решение. $d = 3$; $S_6 = 57$. Тогда $S_6 = \dfrac{2a_1 + (6-1)d}{2} \cdot 6 = (2a_1 + 5d) \cdot 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 57 = (2a_1 + 5d) \cdot 3 \Leftrightarrow a_1 = 2$; $a_6 = a_1 + 5d = 17$.

Ответ. $a_1 = 2$; $a_6 = 17$.

Пример 3. Третий член арифметической прогрессии равен 6, а седьмой 14. Сколько членов нужно взять, чтобы их сумма была равна 110?

Решение. $a_3 = 6$; $a_7 = 14$; $S_n = 110$. Запишем a_3 и a_7, используя формулу $a_n = a_1 + d(n-1)$ и вычислим d и a_1:

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 6 \\ a_1 + 6d = 14 \end{cases} \Rightarrow 4d = 8 \Rightarrow d = 2;\ a_1 = 2\,.$$

Подставим значения S_n, d и a_1 в формулу $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ и получим уравнение для вычисления n:

$$110 = \frac{2 \cdot 2 + 2(n-1)}{2} \cdot n \Rightarrow 110 = 2n + n^2 - n \Rightarrow n^2 - n - 110 = 0 \Rightarrow n_1 = 10;$$

$n_2 = -11$. Значение $n_2 = -11$ – не будет решением, так как $n \in N$.

Ответ. $n = 10$.

<u>*Пример 4*</u>. Найдите арифметическую прогрессию, если сумма ее n первых членов $S_n = 2n^2 - 3n$.

Решение. По условию: $S_1 = a_1 = 2\cdot 1^2 - 3\cdot 1 = 2-3 = -1$; $S_2 = 2\cdot 2^2 - 3\cdot 2 = 8-6 = 2$. S_2 можно найти также как сумму первого и второго членов арифметической прогрессии, тогда: $a_1 + a_2 = 2 \Leftrightarrow a_2 = 2 - a_1 = 2-(-1) = 3$. Отсюда $d = a_2 - a_1 = 3-(-1) = 4$.

Ответ. $a_1 = -1$, $d = 4$ или $-1; 3; 7; 11; \ldots$.

<u>*Пример 5*</u>. Найдите арифметическую прогрессию, если сумма первых трех ее членов равна 15, сумма трех последних членов равна 39, а сумма всех членов равна 63.

Решение. $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 15 \\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 39 \end{cases}$ (из условия).

Сложим равенства: $(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) = 54$. По второму свойству арифметической прогрессии суммы в скобках равны между собой: $3(a_1 + a_n) = 54 \Rightarrow a_1 + a_n = 18$. Найдем число членов прогрессии, используя формулу: $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\cdot n \Rightarrow 63 = \dfrac{18}{2}\cdot n \Rightarrow n = 7$. Подставим значение $n = 7$ в исходную систему, получим: $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 15 \\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 39 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 15 \\ (a_1 + 6d) + (a_1 + 5d) + (a_1 + 4d) = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a_1 + 3d = 15 \\ 3a_1 + 15d = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + d = 5 \\ a_1 + 5d = 13 \end{cases} \Rightarrow$$

$d = 2$ и $a_1 = 3$. Запишем прогрессию, зная d и a_1.

Ответ. 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15.

<u>*Пример 6.*</u> Между числами 1 и 25 напишите пять чисел, которые с данными числами составляют арифметическую прогрессию.

Решение. $a_1 = 1$; $n = 2+5 = 7$; $a_7 = 25$. Но, $a_7 = a_1 + 6d \Rightarrow 25 = 1 + 6d \Rightarrow d = 4$.

Ответ. 1; 5; 9; 13; 17; 21; 25; ...

9.1.3. Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия – это числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же отличное от нуля число q, где q – знаменатель прогрессии: $b_n = b_{n-1}\cdot q$ $(n \in N)$.

Общий вид геометрической прогрессии:

$$\div\div\; b_1;\; b_2;\; b_3;\; \ldots;\; b_n;\; \ldots$$

Геометрическая прогрессия является возрастающей при $q > 1$ и убывающей при $|q| < 1$.

Например, $\div\div$ 2; 6; 18; 54; ...; $q = 3$ – возрастающая прогрессия; $\div\div$ 250; 50; 10; ...; $q = \frac{1}{5}$ – убывающая прогрессия.

ЗАПОМНИТЕ!

Если заданы первый член b_1 и знаменатель q, то ***n-й член геометрической прогрессии определяют по формуле***:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Сумму первых n членов геометрической прогрессии находят по формуле:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q - 1}.$$

Свойства геометрической прогрессии.

1. Квадрат каждого среднего члена прогрессии равен произведению равноотстоящих от него членов:

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k};\; (k < n).$$

2. В конечной геометрической прогрессии произведения двух членов, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны произведению крайних членов:

$$\div\div\; b_1;\; b_2;\; b_3;\; \ldots;\; b_k;\; b_{n-k+1};\; \ldots;\; b_{n-2};\; b_{n-1};\; b_n \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \mathbf{K} = b_k \cdot b_{n-k+1} = \mathbf{K} = b_1^2 q^{n-1}.$$

<u>Пример 7.</u> Найдите первый и последний члены геометрической прогрессии, которая состоит из четырех членов, если $q = 3$ и $S_4 = 80$.

Решение. Подставим исходные данные в формулу:

$$S_4 = \frac{b_1 \cdot \left(q^4 - 1\right)}{q - 1} \Rightarrow 80 = \frac{b_1 \cdot \left(3^4 - 1\right)}{3 - 1} = \frac{b_1 \cdot 80}{2} \Rightarrow b_1 = 2.$$

Найдем b_4 по формуле $b_4 = b_1 \cdot q^3$ и получим: $b_4 = 2 \cdot 3^3 = 54$.

Ответ. $b_1 = 2$ и $b_4 = 54$.

<u>*Пример 8*</u>. В геометрической прогрессии (b_n): $\begin{cases} b_1+b_3=10 \\ b_2+b_4=30 \end{cases}$. Найдите сумму восьми первых членов прогрессии S_8.

Решение. $b_2=b_1\cdot q$; $b_3=b_1\cdot q^2$; $b_4=b_1\cdot q^3$, тогда запишем исходную систему так: $\begin{cases} b_1+b_1q^2=10 \\ b_1q+b_1q^3=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1\left(1+q^2\right)=10 \\ b_1q\left(1+q^2\right)=30 \end{cases}$.

Разделим почленно второе уравнение на первое. Получим:

$$\frac{b_1q\left(1+q^2\right)}{b_1\left(1+q^2\right)}=\frac{30}{10} \Leftrightarrow q=3.$$

Найдем b_1 из первого уравнения системы: $b_1=\dfrac{10}{1+q^2}=\dfrac{10}{1+3^2}=1$.

По формуле для суммы найдем: $S_8=\dfrac{b_1\cdot\left(q^8-1\right)}{q-1}=\dfrac{1\cdot\left(3^8-1\right)}{3-1}=3280$.

Ответ. $S_8=3280$.

<u>*Пример 9*</u>. Шесть чисел составляют геометрическую прогрессию. Сумма первых трех чисел равна 168, а сумма последних трех чисел равна 21. Найдите эти числа.

Решение. Из условия задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1+b_2+b_3=168 \\ b_4+b_5+b_6=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1+b_1q+b_1q^2=168 \\ b_1q^3+b_1q^4+b_1q^5=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1\left(1+q+q^2\right)=168 \\ b_1q^3\left(1+q+q^2\right)=21. \end{cases}$$

Найдем q, для этого разделим первое уравнение на второе: $\dfrac{1}{q^3}=8 \Rightarrow q=\dfrac{1}{2}$.

Найдем b_1 из первого уравнения: $b_1=\dfrac{168}{1+q+q^2}=\dfrac{168}{\frac{7}{4}}=96$.

Ответ. 96; 48; 24; 12; 6; 3.

<u>*Пример 10*</u>. Найдите сумму $1+x+x^2+\mathbf{K}+x^{99}+x^{100}$, $x\neq 1$.

Решение. По условию задания можно сделать вывод о том, что: $1; x; x^2; \mathbf{K}; x^{99}; x^{100}$ – это геометрическая прогрессия. Найдем первый член прогрессии, знаменатель и общее количество ее членов: $b_1=1$; $q=\dfrac{x}{1}=\dfrac{x^2}{x}=\mathbf{K}=x$; $n=101$. Тогда $S_{101}=\dfrac{1\cdot\left(x^{101}-1\right)}{x-1}=\dfrac{x^{101}-1}{x-1}$.

Ответ. $S_{101}=\dfrac{x^{101}-1}{x-1}$.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия – это такая бесконечная геометрическая прогрессия (b_n), у которой знаменатель $|q|<1$.

ЗАПОМНИТЕ!

Сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии находят по формуле:

$$S=\frac{b_1}{1-q}.$$

<u>*Пример 11.*</u> Запишите периодическую дробь 0,4545...=0,(45) как обыкновенную.

Решение. Запишем периодическую дробь в виде бесконечной суммы обыкновенных дробей: $0,(45)=\frac{45}{100}+\frac{45}{10000}+\frac{45}{1000000}+\mathbf{K}$.

Слагаемые представляют собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{100}$ и первым членом $b_1=\frac{45}{100}$, а полученная сумма – это сумма этой прогрессии.

Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим: $S=\frac{45}{100}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{45}{100}\cdot\frac{100}{99}=\frac{45}{99}=\frac{5}{11}$.

Ответ. $0,(45)=\frac{5}{11}$.

<u>*Пример 12.*</u> Найдите бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, если $b_1=2$, а сумма $S=4$.

Решение. Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии найдем:

$$S=\frac{b_1}{1-q}\Rightarrow 4=\frac{2}{1-q}\Leftrightarrow 4\cdot(1-q)=2\Leftrightarrow q=\frac{1}{2}.$$

Ответ. $\div\div\ 2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \ldots$

Пример 13. Найдите бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, если ее сумма равна $\frac{2}{3}$, а сумма ее первых четырех членов равна $\frac{5}{8}$.

Решение. Из условия задачи запишем систему:

$$\begin{cases} S=\dfrac{b_1}{1-q}=\dfrac{2}{3} \\ S_4=\dfrac{b_1\left(1-q^4\right)}{1-q}=\dfrac{5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q}=\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{b_1\left(1-q^4\right)}{1-q}=\dfrac{5}{8} \end{cases}.$$

Подставим правую часть первого уравнения во второе уравнение:

$$\frac{2}{3}\left(1-q^4\right)=\frac{5}{8}\Rightarrow 16\cdot\left(1-q^4\right)=15\Rightarrow 16q^4=1\Rightarrow q_1=\frac{1}{2} \text{ и } q_2=-\frac{1}{2}.$$

Тогда найдем два значения b_1:

$$1)\ q=\frac{1}{2};\quad \frac{b_1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\Rightarrow b_1=\frac{1}{3};\qquad 2)\ q=-\frac{1}{2};\quad \frac{b_1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\Rightarrow b_1=1.$$

Ответ. 1) $\div\div\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{12};\ \frac{1}{24};\ \ldots$; 2) $\div\div\ 1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{8};\ \ldots$.

Пример 14. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\left(b_n\right)$ $S=16$, а сумма квадратов всех ее членов $S^*=153{,}6$. Найти четвертый член прогрессии.

Решение. Найдем знаменатель прогрессии, которая состоит из квадратов членов: $b_1^2;\ b_2^2;\ b_3^2;\ \ldots;\ b_n^2;\ \ldots$: $q^*=\dfrac{b_n^2}{b_{n-1}^2}=\left(\dfrac{b_n}{b_{n-1}}\right)^2=q^2$.

Тогда составим систему уравнений: $\begin{cases} S=16=\dfrac{b_1}{1-q} \\ S^*=153{,}6=\dfrac{b_1^2}{1-q^2} \end{cases}$.

Возведем первое уравнение в квадрат: $256=\dfrac{b_1^2}{\left(1-q\right)^2}$.

Разделим второе уравнение системы на первое:

$$\frac{b_1^2}{1-q^2}:\frac{b_1^2}{\left(1-q\right)^2}=\frac{153{,}6}{256}\Leftrightarrow\frac{b_1^2\left(1-q\right)^2}{\left(1-q^2\right)b_1^2}=\frac{153{,}6}{256}\Leftrightarrow\frac{1-q}{1+q}=\frac{153{,}6}{256}\Leftrightarrow q=\frac{1}{4}.$$

Тогда $b_1=16\cdot\left(1-q\right)=16\cdot\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=12$; $\quad b_4=b_1\cdot q^3=12\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^3=\dfrac{3}{16}$.

Ответ. $b_4=\dfrac{3}{16}$.

9.1.4. Совместное применение арифметической и геометрической прогрессии

<u>Пример 15.</u> Четыре числа составляют геометрическую прогрессию. Если из первого числа вычесть 11, из второго 1, из третьего 3, а из четвертого 9, то получится арифметическая прогрессия. Найдите эти числа.

Решение. Пусть b_1; b_2; b_3; b_4 – члены геометрической прогрессии. Пусть a_1; a_2; a_3; a_4 – соответствующие члены арифметической прогрессии. Тогда $b_2 = b_1 q$; $b_3 = b_1 q^2$; $b_4 = b_1 q^3$ и $a_1 = b_1 - 11$; $a_2 = b_2 - 1 = b_1 q - 1$; $a_3 = b_3 - 3 = b_1 q^2 - 3$; $a_4 = b_4 - 9 = b_1 q^3 - 9$.

Используем свойство арифметической прогрессии:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}; \quad a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}.$$

Используя полученные выше равенства, запишем систему двух уравнений с двумя неизвестными b_1 и q:

$$\begin{cases} b_1 q - 1 = \dfrac{b_1 - 11 + b_1 q^2 - 3}{2} \\ b_1 q^2 - 3 = \dfrac{b_1 q - 1 + b_1 q^3 - 9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b_1 q - 2 = b_1 + b_1 q^2 - 14 \\ 2b_1 q^2 - 6 = b_1 q + b_1 q^3 - 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1\left(q^2 - 2q + 1\right) = 12 \\ b_1 q\left(q^2 - 2q + 1\right) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{1}{3} \\ b_1 = 27 \end{cases}.$$

Запишем геометрическую прогрессию: $b_2 = b_1 q = 27 \cdot \dfrac{1}{3} = 9$; $b_3 = 3$; $b_4 = 1$.

Ответ. 27; 9; 3; 1.

<u>Пример 16</u>. Найдите четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую, если сумма крайних чисел равна 35, а сумма средних равна 30.

Решение. Пусть числа, которые нужно найти, – это: c_1, c_2, c_3, c_4. Тогда

$$\overbrace{c_1;\ c_2;\ c_3}^{\text{геометрическая прогрессия}};\ c_4 \qquad c_1;\ \underbrace{c_2;\ c_3;\ c_4}_{\text{арифметическая прогрессия}}$$

Перепишем условие задачи в виде: $\begin{cases} c_1 + c_4 = 35 \\ c_2 + c_3 = 30 \end{cases}$.

Выразим через b_1 и q все заданные члены:

$c_1 = b_1$; $c_2 = b_1 q$; $c_3 = b_1 q^2$; $c_4 = 35 - b_1$.

Запишем систему уравнений из условия $c_2 + c_3 = 30$ и свойства арифметической прогрессии $2c_3 = c_2 + c_4$:

$$\begin{cases} b_1 q + b_1 q^2 = 30 \\ 2b_1 q^2 = b_1 q + (35 - b_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q \cdot (1+q) = 30 \\ b_1 \cdot (1 - q + 2q^2) = 35 \end{cases}.$$

Решим систему способом деления: $\dfrac{b_1 q \cdot (1+q)}{b_1 \cdot (1 - q + 2q^2)} = \dfrac{30}{35} \Rightarrow \dfrac{q \cdot (1+q)}{1 - q + 2q^2} = \dfrac{6}{7} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 7q \cdot (1+q) = 6 \cdot (1 - q + 2q^2) \Rightarrow 5q^2 - 13q + 6 = 0 \Rightarrow q_1 = 2 \text{ и } q_2 = \frac{3}{5}.$$

Получим два решения:

1) $q = 2$; $b_1 = \dfrac{30}{q(1+q)} = \dfrac{30}{2 \cdot (1+2)} \Rightarrow b_1 = 5$;

2) $q = \dfrac{3}{5}$; $b_1 = \dfrac{30}{\dfrac{3}{5}\left(1 + \dfrac{3}{5}\right)} = \dfrac{30}{\dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{8}{5}} \Rightarrow b_1 = 31\dfrac{1}{4}$.

Ответ. 1) $5;\ 10;\ 20;\ 30$. 2) $31\dfrac{1}{4};\ 18\dfrac{3}{4};\ 11\dfrac{1}{4};\ 3\dfrac{3}{4}$.

<u>Пример 17.</u> Три числа составляют возрастающую геометрическую прогрессию. Если ко второму числу прибавить 2, то полученные числа составят арифметическую прогрессию, а если затем к третьему числу прибавить 9, то прогрессия опять станет геометрической. Найдите эти числа.

Решение. Запишем три прогрессии по условию задачи:

1) $\div\!\div\ b_1;\ b_1 q;\ b_1 q^2$; 2) $\div\ b_1;\ b_1 q + 2;\ b_1 q^2$; 3) $\div\!\div\ b_1;\ b_1 q + 2;\ b_1 q^2 + 9$.

Для последних двух прогрессий применим их свойства и запишем систему уравнений: $\begin{cases} 2 \cdot (b_1 q + 2) = b_1 + b_1 q^2 \\ (b_1 q + 2)^2 = b_1 (b_1 q^2 + 9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b_1 q + 4 = b_1 + b_1 q^2 \\ b_1^2 q^2 + 4b_1 q + 4 = b_1^2 q^2 + 9b_1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \cdot (1 - 2q + q^2) = 4 \\ b_1 \cdot (9 - 4q) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{b_1 \cdot (1 - 2q + q^2)}{b_1 \cdot (9 - 4q)} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 2q + q^2 = 9 - 4q \Rightarrow q^2 + 2q - 8 = 0 \Rightarrow q_1 = 2 \text{ и } q_2 = -4.$$

По условию задачи геометрическая прогрессия возрастающая, следовательно, $q = 2$. Найдем первый член прогрессии: $b_1 = \dfrac{4}{9 - 4q} \Rightarrow b_1 = 4$. Значит $b_2 = 8$, $b_3 = 16$.

Ответ. $\div\!\div$ 4; 8; 16.

Ответьте на вопросы

1. Что такое числовая последовательность?
2. Какие числовые последовательности вы знаете?
3. Что такое арифметическая прогрессия?
4. Назовите свойства арифметической прогрессии.
5. Что такое геометрическая прогрессия?
6. Назовите свойства геометрической прогрессии.
7. Что такое бесконечная геометрическая прогрессия?
8. Назовите формулу суммы бесконечно убывающей прогрессии.

Задания для самостоятельной работы № 19

I. Найдите пятый член арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = 7$; $a_{16} = 67$; 2) $a_1 = -4$; $a_9 = 0$.

II. Найдите a_{23} в арифметической прогрессии:

1) 3; 7; 11; 15; ... 2) -5; -1; 3; 7; ....

III. Разность арифметической прогрессии равна 8, сумма первых пяти ее членов равна 115. Найдите a_1, a_5.

IV. В арифметической прогрессии (a_n): $a_3 + a_6 = 16$; $a_3 \cdot a_6 = 55$. Сколько членов нужно взять, чтобы получить сумму, равную 81?

V. Найдите арифметическую прогрессию, если сумма ее первых n членов $S_n = 5n^2 - 2n$.

VI. Найдите арифметическую прогрессию, у которой сумма первых трех членов равна 24, а сумма квадратов этих же членов равна 290.

VII. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = 2$; $b_5 = 162$; 2) $b_1 = 3$; $b_4 = 81$.

VIII. В геометрической прогрессии (b_n): $b_1 + b_3 = 17$; $b_2 + b_4 = 68$. Найдите S_7.

IX. Найдите четыре числа, которые составляют геометрическую прогрессию, у которой сумма крайних членов равна 27, а произведение средних членов равно 72.

X. Разность второго и первого членов геометрической прогрессии равна 18, разность четвертого и третьего членов равна 162. Найдите прогрессию.

XI. Запишите периодические дроби в виде обыкновенных:

1) $0,777\mathbf{K}=0,(7)$; 2) $0,1212\mathbf{K}=0,(12)$; 3) $0,1244\mathbf{K}=0,12(4)$.

XII. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n), если: $b_1+b_4=18$; $b_2+b_3=12$.

XIII. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n) равна 14, а сумма кубов всех ее членов равна 392. Найдите b_1 и q.

XIV. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S=12$, а сумма квадратов всех ее членов равна 72. Найдите пятый член прогрессии.

XV. Сумма трех чисел, которые составляют арифметическую прогрессию, равна 21. Если к ним прибавить соответственно числа 1; 5; 25, то получатся три числа, которые составляют геометрическую прогрессию. Найдите числа, которые составляют арифметическую прогрессию.

XVI. Четыре числа составляют геометрическую прогрессию. Если из первого числа вычесть 30, из второго 4, из третьего 2, а из четвертого 8, то получится арифметическая прогрессия. Найдите эти числа.

XVII. Сумма трех чисел, которые составляют возрастающую геометрическую прогрессию, равна 65. Если от меньшего из этих чисел вычесть 1, а от большего 19, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

XVIII. Найдите четыре числа, первые три из которых составляют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую. Сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних равна 12.

9.2. Предел числовой последовательности

Рассмотрим последовательность, которая задана формулой ее n-го члена $y_n = f(n)$.

Например, $y_n = \dfrac{n-1}{3n}$ – это бесконечная числовая последовательность, где $n \in N$. Члены этой последовательности при возрастании номера n "стремятся" к $\dfrac{1}{3}$. Это видно, если записать n-й член последовательности в виде $y_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3n}$. При возрастании номера n второе слагаемое "стремится к нулю". Записывают это следующим образом: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{3n} = \dfrac{1}{3}$.

Читают так: "Предел отношения "$n-1$" к "$3n$", при n стремящемся к бесконечности, равен $\dfrac{1}{3}$". Считают, что предел этой последовательности равен $\dfrac{1}{3}$.

А теперь поставим такой вопрос, каким должно быть n, чтобы модуль разности $\left(y_n - \dfrac{1}{3}\right)$ был меньше 0,001?

Так как $\left|y_n - \dfrac{1}{3}\right| = \left|\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3n} - \dfrac{1}{3}\right| = \left|-\dfrac{1}{3n}\right| = \dfrac{1}{3n}$, то вопрос сводится к тому, чтобы найти, при каких $n \in N$ выполняется неравенство $\dfrac{1}{3n} < 0{,}001$. Или $3n > 1000$, откуда $n > 333\dfrac{1}{3}$. Получаем, что неравенство $\left|y_n - \dfrac{1}{3}\right| < 0{,}001$ выполняется для любого $n > n_0 = 333$. Если вместо 0,001 мы возьмем 0,000001, то таким же подсчетом мы установим, что $\left|y_n - \dfrac{1}{3}\right| < 0{,}000001$ при любом $n > n_0 = 333333$.

Для любого произвольного положительного числа e (эпсилон) неравенство $\left|y_n - \frac{1}{3}\right| < e$ будет выполняться при $n > \frac{1}{3e}$. Так как нас интересуют только целые n, то данное неравенство выполняется при всех $n > N$, где N – целая часть числа $\frac{1}{3e}$.

Число a называется ***пределом последовательности*** (x_n), если для любого положительного числа e найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство: $|x_n - a| < e$.

Говорят: "Предел последовательности (x_n) равен a" и пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

О последовательности, имеющей предел, говорят, что она ***сходится***. Выясним геометрический смысл понятия предела последовательности.

Неравенство $|x_n - a| < e$ равносильно двойному неравенству $-e < x_n - a < e$ или $a - e < x_n < a + e$. Это двойное неравенство показывает, что все члены последовательности (x_n), сходящейся к числу a, с номерами $n > N$, попадают в интервал $\left]a - e,\ a + e\right[$, который называется e ***-окрестностью точки*** a.

При рассмотрении числовых последовательностей возможны только два случая.

1. У последовательности есть предел, и он единственный. Такую последовательность называют ***сходящейся***.
2. У последовательности нет предела. Такую последовательность называют ***расходящейся***.

Сформулируем три теоремы, которые удобно использовать при вычислении пределов.

ЗАПОМНИТЕ!

Теорема 1. Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n+y_n\right)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n.$$

Теорема 2. Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n\cdot y_n\right)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n.$$

Следствие теоремы 2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(C\cdot x_n\right)=C\cdot\lim\limits_{n\to\infty}x_n;\quad C\in R.$

ЗАПОМНИТЕ!

Теорема 3. Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, и предел последовательности (y_n) отличен от нуля ($\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0$), то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$$

Последовательность называется ***бесконечно малой последовательностью*** или просто бесконечно малой, если ее предел равен нулю: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

Например, последовательность $a_n=\dfrac{1}{n}$ является бесконечно малой, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$; последовательность $a_n=q^n$, $(q<1)$, является бесконечно малой, так как $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

Для бесконечно малых последовательностей можно записать следующие теоремы.

ЗАПОМНИТЕ!

Теорема 1. Сумма двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

Теорема 2. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность является бесконечно малой последовательностью.

Теорема 3. Произведение двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

Пределы последовательностей можно находить, используя следующее определение предела.

Если последовательность (x_n) можно записать в виде суммы

$$x_n = C + a_n \quad (n \in N),$$

где C – некоторое постоянное число, а a_n – бесконечно малая, то C является пределом последовательности (x_n): $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$

Рассмотрим решение примеров с использованием теорем о пределах.

<u>*Пример 18.*</u> Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) = 1$.

Здесь $\dfrac{1}{n^2}$ – бесконечно малая величина, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

Ответ. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2} = 1$.

Для приведения общего члена последовательности к виду $x_n = C + a_n \ (n \in N)$ применяют теоремы о пределе суммы, произведения и частного пределов.

<u>*Пример 19*</u>. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n+3}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n+3}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}=\dfrac{2}{1}=2$.

Ответ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n+3}=2$.

<u>*Пример 20.*</u> Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^4-100n^3-2n^2+1\right)$.

Решение. Применить теорему о пределе суммы нельзя, так как неясно, к чему стремится сумма пределов слагаемых. Чтобы найти предел, вынесем за скобки n^4:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^4-100n^3-2n^2+1\right)=\lim_{n\to\infty}\left[n^4\left(1-\frac{100}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)\right].$$

К последнему пределу можно применить теорему о пределе произведения:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^4\left(1-\frac{100}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}n^4\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{100}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)=\infty\cdot 1=\infty.$$

Ответ. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^4-100n^3-2n^2+1\right)=\infty$.

<u>*Пример 21*</u>. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt[4]{4n^2-3}\right)$.

Решение. Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное ему выражение $\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt[4]{4n^2-3}\right)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt[4]{4n^2-3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1-\sqrt{4n^2-3}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt[4]{4n^2-3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-\sqrt{4n^2-3}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt[4]{4n^2-3}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt[4]{4n^2-3}},$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt[4]{4n^2-3}}=0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt[4]{4n^2-3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-\sqrt{4n^2-3}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt[4]{4n^2-3}}.$$

Найдем предел числителя:

$$\lim_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2-3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-4n^2+3}{2n+\sqrt{4n^2-3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n+\sqrt{4n^2+3}}=0.$$

Найдем предел знаменателя:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt[4]{4n^2-3}\right)=\infty .$$

Так как предел знаменателя равен бесконечности, то последовательность бесконечно мала, и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt[4]{4n^2-3}\right)=0$.

Ответ. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt[4]{4n^2-3}\right)=0$.

9.3. Предел и непрерывность функции

Построим график функции $f(x)=2x+1$ (рис. 9.1).

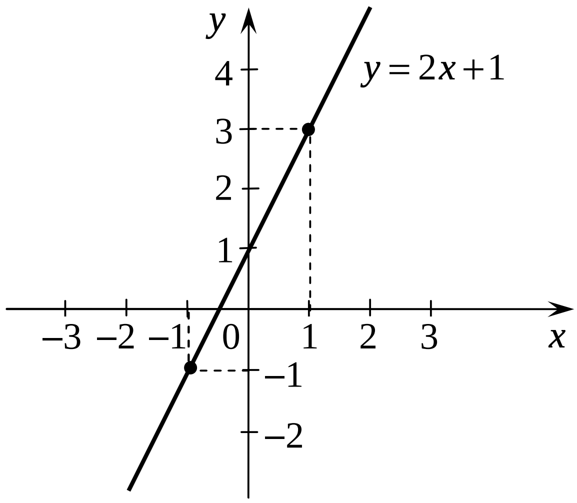


Рисунок 9.1

При приближении переменной x к точке $x_0=1$ переменная y приближается к точке $y_0=3$. Говорят, что число 3 является пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к единице. Пишут: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$. Читают: "Лимит эф от икс при икс, стремящемся к единице, равен 3".

Рассмотрим интервал вблизи точки $x=1$, ограниченный бесконечно малой d, это будет $x\in\left]1-d,1+d\right[$ или $1-d<x<1+d$. Это же можно записать и в форме $|x-1|<d$.

Интервал $\left]\acute{r}-d,a+d\right[$ называют d – окрестностью точки a (d – "дельта").

Составим разность $f(x)-3=2x+1-3=2(x-1)$. Модуль этой разности $\left|f(x)-3\right|=2\left|x-1\right|$ меньше числа e ("эпсилон"), если $\left|x-1\right|<\frac{e}{2}$.

Действительно, $\left|f(x)-3\right|=2\left|x-1\right|<e$ откуда $\left|x-1\right|<\frac{e}{2}$. Значит, для любого $e>0$ можно найти $d>0$ (у нас $d=\frac{e}{2}$) такое, что если $\left|x-1\right|<d$, то всегда $\left|f(x)-3\right|<e$. На основании этого запишем новое определение предела.

Число b называется ***пределом функции*** $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого $e>0$ можно найти такое $d>0$, что из $\left|x-a\right|<d$ следует $\left|f(x)-b\right|<e$.

Если функция $y=f(x)$ имеет предел, когда x стремится к a, оставаясь всегда меньше a, то говорят, что она имеет ***предел слева***, и пишут: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b_1$.

Если функция $y=f(x)$ имеет предел, когда x стремится к a, оставаясь всегда больше a, то говорят, что она имеет ***предел справа***, и пишут: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b_2$.

Например, функция $y=\frac{|x|}{x}$ имеет предел слева, равный -1, и предел справа, равный 1 (рис. 9.2).

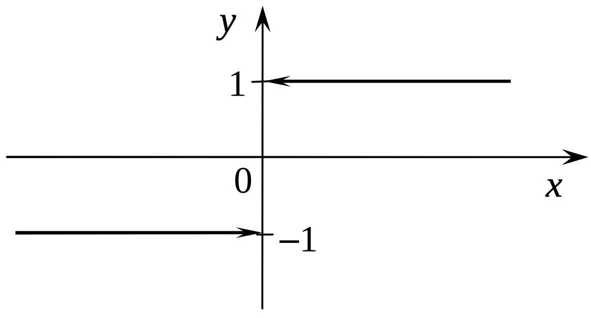


Рисунок 9.2

ЗАПОМНИТЕ!

Функция может иметь только один из пределов (слева или справа), или не иметь границ вообще.

Например, функция $y=\sqrt{x}$ имеет предел справа $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{x}=0$, а предел слева $\lim\limits_{x\to-0}\sqrt{x}$ не существует, так как эта функция не определена для $x<0$.

Функция может и не иметь вообще пределов в какой-то точке. Для функции $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-2}$ не существует ни справа, ни слева.

Для решения задач по вычислению пределов и их применению полезно знать следующие основные теоремы о пределах.

Теорема 1. Если существуют пределы функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ при $x\to a$, то существует и предел их суммы, равный сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)+f_2(x)\right]=\lim_{x\to a}f_1(x)+\lim_{x\to a}f_2(x).$$

Теорема 2. Если существуют пределы функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ при $x\to a$, то существует и предел их произведения, равный произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right]=\lim_{x\to a}f_1(x)\cdot\lim_{x\to a}f_2(x).$$

Следствие. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x\to a}C\cdot f(x)=\lim_{x\to a}C\cdot\lim_{x\to a}f(x)=C\cdot\lim_{x\to a}f(x).$$

Теорема 3. Если существуют пределы функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ при $x\to a$, и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)\neq 0$, то существует и предел их отношения, равный отношению пределов этих функций:

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)},\ \lim_{x\to a} f_2(x)\neq 0.$$

Для нахождения пределов функций также как и для последовательностей, применяют теоремы о пределах суммы, произведения, частного, степени функций.

Рассмотрим решение некоторых примеров.

<u>Пример 22</u>. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+5}{x+4}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+5}{x+4}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x+5\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\ (x+4)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2} x^2-\lim\limits_{x\to 2}\ 3x+5}{\lim\limits_{x\to 2}\ x+4}=$

$$=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)^2-3\lim\limits_{x\to 2}\ x+5}{\lim\limits_{x\to 2}\ x+4}=\frac{2^2-3\cdot 2+5}{2+4}=\frac{1}{2}\ .$$

В этом примере, чтобы вычислить предел функции, можно подставить в нее $x=2$, так как числитель и знаменатель стремятся к конечным пределам и предел знаменателя не равен нулю.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+5}{x+4}=\frac{2^2-3\cdot 2+5}{2+4}=\frac{1}{2}.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+5}{x+4}=\dfrac{1}{2}$.

<u>Пример 23</u>. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{4x-2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{4x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(3+\dfrac{5}{x}\right)}{x\left(4-\dfrac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{5}{x}}{4-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{3}{4}$.

Ответ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{4x-2}=\dfrac{3}{4}$.

<u>*Пример 24*</u>. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Решение. В данном случае числитель и знаменатель стремятся к нулю при $x\to 2$. Разложим числитель на множители $\left(\text{ő}^2-4\right)=\left(x-2\right)\left(\text{ő}+2\right)$ и сократим числитель и знаменатель на $\left(x-2\right)$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(x+2\right)=2+2=4.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$.

Геометрически непрерывность функции в точке означает, что ее график можно провести через эту точку, не отрывая карандаш от плоскости чертежа.

<u>*Пример 25.*</u> Постройте графики следующих четырех функций и рассмотрите их поведение в окрестности точки $x=2$:

1) $y_1=x^2$, 2) $y_2=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, 3) $y_3=\dfrac{x-2}{\left|x-2\right|}$, 4) $y_4=\dfrac{1}{x-2}$.

Решение. 1) Найдем предел функции $y_1=x^2$ (рис. 9.3).

Для переменных $x<2$ предел слева равен $\lim\limits_{x\to 2-0}x^2=4$.

Для переменных $x>2$ предел справа равен $\lim\limits_{x\to 2+0}x^2=4$.

Предел функции $y_1=x^2$ в точке $x=2$ равен $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$.

Значение функции $y_1=x^2$ в точке $x=2$ равно $y_1\left(2\right)=4$.

$$\lim_{x\to 2-0}x^2=\lim_{x\to 2+0}x^2=\lim_{x\to 2}x^2=2^2=4.$$

Предел функции слева равен пределу функции справа и равен пределу функции в точке.

Вывод: Предел функции $y_1=x^2$ при $x\to 2$ существует и равен значению функции в точке $x=2$.

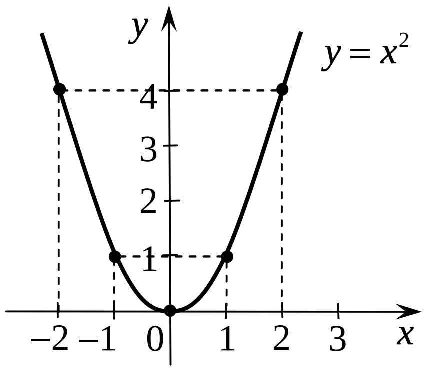


Рисунок 9.3

2) Найдем предел функции $y_2=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ (рис. 94).

Для $x<2$ предел функции слева равен $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$.

Для $x > 2$ предел функции справа равен
$\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$.

Предел функции $y_2=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ в точке $x=2$ равен $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$.

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$$

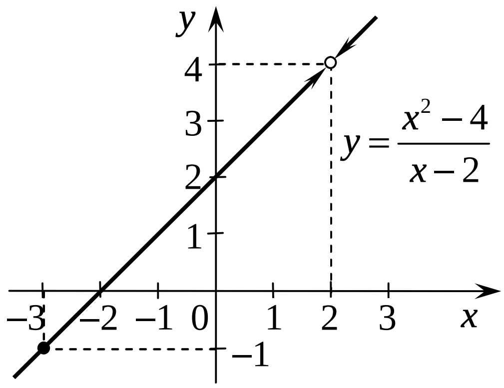


Рисунок 9.4

Предел функции слева равен пределу функции справа и равен пределу функции в точке, но в точке $x=2$ знаменатель функции равен нулю и функция неопределена.

Вывод: Предел функции $y_2=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ существует и равен 4, но не равен значению функции в точке $x=2$.

3) Найдем предел функции $y_3=\dfrac{x-2}{|x-2|}$ (рис. 9.5).

Для $x<2$ предел функции слева равен $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x-2}{|x-2|}=-1$.

Для $x>2$ предел функции справа равен $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x-2}{|x-2|}=1$.

При $x=2$ функция неопределенна (не существует).

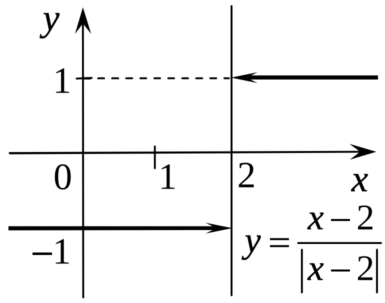


Рисунок 9.5

Вывод: Предел слева функции $y_3=\dfrac{x-2}{|x-2|}$ при $x\to 2$ не равен пределу справа и функция y_3 в точке $x=2$ не существует.

4) Найдем предел функции $y_3=\dfrac{1}{x-2}$ (рис. 9.6).

Для $x<2$ предел функции слева равен $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$.

Для $x>2$ предел функции справа равен $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$.

При $x=2$ функция неопределенна (не существует).

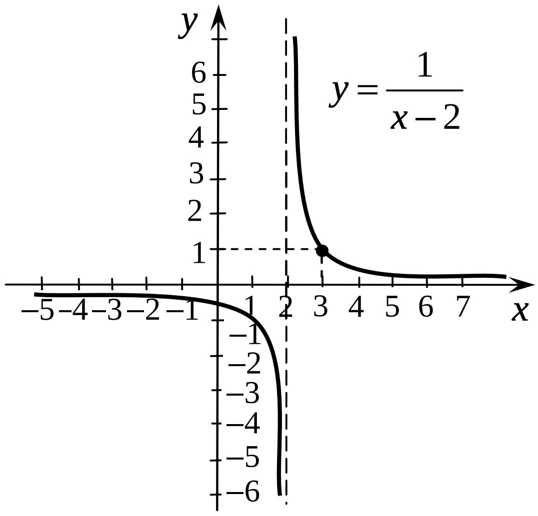
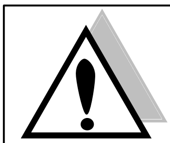


Рисунок 9.6

Вывод: Предел функции, а также значение функции в точке $x = 2$ не существует.

Ответ. Из рассмотренных примеров видно, что в точке $x = 2$ непрерывна только функция $y_1 = x^2$.



ЗАПОМНИТЕ!

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, если:

1) она определена в окрестности этой точки;
2) имеет предел, когда x стремится к x_0 произвольно:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x);$$

3) предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Если функция не является непрерывной в точке $x = x_0$, эту точку называют ***точкой разрыва*** функции.

В рассмотренных примерах $x = 2$ является точкой разрыва функций y_2, y_3 и y_4. Разрывы такого типа, как у функции y_2 ***устранимы***.

Устранить разрыв, значит, сделать функцию непрерывной. Для y_2 это можно сделать, если задать ее следующим образом: $y_2 = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{åñëè}\ \tilde{o} \neq 2, \\ 4\ \ , & \text{åñëè}\ \tilde{o} = 2. \end{cases}$ Такое задание называют ***доопределением*** функции.

Устранить разрывы функций y_3 и y_4 нельзя. Такие неустранимые разрывы называются ***скачками***. Скачки бывают конечными (как у функции y_3) и бесконечными (как у функции y_4).

Если использовать понятия приращения аргумента $\Delta x = x - x_0$ и приращения функции $\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$, то можно дать еще одно определение непрерывности.

Функция $y = f\left(x\right)$ называется ***непрерывной в точке*** $x = x_0$, если она определена в окрестности этой точки, и если приращение аргумента Δx стремится к нулю, то и приращение функции Δy также стремится к нулю.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \text{ или } \lim_{\Delta x \to 0} \left[f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) \right] = 0,$$

откуда
$$\lim_{x \to x_0} f\left(x_0 + \Delta x\right) = f\left(x_0\right).$$

ЗАПОМНИТЕ!

Функция $y = f\left(x\right)$ называется ***непрерывной в точке*** $x = x_0$, если она определена в окрестности этой точки и предел функции при $x \to x_0$ равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right).$$

Функция, непрерывная во всех точках интервала, называется ***непрерывной в этом интервале***.

Все элементарные функции непрерывны в области их определения.

Пример 26. Проверьте непрерывность функции $y=\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$ в точках $x=0$ и $x=2$.

Решение.

I. Проверим непрерывность функции в точке $x=0$.

1. Функция $y=\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$ определена в точке $x=0$ и ее значение в этой точке равно: $y(0)=-\dfrac{1}{2}$.
2. Найдем пределы функции в окрестности точки $x=0$:

   а) слева $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}=-\dfrac{1}{2}$;

   б) справа $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}=-\dfrac{1}{2}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}=-\dfrac{1}{2}$.
3. Предел функции в точке $x=0$ равен значению функции в этой точке. Функция непрерывна в этой точке.

II. Проверим непрерывность функции $y=\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$ в точке $x=2$.

1. В точке $x=2$ функция неопределена, так как знаменатель функции при $x=2$ обращается в ноль.
2. Найдем пределы функции в окрестности точки $x=2$:

   а) слева $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x-3}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$;

   б) справа $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$;

   в) предел функции слева не равен ее пределу справа. В точке $x=2$ функция $y=\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$ имеет неустранимый разрыв. Точка $x=2$ есть точка разрыва функции.

Ответ. В точке $x=0$ функция непрерывна, а в точке $x=2$ функция имеет неустранимый разрыв.

9.4. Два замечательных предела

При решении многих задач математики и ее приложений используют следующие два предела.

ЗАПОМНИТЕ!

Первый замечательный предел

Функция $\frac{\sin x}{x}$, неопределенная при $x=0$ (так как числитель и знаменатель дроби обращается в 0), имеет предел, равный 1 при $x \to 0$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1.$

Следствия первого замечательного предела

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

ЗАПОМНИТЕ!

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \text{ или } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Здесь e – иррациональное число, приближенное значение его равно $e=2{,}718281\ldots$. Оно является основанием натуральных логарифмов: $\log_e x=\ln x$.

Следствия второго замечательного предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Рассмотрим решение примеров с использованием замечательных пределов.

<u>*Пример 27.*</u> Найдите предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$.

Решение. Для решения этого примера используется первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{x}{2}=1\cdot 0=0.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$.

<u>*Пример 28*</u>. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$.

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся вторым замечательным пределом: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{3}=e^3.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}=e^3$.

<u>*Пример 29*</u>. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x-1}\right)^{x+3}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)+4}.$$

Сделаем замену переменной: $\dfrac{x-1}{4}=y$, тогда $y\to\infty$ при $x\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{4y+4}=e^4\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{4}=e^4\cdot 1=e^4.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=e^4$.

9.5. Некоторые способы вычисления пределов

1. Для непрерывных при $x=a$ функций пределы при $x \to a$ вычисляют подстановкой значения $x=a$ в выражение функции.

Например, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \dfrac{2^2+1}{2^2-1} = \dfrac{5}{3}$.

2. Если при $x=a$ знаменатель равен нулю, а числитель не равен нулю, предел функции при $x \to a$ не существует. Условно говорят, что он равен бесконечности.

Например, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2}{(x-2)^2} = (\infty)$.

3. Если при $x=a$ и числитель, и знаменатель равны нулю, говорят, что есть ***неопределенность*** вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и ее надо ***раскрыть***. Для этого можно:

а) числитель и знаменатель разложить на множители и сократить на $(x-a)$;

Например, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x+1} = -\dfrac{1}{2}$;

б) если под знаком предела есть иррациональные выражения, то надо умножить числитель и знаменатель на выражения, сопряженные иррациональному выражению и после этого найти предел;

Например, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x+1})}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$

$$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.$$

в) если под знаком предела есть тригонометрические функции, надо использовать первый замечательный предел или его следствия.

Например, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}=\dfrac{4}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 4x}{4x}}{\frac{\sin 5x}{5x}}=\dfrac{4}{5}$.

4. Если $x\to\infty$, то предел отношения двух многочленов равен:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\mathbf{K}+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\mathbf{K}+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, \text{Íńëč} \quad m=n;\\ \infty, \text{ Íńëč} \quad m>n;\\ 0, \text{ Íńëč} \quad m<n.\end{cases}$$

5. Для раскрытия неопределенностей вида (1^{∞}) применяют второй замечательный предел или его свойства.

Например, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2-5}{x+2}\right)^{2x+1}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x+2}\right)^{(2x+1)\cdot\left(\frac{-5}{x+2}\right)\left(\frac{x+2}{-5}\right)}==\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-10x-5}{x+2}}=e^{-10}.$$

Ответьте на вопросы

1. Что такое числовая последовательность? Приведите примеры последовательностей.
2. Что такое предел последовательности?
3. Какая последовательность сходится, а какая расходится?
4. Назовите основные теоремы о пределах.
5. Что такое бесконечно малая последовательность?
6. Какие теоремы о бесконечно малых вы знаете?
7. Чему равен предел суммы постоянной и бесконечно малой?
8. Что такое d – окрестность точки?
9. Прочитайте выражение $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.
10. Дайте определение предела функции.

11. Что обозначает запись $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b_1$?
12. Что обозначает запись $\lim\limits_{x\to a+0} f\left(x\right)=b_2$?
13. Какая функция называется непрерывной в точке $x=x_0$?
14. Что такое точка разрыва функции?
15. Какая функция называется непрерывной на интервале?
16. Какие разрывы функции называются устранимыми, а какие неустранимыми?

Задания для самостоятельной работы № 20

I. Найти пределы следующих выражений.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^3-3x+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; 12) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

10

ПРОИЗВОДНЫЕ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИИ

Лексика раздела

аргумент	argument	论据
геометрический	geometrical	几何学
геометрический смысл	geometrical sense	几何学意义
геометрический угол	geometrical corner	几何学角度
геометрия	geometry	几何
главная	main	主要的
главная секущая	main secant	主要割线
дифференциал	differential	差别
дифференцирование	differentiation	分化
касательная	tangent	切线(正切)
нормаль	normal, perpendicular	标准的(垂直)
обратный	opposite	相反
остаточный	residual	剩余
отношение	relation	关系
приращение аргумента	increment of argument	增量的说法
приращение функции	increment of function	增量的职能
производная	derivative	衍生物
производная слева	left-hand derivative	导数（左）
производная справа	right-hand derivative	导数（右）
разложить	expand	分解,分散
ряд	line	数字
скорость	speed	速度
скорость изменения функции	rate of function's change	速度改变的图像
средняя точка	midpoint	中点
стационарные точки	stationary points	固定点
точки экстремума	points of extremum	极值点
угловой	angular	角

ускорение	acceleration	加速度
физический	physical	物理
функция	function	功能, 函数
нелинейная функция	nonlinear function	非线性函数
неявная функция	implicit function	隐函数
явная функция	obvious function	显函数
экстремум функции	extremum of function	极值函数

10.1. Понятие производной

Пусть $y = f(x)$ есть функция, которая определена на отрезке $[a; b]$, и точка a принадлежит этому интервалу. Возьмем произвольную точку x из этого интервала, составим разность $x - x_0$ и обозначим ее Δx (читаем: "дельта икс"): $\Delta x = x - x_0$. Эта разность называется ***приращение аргумента функции*** (рис. 10.1).

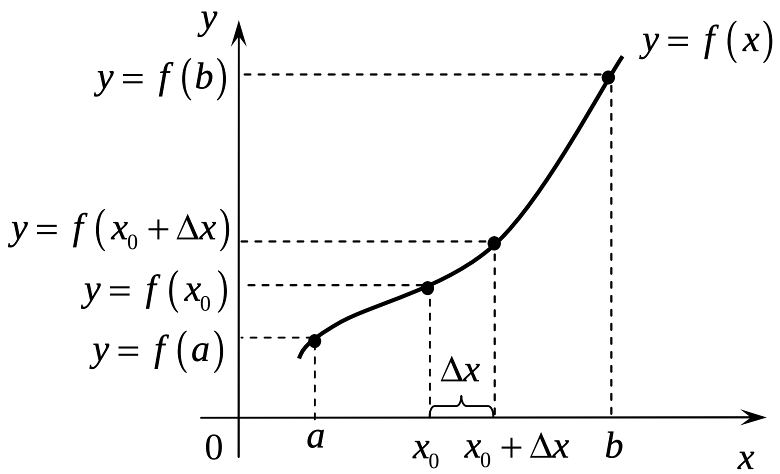


Рисунок 10.1

Разность между значением функции в точке $x = x_0 + \Delta x$ и значением функции в точке $x = x_0$ называется ***приращением функции*** и обозначается Δy (читается: "дельта игрек"):

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Найдем предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если x стремится к x_0, а Δx стремится к нулю. Это будет новая функция. Обозначим ее y' (читаем: "игрек штрих"):

$$y'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если этот предел существует, то функция $y = f(x)$ ***имеет производную*** в данной точке x_0, или она ***дифференцируема*** в этой точке.

ЗАПОМНИТЕ!

Производная функции есть предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

В литературе используют различные обозначения для производных: y' или y_x – Лагранж, $\dfrac{dy}{dx}$ или $\dfrac{df}{dx}$ – Лейбниц, D_y или D_f – Коши.

Производную функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначают так:

$$y'(x_0) \equiv f'(x_0) \equiv \frac{dy(x_0)}{dx} \equiv \frac{df(x_0)}{dx} \equiv f'(x)\Big|_{x = x_0}.$$

Ответьте на вопросы

1. Что такое приращение аргумента, приращение функции?
2. Как прочитать выражение $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$?
3. Что такое производная функции?

10.2. Геометрический и физический смысл производной

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ в декартовой системе координат xOy (рис. 10.2). Возьмем на графике точку $M(x_0; y_0)$ и точку $N(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$. Проведем через эти точки прямую MN. Эта прямая называется ***секущей***. Ее уравнением будет $y = kx + b$, а угловой коэффициент этой прямой равен тангенсу угла наклона секущей: $k_{MN} = \mathrm{tg}\, b = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если $x \to x_0$, то секущая MN поворачивается вокруг точки x_0 и переходит в касательную с угловым коэффициентом $k = \mathrm{tg}\, a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0)$.

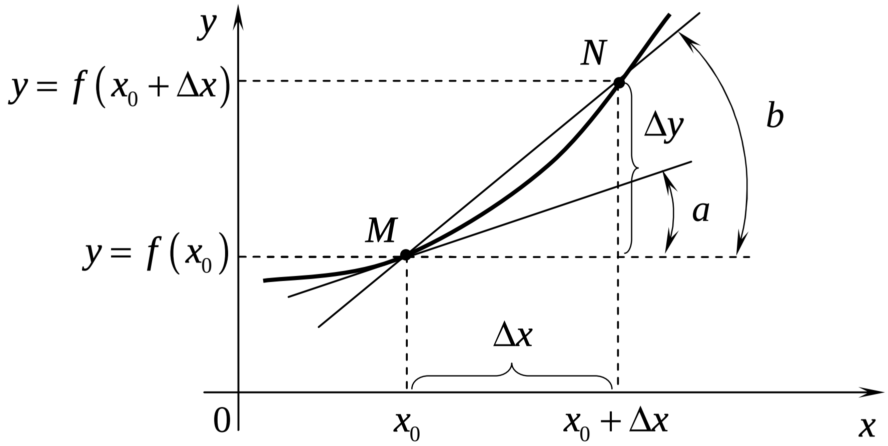


Рисунок 10.2

Если $\Delta x \to 0$, то секущая MN поворачивается вокруг точки M и в пределе переходит в касательную с угловым коэффициентом $k = \mathrm{tg}\, a = \lim \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0)$.

Угловой коэффициент касательной к графику функции в данной точке равен значению производной функции в этой точке: $k = y'(x_0)$.

ЗАПОМНИТЕ!

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в данной точке.

Значение производной $f'(x)$ в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной (рис. 10.3).

Нормаль – это прямая, перпендикулярная к касательной в точке касания (рис. 10.3).

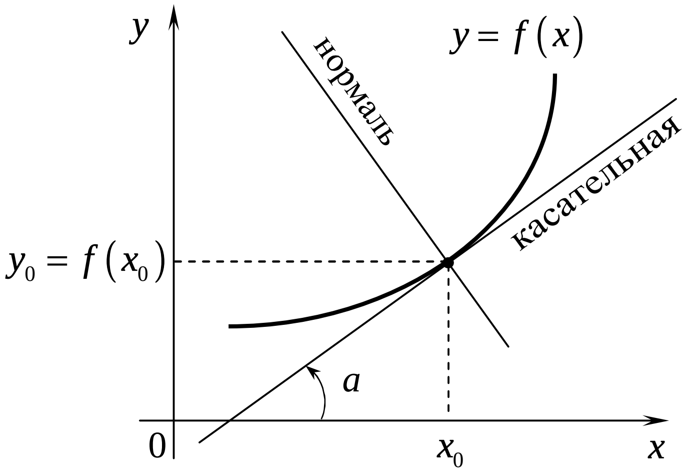


Рисунок 10.3

ЗАПОМНИТЕ!

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$ запишем как уравнение прямой, которая проходит через заданную точку: $y - y_0 = k(x - x_0) \equiv y'(x_0)(x - x_0)$.

Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$ запишем так: $y - y_0 = -\dfrac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$.

<u>*Пример 1.*</u> Напишите уравнение касательной к графику функции $y = 3x^2 + 6x - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение. 1) Найдем значение функции, если $x_0 = 1$: $y_0 = 3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 - 1 = 8$.

2) Найдем первую производную функции: $y'(x) = \left(3x^2 + 6x - 1\right)' = 6x + 6$.

3) Найдем значение производной, если $x_0 = 1$: $y'(x_0) = 6 \cdot 1 + 6 = 12$.

4) Запишем уравнение касательной, которая проходит через данную точку $M(x_0; y_0) \equiv M(1; 8)$: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ или $y - 8 = 12(x - 1) \Rightarrow y - 8 = 12x - 12 \Rightarrow 12x - y - 4 = 0$.

Ответ. Уравнение касательной: $12x - y - 4 = 0$.

<u>*Пример 2.*</u> Напишите уравнение нормали к графику функции $y = e^{2x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

Решение. 1) Найдем значение функции, если $x_0 = 0$: $y_0 = e^{2 \cdot 0} = e^0 = 1$.

2) Найдем первую производную функции: $y'(x) = 2 \cdot e^{2x}$.

3) Найдем значение производной, если $x_0 = 0$: $y'(x_0) = 2 \cdot 1 = 2$.

4) Запишем уравнение нормали, которая проходит через данную точку $N(x_0; y_0) \equiv N(0; 1)$: $y - y_0 = -\dfrac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$ или

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}x \Rightarrow 2y - 2 = x \Rightarrow x - 2y + 2 = 0.$$

Ответ. Уравнение нормали: $x - 2y + 2 = 0$.

Рассмотрим задачу о свободном падении тела и найдем мгновенную скорость его движения.

Из физики мы знаем, что $h = \dfrac{gt^2}{2}$, где h – высота падения, g – ускорение свободного падения, t – время падения.

За время t_0 тело проходит расстояние $h_0 = \dfrac{gt_0^2}{2}$, а за время t_1 – расстояние $h_1 = \dfrac{gt_1^2}{2}$. Приращение аргумента (времени t) будет равно $\Delta t = t_1 - t_0$, откуда $t_1 = t_0 + \Delta t$.

Приращение функции $h(t)$ будет равно:

$$\Delta h = h_1 - h_0 = \frac{gt_1^2}{2} - \frac{gt_0^2}{2} = \frac{g\left(t_0 + \Delta t\right)^2}{2} - \frac{gt_0^2}{2} =$$

$$= \frac{g\left(t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2\right)}{2} - \frac{gt_0^2}{2} = \frac{g}{2}\left(t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 - t_0^2\right) = \frac{g\Delta t}{2}\left(2t_0 + \Delta t\right).$$

Найдем предел отношения приращения функции $h(t)$ к приращению ее аргумента t, если Δt стремится к нулю:

$$h'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g\Delta t}{2\Delta t}\left(2t_0 + \Delta t\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(gt_0 + \frac{g\Delta t}{2}\right) = gt_0.$$

В левой части равенства мы получили значение производной функции $h(t)$, а в правой части значение мгновенной скорости тела в момент времени t_0.

ЗАПОМНИТЕ!

Физический смысл производной. Производная функции $y = f(x)$ в точке x есть мгновенная скорость изменения функции в точке x, т.е. скорость протекания процесса, который описывается зависимостью $y = f(x)$.

Например, если дана функция $y = x^2$, то ее производная будет $f'(x) = 2x$, тогда значение производной в точке $x = 2$ будет $f'(2) = 4$, а значение производной в точке $x = 3$ будет $f'(3) = 6$. Это значит, что в точке $x = 2$ функция изменяется в 4 раза быстрее аргумента x, а в точке $x = 3$ изменяется в 6 раз быстрее (т.е. различная скорость изменения функции или протекания процесса). В этом и состоит физический смысл производной.

Операция нахождения (взятия) производной функции $y = f(x)$ называется ***дифференцированием функции***.

Ответьте на вопросы

1. Что показывает угловой коэффициент k в уравнении прямой $y = kx + b$?
2. Чему равен угловой коэффициент касательной к кривой в точке $x = x_0$?
3. Как найти угловой коэффициент нормали к кривой в точке $x = x_0$?
4. В чем состоит геометрический смысл производной?
5. В чем состоит физический смысл производной?

10.3. Производные основных элементарных функций. Свойства производной

Таблица 10.1 – Производные основных элементарных функций

Производная степенной функции $y = x^n$	$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$, $\quad \left(x\right)' = 1$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.
Производная показательной функции $y = a^x$	$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$, $\quad \left(e^x\right)' = e^x$.
Производная логарифмической функции $y = \log_a x$	$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, $\quad \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$.
Производные тригонометрических функций	$\left(\sin x\right)' = \cos x$, $\quad \left(\operatorname{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$, $\left(\cos x\right)' = -\sin x$, $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$.
Производные обратных тригонометрических функций	$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad \left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$, $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad \left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Рассмотрим некоторые свойства производной.

1. ***Производная постоянной равна нулю:*** $(C)' = 0$.

Если $y = C$, то $\Delta y = C - C = 0$, а $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

<u>Пример 3.</u> Найдите производную функции $y = 5$.

Решение. По формуле $y' = (C)' = 0$ найдем: $y' = (5)' = 0$.

Ответ. $y' = 0$.

2. ***Постоянный множитель можно вынести за знак производной:*** $(C \cdot U)' = C \cdot U'$.

Если $y(x) = C \cdot U(x)$, то $\Delta y = C \cdot U(x + \Delta x) - C \cdot U(x) =$
$= C \cdot [\, U(x + \Delta x) - U(x) \,] = C \cdot \Delta U$, а $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} C \cdot \dfrac{\Delta U}{\Delta x} = C \cdot U'$.

<u>Пример 4.</u> Найдите производную функции $y = 3x^2 + 6x + 3$.

Решение. Перепишем функцию: $y = 3x^2 + 6x + 3 = 3\left(x^2 + 2x + 1\right)$. Найдем производную: $y' = \left[3\left(x^2 + 2x + 1\right)\right]' = 3\left(x^2 + 2x + 1\right)' = 3(2x + 2) = 6(x + 1)$.

Ответ. $y' = 6(x + 1)$.

3. ***Производная суммы функций равна сумме производных этих функций:*** $(U + V)' = U' + V'$.

Если $y(x) = U(x) + V(x)$, то $y(x + \Delta x) = U(x + \Delta x) + V(x + \Delta x)$,

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = U(x + \Delta x) + V(x + \Delta x) - U(x) - V(x) =$$
$$= U(x + \Delta x) - U(x) + V(x + \Delta x) - V(x) = \Delta U + \Delta V,$$
$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U + \Delta V}{\Delta x} = U'(x) + V'(x).$$

<u>Пример 5.</u> Найдите производную функции $y = 2x^2 + 5x - 7$.

Решение. $y' = \left(2x^2 + 5x - 7\right)' = \left(2x^2\right)' + (5x)' - (7)' = 4x + 5 - 0 = 4x + 5$.

Ответ. $y' = 4x + 5$.

4. *Производная произведения функций:*

$$\left[U(x)\cdot V(x)\right]' = U'V + UV'.$$

Если $y(x)=U(x)\cdot V(x)$, то $\Delta y = U(x+\Delta x)\cdot V(x+\Delta x) - UV =$
$= (U+\Delta U)\cdot(V+\Delta V) - U\,V = U\,V + U\,\Delta V + V\,\Delta U + \Delta U\,\Delta V - U\,V =$
$= U\Delta V + V\Delta U + \Delta U\Delta V$, тогда $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(U\frac{\Delta V}{\Delta x} + V\frac{\Delta U}{\Delta x} + \frac{\Delta U}{\Delta x}\,\frac{\Delta V}{\Delta x}\Delta x\right) = U\,V' + VU' + U'V'\cdot 0 = U'V + V'U.$$

<u>*Пример 6.*</u> Найдите производную функции $y = x^2\cdot\ln x$.

Решение. Обозначим $U = x^2$ и $V = \ln x$. Используем формулу производной произведения функций $y' = U'\,V + V'\,U$, получим:

$$y' = \left(x^2\right)'\cdot\ln x + (\ln x)'\cdot x^2 = 2x\ln x + \frac{x^2}{x} = 2x\ln x + x = x(1+2\ln x).$$

Ответ. $y' = x(1+2\ln x)$.

5. *Производная частного двух функций:* $\left[\dfrac{U(x)}{V(x)}\right]' = \dfrac{V\,U' - U\,V'}{V^2}$.

Если $y = \dfrac{U(x)}{V(x)}$, то $\Delta y = \dfrac{U+\Delta U}{V+\Delta V} - \dfrac{U}{V} = \dfrac{UV + V\Delta U - UV - U\Delta V}{V^2 + V\Delta V}$,

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{V\,\dfrac{\Delta U}{\Delta x} - U\,\dfrac{\Delta V}{\Delta x}}{V^2 + V\,\dfrac{\Delta V}{\Delta x}\,\Delta x} = \frac{V\;U' - U\;V'}{V^2 + V\;V'\cdot 0} = \frac{V\;U' - U\;V'}{V^2}.$$

<u>*Пример 7.*</u> Найдите производную функции $y = \dfrac{1+2x^2}{\sin x}$.

Решение. Обозначим $U = 1+2x^2$ и $V = \sin x$. Используем формулу производной частного двух функций:

$$y' = \frac{V\,U' - U\,V'}{V^2} = \frac{\sin x\cdot\left(1+2x^2\right)' - (\sin x)'\cdot\left(1+2x^2\right)}{\sin^2 x} = \frac{4x\cdot\sin x - \left(1+2x^2\right)\cdot\cos x}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{\sin x\left(4x - \left(1+2x^2\right)\cdot\operatorname{ctg} x\right)}{\sin^2 x} == \frac{1}{\sin x}\left(4x - \left(1+2x^2\right)\cdot\operatorname{ctg} x\right) =$$
$$= \operatorname{cosec} x\cdot\left(4x - \operatorname{ctg} x - 2x^2\operatorname{ctg} x\right).$$

Ответ. $y' = \left(4x - \operatorname{ctg} x - 2x^2\operatorname{ctg} x\right)\cdot\operatorname{cosec} x$.

6. *Производная сложной функции:* $y'_x = y'_U \cdot U'_x$.

Если $y = f\left[U(x)\right]$, где $U(x) = j(x)$, то y есть сложная функция.

Если аргумент x получает приращение Δx, то $U(x)$ получает приращение ΔU, а функция y получает приращение Δy. При этом $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta U} \cdot \frac{\Delta U}{\Delta x}$, а значит $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta U} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = y'_U \cdot U'_x$, так как при $\Delta x \to 0$, $\Delta U \to 0$.

<u>*Пример 8.*</u> Найдите производную функции $y = \sin 3x$.

Решение. Обозначим $U = 3x$. Используем формулу производной сложной функции: $y'_x = y'_U \cdot U'_x = \left(\sin 3x\right)'_U \cdot \left(3x\right)'_x = 3 \cdot \cos 3x$

Ответ. $y'_x = 3 \cdot \cos 3x$.

<u>*Пример 9.*</u> Найдите производную функции $y = e^{x^2+x-1}$.

Решение. Обозначим $U = x^2 + x - 1$. Используем формулу производной сложной функции: $y'_x = y'_U \cdot U'_x = \left(e^{x^2+x-1}\right)'_U \cdot \left(x^2 + x - 1\right)'_x = e^{x^2+x-1} \cdot \left(2x+1\right)$

Ответ. $y'_x = \left(2x+1\right) \cdot e^{x^2+x-1}$.

7. *Производная обратной функции:* $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

Пусть равенство $y = y\ (x)$ имеет (определяет) обратную зависимость $x = x(y)$, для которой мы можем найти производную x'_y. Тогда легко найти и производную от исходной функции. Действительно, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$, откуда при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{x'_y}.$$

Пример 10. Найдите производную $y = \sqrt[3]{x}$.

Решение. Запишем обратную функцию $x = y^3$. Найдем ее производную по y, получим: $x'_y = 3y^2 = 3\sqrt[3]{x^2}$. Сравним это выражение с производной от y по x: $\quad y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{\text{ő}'_{\text{ó}}}$.

Ответ. $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

8. *Производная неявной функции.*

Если задана неявная функция $F(x; y) = 0$, то для вычисления производной y'_x нужно приравнять производные от левой и правой частей, считая, что y есть функция от x, которая обращает соотношение $F(x; y) = 0$ в тождество.

Пример 11. Найдите производную функции y, заданную соотношением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}\right)'_x + \left(\dfrac{y^2}{b^2}\right)'_x = (1)'_x$, $\quad \dfrac{2x}{a^2} + \dfrac{2y \cdot y'_x}{b^2} = 0$, тогда $2b^2x + 2a^2yy' = 0$ или $y' = -\dfrac{2b^2x}{2a^2y} = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$.

Ответ. $y' = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$

9. *Логарифмическое дифференцирование.*

Иногда, прежде чем находить производную, удобно прологарифмировать функцию.

Пример 12. Найдите производную функции $y = x^x$.

Решение. Прологарифмируем обе части равенства $\ln y = x \ln x$.

Дифференцируем обе части равенства:

$\dfrac{y'}{y} = \ln x + x\dfrac{1}{x} = 1 + \ln x$, откуда $y' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$.

Ответ. $y' = x^x(1 + \ln x)$.

<u>*Пример 13.*</u> Найдите производную функции $y=\sqrt[x]{x}$.

Решение. $\ln y=\frac{1}{x}\ln x$; $(\ln y)'=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'$;

$$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}(1-\ln x);\ y'=y\cdot\frac{1}{x^2}(1-\ln x)=\sqrt[x]{x}\,\frac{1-\ln x}{x^2}$$

Ответ. $y'=\sqrt[x]{x}\,\frac{1-\ln x}{x^2}$.

Ответьте на вопросы

1. Напишите формулу производной степенной функции.
2. Чему равна производная функции $y=\log_a x$?
3. Напишите формулы производных тригонометрических функций.
4. Чему равна производная показательной функции $y=a^x$?
5. Напишите формулы производных обратных тригонометрических функций.
6. Напишите формулу производной функции $y=\sqrt[n]{x}$.
7. Напишите формулу производной суммы функций.
8. Как прочитать формулу $(U\,V)'=U'V+V'U$?
9. Как прочитать формулу $y'\left[U(x)\right]=y'_U\cdot U'_x$?
10. Как найти производную неявной функции?
11. Как называется функция $y=x^x$?

10.4. Производные высших порядков

Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную $y'(x)=f'(x)$, которая тоже есть функция от x. Тогда эту производную мы называем ***производной первого порядка*** или ***первой производной***. Но от полученной первой производной (функции) мы так же можем взять производную, которая будет называться ***производной второго порядка*** или ***второй производной:*** $y''=(y')'=f''(x)$.

Аналогично можно найти производные третьего, четвертого, … n-го порядка. Производные высших порядков обозначаются так:

$y' = \dfrac{dy}{dx}$ – производная первого порядка ("Де игрек по де икс");

$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ – производная второго порядка ("Де два игрек по де икс дважды");

$y''' = \dfrac{d^3y}{dx^3}$ – производная третьего порядка ("Де три игрек по де икс трижды");

$y^{(n)} = \dfrac{d^ny}{dx^n}$ – производная n-го порядка ("Де эн игрек по де икс эн").

<u>*Пример 14.*</u> Найдите пятую производную функции $y = x^7$.

Решение. $y' = 7x^6$, $y'' = 6\cdot 7\cdot x^5$, $y''' = 5\cdot 6\cdot 7\cdot x^4$

$y^{IV} = 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot x^3$, $y^{V} = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot x^2 = 2520x^2$.

Ответ. $y^{V} = 2520x^2$.

Если $y=U+V+\ldots+W$, то ее энная производная равна сумме энных производных функций U, $V\ldots W$:

$$y^{(n)} = \left(U + V + \mathbf{K} + W\right)^{(n)} = U^{(n)} + V^{(n)} + \mathbf{K} + W^{(n)}.$$

Формула для производной произведения $y = U\cdot V$ может быть записана в виде формулы Лейбница:

$$y^{(n)} = \left(U\cdot V\right)^{(n)} = U^{(n)}\cdot V + \left(\frac{n}{1}\right)\cdot U^{(n-1)}\cdot V' + \frac{n}{2}\cdot U^{(n-2)}\cdot V'' + \mathbf{K} + U\cdot V^{(n)}.$$

Используя производные высших порядков, дифференцируемую функцию можно представить в виде многочлена n–ой степени.

ЗАПОМНИТЕ!

Теорема Тейлора. Функция, дифференцируемая n+1 раз в некотором интервале, который содержит точку $x=a$, может быть представлена в виде многочлена n–ой степени и остаточного члена $R_n(x)$:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n,$$

где $R_n=\dfrac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ есть остаточный член разложения.

Можно показать, что остаточный член имеет более высокий $(n+1)$ порядок малости по сравнению с $(x-a)$ и функцию, которая задается одной формулой на всех участках изменения аргумента можно разложить в ряд Тейлора.

Числовым рядом называется бесконечное выражение вида

$$a_1+a_2+a_3+\ldots a_n+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}a_k,$$

где $a_1, a_2, a_3\ldots$ называются членами ряда.

Функции, заданные на одном и том же отрезке $a\le x\le b$, называются ***функциональными рядами***.

Разложим функцию $f(x)$ по степеням $(x-a)$, используя формулу Тейлора: $f(x)=f(a)+\dfrac{f'(a)}{1!}(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+$

$$+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots.$$

Если в формуле разложения функции по степеням положить a = 0, то мы имеем:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots.$$

<u>*Пример 15.*</u> Разложите в ряд по степеням x функцию $y = e^x$.

Решение. Найдем производные этой функции: $y' = e^x$, $y'' = e^x$, $y''' = e^x$, …,

$$y^{(n)} = e^x.$$

$$y'(0) = y''(0) = y'''(0) = \mathbf{K} = y^{(n)}(0) = 1.$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \mathbf{K} + \frac{1}{n!}x^n + \mathbf{K}\ .$$

По этой формуле можно приближенно вычислить число e с любой степенью точности.

$$e = 1 + 1\cdot 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot 1 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 1 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 1 + \mathbf{K}\ .$$

Ответ. Для $n = 3$, $e = 1 + 1 + 0,5 + 0,16667 = 2,66667$.

Для $n = 4$, $e = 1 + 1 + 0,5 + 0,1667 + 0,04166 = 2,70833$.

Для $n = 5$, $e = 1 + 1 + 0,5 + 0,1667 + 0,04166 + 0,00833 = 2,71666$.

<u>*Пример 16.*</u> Разложите в ряд по степеням х функцию $y = \sin x$.

Решение. Найдем $y(0) = \sin 0° = 0$.

Найдем первые семь производных функции при $x = 0$:

$$y'(x) = \cos x \ \rightarrow\ y'(0) = 1, \qquad y''(x) = -\sin x \ \rightarrow\ y''(0) = 0,$$

$$y'''(x) = -\cos x \ \rightarrow\ y'''(0) = -1, \qquad y^{IV}(x) = \sin x \ \rightarrow\ y^{IV}(0) = 0,$$

$$y^{V}(x) = \cos x \ \rightarrow\ y^{V}(0) = 1, \qquad y^{VI}(x) = -\sin x \ \rightarrow\ y^{VI}(0) = 0,$$

$$y^{VII}(x) = -\cos x \ \rightarrow\ y^{VII}(0) = -1.$$

Запишем первые восемь членов разложения функции $y = \sin x$:

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 - \frac{1}{7!}x^7 + \mathbf{K}\ ,$$

или $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \mathbf{K}$.

Ответ. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \mathbf{K}$.

<u>*Пример 17.*</u> Разложите в ряд по степеням x функцию $y = \cos x$.

Решение. Найдем $y(0) = \cos 0° = 1$.

Найдем первые семь производных и их значения при $x = 0$:

$$y'(x) = -\sin x \ \rightarrow\ y'(0) = 0, \qquad y''(x) = -\cos x \ \rightarrow\ y''(0) = -1,$$

$$y'''(x) = \sin x \ \rightarrow\ y'''(0) = 0, \qquad y^{IV}(x) = \cos x \ \rightarrow\ y^{IV}(0) = 1,$$

$$y^{V}(x) = -\sin x \ \rightarrow\ y^{V}(0) = 0, \qquad y^{VI}(x) = -\cos x \ \rightarrow\ y^{VI}(0) = -1,$$

$$y^{VII}(x) = \sin x \ \rightarrow\ y^{VII}(0) = 0.$$

Запишем первые восемь членов ряда разложения:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{1\cdot 2}x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6 + \mathbf{K}\ ,$$

или $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathbf{K}$.

Ответ. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathbf{K}$.

Аналогично можно получить разложения других элементарных функций.

Ответьте на вопросы

1. Что такое производная второго порядка?
2. Как найти производную третьего порядка?
3. Напишите формулу n-й производной суммы функций $y = U + V + \mathbf{K} + W$.
4. Напишите формулу n-й производной произведения функций $y = UV$.
5. Как разложить функцию $y = f(x)$ в ряд по степеням $(x - a)$?
6. Напишите формулы разложения функций $y = e^x$, $y = \sin x$ и $y = \cos x$ по степеням x.
7. Сформулируйте теорему Тейлора.
8. Что такое числовой ряд?
9. Что такое функциональный ряд?

10.5. Дифференциал функции

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ (рис. 10.4).

В точке $M(x_0, y_0)$ значение функции будет равно $y(x_0) = f(x_0)$. Дадим аргументу функции приращение Δx (отрезок MK). Значение функции в точке $x_0 + \Delta x$ будет равно $f(x_0 + \Delta x)$, а ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. На чертеже это отрезок NK.

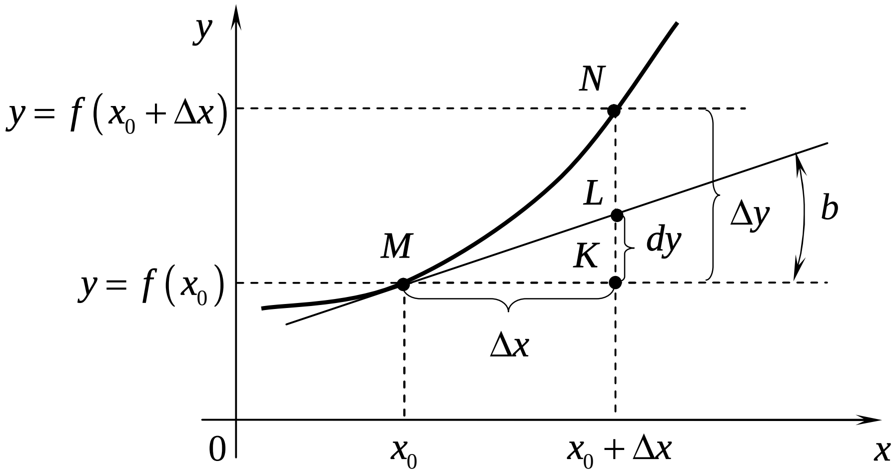


Рисунок 10.4

Найдем значение производной функции в точке *M*. Значение производной, как мы знаем, равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в данной точке $y' = \operatorname{tg} a$. Эта касательная отсекает на отрезке *NK* отрезок *KL*, который составляет часть приращения функции Δy. Эту часть приращения функции обозначают dy и называют ***дифференциалом функции***.

Тогда $y' = \operatorname{tg} a = \dfrac{dy}{\Delta x}$, откуда мы получим: $dy = y' \cdot \Delta x$.

Для линейной функции $y = x$ имеем $dy = dx = \Delta x$. Дифференциал аргумента равен его приращению. Но тогда $dy = f'(x)dx$, и мы получаем обозначение производной $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

ЗАПОМНИТЕ!

Главная часть приращения функции, которая линейна относительно Δx, называется дифференциалом функции:

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Если в формуле приращения функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ заменить Δy на значение дифференциала в этой точке, то можно записать приближенное равенство $f'(x_0)\cdot\Delta x = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$. Тогда получим:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x.$$

Эта формула позволяет приближенно вычислить значение функции, если аргумент получает небольшие приращения.

Пример 18. Найдите приближенное значение функции $y = x^2$ в точке $x_1 = 1{,}1$, если приращение функции заменить его дифференциалом.

Решение. Принимаем первоначальное значение функции в точке $x = 1$. Тогда $y(1) = 1$, а $\Delta x = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$, $y'(1) = 2x\big|_{x=1} = 2$.

Приближенное значение функции в точке $x = 1{,}1$ найдем по формуле $y(x_1+\Delta x) = y(x_1) + y'(x_1)\,\Delta x$. Получим: $y(1{,}1) = 1 + 2\cdot 0{,}1 = 1{,}2$. Если мы вычислим точно значение функции при $x = 1{,}1$, то $y(1{,}1) = 1{,}1^2 = 1{,}21$. Погрешность составляет 0,01.

Ответ. $y(1{,}1) \cong 1{,}2$

Пример 19. Вычислить приближенно $y = \sqrt[4]{17}$.

Решение. Запишем задание в виде функции $y = \sqrt[4]{x}$. Пусть начальное значение переменной будет $x_0 = 16$, тогда $\Delta x = x_1 - x_0 = 17 - 16 = 1$, а $y(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2$. Таким образом, значение производной функции $y = \sqrt[4]{x}$

будет равно: $y'(x) = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{4}}$. Если $x_0 = 16$, тогда найдем значения

производной: $y'(x_0) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x_0^3}} = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \dfrac{1}{32}$.

Если $x = 17$, тогда значение функции будет равно:

$y(17) = y(x_0) + y'(x_0)\cdot\Delta x = 2 + \dfrac{1}{32}\cdot 1 = 2\dfrac{1}{32} = 2{,}031$.

Найдем значения функции с точностью до 10^{-7} при помощи калькулятора: $y = \sqrt[4]{17} = 2{,}0305431$.

Погрешность результата составляет: $\delta = 0{,}0004569$.

Ответ. $y = \sqrt[4]{17} \approx 2{,}031$.

Пример 20. Найдите $\sin 29^\circ$.

Решение. Для функции $y = \sin x$ при $x_0 = 30^\circ$ имеем: $y_0 = \dfrac{1}{2}$,

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 29^{\circ} - 30^{\circ} = -1^{\circ} = -\frac{p}{180^{\circ}},$$

$$y' = \left(\sin x\right)' = \cos x, \quad y'\left(x_0\right) = \cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$y = \sin 29^{\circ} = \frac{1}{2} - \frac{p}{180} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}5 - 0{,}0151071 \approx 0{,}4848.$$

Ответ. $\sin 29^{\circ} \approx 0{,}4848$.

Дифференциал второго порядка $d^2 y$ – это дифференциал от дифференциала первого порядка. Для функции $y = f\left(x\right)$ в дифференциале первого порядка $dy = f'\left(x\right)dx$ при повторном дифференцировании dx считается независимым от x, и дифференциал второго порядка будет записан так:

$$d^2 y = \left[\, f'\left(x\right) dx \right]' dx = f''\left(x\right) dx^2 .$$

Аналогично можно записать ***дифференциал n -го порядка*** в виде: $$d^n y = f^n\left(x\right) dx^n .$$

Ответьте на вопросы

1. Какая часть приращения функции называется дифференциалом?
2. Чему равен дифференциал аргумента?
3. Как связан дифференциал и производная функции?
4. Как записать дифференциал n -го порядка?
5. Прочитайте формулу $dy = y'dx$.
6. Прочитайте формулу $d^n y = y^{(n)} dx^{(n)}$.

10.6. Правило Лопиталя

При вычислении пределов, которые представляют отношение двух бесконечно малых или двух бесконечно больших величин, возникают неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Французский математик Г. Лопиталь опубликовал простое правило для вычисления таких пределов, найденное И. Бернулли.

Если необходимо вычислить предел $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{j\,(t)}{y\,(t)}$, а $j\,(t_0)=0$ и $y\,(t_0)=0$, то имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. В этом случае предел отношения функций равен пределу отношения их производных: $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{j\,(t)}{y\,(t)}=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{j\,'(t)}{y\,'(t)}$.

Если отношение производных тоже будет неопределенностью вида $\dfrac{0}{0}$, тогда правило можно применять вновь.

<u>*Пример 21.*</u> Найдите предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Решение. Числитель и знаменатель выражения стремятся к нулю при $x\to 1$, а поэтому мы имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Воспользуемся правилом Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\dfrac{3}{e}$.

Ответ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\dfrac{3}{e}$.

<u>*Пример 22.*</u> Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\dfrac{1}{x+1}}=2$.

Ответ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}=2$.

Правило Лопиталя используют и для неопределенностей вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

<u>*Пример 23.*</u> Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^4-3x^2+1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^4-3x^2+1}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-5}{4x^3-6x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2}{12x^2-6}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{24x}{24x}=1.$

Ответ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^4-3x^2+1}=1$.

<u>*Пример 24.*</u> Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-\ln x}{x^2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x}{4x}=2.$

Решение можно получить и другим способом:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left[2-\frac{\ln x}{x^2}\right]=2-\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=2-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\cdot x^2}=2.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-\ln x}{x^2}=2$.

S

Ответьте на вопросы

1. Что такое неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$?
2. Напишите правило Лопиталя.
3. Прочитайте следующую формулу $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{j\ (t)}{y\ (t)}=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{j\,'(t)}{y\,'(t)}$.

Задания для самостоятельной работы № 21

I. Найдите производные функций.

1) $y=5x^3$; 2) $y=\sqrt[8]{x}$; 3) $y=6x^4+2x^3$; 4) $y=5x\cdot\ln x$;

5) $y=3x^2\cdot\sin x$; 6) $y=x^2\cdot 2^x$; 7) $y=\cos 3x$; 8) $y=\arcsin\sqrt{x}$;

9) $y=\operatorname{arcctg}\left(5x^2+2\right)$; 10) $y=\log_2\left(5x^2+3\right)$; 11) $y=\left(3x+5\right)^7$;

12) $y=a^{x^2}-e^{-x^2}$; 13) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; 14) $y=2x^{3x}$;

15) $y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2x}$; 16) $y=\sqrt[x]{x}$; 17) $x^y=y^x$.

II. Вычислите значение производных данных функций в точке:

1) $y = x^2 - 3x + 2$ при $x = 2$; 3) $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ при $x = 2$;

2) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ при $x = 1$; 4) $y = \sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{x^3}$ при $x = 1$.

III. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой $y = 2x^2 - 5x + 3$ в точке с абсциссой $x = -1$.

IV. Найдите угол между касательной к кривой $y = 5x^2 - 9x - 3$ в точке $x = 1$ и осью Ox.

V. Напишите уравнение касательной к кривой $y = 2x^2 - 5x + 3$ в точке с абсциссой $x = -1$.

VI. Напишите уравнение нормали к кривой $y = 5x^2 - 9x - 3$ в точке с абсциссой $x = 2$.

VII. Найдите дифференциалы функций.

1) $y = (2 + 3x)^3$; 2) $y = \sin 5x$; 3) $y = \sqrt[3]{x}$; 4) $y = x^2 + 2^x$.

VIII. Вычислите приближенно следующие значения.

1) $\sin 31^\circ$; 2) $\sqrt{15}$.

IX. Найдите производные высших порядков.

1) Найдите вторую производную функции $y = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$.

2) Найдите третью производную функции $y = 5x^2 \sin x$.

3) Найдите шестую производную функции $y = 6x^5$.

X. Используя правило Лопиталя, найдите пределы выражений.

1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x^3 - 5x^2 + 2x + 12}$; 2) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{2}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x - 1} \right)$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$; 5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$; 6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x}$;

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}$; 8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1 + x)}$.

11

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

Лексика раздела

график функции	graph of function	函数图像
график функции вогнутый	graph of concave function	函数图象（凹）
график функции выпуклый	graph of convex function	函数图象（凸）
дифференцирование	differentiation	分化
касательная	tangent	切线(正切)
критическая точка	critical point	临界点
метод касательных	tangent method	正切方法
производная	derivative	导数
точки экстремума	points of extremum	极值点
функция	function	功能, 函数
возрастающая функция	increasing function	上升函数
монотонная функция	monotonous function	单调函数
непрерывная функция	continuous function	连续函数
постоянная функция	constant function	常数的函数
убывающая функция	decreasing function	下降函数
экстремум функции	extremum of function	极值函数

11.1. Интервалы монотонности

Функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a;b]$, если она дифференцируема в каждой точке отрезка. В этом случае производная тоже есть функция от x: $y' = f'(x) = \varphi(x)$.

В точке разрыва функция не может иметь производной. Если функция $y = f(x)$ ***дифференцируема*** в точке $x = x_0$, то она в этой точке ***непрерывна***.

Если функция $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ не имеет производной, это значит, что в этой точке на графике функции не существует касательной, или эта касательная образует с осью *Ox* угол 90°.

Если для данной точки $x = x_0$ производная не существует, то есть не существует предел в этой точке, но существуют пределы слева и справа, то эти пределы называют ***производной слева*** $f'(x_0 - 0)$ и ***производной справа*** $f'(x_0 + 0)$.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в интервале $]a;b[$ и имеет производную в этом интервале. Производная такой функции в точке $x = x_0$ из этого интервала будет равна тангенсу угла наклона касательной к оси *Ox*.

Для того, чтобы эта функция на интервале $]a;b[$ была ***постоянна*** $y = f(x) = C$, необходимо и достаточно выполнить условие равенства нулю производной $y'(x) \equiv 0$ во всех точках этого интервала.

Графиком постоянной функции будет прямая, параллельная оси абсцисс (рис. 11.1). Угол наклона касательной в каждой точке данного графика равен нулю, а значит и $\mathrm{tg}\,\alpha = 0$, и производная функции в каждой точке графика равна нулю.

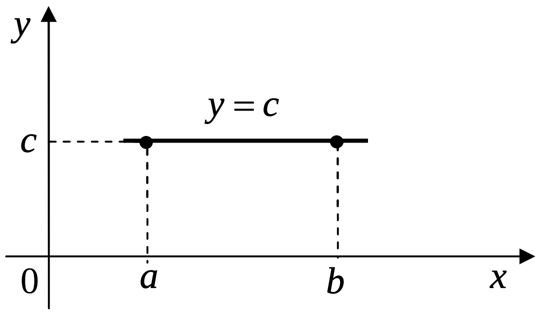


Рисунок 11.1

Для того чтобы функция $y = f(x)$ ***возрастала*** на интервале $]a;b[$, необходимо, чтобы ее первая производная была положительна $\left(y'(x) > 0\right)$ в каждой точке интервала.

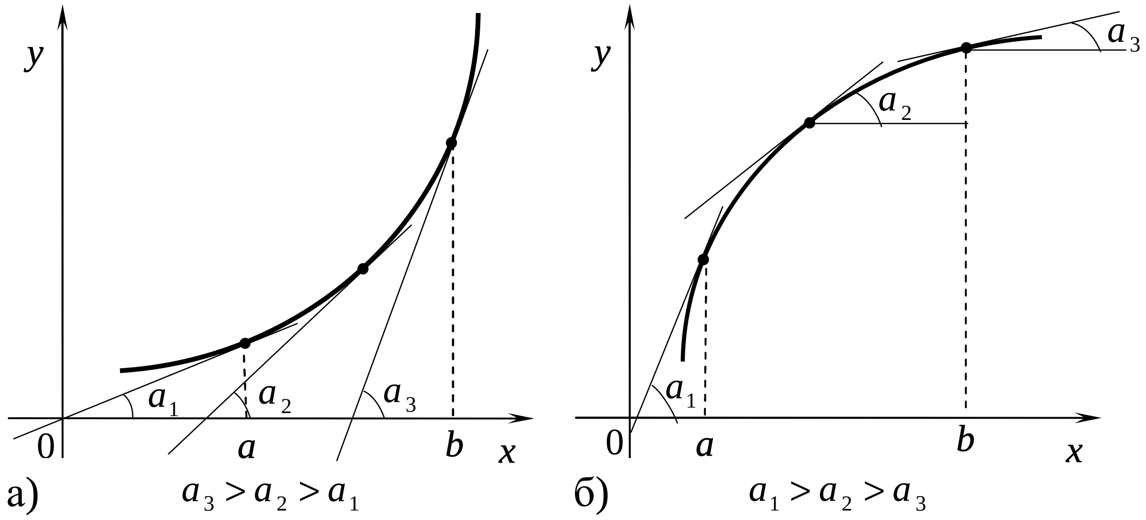


Рисунок 11.2

Как мы видим из рисунка 11.2, если функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $]a;b[$, то угол наклона касательной будет изменяться от 0° до 90°.

При изменении угла наклона в интервале $0^\circ < a < 90^\circ$ $\operatorname{tg} a = y'$ будет всегда больше нуля.

Для того, чтобы функция ***убывала*** на интервале $]a;b[$, необходимо и достаточно, чтобы ее первая производная на этом интервале была отрицательна ($y'(x) < 0$).

Анализируя рисунки 11.3 а и 11.3 б можно определить, что угол наклона касательной изменяется в интервале $90^{\circ} < a < 180^{\circ}$. При изменении угла a от 90° до 180° $\mathrm{tg}\, a = y'$ будет всегда отрицательным.

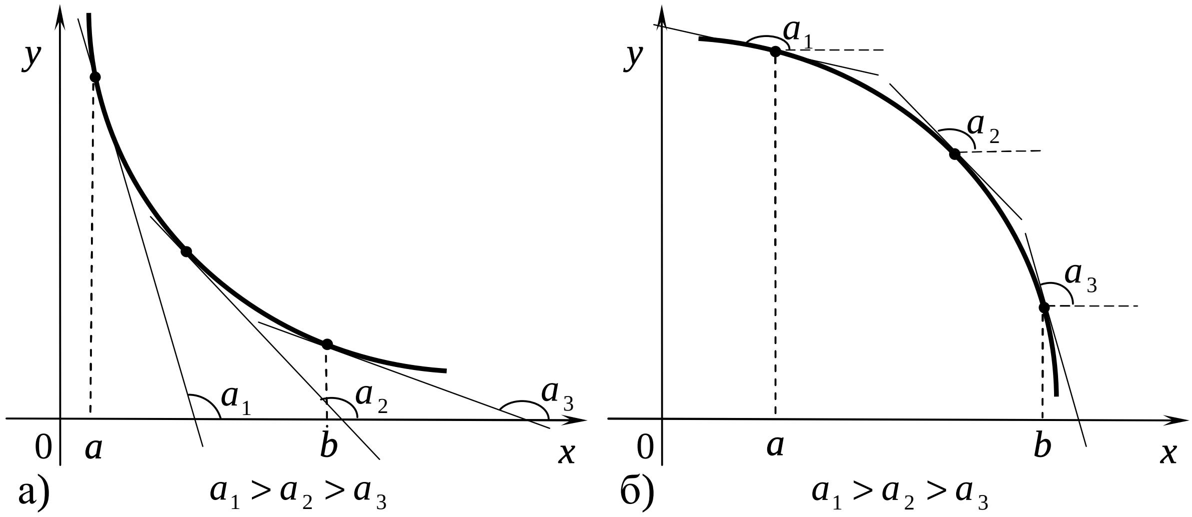


Рисунок 11.3

ЗАПОМНИТЕ!

Условие монотонности функции

Дифференцируемая во всей области определения функция возрастает на каждом интервале, в котором ее производная положительна и убывает на каждом интервале, в котором ее производная отрицательна.

Функция возрастает, если скорость ее изменения положительна и функция убывает, если скорость ее изменения отрицательна.

Если производная на интервале $]a;b[$ переходит от положительных значений к отрицательным или от отрицательных к положительным, то она должна пройти через нулевое значение.

Точки, в которых значение производной равно нулю, называются ***стационарными точками***.

ЗАПОМНИТЕ!

Чтобы найти интервалы монотонности функции $y = f(x)$ (интервалы возрастания или убывания), необходимо:

1) найти точки, в которых функция обращается в ноль $y(x) = 0$;
2) найти первую производную функции $y' = f'(x)$;
3) найти стационарные точки из условия, что $y' = 0$;
4) нанести эти точки на ось Ox и проверить знак производной на каждом интервале между соседними стационарными точками.

<u>*Пример 1.*</u> Найдите интервалы возрастания и убывания функции $y = x^2 + 2x - 3$.

Решение. 1. Найдем точки, в которых функция обращается в ноль, то есть $y(x) = 0$, тогда $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = -3$.

2. Найдем первую производную функции $y = x^2 + 2x - 3$, получим $y' = 2x + 2$.
3. Найдем стационарные точки из условия $y'(x) = 0$, тогда $2x + 2 = 0$, откуда $x = -1$.
4. Нанесем полученные точки на ось Ox и проверим знак производной в каждом из полученных интервалов.

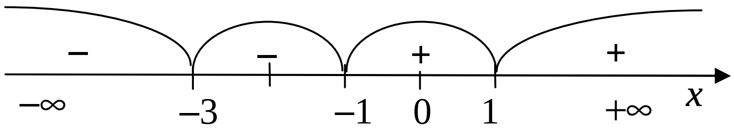


Рисунок 11.4

Возьмем точку $x = -4$, которая принадлежит интервалу $]-\infty; -3[$ и определим значение производной в этой точке: $y'(-4) = 2 \cdot (-4) + 2 = -6 < 0$, значит, функция убывает на этом интервале.

Возьмем точку $x = -2$ из интервала $]-3; -1[$, тогда $y'(-2) = 2 \cdot (-2) + 2 = -2 < 0$, значит, функция убывает на этом интервале.

Возьмем точку $x = 0$ из интервала $]-1; 1[$, тогда $y'(0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2 > 0$, значит, функция возрастает на этом интервале.

Возьмем точку $x = 2$ из интервала $]1; +\infty[$, тогда $y'(2) = 2 \cdot 2 + 2 = 6 > 0$, значит, функция возрастает на этом интервале.

Для удобства анализа поведения функции составим таблицу 11.1, в которую запишем все полученные данные.

Таблица 11.1 – Исследование функции $y = x^2 + 2x - 3$ и ее производной

x	$]-\infty;-3[$	-3	$]-3;-1[$	-1	$]-1;1[$	1	$]1;+\infty[$
$y'(x)$	<0	<0	<0	0	>0	>0	>0
$y(x)$	□	0	□	-4	□	0	□
Вывод	Функция убывает □				Функция возрастает □		

Из таблицы 11.1 видно, что функция $y = x^2 + 2x - 3$ убывает на интервале $]-\infty;-1[$ и возрастает на интервале $]-1;+\infty[$.

В стационарной точке $x = -1$ производная $y'(-1) = 0$.

Ответ. Функция убывает на интервале $]-\infty;-1[$ и возрастает на интервале $]-1;+\infty[$.

Ответьте на вопросы

1. Что обозначают термины: производная слева, производная справа?
2. Назовите условие, при котором функция будет постоянна на интервале.
3. При каких значениях производной функция возрастает на интервале?
4. При каких значениях производной функция убывает на интервале?
5. Какие точки графика функции называются стационарными точками?
6. Как найти интервалы монотонности функции?

11.2. Точки экстремума

Если при некотором значении $x = x_0$ значение $f(x_0)$ больше (меньше) всех "соседних" значений функции, то точка $x = x_0$ называется точкой ***максимума*** (***минимума***), а значение функции в этой точке называется ***максимальным*** (***минимальным***) значением функции.

Точки максимума и минимума называются ***точками экстремума***.

Значения функции в точках максимума и минимума называются ***экстремумами функции*** (максимумом и минимум функции).

Необходимое условие экстремума. В точках экстремума производная функции $f(x)$ либо равна нулю, либо не существует, т.е. если x_0 – это точка экстремума, то $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ – не существует. (Но не в каждой точке x_0 будет экстремум, если $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ – не существует!)

Достаточное условие экстремума. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, и производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то точка x_0 – это точка экстремума функции $f(x)$.

Если при переходе через точку $x=a$ первая производная функции $y'=f'(x)$ меняет знак с "+" на "–", тогда $x=a$ – это точка максимума.

Если при переходе через точку $x=b$ первая производная функции $y'=f'(x)$ меняет знак с "–" на "+", тогда $x=b$ – это точка минимума.

Точки экстремума – это стационарные точки. Но не всегда стационарные точки являются точками экстремума.

Например, в предыдущей задаче точка $x=-1$ является точкой экстремума функции $y=x^2+2x-3$ (точкой минимума), так как при переходе через эту точку производная меняет знак с "–" на "+".

Внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются ***критическими точками***.

ЗАПОМНИТЕ!

Для исследования функции на экстремум необходимо:
1) найти область определения функции;
2) найти первую производную функции;
3) найти критические точки функции;
4) найти интервалы возрастания и убывания функции;
5) проверить изменение знака производной при переходе через критические точки;
6) вычислить значение функций в точках экстремума.

<u>*Пример 2.*</u> Исследуйте на экстремум функцию $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

Решение. Областью определения функции будет вся числовая ось. Точек разрыва функции нет.

1. Найдем точки пересечения функции с осью *Ox*. Если $y = 0$, то $2x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)\left(2x^2 - x - 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -\dfrac{1}{2}$.
2. Найдем первую производную функции: $y'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.
3. Приравняем производную к нулю: $y'(x) = 0$. Получим: $6x(x-1) = 0 \Rightarrow$ $x_4 = 0$, $x_5 = 1$. Полученные точки являются критическими точками.
4. Для определения интервалов возрастания и убывания составим таблицу и найдем знак производной на каждом из интервалов $]-\infty; 0[$, $]0;1[$, $]1;+\infty[$ и в критических точках.

   а) Определим знак производной в точке $x = -\dfrac{1}{4}$ из интервала $]-\infty; 0[$:
$$y'\left(-\frac{1}{4}\right) = 6\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}-1\right) = 6\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{15}{8} > 0.$$

   б) Определим знак производной в точке $x = \dfrac{1}{2}$ из интервала $]0;1[$:
$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right) = -\frac{3}{2} < 0.$$

   в) Определим знак производной в точке $x = 2$ из интервала $]1;\infty[$:
$$y'(2) = 6\cdot 2\cdot(2-1) = 12 > 0.$$

   Все полученные результаты внесем в таблицу 11.2.

Таблица 11.2 – Исследование функции $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ и ее производной

x	$]-\infty; 0[$	0	$]0;1[$	1	$]1;+\infty[$
$y'(x)$	>0	0	<0	0	>0
$y(x)$	□	1	□	0	□
Вывод	Функция возрастает □	max	Функция убывает □	min	Функция возрастает □

Используя данные таблицы 11.2, дополним их значениями $y(-1) = -4$ и $y(2) = 5$. Нанесем полученные точки на график (рис. 11.5).

Как видно из таблицы 11.2 и рисунка 11.5, функция возрастает в интервалах $]-\infty; 0[$ и $]1; +\infty[$, где ее производная положительна и убывает в интервале $]0; 1[$, где ее производная отрицательна.

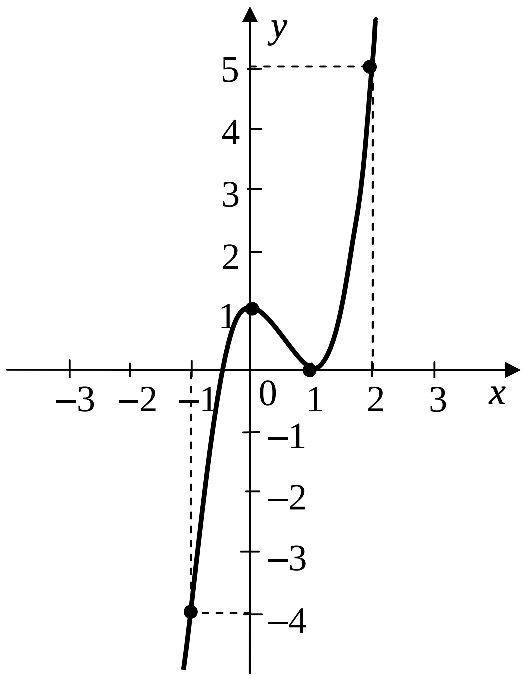


Рисунок 11.5

5. Определим значение функции в точках $x = 0$ и $x = 1$, при переходе через которые производная меняет знак: $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.

При переходе через точку $x = 0$ производная меняет знак с плюса на минус. В этой точке функция имеет максимум $y_{\max} = y(0) = 1$.

При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с минуса на плюс. В этой точке функция имеет минимум $y_{\min} = y(1) = 0$.

Ответ. Функция имеет максимум в точке $x = 0$ и минимум в точке $x = 1$.

Ответьте на вопросы

1. Какие точки графика функции называются точками экстремума?
2. Какое необходимое условие экстремума?
3. Назовите достаточное условие экстремума.
4. Какие точки называются критическими точками?
5. Как исследовать функцию на экстремум?

11.3. Наибольшее и наименьшее значение функции на интервале

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[a;b]$ и пусть в этом же интервале непрерывна ее первая производная. Необходимо найти наибольшее и наименьшее значения функции на этом интервале.

Для решения задачи недостаточно знать только экстремумы функции, необходимо учитывать и значения функции на краях интервала.

Из рисунка 11.6 видно, что экстремумами функции в интервале $[a;b]$ будут значения функции в точках $x = x_1$ и $x = x_2$. Но это не наибольшее и наименьшее значения в интервале.

Здесь наибольшим будет значение функции на краю интервала при $x = b$, $y_b = f(b)$, а наименьшим будет значение функции на другом краю интервала при $x = a$, $y_a = f(a)$.

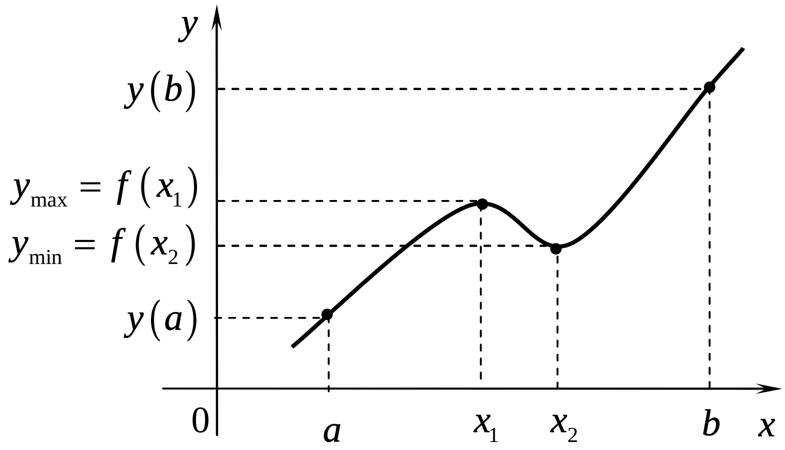


Рисунок 11.6

Теорема 1. Если в некотором интервале (конечном или бесконечном) функция непрерывна и имеет только один экстремум, и если это максимум (минимум), то он будет наибольшим (наименьшим) значением функции на этом интервале (рис. 11.7 а, б).

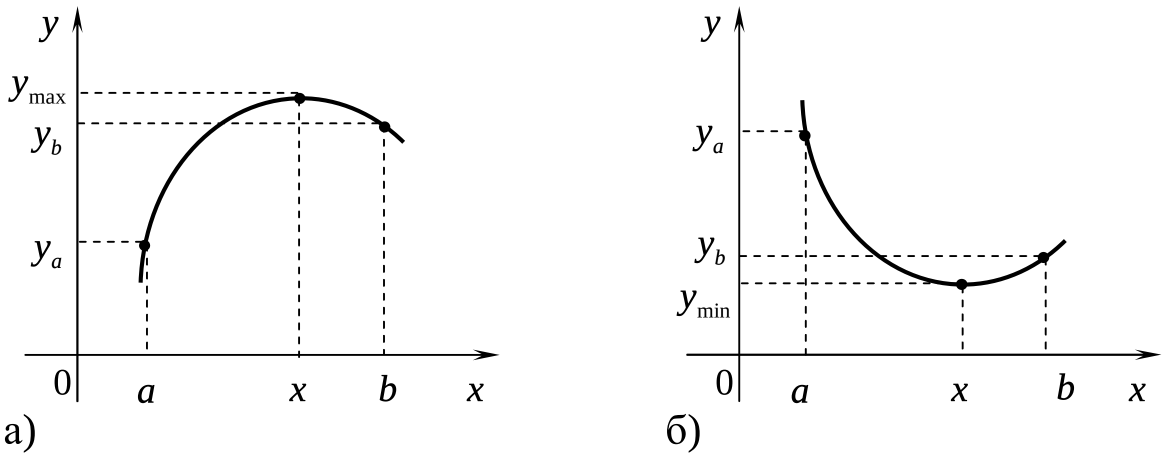


Рисунок 11.7

На рисунке 11.7 а и 11.7 б показаны графики функций, имеющие один экстремум на конечном или бесконечном интервале.

Теорема 2. Если функция непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она обязательно имеет на этом интервале наибольшее и наименьшее значения. Эти значения будут или в точках экстремума или на концах интервала.

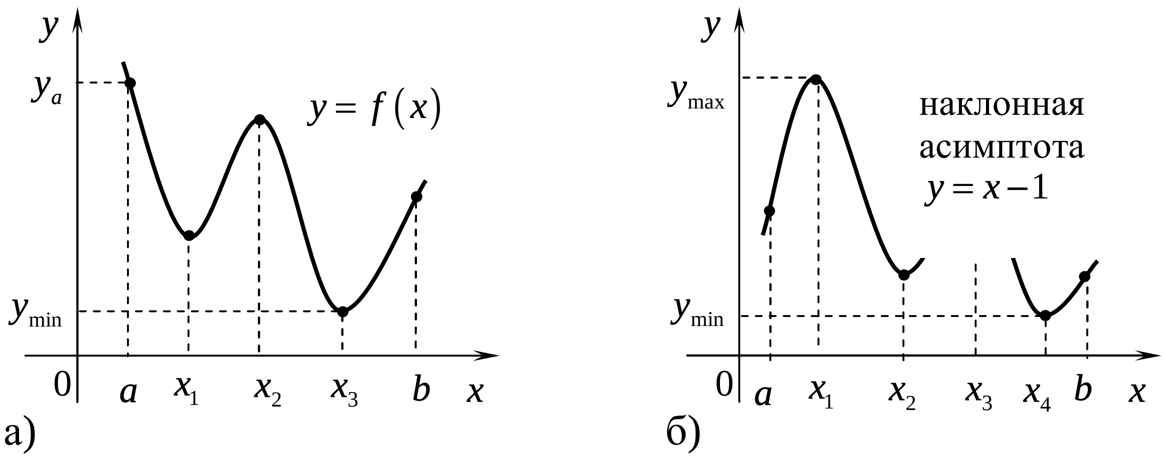


Рисунок 11.8

Наибольшее значение функция $y = f(x)$ принимает на конце интервала $\max y = f(a)$, а наименьшее значение – внутри интервала $\min y = y_{\min} = f(x_3)$ (рис. 11.8 а).

Функция $y = j\left(x\right)$ принимает наибольшее значение $\max y = y_{\max} = j\left(x_1\right)$ в точке экстремума $x = x_1$, а наименьшее значение $\min y = y_{\min} = j\left(x_4\right)$ в точке экстремума $x = x_4$ (рис. 11.8 б).

ЗАПОМНИТЕ!

Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f\left(x\right)$ на интервале $\left[a;b\right]$, необходимо:

1) найти критические точки функции, которые принадлежат данному интервалу;
2) найти значения функции в критических точках;
3) найти значения функции на краях интервала;
4) сравнить полученные результаты и найти наибольшее и наименьшее значения функции на интервале.

<u>*Пример 3.*</u> Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ на интервале $\left[-4;4\right]$.

Решение. Данная функция непрерывна в заданном интервале и имеет первую производную $y' = 3x^2 - 6x - 9$, значит, в этом интервале она имеет наибольшее и наименьшее значения (согласно теореме 2). Найдем эти значения.

1. Критическими точками этой функции будут точки, в которых ее первая производная обращается в нуль $\left(y' = 0\right)$. Приравняем производную к нулю и решим полученное уравнение: $3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$, $x_2 = -1$. В этих точках данная функция имеет экстремумы.
2. Найдем значения функции в критических точках: $y\left(3\right) = 8$; $y\left(-1\right) = 40$.
3. Найдем значения функции в точках $x = -4$ и $x = 4$, т.е. на краях интервала: $y\left(-4\right) = -41$, $y\left(4\right) = 15$.
4. Сравним полученные значения функции в критических точках и на краях интервала $\left[-4;4\right]$. Получим, что наименьшее значение $\min y = -41$ функция принимает на краю интервала при $x = -4$, а наибольшее значение $\max y = y_{\max} = 40$ соответствует критической точке $x_2 = -1$.

Ответ. $\min y = -41$; $\max y = 40$.

S **Ответьте на вопросы**

1. Где может находиться наименьшее или наибольшее значение непрерывной на интервале $]a;b[$ функции?
2. Если непрерывная функция $y=f(x)$ в точке x_0 имеет один min на интервале $]a;b[$, то где будет наименьшее значение функции и чему оно будет равно?
3. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции на интервале $]a;b[$? Назовите порядок действий.

11.4. Выпуклость или вогнутость кривой. Точки перегиба графика функции

Кривая графика функции называется ***выпуклой вверх*** (***выпуклой***) на интервале $]a;b[$, если точки кривой лежат над хордой M_aM_b (рис. 11.9 а).

Кривая графика функции называется ***выпуклой вниз*** (***вогнутой***) на интервале $]a;b[$, если точки кривой лежат под хордой M_aM_b (рис. 11.9 б).

Напомним, что ***хорда*** – это отрезок, который соединяет две точки графика функции.

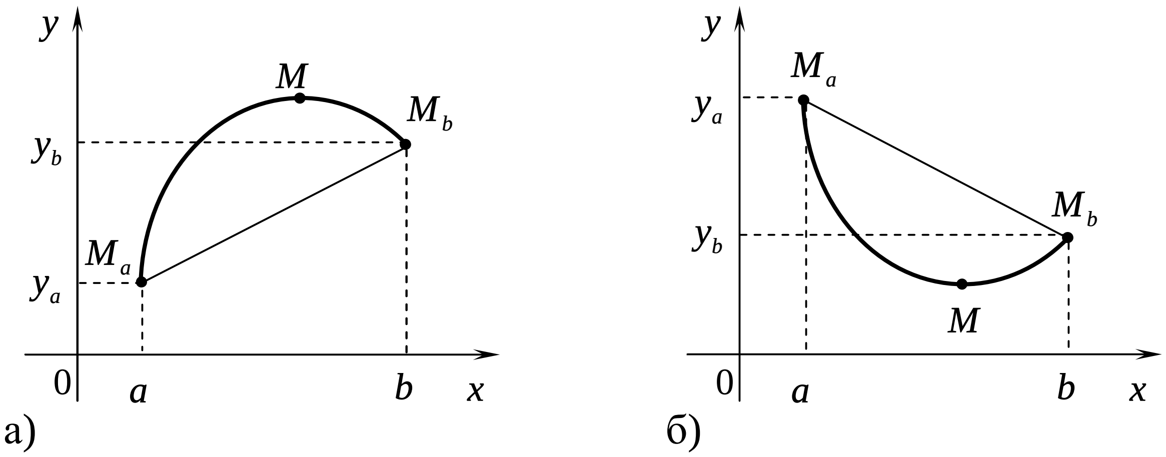


Рисунок 11.9

Теорема. Если кривая $y = f(x)$ ***выпуклая*** на интервале $]a;b[$, то на этом интервале ее вторая производная отрицательна, $y'' < 0$.

Если кривая $y = f(x)$ ***вогнутая*** на интервале $]a;b[$, то на этом интервале ее вторая производная положительна, $y'' > 0$.

Точка, которая отделяет выпуклую часть от вогнутой, называется ***точкой перегиба*** (рис. 11.10). В точке перегиба вторая производная равна нулю и меняет знак при переходе через эту точку.

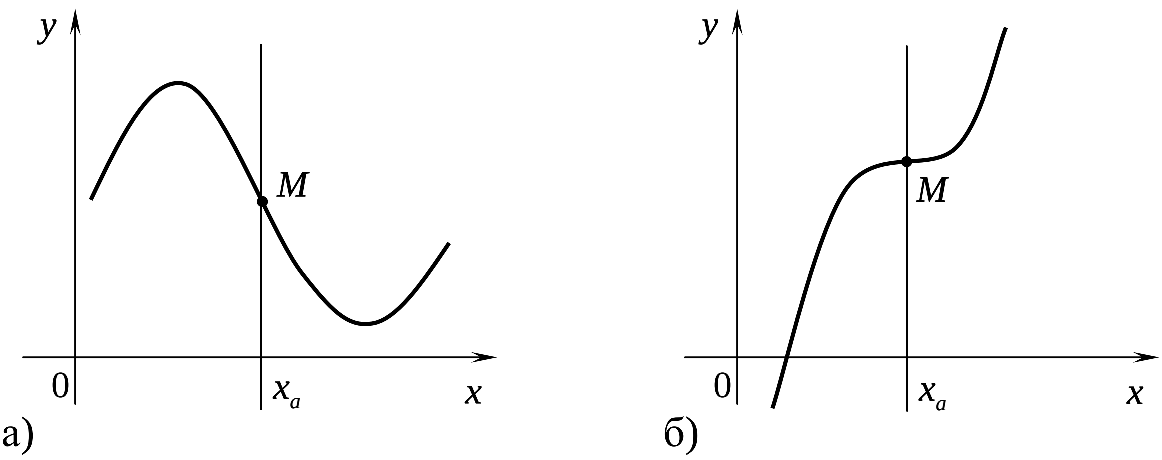


Рисунок 11.10

ЗАПОМНИТЕ!

Чтобы исследовать функцию $y = f(x)$ на выпуклость, вогнутость и точки перегиба, необходимо:

1) найти область определения и интервалы, на которых функция непрерывна;
2) найти вторую производную функции и внутренние точки области определения, в которых $y''(x) = 0$ или не существует;
3) найти знак второй производной функции и исследовать характер поведения функции на полученных интервалах.

Пример 4. Найдите точку перегиба и исследуйте на выпуклость, вогнутость график кривой $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Решение. 1. Найдем область определения функции $D(f): x \in R \setminus 0$.

2. Найдем первую и вторую производные функции:

$$y' = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-x^{-2}\right)' = 2 \cdot x^{-3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}};$$

$$y'' = 2 \cdot (-3) \cdot x^{-4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + 2 \cdot x^{-3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot 2x^{-3} = 2x^{-4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(2x^{-2} - 3\right).$$

Вторая производная $y'' = 0$ в точке $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ и не существует, когда $x_3 = 0$. Значит, при $x_3 = 0$ функция $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ не определена.

3. Полученные точки разбивают область определения функции на интервалы: $\left]-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right[$, $\left]-\sqrt{\frac{2}{3}}; 0\right[$, $\left]0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right[$ и $\left]\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty\right[$. Исследуем знаки второй производной на этих интервалах и результаты занесем в таблицу 11.3.

Множители $2x^{-4} > 0$ и $e^{-\frac{1}{x^2}} > 0$ на всей области определения, поэтому знак второй производной будет определять только множитель $\left(2x^{-2} - 3\right)$. Исследуем знак множителя $\left(2x^{-2} - 3\right)$ на каждом из интервалов.

а) Найдем знак второй производной на интервале $\left]-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right[$. Для этого подставим значение $x = -1$ из данного интервала в множитель $\left(2x^{-2} - 3\right)$. Получим, что $\left.\left(2x^{-2} - 3\right)\right|_{x=-1} = -1 < 0$. Следовательно, $y'' < 0$ и кривая графика будет выпуклой.

б) Найдем знак второй производной на интервале $\left]-\sqrt{\frac{2}{3}}; 0\right[$. Для этого подставим значение $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ из данного интервала в множитель $\left(2x^{-2} - 3\right)$. Получим, что $\left.\left(2x^{-2} - 3\right)\right|_{x=-\sqrt{\frac{1}{3}}} = 3 > 0$. Следовательно, $y'' > 0$ и кривая графика будет вогнутой.

в) Найдем знак второй производной на интервале $\left]0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right[$. Для этого подставим значение $x=\sqrt{\frac{1}{3}}$ из данного интервала в множитель $\left(2x^{-2}-3\right)$. Получим, что $\left.\left(2x^{-2}-3\right)\right|_{x=\sqrt{\frac{1}{3}}}=3>0$. Следовательно, $y''>0$ и кривая графика будет вогнутой.

г) Найдем знак второй производной на интервале $\left]\sqrt{\frac{2}{3}};+\infty\right[$. Для этого подставим значение $x=1$ из данного интервала в множитель $\left(2x^{-2}-3\right)$. Получим, что $\left.\left(2x^{-2}-3\right)\right|_{x=1}=-1<0$. Следовательно, $y''<0$ и кривая графика будет выпуклой.

Таблица 11.3 – Исследование функции $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$ и ее производной

x	$\left]-\infty;-\sqrt{\frac{2}{3}}\right[$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left]-\sqrt{\frac{2}{3}};0\right[$	0	$\left]0;\sqrt{\frac{2}{3}}\right[$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left]\sqrt{\frac{2}{3}};+\infty\right[$
y''	<0	0	>0	Не суще-ствует	>0	0	<0
y	Выпуклая	Точка перегиба	Вогнутая	Не опре-делена	Вогнутая	Точка перегиба	Выпуклая

При переходе через точки $x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ вторая производная меняет знак. Эти точки есть точки перегиба.

Ответ. На интервалах $\left]-\infty;-\sqrt{\frac{2}{3}}\right[$ и $\left]\sqrt{\frac{2}{3}};+\infty\right[$ функция выпуклая. На интервалах $\left]-\sqrt{\frac{2}{3}};0\right[$ и $\left]0;\sqrt{\frac{2}{3}}\right[$ функция вогнутая. Точки $x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ – это точки перегиба.

Ответьте на вопросы

1. Какая кривая графика на интервале $]a;b[$ называется выпуклой, а какая – вогнутой?
2. Какая точка графика функции называется точкой перегиба?
3. Какой знак имеет вторая производная, если кривая графика функции на интервале выпуклая, вогнутая?

11.5. Исследование функций на экстремум с помощью производных высших порядков

Рассмотрим непрерывную, дифференцируемую функцию $y = f(x)$ и исследуем ее на экстремум с помощью ***второй производной.***

Если функция $y = f(x)$ имеет первую и вторую производные, и в точке $x = x_0$ первая производная равна нулю $y'(x_0) = 0$, а вторая производная не равна нулю $y''(x_0) \neq 0$, то функция в этой точке имеет ***максимум***, если $y''(x_0) < 0$; или ***минимум***, если $y''(x_0) > 0$.

ЗАПОМНИТЕ!

Для того чтобы исследовать функцию на экстремум с помощью второй производной, необходимо:

1) найти первую производную $f'(x)$ и критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, в которых производная функции обращается в ноль или имеет разрыв;
2) найти вторую производную $f''(x)$ и исследовать знак второй производной в найденных критических точках:
   – если вторая производная в критической точке отрицательна, то функция в этой точке имеет максимум;
   – если вторая производная в критической точке положительна, то функция в этой точке имеет минимум;
   – если вторая производная равна нулю, то данное правило для этой функции не применимо, и экстремум надо искать с помощью первой производной;
3) вычислить значения функции в точках экстремумов.

<u>*Пример 5.*</u> Исследуйте на экстремум функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

Решение. 1. Найдем первую производную: $f'(x) = 6x^2 - 6x$. Приравняем ее к нулю и найдем критические точки: $6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 1$.

2. Найдем вторую производную: $f''(x)=12x-6$. Определим знак второй производной в критических точках: $f''(0)=-6<0$, следовательно, $x=0$ – точка максимума; и $f''(1)=6>0$, тогда $x=1$ – точка минимума.
3. Вычислим значения функции в критических точках:
   $f_{\max}=f(0)=0$; $f_{\min}=f(1)=-1$.

Ответ. $f_{\max}=f(0)=0$; $f_{\min}=f(1)=-1$.

Рассмотрим непрерывную, дифференцируемую функцию $y=f(x)$ и исследуем ее на экстремум с помощью ***производных высших порядков***.

Если в некоторой точке $x=x_0$ первая производная функции равна нулю $\left(y'(x_0)=0\right)$, и вторая производная тоже равна нулю $\left(y''(x_0)=0\right)$, то исследование функции на экстремум в этой точке можно проводить с помощью производных более высокого порядка.

Для этого используется следующее ***свойство непрерывной функции***: "Если функция $y=f(x)$ непрерывна и отлична от нуля в точке $x=x_0$, то и в некоторой окрестности точки $x=x_0$ она отлична от нуля и имеет знак, совпадающий со знаком функции в этой точке".

ЗАПОМНИТЕ!

Пусть функция $y=f(x)$ в точке $x=x_0$ имеет равные нулю производные до (n–1) порядка включительно, а производная n–го порядка непрерывна и не равна нулю:

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \text{ а } f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Тогда, функция в точке $x=x_0$ имеет ***максимум***, если $f^{(n)}(x_0)<0$ и ***минимум***, если $f^{(n)}(x_0)>0$ (при условии, что n – четное число). Если n – нечетное число, то функция в точке $x=x_0$ не имеет экстремумов.

Пример 6. Исследуйте функцию $y = 5x^4$ на экстремум.

Решение. Заданная функция определена и положительна на всей числовой оси и обращается в ноль при $x = 0$.

Найдем первую производную: $y' = 20x^3$.

Производная обращается в ноль в критической точке $x = 0$.

Вторая производная $y'' = 60x^2$ и третья производная $y''' = 120x$ в точке $x = 0$ также обращаются в ноль.

Четвертая производная $y^{IV} = 120$ в точке $x = 0$ не равна нулю.

Порядок производной $n = 4$ – это четное число, а знак производной $y^{IV} = 120 > 0$. Следовательно, точка $x = 0$ это точка минимума функции.

Ответ. В точке $x = 0$ функция $y = 5x^4$ имеет минимум.

Пример 7. Исследуйте функцию $y = 2x^5 + 1$ на экстремум.

Решение. Найдем первую производную $y' = 10x^4 \Rightarrow y' = 0$ в точке $x = 0$.

Вторая производная $y'' = 40x^3$, третья производная $y''' = 120x^2$ и четвертая производная $y^{IV} = 240x$ в точке $x = 0$ тоже обращаются в ноль.

Пятая производная $y^{V} = 240$ не равна нулю и положительна.

Порядок производной $n = 5$ – это нечетное число. В точке $x = 0$ функция не имеет экстремумов.

Ответ. Функция $y = 2x^5 + 1$ экстремумов не имеет.

S **Ответьте на вопросы**

1. Как найти экстремум функции при помощи производных высших порядков?
2. Когда функция будет иметь max, а когда min, если n–ая производная $y^{(n)} \neq 0$?

11.6. Асимптоты графика

Асимптоты графика $y = f(x)$ могут быть вертикальные (параллельные оси Oy) и невертикальные (горизонтальные и наклонные). Вертикальных асимптот может быть много. Например, для функции $y = \operatorname{tg} x$ их бесконечное число (рис. 11.11).

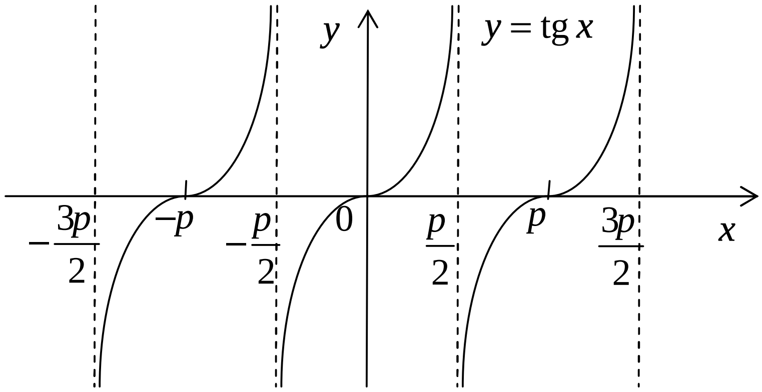


Рисунок 11.11

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ – это ***вертикальная асимптота*** графика.

Например, на рисунке 11.11 прямые вида $x=\dfrac{p}{2}\pm pk$ – это вертикальные асимптоты графика функции $y=\operatorname{tg} x$.

Невертикальных асимптот не может быть больше двух (одна при $x\to+\infty$ и вторая при $x\to-\infty$).

Если прямая $y=kx+b$ есть асимптота графика $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, то $d=y_{\text{ŕńčěďť.}}-y_{\text{ăđŕô.}}=kx+b-f(x)$ и когда x стремится к бесконечности, то d стремится к нулю (рис. 11.12).

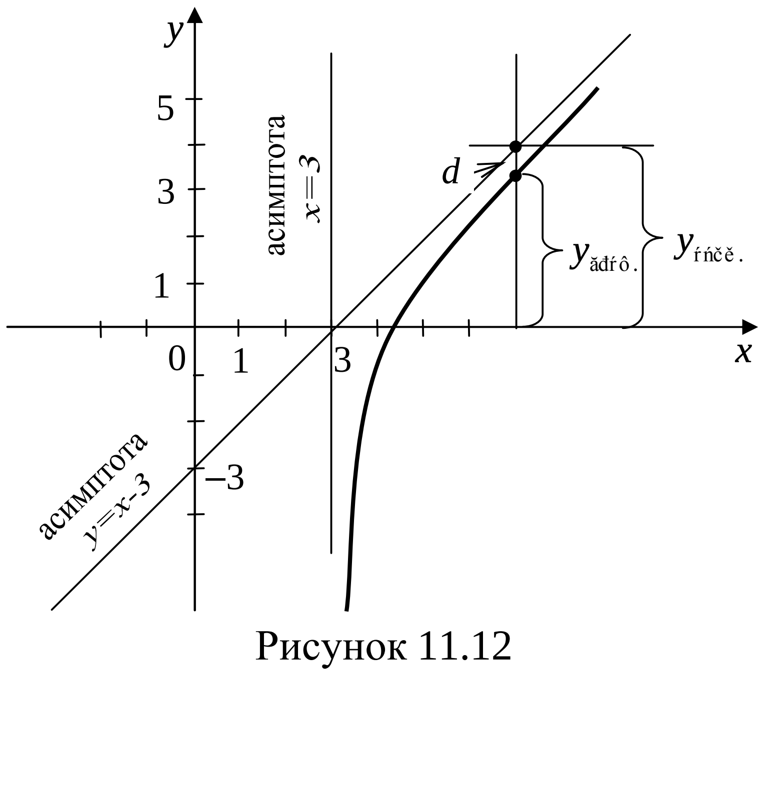


Рисунок 11.12

Из условия $kx+b-f\left(x\right)=d$ найдем значение углового коэффициента k.

Разделив правую и левую часть равенства на x, получим $k+\dfrac{b}{x}-\dfrac{f\left(x\right)}{x}=\dfrac{d}{x}$, тогда $k=\dfrac{f\left(x\right)}{x}+\dfrac{d}{x}-\dfrac{b}{x}$.

Найдем предельное значение этого выражения при $x\to+\infty$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f\left(x\right)}{x}+\frac{d}{x}-\frac{b}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}.$$

Теперь из уравнения $kx+b-f\left(x\right)=d$ найдем $b=f\left(x\right)-kx+d$.

Предельное значение b при $x\to+\infty$ будет равно:

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-kx+d\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-kx\right].$$

Если существуют эти пределы и они конечны, то прямая $y=kx+b$ является асимптотой графика функции $y=f\left(x\right)$. Если такие пределы не существуют, то невертикальных асимптот нет.

Аналогично можно показать, что если функция $y=f\left(x\right)$ определена на интервале $\left]-\infty;a\right[$, то $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=k$ а $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-kx\right]=b$. Прямая $y=kx+b$ называется ***наклонной асимптотой***, если $k\neq0$. Если $k=0$, то прямая $y=b$ называется ***горизонтальной асимптотой***.

Пример 8. Найдите асимптоты графика функции $y=\dfrac{2x^2-6x+3}{x-3}$.

Решение. Областью определения функции будет вся числовая ось, кроме точки $x=3$ $\left(D\left(y\right):x\in\left]-\infty;3\right[\mathbf{U}\left]3;+\infty\right[\right)$.

В точке $x=3$ есть бесконечный разрыв. Прямая $x=3$ это вертикальная асимптота.

Уравнение невертикальных асимптот находим по формуле: $y=kx+b$, где $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-kx\right]$. Получим:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-6x+3}{x(x-3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-6x+3}{x(x-3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(2-\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{3}{x}\right)}=2;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2-6x+3}{x-3}-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^2}\cancel{-6x}+3\cancel{-2x^2}\cancel{+6x}}{x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x-3}=0.$$

Тогда уравнение наклонной асимптоты будет $y=2x$.

Ответ: Вертикальная асимптота $x=3$; наклонная асимптота $y=2x$.

Ответьте на вопросы

1. При каких условиях график функции будет иметь вертикальные асимптоты?
2. Сколько вертикальных асимптот может иметь график функции $y=f(x)$?
3. Каково условие существования невертикальных (наклонных) асимптот?
4. Напишите формулу углового коэффициента k для наклонной асимптоты функции $y=f(x)$.
5. Напишите формулу свободного члена b для наклонной асимптоты функции $y=f(x)$.
6. Сколько невертикальных (наклонных) асимптот может иметь график функции $y=f(x)$?
7. Напишите формулу горизонтальной асимптоты.

11.7. Общая схема исследования функций и построение графиков

Для проведения полного исследования функции и построения ее графика необходимо использовать определения интервалов монотонности функций, экстремумов функции, интервалов выпуклости и вогнутости графика, его точек перегиба и асимптот. Такой график не будет очень точным, но он позволяет отметить основные свойства и особенности исследуемой функции.

Полное исследование функции проводим по следующей схеме.

1. Находим область определения и точки разрыва функции.
2. Определяем четность, нечетность функции.
3. Определяем нули функции (точки, в которых функция равна нулю).
4. Определяем интервалы положительности и отрицательности функции (по нулям функции и точкам разрыва).
5. Определяем асимптоты графика:
   а) вертикальные $x = x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} y(x) = \infty$;
   б) наклонные $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx \right]$.
6. Устанавливаем периодичность функции.
7. Находим критические точки первой производной и точки ее разрыва (точки, в которых $f'(x) = 0$, или первая производная не существует).
8. Находим интервалы возрастания ($f'(x) > 0$) или убывания ($f'(x) < 0$) функции (по критическим точкам первой производной).
9. Исследуем критические точки на экстремум (по изменению знака производной при переходе через критическую точку).
10. Определяем значения функции в точках экстремума.
11. Находим точки разрыва и нули второй производной.
12. Находим интервалы выпуклости ($f''(x) < 0$) или вогнутости ($f''(x) > 0$) функции (по критическим точкам второй производной).
13. Находим точки перегиба (по изменению знака второй производной при переходе через критическую точку).
14. Наносим на график полученные результаты.

Для большей точности построения графика рекомендуется вычислить значения функции в дополнительных точках и нанести их на координатную плоскость.

Исследуем функцию по приведенной схеме.

<u>*Пример 9.*</u> Исследуйте функцию $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ и постройте ее график.

Решение. 1. Знаменатель этой дроби обращается в ноль ($x+1=0$) при $x_1=-1$, значит, в этой точке функция не определена.

Областью определения функции есть вся числовая ось, кроме точки $x_1=-1$: $\quad D(f)=\{\, x\in\,]-\infty,-1[\ \mathbf{U}\ ]-1,\infty[\ \}$.

Точка $x=-1$ – это точка разрыва функции. При подходе к точке $x_1=-1$ слева, x всегда будет оставаться меньше (-1), а значит знаменатель $x+1<0$, и числитель $x^2>0$. Тогда: $\lim y=\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{x^2}{x+1}=-\infty$.

При подходе к точке $x_1=-1$ справа, x всегда будет больше (-1), и значит $x+1>0$ и $x^2>0$. Тогда: $\lim y=\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{x^2}{x+1}=+\infty$.

2. Для этой функции не выполняется условие четности $f(-x)=f(x)$ и условие нечетности $f(-x)=-f(x)$. Значит, это функция общего вида.
3. Функция $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ обращается в ноль, если ее числитель равен нулю $\left(x^2=0\right)$. Тогда: $x_2=0$. В точке $x_2=0$ функция равна нулю.
4. Определим интервалы положительности, отрицательности, исследуя поведение функции в точке разрыва $x_1=-1$ и точке $x_2=0$, в которой функция обращается в ноль.

   Слева от точки $x_1=-1$ функция всегда отрицательна, а справа положительна. На интервале $]-\infty;-1[$ функция отрицательна, а на интервале $]-1;+\infty[$ функция положительна. При переходе через точку $x=0$ функция знак не меняет и остается положительной.
5. Уравнением вертикальной асимптоты будет $x=-1$, так как

   $\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{x^2}{x+1}=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{x^2}{x+1}=+\infty$.

   Запишем уравнение наклонной асимптоты $y=kx+b$ и найдем:

   $$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1,$$

   $$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x+1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-x^2-x}{x+1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-x}{x+1}\right]=-1.$$

   Уравнение наклонной асимптоты будет таким: $y=x-1$.

6. Функция непериодическая.

7. Найдем производную функции: $y'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

Критические точки первой производной определим из следующих условий:

– первая производная обращается в ноль, если $x^2+2x=0$. Решением этого уравнения будут две точки $x_3=-2$ и $x_4=0$;

– первая производная не существует, если $(x+1)^2=0$. Решением этого уравнения будет точка $x_5=-1$.

Точка $x_5=-1$ – это точка разрыва производной, и она совпадает с точкой разрыва функции $x_1=-1$.

Точка $x_4=0$ совпадает с точкой $x_2=0$, в которой функция обращается в ноль. Таким образом, для функции и ее первой производной имеем три критические точки: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=-2$.

В точке $x_1=-1$ функция и ее первая производная $f'(-1)$ не существуют, потому что $x_1=-1$ – это точка разрыва функции и ее производной.

В точке $x_2=0$: $f(0)=0$ и $f'(0)=0$.

В точке $x_3=-2$: $f(-2)\neq 0$, а $f'(-2)=0$.

8. Рассмотрим интервалы между критическими точками и определим знак производной внутри каждого интервала. Для удобства работы составим таблицу 11.4.

Для определения знака производной возьмем по одной точке из каждого интервала и вычислим значение производной в этой точке.

Из интервала $]-\infty;-2[$ возьмем точку $x=-3$, получим $y'(-3)=\dfrac{3}{4}>0$.

Из интервала $]-2;-1[$ возьмем точку $x=-\dfrac{3}{2}$, получим $y'\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{21}{2}<0$.

Из интервала $]-1;0[$ возьмем точку $x=-\dfrac{1}{2}$, получим $y'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-3<0$.

Из интервала $]0;+\infty[$ возьмем точку $x=1$, получим $y'(1)=\dfrac{3}{4}>0$.

Таблица 11.4 – Исследование функции $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ и ее производной

	$]-\infty;-2[$	–2	$]-2;-1[$	–1	$]-1;0[$	0	$]0;+\infty[$
y'	>0	0	<0	Не существует	<0	0	>0
y	<0	–4	<0	Не существует	>0	0	>0
Выводы	Функция возрастает □	max	Функция убывает □	Точка разрыва	Функция убывает □	min	Функция возрастает □

Из таблицы видно, что на интервале $]-\infty;-2[$ функция возрастает, $y'>0$, на интервале $]-2;0[$ функция убывает, $y'<0$, и на интервале $]0;+\infty[$ функция вновь возрастает, $y'>0$.

9. Из таблицы 11.4 видно, что при переходе через критическую точку $x=-2$ первая производная меняет знак с "плюса" на "минус". Значит, в точке $x=-2$ находится экстремум (максимум) функции.
   В точке $x=-1$ производная и сама функция не существуют. Это точка разрыва функции.
   При переходе через точку $x=0$ первая производная меняет знак с "минуса" на "плюс". Значит, точке $x=0$ находится экстремум (минимум) функции.
10. Найдем значения функции в точках экстремума:

$$y_{\max}(-2)=-4, \qquad y_{\min}(0)=0.$$

11. Найдем вторую производную функции: $y''=\dfrac{2}{(x+1)^3}$.
   $y''\neq 0$ ни при каких значениях переменной x, а в точке $x=-1$ вторая производная не существует, так как знаменатель дроби обращается в ноль. Значит, в критической точке $x=-1$ будет разрыв второй производной.
12. Для второй производной имеется только одна критическая точка $x=-1$, поэтому рассмотрим два интервала изменения знака второй производной.
   В интервале $]-\infty;-1[$ вторая производная $y''(-2)=-2<0$. Следовательно, график функции выпуклый.
   В интервале $]-1;+\infty[$ вторая производная $y''(0)=2>0$. Следовательно, график функции вогнутый.

13. Точек перегиба нет, так как вторая производная ни при каких значениях переменной x не обращается в ноль.

14. Дополним таблицу 11.4 результатами анализа второй производной, получим таблицу 11.5.

Таблица 11.5 – Исследование функции $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ и ее производных

x	$]-\infty;-2[$	-2	$]-2;-1[$	-1	$]-1;0[$	0	$]0;+\infty[$
y'	>0	0	<0	Не существует	<0	0	<0
y	<0	-4	<0	Не существует	>0	0	>0
Выводы	Функция возрастает	max	Функция убывает	Точка разрыва	Функция убывает	min	Функция возрастает
y''	<0			Не существует	>0		
Выводы	Кривая выпуклая			Точка разрыва	Кривая вогнутая		

Для более точного построения графика вычислим значения функции в дополнительных точках (табл. 11.6).

Таблица 11.6 – Значения функции $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ в дополнительных точках

x	–5	–4	–3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	3	4	5
y	–6,25	–5,33	–4,5	–4,5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1,33	2,25	3,2	4,16

Построим асимптоты функции и по результатам, представленным в таблицах 11.5 и 11.6 построим график функции (рис. 11.13).

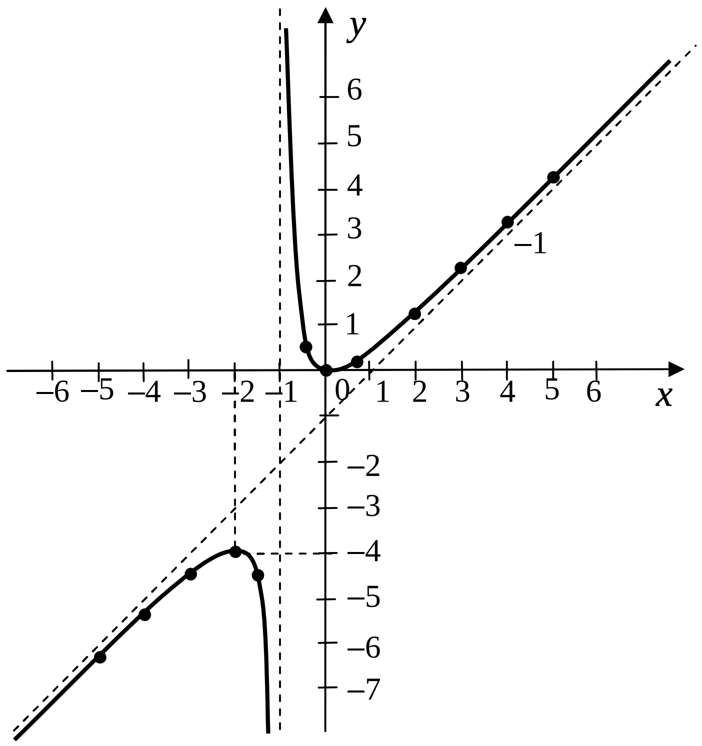


Рисунок 11.13

Ответ. График функции изображен на рисунке 11.13.

S **Ответьте на вопросы**

1. Назовите основные пункты общей схемы исследования функции.
2. Из каких условий находят интервалы знакопостоянства функции $y=f\left(x\right)$?
3. Как найти интервалы возрастания или убывания функции?
4. Как найти точки экстремума функции?

5. Как найти интервалы выпуклости, вогнутости?
6. Как построить асимптоты графика?

Задания для самостоятельной работы № 22

I. Определите интервалы возрастания, убывания функций.

1) $y = 2x^2 - 14x + 24$; 2) $y = -x^2 + 7x - 6$; 3) $y = \sqrt{1 - x^2}$;

4) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$; 5) $y = 3x^3 + 2x^2 - x - 4$;

6) $y = 2^{x^2 - 5x + 4}$; 7) $y = \lg(x + 5)$.

II. Определите экстремумы функций.

1) $y = x^2 - 2x - 35$; 2) $y = x^4 - 5x^2 + 4$; 3) $y = 2x^3 - 3x^2 + x + 6$;

4) $y = \sqrt{x - 1}$; 5) $y = \dfrac{x - 2}{x + 5}$; 6) $y = -x^2 + 5x - 6$;

7) $y = x^2(x - 6)$; 8) $y = x^2 \cdot e^{-x}$; 9) $y = \sin x + \cos x$;

10) $y = 3 - 2\sqrt[3]{x^2}$; 11) $y = \dfrac{x}{\ln x}$; 12) $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x^2}$.

III. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном интервале.

1) $y = 2x^2 - 14x + 12$ на интервале $[0; 7]$;

2) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$ на интервале $[0; 3]$;

3) $y = x - 2\ln x$ на интервале $[1; e]$;

4) $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на интервале $[-2; 2]$;

5) $y = 2x + 2\sqrt{x}$ на интервале $[0; 4]$;

6) $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ на интервале $0 \le x \le 4$;

7) $y = \sin 2x - x$ на интервале $-\dfrac{p}{2} \le x \le \dfrac{p}{2}$;

8) $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$ на интервале $0 \le x \le 1$.

IV. Определите интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба функции.

1) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$; 2) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$;

3) $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$; 4) $y = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}$;

5) $y = (x+2)^6 + 2x + 2$.

V. Найдите экстремумы функции при помощи второй производной.

1) $y = x\sqrt{2 - x^2}$; 2) $y = x^2(a - x)^2$.

VI. Найдите экстремум функции при помощи производных высших порядков.

1) $y = -6x^4$; 2) $y = 4x^6 + 15$.

VII. Найдите асимптоты графика функции.

1) $y = xe^x$; 2) $y = x + \dfrac{\sin x}{x}$; 3) $y = \ln\left(4 - x^2\right)$;

4) $y = \dfrac{2x^2 - 9}{x + 2}$; 5) $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$; 6) $y = \dfrac{x - 1}{x - 3}$.

VIII. Исследуйте функции и постройте их графики.

1) $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$; 2) $y = 4x^3 - 1{,}5x^4$;

3) $y = 2 + 9x + 3x^2 - x^3$; 4) $y = x^4 - 2x^2$;

5) $y = |x - 3| - 2$; 6) $y = 8x^2 - x^4$;

7) $y = \left|\dfrac{1}{x} - 1\right|$.

12

ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Лексика раздела

интеграл	integral	积分
неопределенный интеграл	indefinite integral	不定积分
определенный интеграл	definite integral	定积分
интегральная сумма	integrated sum	总和总结
интегрирование по частям	integration in parts	综合化部分
интервал интегрирования	interval of integration	间隔时间综合化
криволинейная трапеция	curvilinear trapezium	曲线梯形
метод замены переменой	method of variable's changing	方法所取代的变化量
метод разложения	method of decomposition	分解的方法
основание трапеции	basis of trapezium	梯形的基地
первообразная	antiderivative	原型
переменная интегрирования	variable of integration	可变一体化
подынтегральная функция	underintegral function	被积函数
подынтегральное выражение	underintegral expression	综合化的元素
предел интегрирования	limit of integration	综合化极限
верхний предел интегрирования	top limit of integration	上部积分域
нижний предел интегрирования	bottom limit of integration	底部的极限一体化

12.1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла

Основная задача дифференциального исчисления – это нахождение производной $y'(x)$ по данной функции $y = f(x)$.

В науке и технике многие задачи требуют решения обратных проблем, когда по данной производной $F'(x) = f(x)$ нужно найти функцию $F(x)$.

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на интервале $[a;b]$, если в любой точке этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = f(x)$.

Например, функция $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ – это первообразная для функции $f(x) = x^2$ на всей числовой прямой $x \in R$, так как $F'(x) = \left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x), \quad x \in R$. Очевидно, что $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$, также является первообразной для функции $y = x^2$, где C – постоянная.

Теорема. Функция, непрерывная на интервале $[a;b]$, имеет множество первообразных на этом интервале, которые отличаются на постоянную величину.

Нахождение первообразной по данной функции является ***основной задачей интегрального исчисления.***

Множество всех первообразных $F(x) + C$ для данной функции $f(x)$ на интервале $[a;b]$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ на этом интервале и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Читают так: "Интеграл эф от икс де-икс".

ЗАПОМНИТЕ!

Если $F(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция; $f(x)dx$ – подынтегральное выражение; x – переменная интегрирования; $\int$ – знак неопределенного интеграла; C – произвольная постоянная.

Например, $\int x^2\, dx = \dfrac{x^3}{3} + C$.

Нахождение неопределенного интеграла (или первообразной) от данной функции называется ***интегрированием*** этой функции.

Интегрирование есть действие, обратное дифференцированию.

Ответьте на вопросы

1. Какая функция называется первообразной функции $f(x)$ в интервале $[a;b]$?
2. Сколько первообразных имеет функция, непрерывная в интервале $[a;b]$?
3. Сформулируйте основную задачу интегрального исчисления.
4. Что такое неопределенный интеграл?
5. Прочитайте выражение $\int f(x)dx = F(x) + C$ и назовите составляющие его символы: $\int$; $f(x)$; $f(x)dx$; $F(x)$; C.
6. Как называется действие нахождения первообразной?

12.2. Формулы для вычисления простейших интегралов

На основании формул дифференциального исчисления получим следующие выражения для простейших интегралов:

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1),$ $\quad \left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = (n+1)\cdot\dfrac{x^{n+1-1}}{n+1} = x^n;$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, \ (x \in R \setminus \{0\}),$ $\quad (\ln|x| + C)' = \dfrac{1}{x};$

3. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \ (x \in R),$ $\quad (-\cos x + C)' = \sin x;$

4. $\int \cos x\,dx = \sin x + C, \ (x \in R),$ $\quad (\sin x + C)' = \cos x;$

5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \ \left(x \neq \dfrac{p}{2} + kp, \ k \in Z\right),$ $\quad (\operatorname{tg} x + C)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \ (x \neq kp, \ k \in Z),$ $\quad (-\operatorname{ctg} x + C)' = \dfrac{1}{\sin^2 x};$

7. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C, \end{cases} (x \in R),$ $\quad \left.\begin{matrix} (\operatorname{arctg} x + C)' \\ (-\operatorname{arcctg} x + C)' \end{matrix}\right\} = \dfrac{1}{1+x^2};$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C, \end{cases} (|x| < 1),$ $\quad \left.\begin{matrix} (\arcsin x + C)' \\ (-\arccos x + C)' \end{matrix}\right\} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

9. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \ (a > 0, \ a \neq 1),$ $\quad \left(\dfrac{a^x}{\ln a} + C\right)' = a^x;$

10. $\int e^x\,dx = e^x + C,$ $\quad (e^x + C)' = e^x;$

11. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C, \ |x| \neq a;$ $\quad \left(\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C\right)' = \dfrac{1}{x^2 - a^2};$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C,$ $\quad \left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$

Надо отметить, что существуют интегралы, которые нельзя найти при помощи элементарных функций, например: $\int e^{-x^2}\,dx$; $\int \frac{\sin x}{x}dx$ и другие.

Ответьте на вопросы

1. Напишите формулу вычисления интеграла функции $y = x^n$.
2. Найдите интеграл функции $y = x^{-1}$.
3. Чему равен интеграл от функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$?
4. Напишите формулы интегралов основных тригонометрических функций.
5. Напишите функцию, интеграл которой равен $\operatorname{tg} x$?
6. Напишите подынтегральную функцию, если ее первообразная равна $\operatorname{arctg} x$ или $\operatorname{arcctg} x$.
7. Как изменится первообразная показательной функции $y = a^x$, если основание $a = e$?

12.3. Основные свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен его подынтегральному выражению: $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int d\,F(x) = F(x) + C.$$

Значит, дифференцирование и интегрирование являются взаимно обратными действиями.

3. Постоянный множитель можно вынести за знак неопределенного интеграла: $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ $(k = \text{const},\ k \neq 0)$.

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых: $\int \left[f_1(x) \pm f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

5. Все формулы интегрирования сохраняют свой вид, если вместо независимой переменной подставлять в них любую дифференцируемую функцию от этой переменной.

Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$,

где $u = j\ (x)$ – любая дифференцируемая функция от x.

<u>*Пример 1.*</u> Найдите интеграл $\int \sin x \cdot \cos x\,dx$.

Решение. Мы знаем, что $\cos x$ есть производная от $\sin x$, поэтому перепишем интеграл так: $\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \int \sin x \cdot d(\sin x) = \int u du$.

Здесь $u = \sin x$, а $\cos x\,dx = d \cdot (\sin x) = du$. Полученный интеграл будет табличным: $\int u du = \dfrac{u^2}{2} + C = \dfrac{\sin^2 x}{2} + C$.

Ответ. $\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \dfrac{\sin^2 x}{2} + C$.

<u>*Пример 2.*</u> Найдите интеграл $\int e^{-5x} dx$.

Решение. Умножим и разделим интеграл на (–5) и внесем множитель (–5) под знак интеграла $-\dfrac{1}{5}\int(-5) \cdot e^{-5x} dx = -\dfrac{1}{5}\int e^{-5x} d(-5x)$.

Обозначим $u = -5x$, тогда $du = -5dx$ получим табличный интеграл $\int e^{-5x} dx = -\dfrac{1}{5}\int e^{u} du = -\dfrac{e^{-5x}}{5} + C$.

Ответ. $\int e^{-5x} dx = -\dfrac{e^{-5x}}{5} + C$.

Как показывают примеры, для вычисления интегралов сложных подынтегральных выражений, необходимо подынтегральное выражение преобразовать так, чтобы оно приняло вид подынтегрального выражения одного из табличных интегралов.

S Ответьте на вопросы

1. Чему равен дифференциал от неопределенного интеграла?

2. Чему равен интеграл от дифференциала функции?
3. Напишите формулу интеграла от алгебраической суммы функций.
4. Как изменятся формулы интегрирования, если независимую переменную заменить дифференцируемой функцией от этой переменной?
5. Можно ли вынести постоянный множитель за знак интеграла?

12.4. Основные методы интегрирования

Рассмотрим некоторые методы интегрирования.

Замена переменной интегрирования (подстановка) является одним из важнейших методов вычисления интегралов.

Первый метод (*интегрирование методом замены переменной*). Если известно, что $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то справедливо равенство $\int f\left[j(t)\right] j'(t)\,dt = F\left[j(t)\right] + C$, где $j(t)$ – дифференцируемая функция.

<u>*Пример 3.*</u> Найдите интеграл $\int \cos 5x\,dx$.

Решение. Сделаем замену переменной: $t = 5x$, тогда $dt = 5dx$, а $dx = \frac{dt}{5}$

Интеграл принимает вид табличного интеграла:

$$\int \cos t \frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int \cos t\,dt = \frac{1}{5}\sin t + C = \frac{1}{5}\sin 5x + C.$$

Ответ. $\int \cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\sin 5x + C$.

<u>*Пример 4.*</u> Найдите интеграл $\int \sin x \cos^7 x\,dx$.

Решение. Сделаем замену: $\cos x = t$, и найдем $dt = -\sin x\,dx$, тогда

$$\int \sin x \cos^7 x\,dx = -\int t^7 dt = -\frac{t^8}{8} - C = -\frac{\cos^8 x}{8} + C.$$

Ответ. $\int \sin x \cos^7 x\,dx = -\frac{\cos^8 x}{8} + C$.

<u>Пример 5.</u> Найдите интеграл $\int \frac{\ln^3 x\, dx}{x}$.

Решение. Сделаем замену: $\ln x = t$, и найдем $dt = \frac{1}{x}dx$, тогда

$$\int \frac{\ln^3 x\, dx}{x} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\ln^4 x}{4} + C.$$

Ответ. $\int \frac{\ln^3 x\, dx}{x} = \frac{\ln^4 x}{4} + C$.

<u>Пример 6.</u> Найдите интеграл $\int \frac{dx}{(2x-1)^5}$.

Решение. Сделаем замену: $2x-1=t$, откуда получим $dt = 2\,dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$,

тогда $\int \frac{dx}{(2x-1)^5} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-5+1}}{(-5+1)} = -\frac{t^{-4}}{8} + C = -\frac{1}{8(2x-1)^4} + C$.

Ответ. $\int \frac{dx}{(2x-1)^5} = -\frac{1}{8(2x-1)^4} + C$.

<u>Пример 7.</u> Найдите интеграл $\int \frac{(9x^2+2)\, dx}{(3x^3+2x-4)^2}$.

Решение. Сделаем замену: $3x^3+2x-4=t$, тогда $dt = (9x^2+2)\, dx$.

Получим: $\int \frac{(9x^2+2)\, dx}{(3x^3+2x-4)^2} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3x^3+2x-4} + C$.

Ответ. $\int \frac{(9x^2+2)\, dx}{(3x^3+2x-4)^2} = -\frac{1}{3x^3+2x-4} + C$.

Второй метод (*метод разложения*).

Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а $f_2(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные, то

$$\int f(x)\, dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)\, dx.$$

<u>Пример 8</u>. Найдите интеграл $\int \left(x^5 - 5x^4 - 3x + 4\right)dx$.

Решение. Запишем этот интеграл как алгебраическую сумму интегралов и найдем каждый из них отдельно: $\int \left(x^5 - 5x^4 - 3x + 4\right) dx =$

$$= \int x^5 dx - 5\int x^4 dx - 3\int x\, dx + 4\int dx = \frac{x^6}{6} - 5\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C = \frac{x^6}{6} - x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C.$$

Проверка. Возьмем производную от полученного результата:

$$\left(\frac{x^6}{6}-x^5-\frac{3}{2}x^2+4x+C\right)'=x^5-5x^4-3x+4.$$

Мы получили подынтегральную функцию. Значит, решение правильное.

Ответ. $\int\left(x^5-5x^4-3x+4\right)dx=\frac{x^6}{6}-x^5-\frac{3}{2}x^2+4x+C$.

Пример 9. Найдите интеграл $\int\frac{2x+3\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, для чего разделим каждый член многочлена числителя на знаменатель и запишем результат как сумму интегралов:

$$\int\frac{2x+3\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx=2\int x^{-\frac{1}{2}}dx+3\int x^{-\frac{5}{6}}dx-\int\frac{dx}{x}=2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+3\frac{x^{-\frac{5}{6}+1}}{-\frac{5}{6}+1}-\ln|x|+C=$$

$$=2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+3\frac{x^{\frac{1}{6}}}{\frac{1}{6}}-\ln|x|+C=4\sqrt{x}+18\sqrt[6]{x}-\ln|x|+C.$$

Ответ. $\int\frac{2x+3\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}=4\sqrt{x}+18\sqrt[6]{x}-\ln|x|+C$.

ЗАПОМНИТЕ!

Если в подынтегральной функции наибольший показатель степени многочлена в числителе равен наибольшему показателю степени многочлена в знаменателе, то необходимо разделить числитель на знаменатель и представить интеграл в виде алгебраической суммы интегралов.

Пример 10. Найдите интеграл $\int\frac{x-1}{x+4}dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию так, чтобы выделить целую часть дроби. Для этого в числителе прибавим и вычтем 4:

$$\int\frac{x+4-4-1}{x+4}dx=\int\frac{x+4-5}{x+4}dx=\int\left(1-\frac{5}{x+4}\right)dx.$$

Полученный интеграл представим в виде суммы интегралов:

$$\int\left(1-\frac{5}{x+4}\right)dx=\int dx-\int\frac{5}{x+4}dx=\int dx-5\int\frac{dx}{x+4}=x-5\ln|x+4|+C.$$

Здесь, $\int\frac{dx}{x+4}=\int\frac{d(x+4)}{x+4}=\ln|x+4|+C$, потому что $d(x+4)=dx$.

Ответ. $\int\frac{x-1}{x+4}dx=x-5\ln|x+4|+C$.

ЗАПОМНИТЕ!

Если числитель дроби подынтегральной функции – это постоянное число, а знаменатель – это квадратный трехчлен, то знаменатель можно дополнить до полного квадрата, и интеграл сводится к табличному интегралу вида:

$$\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C \quad \text{или} \quad \int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C.$$

<u>*Пример 11.*</u> Найдите интеграл $\int\frac{dx}{x^2+6x+5}$.

Решение. В знаменателе дроби прибавим и вычтем 4, тогда интеграл будет иметь вид: $\int\frac{dx}{x^2+6x+5}=\int\frac{dx}{x^2+6x+5+4-4}=\int\frac{dx}{x^2+6x+9-4}=$

$$=\int\frac{dx}{(x+3)^2-4}=\int\frac{dx}{(x+3)^2-(2)^2}.$$

Перейдем к новой переменной $u=x+3$, тогда $du=dx$ и интеграл перепишем так: $\int\frac{dx}{(x+3)^2-(2)^2}=\int\frac{du}{u^2-(2)^2}=\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|+C=$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+3-2}{x+3+2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x+5}\right|+C.$$

Ответ. $\int\frac{dx}{x^2+6x+5}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x+5}\right|+C$.

<u>*Пример 12.*</u> Найдите интеграл $\int\frac{dx}{x^2+6x+13}$.

Решение. Преобразуем знаменатель и перепишем интеграл в виде:

$\int\frac{dx}{x^2+6x+9+4}=\int\frac{dx}{(x+3)^2+(2)^2}$. Перейдем к новой переменной $u=x+3$, тогда: $\int \frac{dx}{(x+3)^2+(2)^2} = \int \frac{dx}{u^2+(2)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2} + C$.

Ответ. $\int \frac{dx}{x^2+6x+9+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2} + C$.

Третий метод (*интегрирование по частям*). Формула интегрирования по частям имеет вид: $\int UdV = UV - \int VdU$.

<u>*Пример 13.*</u> Найдите $\int x \sin x \, dx$.

Решение. Обозначим $U = x$, $dV = \sin x \, dx$, тогда $dU = dx$, $V = -\cos x$.

Из формулы интегрирования по частям имеем:

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x)\, dx = -x\cos x + \int \cos x \, dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Ответ. $\int x \sin x \, dx = -x\cos x + \sin x + C$.

ЗАПОМНИТЕ!

Интегралы вида $\int P(x)\sin kx\, dx$, $\int P(x)\cos kx\, dx$, $\int P(x) e^{kx} dx$, где $P(x)$ – многочлен, можно взять по частям, если $P(x)$ обозначить через U.

<u>*Пример 14.*</u> Найдите $\int (x-1)\, e^{2x} dx$.

Решение. Обозначим: $U = x-1$, $dV = e^{2x}dx$, тогда $dU = dx$, $V = \frac{1}{2}e^{2x}$.

Из формулы интегрирования по частям имеем:

$$\int (x-1)\, e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x-1)\, e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x-1)\, e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Ответ. $\int (x-1)\, e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x-1)\, e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$.

ЗАПОМНИТЕ!

Интегралы вида $\int P(x)\ln x\, dx$, $\int P(x)\arcsin x\, dx$, $\int P(x)\arccos x\, dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} x\, dx$, где $P(x)$ – многочлен от x, можно взять по частям, если обозначить $dV = P(x)\,dx$.

Пример 15. Найдите $\int\left(4x^3+6x-7\right)\ln x dx.$

Решение. Обозначим: $U=\ln x,\quad dV=\left(4x^3+6x-7\right)dx,$ тогда $dU=\dfrac{dx}{x},$ $V=x^4+3x^2-7x$. Из формулы интегрирования по частям имеем:

$$\int\left(4x^3+6x-7\right)\ln x\,dx=\left(x^4+3x^2-7x\right)\ln x-\int\frac{x^4+3x^2-7x}{x}dx=$$

$$=\left(x^4+3x^2-7x\right)\ln x-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}-7x\right)+C.$$

Ответ. $\int\left(4x^3+6x-7\right)\ln x\,dx=\left(x^4+3x^2-7x\right)\ln x-\left(\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{3x^2}{2}-7x\right)+C$.

Четвертый метод (интегрирование рациональных функций). Рациональные функции всегда интегрируются в элементарных функциях. Целая рациональная функция (многочлен) интегрируется так:

$$\int\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\mathbf{K}+a_{n-1}x+a_n\right)dx=a_0\frac{x^{n+1}}{n+1}+a_1\frac{x^n}{n}+\mathbf{K}+a_{n-1}\frac{x^2}{2}+a_nx+C.$$

Интеграл дробной рациональной функции можно найти, представив его как сумму элементарных слагаемых.

Если степень многочлена числителя $\left[P(x)\right]$ больше или равна степени многочлена знаменателя, то, разделив многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, получим целую рациональную функцию $N(x)$ и дробно-рациональную функцию $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$. Степень многочлена $P_1(x)$ будет меньше степени многочлена $Q(x)$:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\left(N(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}\right)dx.$$

Интегрирование целой рациональной функции не составляет трудностей, а правильную рациональную дробь можно представить как сумму элементарных, всегда интегрируемых дробей следующих двух видов: $\dfrac{A}{(x-a)^m}$ и $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, где m и n – целые положительные числа.

Для того чтобы представить правильную рациональную дробь в виде суммы элементарных дробей, необходимо разложить ее знаменатель $Q(x)$ на простейшие множители.

1. Если уравнение $Q(x)=0$ имеет только действительные корни, и они разные, то получим все слагаемые вида $\dfrac{A}{(x-a)}$:

$$\int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A_1}{x-a_1}dx + \int \frac{A_2}{x-a_2}dx + \mathbf{K} + \int \frac{A_n}{x-a_n}dx.$$

2. Если уравнение $Q(x)=0$ имеет только действительные, но кратные корни, кратности k, тогда:

$$\int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{B}{(x-b)^k}dx = \int \frac{B_1 dx}{(x-b)} + \int \frac{B_2 dx}{(x-b)^2} + \mathbf{K} + \int \frac{B_k dx}{(x-b)^k}.$$

3. Если уравнение $Q(x)=x^2+px+q=0$ не имеет действительных корней, но имеет одну пару комплексных сопряженных чисел $(a\,;\,\overline{a})$, тогда $\displaystyle\int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{Cx+D}{x^2+px+q}dx$.

4. Если уравнение $Q(x)=(x^2+px+q)^t$ имеет пары комплексных сопряженных чисел кратности t, тогда:

$$\int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^t}dx =$$

$$= \int \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}dx + \int \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}dx + \mathbf{K} + \int \frac{M_tx+N_t}{(x^2+px+q)^t}dx.$$

В вышеприведенные формулы входят неопределенные коэффициенты *A*, *B*, *C*, *D*, *M* и *N*. Для определения этих коэффициентов нужно составить систему уравнений, используя равенства коэффициентов при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях данных формул.

В общем случае уравнение $Q(x)=0$ может иметь действительные и комплексно-сопряженные корни одновременно, и тогда в разложении правильной рациональной дроби будут присутствовать слагаемые всех приведенных видов.

Методику интегрирования дробно-рациональных функций рассмотрим на примерах.

Пример 16. Найдите интеграл $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx$.

Решение. Данная подынтегральная функция – это неправильная дробь (наибольшая степень переменной x в числителе равна 3, а наибольшая степень переменной x в знаменателе равна 2). Выделим целую часть дроби, для этого разделим числитель дроби $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$ на знаменатель дроби x^2-x, получим:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+3x^2+3x+1 & x^2-x \\
\underline{x^3-\ x^2\qquad\qquad\ } & x+4 \\
4x^2+3x+1 & \\
\underline{4x^2-4x\qquad} & \\
7x+1 &
\end{array}
$$

Подынтегральное выражение представим в виде:

$$\frac{(x+1)^3}{x^2-x}=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-x}=x+4+\frac{7x+1}{x^2-x}.$$

Так как корни уравнения $x^2-x=0$ – это разные действительные числа $x_1=0$, $x_2=1$, то правильную дробь $\frac{7x+1}{x^2-x}$ представим как сумму слагаемых: $\frac{7x+1}{x^2-x}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}$.

Найдем неизвестные коэффициенты A и B, для этого приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в полученном равенстве. Приведем к общему знаменателю правую часть последнего равенства:

$$\frac{7x+1}{x^2-x}=\frac{\overline{x-1}}{\frac{A}{x}}+\frac{\frac{x}{B}}{x-1}=\frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}=\frac{Ax-A+Bx}{x(x-1)}=\frac{(A+B)x-A}{x(x-1)}.$$

В равенстве $\frac{7x+1}{x^2-x}=\frac{(A+B)x-A}{x(x-1)}$ знаменатель в левой и правой части одинаков: $x^2-x=x(x-1)$. Для того чтобы дроби были равны, числители тоже должны быть равны: $7x+1=(A+B)x-A$. Поэтому, $A+B=7$ и $-A=1$. Мы получили систему двух уравнений, из которой и найдем коэффициенты A и B: $\begin{cases} A+B=7 \\ -A=1 \end{cases} \Rightarrow A=-1,\ B=8.$ Значит, $\frac{7x+1}{x^2-x}=\frac{-1}{x}+\frac{8}{x-1}$, а все подынтегральное выражение можно записать так:

$$\frac{(x+1)^3}{x^2-x}=x+4+\frac{7x+1}{x^2-x}=x+4-\frac{1}{x}+\frac{8}{x-1}.$$

Таким образом, заданный интеграл можно представить в виде суммы интегралов, которые легко вычислить:

$$\int\frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx=\int\left(x+4-\frac{1}{x}+\frac{8}{x-1}\right)dx=\int xdx+\int 4dx-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{8}{x-1}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+4x-\ln|x|+8\ln|x-1|+C.$$

Проверка. Возьмем производную от полученного выражения:

$$\left(\frac{x^2}{2}+4x-\ln|x|+8\ln|x-1|+C\right)'=\frac{2x}{2}+4-\frac{1}{x}+8\frac{1}{x-1}=$$

$$=\frac{x(x-1)}{x}+\frac{x(x-1)}{4}-\frac{x-1}{x}+\frac{\frac{x}{8}}{x-1}=\frac{x(x^2-x)+4(x^2-x)+8x-x+1}{x(x-1)}=$$

$$=\frac{x^3-x^2+4x^2-4x+8x-x+1}{x(x-1)}=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x(x-1)}=\frac{(x+1)^3}{x^2-x}.$$

Полученное выражение $\frac{(x+1)^3}{x^2-x}$ – это подынтегральная функция. Интеграл найден правильно.

Ответ. $\int\frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx=\frac{x^2}{2}+4x-\ln|x|+8\ln|x-1|+C.$

<u>*Пример 17.*</u> Найдите интеграл $\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx$.

Решение. Подынтегральное выражение представляет собой правильную дробь. Разложим знаменатель дроби $\left(Q(x)=x^4+x\right)$ на множители и приравняем его к нулю: $x^4+x=x\left(x^3+1\right)=x(x+1)\left(x^2-x+1\right)=0$. Корнями данного уравнения будут два действительных числа: $x_1=0$, $x_2=-1$ и пара комплексных сопряженных чисел: $x_{3,4}=1\pm i\sqrt{3}$. Поэтому подынтегральную дробь можно представить в виде суммы элементарных дробей:

$$\int \frac{\left(x^3+4x^2-2x+1\right)dx}{x(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\int\left(\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}\right)dx. \qquad (*)$$

Приравняем подынтегральные выражения левой и правой части полученного выражения:

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{A_1(x+1)\left(x^2-x+1\right)+A_2\cdot x\left(x^2-x+1\right)+(Bx+C)\cdot x(x+1)}{x(x+1)\left(x^2-x+1\right)}.$$

После преобразований получим:

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{(A_1+A_2+B)x^3+(B+C-A_2)x^2+(C+A_2)x+A_1}{x(x+1)\left(x^2-x+1\right)}.$$

Умножим левую и правую часть равенства на $Q(x)=x(x+1)\left(x^2-x+1\right)$, тогда $x^3+4x^2-2x+1=(A_1+A_2+B)x^3+(B+C-A_2)x^2+(C+A_2)x+A_1$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, мы получим четыре уравнения, из которых найдем A_1, A_2, B и C:

$$\begin{cases} A_1+A_2+B=1 \\ B+C-A_2=4 \\ C+A_2=-2 \\ A_1=1. \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений будет: $A_1=1,\ A_2=-2,\ B=2,\ C=0$.

Подставим полученные значения A_1, A_2, B и C в формулу (*):

$$\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx=\int\left(\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}-\frac{2x}{x^2-x+1}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{2xdx}{x^2-x+1}.$$

Найдем каждый из интегралов отдельно.

Первый интеграл – это табличный интеграл: $I_1=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|$.

Во втором интеграле $I_2=2\int\frac{dx}{x+1}$ сделаем замену переменной $t=x+1$, тогда $dt=dx$ и получим табличный интеграл относительно t:

$I_2=2\int\frac{dx}{x+1}=2\int\frac{dt}{t}=2\ln|t|=2\ln|x+1|$.

В третьем интеграле $I_3=\int\frac{2xdx}{x^2-x+1}$ в числителе прибавим и вычтем 1, тогда: $I_3=\int\frac{2x-1+1}{x^2-x+1}dx=\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\int\frac{dx}{x^2-x+1}=I_4+I_5$.

В интеграле I_4 введем новую переменную $U=x^2-x+1$, получим $dU=(2x-1)\,dx$, тогда: $I_4=\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=\int\frac{dU}{U}=\ln\left|x^2-x+1\right|$.

Интеграл $I_5=\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\int\frac{dx}{x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$.

Если в интеграле I_5 обозначить $z=x-\frac{1}{2}$, тогда $dz=dx$ и получим:

$$I_5=\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\int\frac{dz}{z^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{(2x-1)2}{2\cdot\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Найдем $I_3=I_4+I_5=\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. Теперь мы можем записать, что $I=\int\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx=I_1-I_2+I_3=\ln|x|-2\ln|x+1|+$

$$+\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C=\ln\frac{|x|\cdot\left(x^2-x+1\right)}{(x+1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Ответ. $\int\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx=\ln\frac{|x|\cdot\left(x^2-x+1\right)}{(x+1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

Ответьте на вопросы

1. Какие основные методы интегрирования вы знаете?
2. Какие приемы применяют при использовании метода разложения?
3. Напишите формулу интегрирования по частям.
4. Что обозначить через U, а что через dV в интеграле вида $\int P(x)\ln x\,dx$ и интегралах вида $\int P(x)\sin x\,dx$?
5. Когда используется метод замены переменной при интегрировании?

12.5. Понятие определенного интеграла и его основные свойства

В системе координат xOy рассмотрим плоскую фигуру $ABCD$ (рис. 12.1). Эта фигура называется ***криволинейной трапецией***.

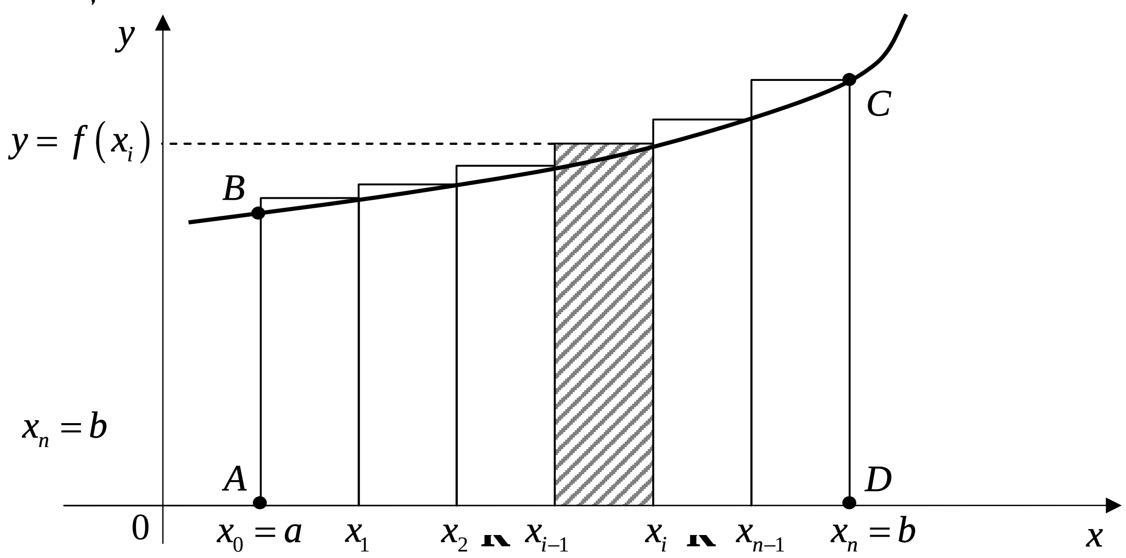


Рисунок 12.1

Криволинейная трапеция – это фигура, которая ограничена осью Ox, линией $y = f(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$.

Любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает линию $y = f(x)$ только в одной точке.

Интервал $[a;b]$ оси Ox называется ***основанием*** криволинейной трапеции. Разобьем интервал $[a;b]$ на n частей точками x_0, x_1, ... , x_n и на каждом новом интервале построим прямоугольник с основанием $\Delta x\left(\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\right)$ и высотой $f\left(x_i\right)$. Площадь i-го прямоугольника равна $f\left(x_i\right)\Delta x_i$, а сумма всех площадей:

$$S_n = f\left(x_0\right)\Delta x_0 + f\left(x_1\right)\Delta x_1 + \mathbf{K} + f\left(x_{n-1}\right)\Delta x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i .$$

При $\Delta x_i \to 0$ $(n \to \infty)$ площадь криволинейной трапеции равна $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. При этом предел не зависит от способа деления интервала $[a;b]$ на части, необходимо только, чтобы наибольший из Δx стремился к нулю.

Теорема. Для любой функции $f\left(x\right)$, непрерывной на $[a;b]$, существует предел $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x_i$ и этот предел не зависит от способа разбиения интервала и от выбора точек разбиения x_i.

Сумма $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f\left(x_i\right)\Delta x_i$ называется ***интегральной суммой*** функции $f\left(x\right)$ на интервале $[a;b]$.

Операция нахождения предела этой суммы называется ***интегрированием*** функции на интервале.

Предел интегральной суммы называется ***определенным интегралом*** функции $f(x)$ на интервале $[a;b]$: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int\limits_a^b f\left(x\right)dx$.

Следовательно, площадь криволинейной трапеции находят по формуле: $S = \int\limits_a^b f\left(x\right)dx$, где a – нижний предел интегрирования; b – верхний предел интегрирования; $[a;b]$ – интервал интегрирования.

Свойства определенных интегралов

1. $\int\limits_a^b k\ f(x)\ dx = k\int\limits_a^b f(x)\ dx, \quad k - \mathrm{const}$.

2. $\int\limits_a^b \left[f(x) + j\ (x) \right] dx = \int\limits_a^b f(x)\ dx + \int\limits_a^b j\ (x)\ dx$.

3. $\int\limits_a^b f(x)\ dx = -\int\limits_b^a f(x)\ dx$.

4. $\int\limits_a^b f(x)\ dx = \int\limits_a^c f(x)\ dx + \int\limits_c^b f(x)\ dx, \quad c \in [a; b]$.

5. $\int\limits_a^b f(x)\ dx \geq 0,$ Íńëč $f(x) \geq 0$ í ŕ $[a; b]$.

6. $\int\limits_a^b f(x)\ dx = 0,$ Íńëč $a = b$.

ЗАПОМНИТЕ!

Для вычисления определенных интегралов применяют основную формулу интегрального исчисления – формулу Ньютона–Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$ где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Надо подчеркнуть, что неопределенный интеграл – ***функция***, определенный интеграл – ***число***.

<u>*Пример 18*</u>. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_2^3 \left(2x^3 + x^2 - 5\right) dx$.

Решение. Найдем первообразную подынтегральной функции:

$$\int \left(2x^3 + x^2 - 5\right) dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 5x.$$

Используем формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_2^3 \left(2x^3 + x^2 - 5\right) dx = \left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - 5x\right)\Bigg|_2^3 = \left(\frac{3^4}{2} + \frac{3^3}{3} - 5\cdot 3\right) - \left(\frac{2^4}{2} + \frac{2^3}{3} - 5\cdot 2\right) = \frac{203}{6}.$$

Ответ. $\int_2^3 \left(2x^3 + x^2 - 5\right) dx = \frac{203}{6}$.

<u>*Пример 19.*</u> Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{p}{2}} \cos x\, dx$.

Решение. Найдем первообразную подынтегральной функции и используем формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^{\frac{p}{2}} \cos x\, dx = \sin x\Big|_0^{\frac{p}{2}} = \sin\frac{p}{2} - \sin 0 = 1.$$

Ответ. $\int_0^{\frac{p}{2}} \cos x\, dx = 1$.

Ответьте на вопросы

1. Какая фигура называется криволинейной трапецией?
2. Что является основанием трапеции?
3. Сколько точек пересечения с графиком кривой $y = f(x)$ может иметь любая прямая, параллельная оси Oy в интервале $[a;\ b]$?
4. Как называется выражение $\sum_{i=0}^{n=1} f(x_i)\,\Delta x_i$?
5. Как называется предел интегральной суммы $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\, dx$?
6. Чему равна площадь криволинейной трапеции?

12.6. Методы определенного интегрирования

Правила неопределенного интегрирования можно применить для вычисления определенного интеграла.

ЗАПОМНИТЕ!

Формула интегрирования по частям для определенного интеграла будет следующей:

$$\int_a^b U\cdot dV = U\cdot V\Big|_a^b - \int_a^b V\cdot dU = \left(UV - \int V\cdot dU\right)\Big|_a^b .$$

<u>*Пример 20.*</u> Найдите интеграл $\int_0^{\frac{p}{6}} (2-x)\cdot\sin 3x\,dx$.

Решение. Обозначим $U = 2 - x$, а $dV = \sin 3x\,dx$.

Найдем, что $dU = (2-x)'\cdot dx = -dx$, а $V = \int \sin 3x\,dx = -\dfrac{\cos 3x}{3}$.

Используем формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^{\frac{p}{6}} (2-x)\cdot\sin 3x\,dx = \left[(2-x)\cdot\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{p}{6}} - \int_0^{\frac{p}{6}}\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)\cdot(-dx) =$$

$$= \left[(2-x)\cdot\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{p}{6}} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{p}{6}}\frac{\cos 3x\,d(3x)}{3} =$$

$$= -\frac{1}{3}\left[(2-x)\cdot\cos 3x\right]\Big|_0^{\frac{p}{6}} - \frac{1}{9}\sin 3x\Big|_0^{\frac{p}{6}} =$$

$$= -\frac{1}{9}\left[\left(2-\frac{p}{6}\right)\cdot 3\cos 3\cdot\frac{p}{6} - (2-0)\cdot 3\cos 3\cdot 0 + \sin 3\cdot\frac{p}{6} - \sin 3\cdot 0\right] =$$

$$= -\frac{1}{9}\left[0 - 2\cdot 3 + 1 - 0\right] = \frac{5}{9}.$$

Ответ. $\int_0^{\frac{p}{6}} (2-x)\cdot\sin 3x\,dx = \dfrac{5}{9} = \dfrac{5}{9}$.

<u>*Пример 21.*</u> Вычислите интеграл $\int\limits_1^{e^4} \sqrt{x}\,\ln x\,dx$.

Решение. Обозначим $U = \ln x$, а $dV = \sqrt{x}\,dx$. Найдем $dU = (\ln x)'\,dx = \dfrac{dx}{x}$ и

$$V = \int dV = \int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}.$$

Используем формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_1^{e^4} \sqrt{x}\ln x\,dx = \frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x}\cdot\ln x\Big|_1^{e^4} - \int\limits_1^{e^4} \frac{2}{3}\cdot\frac{x\sqrt{x}\cdot dx}{x} = \frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x}\cdot\ln x\Big|_1^{e^4} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x}\Big|_1^{e^4} =$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(-\frac{2}{3} + \ln x\right)\Bigg|_1^{e^4} = \frac{2}{3}\cdot e^4\cdot\sqrt{e^4}\left(-\frac{2}{3} + \ln e^4\right) - \frac{2}{3}\cdot 1\cdot\sqrt{1}\left(-\frac{2}{3} + \ln 1\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot e^6\left(-\frac{2}{3} + 4\right) - \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}\left(5e^6 + 1\right).$$

Ответ. $\int\limits_1^{e^4} \sqrt{x}\,\ln x\,dx = \dfrac{4}{9}\left(5e^6 + 1\right)$.

ЗАПОМНИТЕ!

Формула замены переменной для определенных интегралов принимает вид: $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left[\Psi(t)\right]\cdot\Psi'(t)\,dt$, где $x = \Psi(t)$ – непрерывная и дифференцируемая на интервале $[t_1; t_2]$ функция. При этом интервал $[t_1; t_2]$ *не может быть у́же* интервала $[x_1; x_2]$, в котором интегрируется непрерывная функция $f(x)$.

Из этой формулы видно, что подынтегральное выражение преобразуется так же, как при замене переменной в неопределенном интеграле. Старые пределы интегрирования x_1 и x_2 связаны с новыми пределами интегрирования t_1 и t_2 так же, как старая переменная x с новой переменной t.

<u>*Пример 22.*</u> Найдите определенный интеграл $\int\limits_{2}^{3}(2x-1)^3\,dx$.

Решение. Введем новую переменную: $t=2x-1$, тогда $dt=2dx$, откуда $dx=\dfrac{dt}{2}$. Новые пределы интегрирования будут следующие:

при $x_1=2$, $t_1=3$; при $x_2=3$, $t_2=5$.

$$\int\limits_{2}^{3}(2x-1)^3\,dx=\int\limits_{3}^{5}t^3\cdot\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int\limits_{3}^{5}t^3\,dt=\left.\frac{t^4}{8}\right|_{3}^{5}=\frac{5^4}{8}-\frac{3^4}{8}=68.$$

Ответ. $\int\limits_{2}^{3}(2x-1)^3\,dx=68$.

Для замены переменной в определенном интеграле часто используют формулу $U=j\,(x)$. Тогда новые пределы интегрирования U_1 и U_2 определяются по формулам $U_1=j\,(x_1)$, а $U_2=j\,(x_2)$.

<u>*Пример 23.*</u> Найдите интеграл $I=\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}}\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

Решение. Введем новую переменную $U=\cos x$. Тогда $dU=-\sin x\,dx$, а пределы интегрирования вычисляем так: $U_1=\cos 0=1$, $U_2=\cos\dfrac{p}{2}=0$.

Перепишем интеграл с новой переменной и вычислим его.

$$I=\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx=\int\limits_{1}^{0}\frac{-dU}{1+U^2}=\int\limits_{0}^{1}\frac{dU}{1+U^2}=\left.\operatorname{arctg}U\right|_{0}^{1}=\frac{p}{4}.$$

Ответ. $I=\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}}\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx=\dfrac{p}{4}$.

Можно показать, что определенный интеграл по симметричному пределу $[-a;a]$ равен нулю, если подынтегральная функция нечетная, и равен $2\int\limits_{0}^{a}f(x)\,dx$, если подынтегральная функция четная:

$$\int\limits_{-a}^{a}f(x)\,dx=\begin{cases}0, & \text{åñëè}\quad f(x)=-f(-x),\\ 2\int\limits_{0}^{a}f(x)\,dx, & \text{åñëè}\quad f(x)=f(-x).\end{cases}$$

<u>*Пример 24.*</u> Найдите интеграл $\int\limits_{-1}^{1} x^5 dx$.

Решение. Подынтегральная функция нечетная, так как $f(-x)=(-x)^5=-x^5=-f(x)$, значит $\int\limits_{-1}^{1} x^5 dx = 0$. Сделаем проверку.

Проверка. Найдем интеграл, используя формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{-1}^{1} x^5 dx = \left.\frac{x^6}{6}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{6}-\frac{(-1)^6}{6}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0.$$

Ответ. $\int\limits_{-1}^{1} x^5 dx = 0$.

<u>*Пример 25.*</u> Найдите интеграл $\int\limits_{-1}^{1} x^4 dx$.

Решение. Подынтегральная функция $x^4=(-x)^4=x^4$ четная, значит,

$$\int\limits_{-1}^{1} x^4 dx = 2\int\limits_{0}^{1} x^4 dx = 2\cdot\left.\frac{x^5}{5}\right|_{0}^{1} = \frac{2}{5}.$$

Проверка. Найдем интеграл, используя формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{-1}^{1} x^4 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_{-1}^{1} = \frac{1^5}{5}-\frac{(-1)^5}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}.$$

Ответ. $\int\limits_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}$.

Ответьте на вопросы

1. Напишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла.
2. Как преобразовать подынтегральное выражение при замене переменной?
3. Как найти новые пределы интегрирования?
4. Чему равен определенный интеграл по симметричному пределу?

12.7. Вычисление площадей плоских фигур, длины дуги плоской кривой, объема тел вращения, площади поверхности вращения

12.7.1. Вычисление площади плоской фигуры

Площадь плоской фигуры определяется по формуле:

$$S=\int_a^b f\left(x\right)dx.$$

При решении некоторых задач целесообразно использовать следующий порядок действий:

1. Выполнить чертеж.
2. Найти пределы интегрирования.
3. Вычислить площадь плоской фигуры.

Пример 26. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой линией $y=\frac{1}{2}x^2+1$, прямыми линиями $x=-2$, $x=3$ и осью Ox.

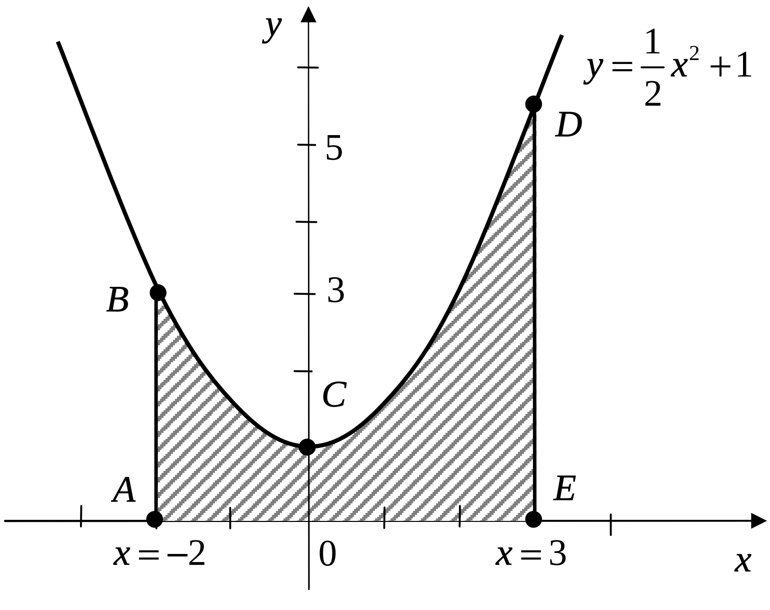


Рисунок 12.2

Решение.

1) Выполним чертеж. Для этого в системе координат xOy построим графики заданных формулами функций. Из рисунка 12.2 мы видим, что необходимо вычислить площадь криволинейной трапеции $ABCDE$.

2) <u>Пределы интегрирования</u> определим как пределы изменения аргумента x. Кривая BCD пересекается с прямой $x=-2$ в точке $B(-2;3)$, а с прямой $x=3$ в точке $D\left(3;5\frac{1}{2}\right)$. Мы видим, что минимальное значение аргумент принимает в точке B, где $x=-2$, а максимальное значение – в точке D, где $x=3$. Значит, нижний предел интегрирования $a=-2$, а верхний предел $b=3$.

3) <u>Вычислим площадь по формуле</u> $S=\int_a^b f(x)\,dx$. Тогда:

$$S=\int_{-2}^{3}\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{3}+x\Big|_{-2}^{3}==\frac{1}{6}(27+8)+(3+2)=10\frac{5}{6}\text{ кв.ед.}$$

Ответ. Площадь криволинейной трапеции равна $10\frac{5}{6}$ квадратных единиц.

<u>*Пример 27.*</u> Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\sin x$ и осью Ox на полупериоде изменения аргумента x.

Решение.

1. Построим график функции $y=\sin x$ на полупериоде изменения аргумента x.

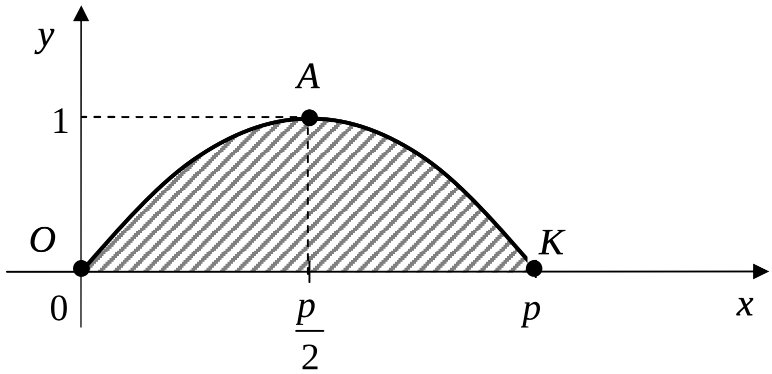


Рисунок 12.3

Нам необходимо вычислить площадь криволинейной трапеции OAK (рис. 12.3).

2. Нижний предел интегрирования $a=0$, а верхний предел $b=p$.
3. Площадь вычислим по формуле: $S=\int_a^b f(x)\,dx$.

$$S=\int_0^p \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^p=\cos x\Big|_p^0=\cos\,0^\circ-\cos p\;=1-(-1)=2\text{ кв.ед.}$$

Ответ. Площадь фигуры составляет 2 квадратные единицы.

<u>*Пример 28.*</u> Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\frac{1}{2}x^2$ и прямой $y=\frac{1}{2}x+1$.

Решение. 1. Построим графики функций $y=\frac{1}{2}x^2$ и $y=\frac{1}{2}x+1$.

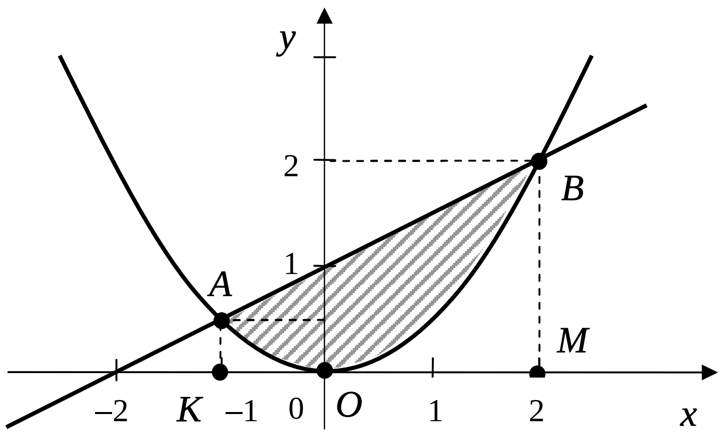


Рисунок 12.4

Необходимо найти площадь криволинейной трапеции *ABO* (рис. 12.4).

2. Найти пределы интегрирования можно, если решить совместно систему уравнений: $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ y=\frac{1}{2}x+1 \end{cases}$, тогда $\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x+1$, откуда $x^2-x-2=0$.

Решением этого уравнения есть координаты x (абсциссы) точек пересечения графиков функций. Эти координаты равны $x_A=-1$ и $x_B=2$.

Нижним пределом интегрирования будет $a=-1$, а верхним будет $b=2$.

3. Площадь криволинейной трапеции S_{ABO} будет равна разности площади трапеции S_{KABM} и площади трапеции S_{KAOBM}: $S_{ABO}=S_{KABM}-S_{KAOBM}$.

Площадь трапеции $S_{KABM}=\frac{AK+BM}{2}\cdot KM=\frac{\frac{1}{2}+2}{2}\cdot 3=\frac{15}{4}$ кв.ед.

Площадь трапеции $S_{KAOBM}=\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x^2dx=\left.\frac{x^3}{6}\right|_{-1}^{2}=\frac{8}{6}+\frac{1}{6}=\frac{9}{6}$ кв. ед.

$$S_{ABO}=\frac{15}{4}-\frac{9}{6}=\frac{90-36}{24}=\frac{54}{24}=\frac{9}{4} \text{ кв. ед.}$$

Ответ. Площадь трапеции *ABO* равна $\frac{9}{4}$ квадратных единиц.

12.7.2. Вычисление длины дуги плоской кривой

Длина кривой линии – это предел, к которому стремится длина вписанной в нее (или описанной) ломаной при неограниченном увеличении числа ее сторон и при стремлении наибольшей из них к нулю.

В прямоугольной системе координат дифференциал длины линии $y = f(x)$ равен $dl = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$, а длина дуги вычисляется по формуле:

$$l = \int_{(A)}^{(B)} dl = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_{y_A}^{y_B} \sqrt{1 + (x')^2}\, dy .$$

<u>*Пример 29.*</u> Найдите длину дуги окружности $x^2 + y^2 = 4$ между точками $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.

Решение. По формуле длины дуги найдем: $l = \int_0^2 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$. (∗)

Из уравнения окружности найдем, что $y = \sqrt{4 - x^2}$, а производная

$$y' = \left[\left(4 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2} \cdot \left(4 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{m}\, (-2x) = -\frac{2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} . \qquad (**)$$

Подставим значение производной (∗∗) в формулу (∗).

$$l = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}\, dx = \int_0^2 \sqrt{\frac{4}{4 - x^2}}\, dx = 2 \cdot \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = 2\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^2 = 2 \cdot \frac{p}{2} = p .$$

Проверка. Мы знаем, что длина окружности равна $C = 2pR$. При $R = 2$ длина всей окружности $C = 4p$. В нашей задаче уравнение $x^2 + y^2 = 4$ описывает окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат. Длина дуги окружности от $x_1 = 0$ до $x_2 = 2$ составляет $\frac{1}{4}$ часть длины всей окружности, значит: $l = \frac{1}{4}C = \frac{4p}{4} = p$.

Ответ. Длина дуги окружности равна p.

12.7.3. Вычисление объема тела вращения

Если тело получено путем вращения криволинейной трапеции *ABCD* вокруг оси *Ox* (рисунок 4.5), то любое его плоское сечение, перпендикулярное оси *Ox*, будет представлять собой круг. Радиус этого круга будет равен ординате кривой $y = f(x)$.

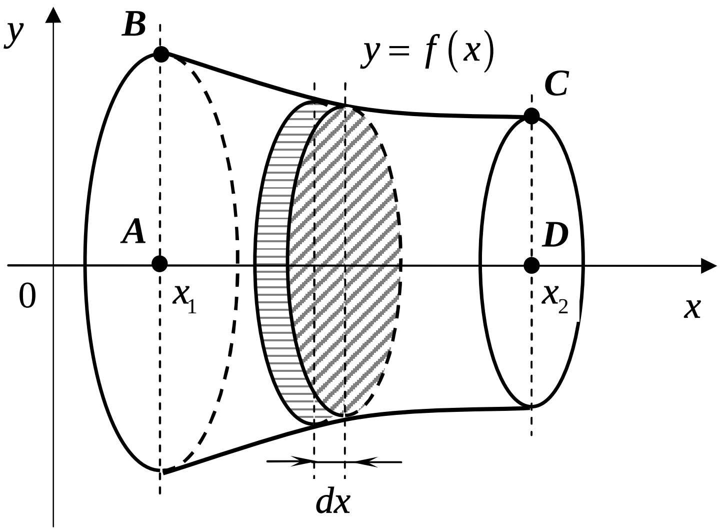


Рисунок – 4.5

Площадь сечения $S(x)$, которое соответствует абсциссе x, будет равна $p\,y^2$. Элементарный объем, который соответствует приращению dx, будет равен объему элементарного цилиндра $dV = p\,y^2 dx$.

Весь объем тела вращения определяется формулой:

$$V = \int_{x_1}^{x_2} dV = \int_{x_1}^{x_2} p\,y^2 dx = p\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx \quad (x_1 < x_2).$$

Если тело получено вращением вокруг оси *Oy*, то:

$$V = \int_{y_1}^{y_2} p\,x^2 dy = p\int_{y_1}^{y_2} x^2 dy \quad (y_1 < y_2).$$

<u>Пример 30.</u> Найдите объем тела, которое образовано вращением криволинейной трапеции $y^2 = 2px$ вокруг оси Ox, если $x_1 = a$, $x_2 = b$.

Решение. Построим параболу $y^2 = 2px$ и прямые $x_1 = a$ и $x_2 = b$. При вращении вокруг оси Ox мы получим часть параболоида вращения. Его объем будем вычислять по формуле $V = p\int_a^b y^2\,dx$. Тогда получим:

$$V = p\int_a^b 2pxdx = 2p\,p\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = p\,p\cdot\left(b^2 - a^2\right).$$

Ответ. $V = p\,p\cdot\left(b^2 - a^2\right)$.

12.7.4. Вычисление площади поверхности вращения

Дифференциал площади поверхности, полученный при вращении дуги плоской кривой вокруг оси Ox, записывают как:

$$dS = 2p\,ydl = 2p\,y\sqrt{1 + \left(y'\right)^2}.$$

Площадь всей поверхности вычисляют по формуле:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} 2p\,y\sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\,dx = 2p\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\,dx.$$

При вращении дуги вокруг оси Oy площадь поверхности равна:

$$S = \int_{y_1}^{y_2} 2p\,x\sqrt{1 + \left(x'\right)^2}\,dy.$$

<u>Пример 31</u>. Найдите площадь поверхности, которая получена при вращении дуги кубической параболы $y = x^3$ вокруг оси Ox между прямыми $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{2}{3}$.

Решение. При вращении дуги кривой вокруг оси Ox используем формулу $S = 2p\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\,dx$. Получим: $S = 2p\int_0^{\frac{2}{3}} x^3\sqrt{1 + 9x^4}\,dx$.

Для вычисления интеграла введем новую переменную: $z = 1 + 9x^4$, тогда $dz = 36x^3dx$, а пределы интегрирования будут равны: $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{25}{9}$.

$$S=2p\int_{1}^{\frac{25}{9}}\frac{\sqrt{z}\,dz}{36}=\frac{p}{18}\int_{1}^{\frac{25}{9}}z^{\frac{1}{2}}\,dz=\frac{p}{18}\cdot\frac{2\cdot z^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{1}^{\frac{25}{9}}=\frac{p}{27}\cdot\left[\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]=\frac{p}{27}\left[\frac{125}{27}-1\right].$$

Ответ. $S=\dfrac{p}{27}\left(\dfrac{125}{27}-1\right)$.

Ответьте на вопросы

1. Назовите формулы для вычисления площади криволинейной трапеции.
2. Как найти площадь любой плоской фигуры в прямоугольной системе координат?
3. Как найти объем тела при помощи определенного интеграла?
4. Чему равен объем тела вращения?
5. Как найти длину дуги плоской кривой?
6. Какой формулой определяется площадь поверхности вращения?

Задания для самостоятельной работы № 23

I. Найдите неопределенные интегралы.

1) $\int\left(3x^2-2x+5\right)dx$; 2) $\int\dfrac{x^2-x}{\left(x-2\right)^2}dx$; 3) $\int\dfrac{x^2}{x^2+1}dx$;

4) $\int x^2\ln x\,dx$; 5) $\int\left(3x+1\right)^{100}dx$; 6) $\int e^{3x}\cdot x\,dx$;

7) $\int\sin 3x\,dx$; 8) $\int\cos^2 x\,dx$.

II. Вычислите определенные интегралы.

1) $\int_1^2\left(x^2-2x+3\right)dx$; 2) $\int_1^e\dfrac{\sin\left(\ln x\right)}{x}dx$; 3) $\int_0^8\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$;

4) $\int_0^{\frac{p}{2}} x\cos x\,dx$; 5) $\int_3^4\dfrac{dx}{x^2+4x+5}$; 6) $\int_1^e\ln x\,dx$.

III. Вычислите площади плоских фигур, ограниченных линиями:

1) кривой $y=\frac{x^2}{2}$ и прямыми линиями $x=1$ и $x=3$;
2) кривой $x=2-y-y^2$ и осью Oy;
3) кривой $y=2-x^2$ и кривой $y^2=x^2$;
4) кривой $y=x^3$, прямой $y=8$, и осью Oy;
5) прямой $y=3-2x$ и кривой $y=x^2$.

IV. Найдите объем тела, образованного вращением фигур, ограниченных линиями:

1) $y^2=6x$ и $x=5$ вокруг оси Ox;
2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ вокруг оси Oy;
3) $x^2=2y$ и $2x+2y-3=0$ вокруг оси Ox.

V. Найдите длину дуги плоской кривой:

1) $y^2=x^3$ от начала координат до точки $A(4;8)$;
2) $y=2\sqrt{x}$ от $x=0$ до $x=1$;
3) $y=e^x$ от $A(0;1)$ до $B(1;e)$;
4) $y=\frac{x^2}{2}-1$, ограниченной осью Ox.

VI. Найдите площадь поверхности вращения:

1) эллипса $3x^2+4y^2=12$ вокруг оси Oy;
2) дуги окружности $x^2+(y-3)^2=25$ вокруг оси Oy между точками, где $y_1=-2$, $y_2=8$;
3) дуги параболы $y^2=2x$ вокруг оси Ox между точками пересечения ее с прямой $2x=3$.

ОТВЕТЫ НА ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1

АРИФМЕТИКА (начальные сведения)

Самостоятельная работа № 2

II. **1)** На 2; **2)** На 71; **3)** В 9 раз; **4)** В 20 раз.

IV. **а)** 385572; **б)** –20282; **в)** 467980; **г)** 9370; **д)** 665150; **е)** 279911.

Самостоятельная работа № 3

VI. **а)** Да; **б)** Нет; **в)** Да; **г)** Нет.

VII. **а)** 2, 4, 10; **б)** 2, 4, 8, 16; **в)** 4, 8, 12, 16; **г)** 6, 12.

Самостоятельная работа № 4

III. $\frac{61}{3}$; $\frac{17}{5}$; $\frac{35}{4}$; $\frac{123}{8}$; $\frac{229}{191}$; $\frac{739}{7}$.

IV. $2\frac{3}{23}$; $16\frac{7}{8}$; $3\frac{5}{12}$; $5\frac{4}{17}$; $1\frac{1}{3}$; $1\frac{107}{221}$.

V. **а)** $\frac{105}{112}$; **б)** $\frac{113}{395}$; **в)** $13{,}25$; **г)** 61; **д)** $-0{,}4$; **е)** $1\frac{1}{70}$; ж) 1.

Самостоятельная работа № 5

II. **а)** $4{,}5$; **б)** 4; **в)** $3{,}25$; **г)** $-2{,}05$; **д)** $0{,}64$; **е)** $\frac{343}{110}$; **ж)** $\frac{1}{3}$; **з)** $4\frac{7}{27}$.

III. **а)** 51; **б)** 1; **в)** 0,35; **г)** $0{,}00225 = \frac{9}{4000}$.

IV. **а)** 600; **б)** $2\frac{2}{3}$; **в)** $137\frac{1}{12}$; **г)** 30000.

V. **а)** 200%; **б)** 3765%; **в)** $31\frac{11}{19}$%; **г)** $8\frac{8}{9}$%.

VI. 1000.

VII. 12.

VIII. 65%.

IX. 424,36 грн.

2

МНОЖЕСТВА

Самостоятельная работа № 6

II. 1) 2, 4, 6, 8, 10; **2)** 3, 5, 7, 11, 13; **3)** 5, 10, 15, 20, 25.

VI. 1) –9; **2)** 16; **3)** –5; **4)** 31; **5)** не существует.

IX. 1) $x>0$; **2)** $3{,}7<x\le 4$; **3)** $\varnothing$; **4)** $3\le x<5$; **5)** $1\le x<4$.

XIV. 1) $]-\infty;+\infty[$; **2)** $[2;6]$; **3)** $]-1;7[$; **4)** $[-8;8]$.

XVI. 1) $]-\infty;-3[$; **2)** $[2;3[$; **3)** $]-\infty;-1[$.

3

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

Самостоятельная работа № 7

I. а) $\frac{1}{6}a^{3n+m}\cdot b^{2+m}\cdot c^5$; **б)** $\frac{4b^2c^8}{13a^2}$; **в)** $2{,}16a^6b^3$; **г)** 128; **д)** -4; **е)** $-\frac{81}{32}$;
ж) $-\frac{9}{4}a^4b^6c^8$; **з)** $9{,}025x^{k+3}y^nz^2$; **и)** $\frac{3}{2}b$; **к)** $\frac{29}{72}$.

II. а) 2^{-2}; **б)** 2^{-3}; **в)** 5^{-3}; **г)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; **д)** 10^{-1}; **е)** 10^{-4}; **ж)** 2^{-1}; **з)** x^{-1}; **и)** $\left(\frac{x}{3}\right)^{-2}$;
к) $\left(\frac{x}{2}\right)^{-3}$; **л)** $\left(\frac{x-4}{17}\right)^{-1}$; **м)** $\left(3(x+1)^4\right)^{-1}$; **н)** $\left(\frac{x(2x^4+9)}{6}\right)^{-1}$.

III. а) $x\ne 0$; **б)** $x\ne 8$; **в)** $x\in R$; **г)** $x\ne \pm 7$; **д)** $a\ne 0;\ a\ne 6$; **е)** $x\ne -1;\ x\ne 4$;
ж) $x\ne \pm 3$; **з)** $x\in R$; **и)** $m\ne 2n$.

IV. а) x^4-21x^3+12x; **б)** $3x^3+8x^2-6x-5$; **в)** $3x^4-6$; **г)** x^5-2x^2-2;
д) $x^3+13x+1$; **е)** $6a^5-7a^3b^2-13a^4b$.

V. а) $2x-13$; **б)** $x^2-7x+12$; **в)** $2x^2+3x-2$; **г)** x^2+x-1; **д)** x^3-x^2+2;
е) $x^2+2x+4+\frac{4x-2}{x^2-x+1}$.

VI. а) $2x^2-5x-3$; **б)** $x^2-3x-10-\frac{12x}{x^2-4}$; **в)** $2x^2-11x+12$;
г) $2x^6+5x^5+5x^4+\frac{5x^4-3x-2}{x-1}$; **д)** $2x^2+13x+17+\frac{12}{2x-1}$.

VII. а) $-x\left(a^2+b^2+c^2\right)$; **б)** $7a^2x^2y\left(a^2-2x-7ay+5y\right)$; **в)** $(x-y)(x-y-1)$;

г) $6x^m\left(x^6-5x^3+9\right)$; **д)** $2(c-y)\left(b-y+y^2\right)$; **е)** $a^{n+3}b^3\left(a^{n-4}+b^9\right)$;

ж) $x^{n-1}y^3\left(x^{n+2}+y^{12}\right)$; **з)** $9^{n-1}\left(9^{n+2}-1\right)$.

VIII. а) $\left(n^2-m\right)\left(m^2-n\right)$; **б)** $\left(3x^2+y\right)\left(x-2y^2\right)$; **в)** $(x+y)(2a-1)$;

г) $(x+ay)(x-a)$; **д)** $(a+b)(a+3b)$; **е)** $\left(x^2y-5z^2\right)(4y-xz)$.

IX. а) $(x-0{,}1)(x+0{,}1)\left(x^2+0{,}01\right)$; **б)** $(x-5)(x+1)$; **в)** $\left(x^n+y^n\right)\left(x^{2n}-x^ny^n+y^{2n}\right)$;

г) $(a+x-ax+1)(a+x+ax-1)$; **д)** $\left(x^{-2}-4y^{-3}\right)\left(x^{-2}+4y^{-3}\right)$;

е) $\left(x^2+5\right)(x-1)(x+1)$.

X. а) $\left(a^2+b^2+ab\right)\left(a^2+b^2-ab\right)$; **б)** $(x+3)^2\cdot(x-2)$; **в)** $(a+2)\left(a^2+a-2\right)$;

г) $a^2\left(a^2+2\right)$; **д)** $8xy\left(x^2+y^2\right)$; **е)** $(x+1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$.

XI. а) $\dfrac{105xz^4}{252x^4y^2z^4}$; $\dfrac{36x^2y^2z^3}{252x^4y^2z^4}$; $\dfrac{156y^2}{252x^4y^2z^4}$; **б)** $\dfrac{b(a+b)}{b\left(a^2-b^2\right)}$; $\dfrac{a-b}{b\left(a^2-b^2\right)}$;

в) $\dfrac{a\left(a^2+ab+b^2\right)}{a^3-b^3}$; $\dfrac{-4a}{a^3-b^3}$; $\dfrac{3(a-b)}{a^3-b^3}$;

г) $\dfrac{1}{x^2-y^2-z^2-2yz}$; $\dfrac{x-y-z}{x^2-y^2-z^2-2yz}$; $\dfrac{(-x+y)(x+y+z)}{x^2-y^2-z^2-2yz}$.

XII. а) $\dfrac{3x^3y}{2z}$; **б)** $\dfrac{9}{4x^{2n}yz^{3m}}$; **в)** $-x^2$; **г)** $\dfrac{x^3-4}{x^6-x^3+1}$.

XIII. 1) $\dfrac{y}{x-y}$; **2)** $\dfrac{x-9}{9x}$; **3)** $\dfrac{1}{x-2y}$; **4)** 1; **5)** $-xy$; **6)** $\dfrac{1}{6}(x+3)(x+4)$;

7) $ab(a-b)$; **8)** $-\dfrac{2}{x}$; **9)** $\dfrac{1}{9x-1}$; **10)** $\dfrac{3a+b}{2ab}$; **11)** $\dfrac{18}{a}$; **12)** $\dfrac{y}{x}$; **13)** $a-b$;

14) $2+3x$; **15)** $\dfrac{1}{xy}$; **16)** $\dfrac{a+b}{3-b}$; **17)** $b(a-5)$; **18)** $(x-4)(x+1)$; **19)** 1;

20) $-3(a+5b)$; **21)** $9m^2$; **22)** $5(a-b)$; **23)** 1; **24)** $\dfrac{5}{a}$; **25)** x^3; **26)** 2;

27) $0{,}5$; **28)** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^4\cdot\dfrac{x+y}{x-y}$; **29)** 1; **30)** $\dfrac{1}{m}$; **31)** $\dfrac{a(b-a)}{b+a}$; **32)** $\dfrac{a}{b}$; **33)** $\dfrac{4}{4-x^2}$;

34) $2a$; **35)** $\dfrac{a+1}{a-1}$; **36)** 0; **37)** 1; **38)** $x+y+z$;

39) $x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz$.

Ответы на задания для самостоятельной работы

Самостоятельная работа № 8

I. 1) 6; **2)** $\frac{21}{20}$; **3)** $\frac{3}{4}$; **4)** $\sqrt{\frac{38}{15}}$; **5)** 1; **6)** $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{7}+1\right)$; **7)** $2-\sqrt{3}$; **8)** 12;

9) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$; **10)** $6-\sqrt{21}$; **11)** $5+3\sqrt{2}$; **12)** $\sqrt{3}+2$; **13)** $\sqrt{x-1}+1$; **14)** 47.

II. 1) $2a\sqrt[5]{ab}$; **2)** $\frac{x^2d}{y}$; **3)** $\frac{3xy}{a^2b}\cdot\sqrt[3]{\frac{y}{12}}$; **4)** $\frac{1}{|b|}\sqrt{a-b}$; **5)** $\frac{1}{a^3}\sqrt{x^3-a^5}$;

6) $\frac{|a-b|}{5}\cdot\sqrt{y}$; **7)** $\frac{y^2-x^2}{2}\sqrt[3]{y-x}$; **8)** $\frac{b}{a^2}\sqrt[3]{a^2-b^2}$; **9)** $2a^5bc^p\sqrt[m]{2b^nc}$;

10) $3a^2bc^{-2}\cdot\sqrt[n]{9a^5b^{-1}c}$; **11)** $c^{m-n}\cdot\sqrt[m+n]{a^{2m+n}b^{m+2n}}$; **12)** $x^2y^4z^2\cdot\sqrt[2p]{xyz^5}$.

III. 1) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; **2)** $\sqrt{\frac{2a(a+b)}{a-b}}$; **3)** $\sqrt[3]{175}$; **4)** $\sqrt{2a^7b}$; **5)** $\sqrt[3]{m^7n}$; **6)** $\sqrt[3]{8m^2n^4}$;

7) $\sqrt[5]{m^5-1}$; **8)** $\sqrt[5]{\frac{64a}{3b^2}}$; **9)** $\sqrt[m]{3^{m+1}a^{nm+2}b^{m+1}}$; **10)** $-\sqrt{2a(a-2)}$; **11)** $-\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}$;

12) $-\sqrt[2k]{\frac{m^{2k-1}}{n-m}}$.

IV. 1) $3\sqrt{6}$; **2)** $\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{x-y}$; **3)** $2\sqrt[4]{5}$; **4)** $\frac{2}{5}\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)$; **5)** $\frac{1}{5}\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)$;

6) $\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$; **7)** $\frac{c\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{a+b}$; **8)** $\frac{1}{28}\left(2\sqrt{5}+4\sqrt{3}+\sqrt{6}-3\sqrt{10}\right)$;

9) $\frac{10+\sqrt{30}-2\sqrt{60}+30\sqrt{2}}{7}$; **10)** $\sqrt{3}$;

11) $\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}-\sqrt{x(x-a)}-\sqrt{x(x+a)}}{a}$; **12)** $\frac{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}{a^2+b^2}$.

V. 1) $\frac{2}{3\left(3-\sqrt{3}\right)}$; **2)** $\frac{1}{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}$; **3)** $\frac{4}{15\left(\sqrt{6}+2\right)}$; **4)** $\frac{3}{2\left(5\sqrt{3}+3\sqrt{5}\right)}$;

5) $\frac{m-1}{m\left(\sqrt{m}-1\right)}$; **6)** $\frac{a-b}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}$; **7)** $\frac{2}{\sqrt{a^2+1}\cdot\left(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}\right)}$;

8) $\frac{1}{2x^2-2x\sqrt{x^2-1}-1}$; **9)** $\frac{(m-n)^2}{(m+n)^3\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2}$.

VI. 1) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$**; 2)** $\left(\sqrt[4]{x}-7\right)\left(\sqrt[4]{x}+7\right)$**;**

3) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\cdot x^{\frac{1}{6}}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\cdot x^{\frac{1}{6}}\right)$**; 4)** $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(1+\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$**; 5)** $\left(x^{\frac{5}{4}}+3\right)^2$**;**

6) $\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+6\right)$**.**

VII. 1) $a\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)$**; 2)** $\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)^2$**; 3)** 1**; 4)** 1**; 5)** $\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$**; 6)** $-4x$**;**

7) $\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$**; 8)** 0**; 9)** $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$**; 10)** $\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^2}$**; 11)** $4x-9$**; 12)** $\left(\frac{m}{n}\right)^{n-m}$**;**

13) $a\sqrt[4]{b}\cdot\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)$**; 14)** $5\cdot\sqrt[3]{ab}$**; 15)** 1**; 16)** $2a+5b$**; 17)** $b+\sqrt{ab}$**;**

18) $\sqrt[3]{x+y}-\sqrt[3]{x-y}$**; 19)** $2\cdot\sqrt[6]{b}$**; 20)** 0**; 21)** $\frac{1}{xy}$**; 22)** $\frac{q-2p}{2p^2}$**; 23)** $-\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$**;**

24) $\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^{\frac{1}{2}}}{a}$**; 25)** $\sqrt[3]{ab}$**; 26)** $\frac{2}{\sqrt{a}}$**; 27)** $\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$**; 28)** $2\cdot\sqrt[4]{ax}$**; 29)** $\frac{2n}{7}$**; 30)** 3**;**

31) 4**; 32)** $9a$**; 33)** $\sqrt[3]{a^2}$**; 34)** $\sqrt{x}-\sqrt{y}$**; 35)** 2**; 36)** $2\cdot\sqrt[4]{b}$**; 37)** 1**; 38)** 0**;**

39) 1**; 40)** $\frac{(x+1)\sqrt{x-2}}{(x-1)\sqrt{x+2}}$**.**

4

РАВЕНСТВА. ТОЖДЕСТВА. УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Самостоятельная работа № 9

I. 1) 4**; 2)** $3{,}75$**; 3)** 5**; 4)** -1**; 5)** $0{,}75$**; 6)** $0{,}5$**; 7)** $-3;\,5$**; 8)** $-3\pm\frac{\sqrt[6]{2}}{3}$**;**

9) $\frac{1}{3}\left(1-\sqrt{5}\pm\sqrt{\frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}\right)$**; 10)**$0;\,-5$**; 11)** $0;\,\frac{14}{9}$**; 12)** $3;\,9$**; 13)** $7;\,\frac{61}{9}$**; 14)** $3;\,4$**;**

15) $-1;\,2$**; 16)** $\frac{3}{4};\,-4$**; 17)** $-\frac{2\sqrt{3}}{9};\,\frac{\sqrt{3}}{3}$**; 18)** -2**; 19)** $-\frac{5}{9}$**; 20)** $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{4}$**.**

II. $x_2=6;\ \ p=-9$**.**

III. 1) $x^2-9=0$**; 2)** $8x^2-2x-1=0$**; 3)** $1000x^2-410x+4=0$**;**
4) $60x^2-20x+1=0$**; 5)** $x^2-2\sqrt{15}x+6=0$**; 6)** $x^2-110x+44=0$**;**
7) $x^2-2ax+a^2-b^2m=0$**.**

IV. $x_2=-4{,}5$**;** $b=5$**. V.** $x_2=-\dfrac{2}{3}$**;** $c=8$**. VI.** $x_2=-2$**;** $q=-18$**. VII.** $q=36$.

VIII. 1) $y^2-10y+24=0$**; 2)** $3y^2+20y+12=0$**; 3)** $y^2-3y+2=0$**;**
4) $3y^2-7y+2=0$**; 5)** $5y^2-24y+16=0$**; 6)** $2y^2-7y+3=0$**.**

IX. 1) $y^2-12{,}4y+22{,}44=0$**; 2)** $y^2-18{,}4y+35{,}64=0$**; 3)** $25y^2-15y-8=0$**;**
4) $275y^2+90y-104=0$**; 5)** $25y^2+100y+99=0$**; 6)** $25y^2+35y-44=0$**.**

X. 1) $12y^2-8y+1=0$**; 2)** $y^2+y-2=0$**; 3)** $8y^2-5y-3=0$**; 4)** $y^2+3y-4=0$**;**
5) $qy^2+py+1=0$**; 6)** $cy^2+by+a=0$**.**

XI. 1) $a^2y^2+\left(2ac-b^2\right)y+c^2=0$**; 2)** $a^3y^2+\left(b^3-3abc\right)y+c^3=0$**.**

XII. $a^2y^2+a\left(b-c\right)y-bc=0$**. XIII.** $3; -\dfrac{3}{31}$**. XIV.** $-5; 3$**.**

Самостоятельная работа № 10

I. 1) $\pm1;\ \pm2$**; 2)** $\pm\sqrt{2}$**; 3)** $0;\ 2;\ \pm2\sqrt{2}$**; 4)** $0;\ \pm3$**; 5)** ±2**; 6)** $\pm2;\ \pm\sqrt{2}$**.**

II. 1) $-1;\ 2\pm\sqrt{3}$**; 2)** $\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$**; 3)** $-3;\ -\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{2};\ 2$**; 4)** $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{1\pm\sqrt{10}}{3}$**;**
5) $-1;\ \dfrac{4}{3};\ 3$**; 6)** $-1;\ \pm2;\ 4$**.**

III. 1) $1;\ 2$**; 2)** $2;\ 4$**; 3)** $-5;\ -3;\ \pm1$**; 4)** $0;\ -2;\ -1\pm\dfrac{\sqrt{66}}{2}$**; 5)** $-3;\ -5$**;**
6) $-1;\ 6$**; 7)** $7\pm\sqrt{34}$**; 8)** $2;\ -6;\ -2\pm\sqrt{6}$**; 9)** 4**; 10)** $-2;\ 1$**;**
11) $\dfrac{2}{7};\ \dfrac{-7\pm\sqrt{57}}{22}$**; 12)** $1;\ 5$**.**

IV. 1) -1**; 2)** $\dfrac{1}{3}$**; 3)** $-8;\ 12$**; 4)** $3;\ 6$**; 5)** $3;\ 4$**; 6)** $x\in[-3;2]$**; 7)** $\dfrac{3}{2}$**; 8)** $\dfrac{9}{7};\ 3$**.**

V. 1) $8;\ 120$**; 2)** -128**; 3)** -27**; 4)** -27**; 5)** $[-5;3]$**; 6)** $-2;\ 6;\ 2\pm\sqrt{3}$**; 7)** $\dfrac{1}{7}$**;**
8) $-6;\ 3$**; 9)** 2**; 10)** $-12{,}6;\ -7{,}4$**; 11)** -2**; 12)** 0**; 13)** $-0{,}4$**; 14)** $\dfrac{63}{5};\ -\dfrac{17}{5}$**;**
15) 2401**; 16)** 17**; 17)** 1**; 18)** 4**; 19)** ±2**; 20)** 1**; 21)** 2**; 22)** $[2;3]$**; 23)** $\pm\dfrac{1}{2}$**;**
24) $-1;\ -3$**; 25)** $[2;5]$**.**

Ответы на задания для самостоятельной работы

Самостоятельная работа № 11

I. 1) -18**; 2)** 384**; 3)** 319**; 4)** 2**; 5)** 0**; 6)** 30.

II. 1) $(2;2)$**; 2)** $\left(0;\frac{2}{3}\right)$**; 3)** бесконечное множество решений**; 4)** $(4;3)$**;**

5) $\{3;-1;2\}$**; 6)** $\left\{\frac{4}{7};\frac{1}{7};\frac{2}{7}\right\}$**; 7)** бесконечное множество решений**;**

8) $\left\{\frac{83}{33};-\frac{88}{33};\frac{131}{33}\right\}$**; 9)** $\left\{\frac{232}{29};\frac{116}{29};\frac{58}{29}\right\}$.

III. 1) если $a\neq 0$ и $a\neq -3$, то $\left(2;-\frac{1}{a}\right)$; если $a=0$ или $a=-3$, то система имеет бесконечное множество решений**; 2)** если $a\neq 0$ и $a\neq -2$, то $\left(\frac{11a+14}{a+2};-\frac{7a+22}{a+2}\right)$; если $a=0$ или $a=-2$, то система не имеет решений**; 3)** если $a\neq\frac{2}{3}$, то $\left(\frac{2+3a}{9a+3};2+3a\right)$; если $a=\frac{2}{3}$, то система имеет бесконечное множество решений**;**

4) $\left(\frac{a^2-a-1}{a^2+a+1};\frac{-(a^2-a+3)}{a^2+a+1},a\in R\right)$**; 5)** если $m\neq -7$ и $m\neq -1$, то $\left(-\frac{3m^2+10m+17}{m^2+8m+7};\frac{14}{m+7}\right)$; если $m=-7$ или $m=-1$, то система несовместна; 6) если $a=1$, то $(2-4y;y)$, $y\in R$.

IV. 1) $(1;0;2)$**; 2)** $(1;1;0)$**; 3)** $(1;2;1)$**; 4)** $(5-2c;2c-4;c)$, $c\in R$**; 5)** $(1;2;3;-1)$.

V. 1) $(1;5)$**; 2)** $(-3;2)$**; 3)** $\{(1;4);(3;2)\}$**; 4)** $(2;0)$**; 5)** $\{(-5;-10);(-1;-2)\}$**;**

6) $\{(2;1);(1;11{,}5)\}$**; 7)** $\left\{(5;4);\left(1;\frac{4}{3}\right)\right\}$**; 8)** $\{(2;1);\ (2;-1);\ (-2;1);\ (-2;-1)\}$.

VI. 1) $\{(4;1);(-4;-1)\}$**; 2)** $\left\{\left(2\sqrt{3};\sqrt{3}\right);\ \left(-2\sqrt{3};-\sqrt{3}\right);\ \left(-2\sqrt{3};\sqrt{3}\right);\ \left(2\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)\right\}$**;**

3) $\left\{\left(\frac{1}{4};\frac{1}{5}\right);\left(\frac{5}{8};\frac{5}{31}\right)\right\}$**; 4)** $\left\{(10;1);\left(-\frac{21}{2};\frac{53}{12}\right)\right\}$**; 5)** $\{(1;3);(0{,}2;0{,}6)\}$**; 6)** $\{(3;8)\}$.

VII. 1) $\left\{(3;5);(-3;-5);\left(\frac{5}{3};\frac{13}{3}\right);\left(-\frac{5}{3};-\frac{13}{3}\right)\right\}$**; 2)** $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right);\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}};\frac{2}{\sqrt[3]{9}}\right)\right\}$**;**

3) $\left\{(1;3);(3;1);\left(\sqrt[3]{\dfrac{16}{3}};\,2\sqrt[3]{\dfrac{16}{3}}\right);\left(2\sqrt[3]{\dfrac{16}{3}};\,\sqrt[3]{\dfrac{16}{3}}\right)\right\}$**; 4)** $\{(2;3);\ (3;2);\ (-2;-3);$ $(-3;-2)\}$**; 5)** $\left\{(1;2);(-1;-2);\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right);\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)\right\}$**; 6)** $\{(2;-5)\}$**.**

VIII. 1) $\{(3;5);(5;3)\}$; **2)** $\{(1;2);(2;1)\}$; **3)** $\left\{(1;3);(3;1);\left(\dfrac{10+\sqrt{97}}{3};\dfrac{10-\sqrt{97}}{3}\right);\right.$ $\left.\left(\dfrac{10-\sqrt{97}}{3};\dfrac{10+\sqrt{97}}{3}\right)\right\}$; **4)** $\{(-1;2);(2;-1)\}$;**; 5)** $\{(4;9);(-4;-9);(9;4);$ $(-9;-4)\}$**; 6)** $\{(1;2);(2;1);(-1;-2);(-2;-1)\}$**.**

IX. 1) $(18;18)$**; 2)** $\{(5;4);(41;-40)\}$**; 3)** $(1;0)$**; 4)** $\left\{(0;0);\ \left(\sqrt{5};-\sqrt{5}\right);\right.$ $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right);\ \left(\sqrt{11};\sqrt{11}\right);\ \left(-\sqrt{11};-\sqrt{11}\right);\ \left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2};\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}\right);$ $\left.\left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2};\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}\right);\ \left(\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2}\right);\ \left(-\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$**;**

5) $\{(-2;3);(3;-2)\}$**; 6)** $\left\{\left(\dfrac{-5+\sqrt{61}}{2};\dfrac{-5+\sqrt{61}}{8}\right);\left(\dfrac{-5-\sqrt{61}}{2};\dfrac{-5-\sqrt{61}}{8}\right)\right\}$**;**

7) $\{(3;-1);(1;-3)\}$**; 8)** $\{(4;2);(2;4)\}$**; 9)** $\{(2;1);\ (1;2);\ (-2;1);\ (1;-2);$ $(2;-1);\ (-1;2);\ (-2;-1);\ (-1;-2)\}$**.**

5

ФУНКЦИЯ

Самостоятельная работа № 12

I. 1) $D[y]=]-\infty;+\infty[$**; 2)** $D[y]=]-5;5[$**; 3)** $D[y]=]-\infty;2[\,\mathbf{U}\,]5;+\infty[$**;**
4) $D[y]=]-\infty;-1[\,\mathbf{U}\,]-1;1[\,\mathbf{U}\,]1;+\infty[$**; 5)** $D[y]=]-\infty;+\infty[$**;**
6) $D[y]=]-\infty;0[\,\mathbf{U}\,]0;+\infty[$**; 7)** $D[y]=]-\infty;1[$**; 8)** $D[y]=]0;+\infty[$**;**
9) $D[y]=]-\infty;3[\,\mathbf{U}\,]3;+\infty[$**.**

II. 1) $E[y]=]-\infty;+\infty[$**; 2)** $E[y]=]-\infty;+\infty[$**; 3)** $E[y]=]-\infty;+\infty[$**;**
4) $E[y]=]-\infty;-1[\,\mathbf{U}\,]-1;+\infty[$**; 5)** $E[y]=]1;+\infty[$**; 6)** $E[y]=]4;+\infty[$**;**
7) $E[y]=]-5;+\infty[$**; 8)** $E[y]=]-\infty;+\infty[$**; 9)** $E[y]=]0;1[\,\mathbf{U}\,]1;+\infty[$**.**

III. **1)** четная; **2)** общего вида; **3)** четная; **4)** нечетная; **5)** общего вида; **6)** общего вида.

IV. **1)** ďđč $x>2$, $y=\sqrt{x-2}$; **2)** $y=x+3$; **3)** $y=\sqrt[5]{x}$; **4)** $y=\dfrac{1}{x+1}$; **5)** $y=x^3$; **6)** ďđč $x>1$, $y=x^2+1$; **7)** $y=10^x$; **8)** $y=1+\ln x$.

V. **1)** $D(y)=]-\infty;+\infty[$; $E(y)=]-\infty;+\infty[$; **2)** $D(y)=]-\infty;+\infty[$; $E(y)=[1;+\infty[$; **3)** $D(y)=]-\infty;+\infty[$; $E(y)=]0;+\infty[$.

VI. **1)** $y=0$ ďđč $x=-2$; $y>0$ ďđč $x>-2$; $y<0$ ďđč $x<-2$; àñèì ï òî ò í åò; **2)** $y=0$ ďđč $x_1=-2$ č $x_2=2$; $y>0$ ďđč $x\in]-\infty;-2[\,\mathbf{U}\,]2;+\infty[$; $y<0$ ďđč $x\in]-2;2[$; ŕńčě đňî ň í l ň; **3)** $y=0$ ďđč $x_1=-1$ č $x_2=1$; $y<0$ ďđč $x\in]-\infty;-1[\,\mathbf{U}\,]1;+\infty[$; $y>0$ ďđč $x\in]-1;1[$; ŕńčě đňî ň í l ň; **4)** í óëĺ é í Ĺ ň; $y>0$ ďđč $x\in]0;+\infty[$; $y<0$ ďđč $x\in]-\infty;0[$; âl đňčę. ŕńčě đňî ňŕ $x=0$; ăî đčçî í ň. ŕńčě đňî ňŕ $y=0$.

VII. **1)** □ çî ăäŕ $x\in]2;+\infty[$; □ çî ăäŕ $x\in]-\infty;2[$; ŕńčě đňî ň í l ň;
2) □ çî ăäŕ $x\in]2;+\infty[$; □ çî ăäŕ $x\in]-\infty;2[$; ŕńčě đňî ň í l ň;
3) □ çî ăäŕ $x\in]1;+\infty[$; □ çî ăäŕ $x\in]-\infty;1[$; ŕńčě đňî ň í l ň;
4) □ çî ăäŕ $x\in]-\infty;2[$; □ çî ăäŕ $x\in]2;+\infty[$; ŕńčě đňî ň í l ň;
5) □ êî ãäà $x\in\left]-\infty;-\dfrac{2\sqrt3}{3}\right[\,\mathbf{U}\,\left]\dfrac{2\sqrt3}{3};+\infty\right[$; □ êî ãäà $x\in\left]-\dfrac{2\sqrt3}{3};\dfrac{2\sqrt3}{3}\right[$; àñèì ï òî ò í åò; **6)** □ çî ăäŕ $x\in]-\infty;0[\,\mathbf{U}\,]0;+\infty[$; âl đňčę. ŕńčě đňî ňŕ $x=0$; ăî đčçî í ň. ŕńčě đňî ňŕ $y=2$.

VIII. **1)** $T=p$; **2)** $T=\dfrac{4}{3}p$; **3)** $T=\dfrac{10}{3}p$; **4)** $T=p$; **5)** $T=2p$; **6)** $T=\dfrac{p}{4}$.

Самостоятельная работа № 13

I. Прямая пропорциональность $y=2x$, обратная пропорциональность $y=\dfrac{2}{x}$.

II. **1)** Ось симметрии $x=\dfrac{7}{2}$, вершина $\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{25}{4}\right)$;

2) ось симметрии $x=2$, вершина $(2;-1)$;

3) ось симметрии $x=-\dfrac{7}{2}$, вершина $\left(-\dfrac{7}{2};-\dfrac{9}{4}\right)$.

III. $x = 3.$ **IV.** $f(x+1) = \dfrac{1-x}{x-1}.$ **V.** $y = 1 + \dfrac{5}{x-2}.$

Самостоятельная работа № 14

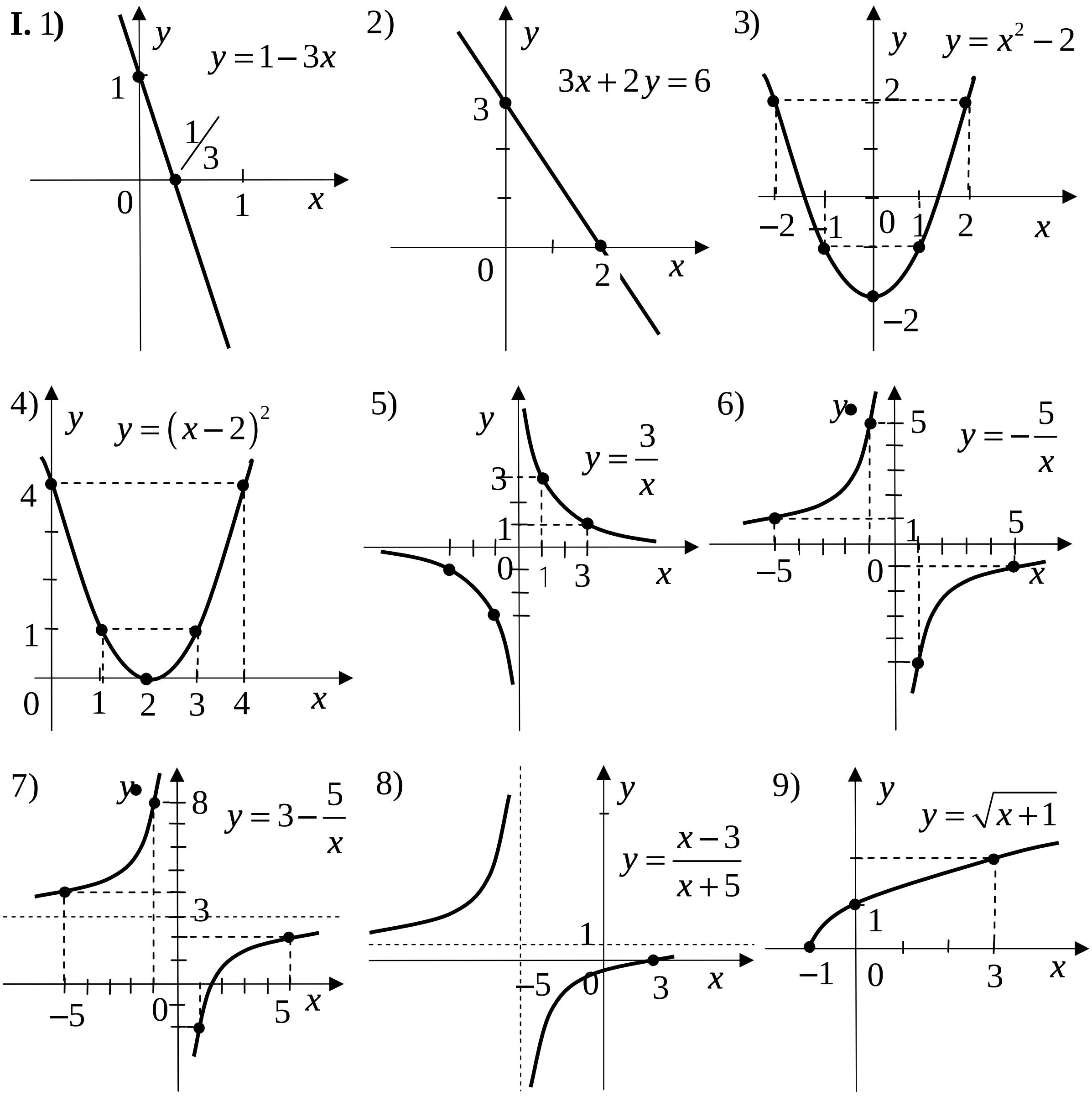
I. **1)** 3; **2)** 0; **3)** -2; **4)** -5.

II. **1)** $D(y) = \left]-\infty; 0\right[\cup \left]0; +\infty\right[$; **2)** $D(y) = \left]-\infty; 3\right[\cup \left]3; +\infty\right[$;;

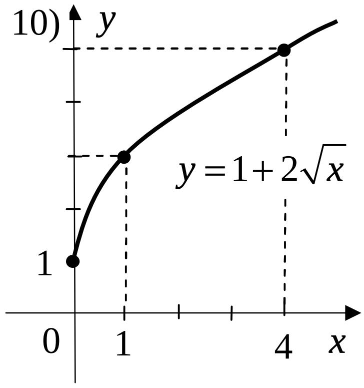
3) $D(y) = \left]-\infty; +\infty\right[$.

Самостоятельная работа № 15

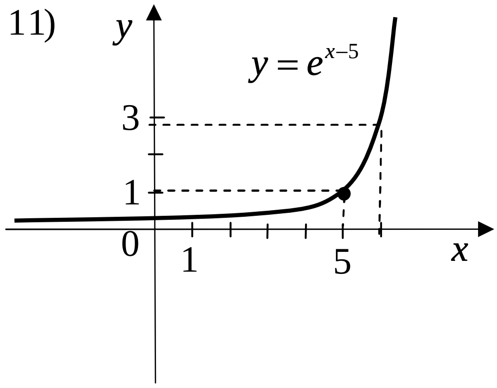
I.



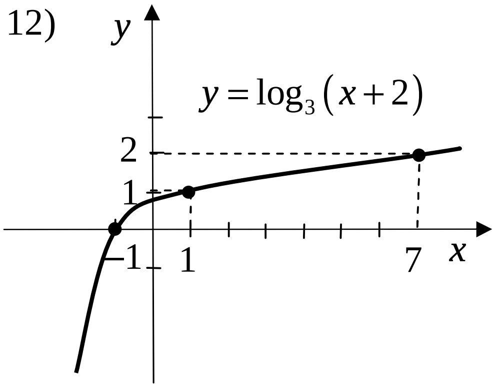
10)



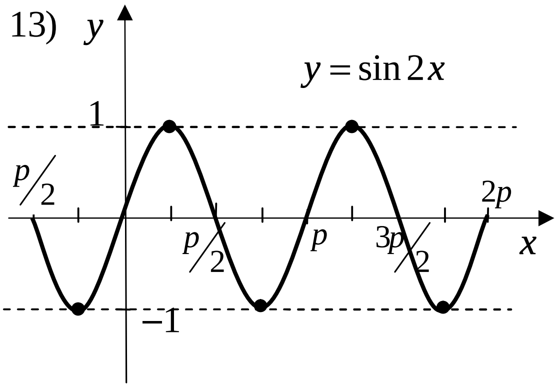
11)



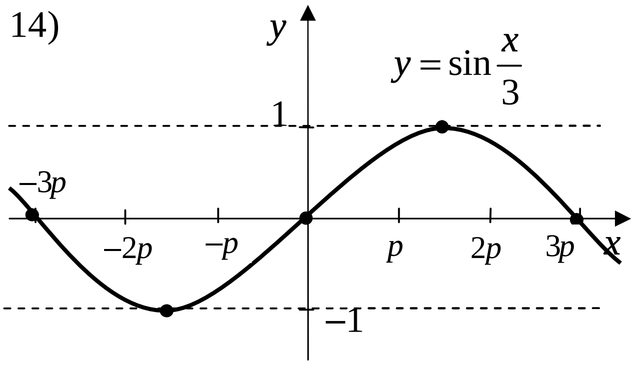
12)



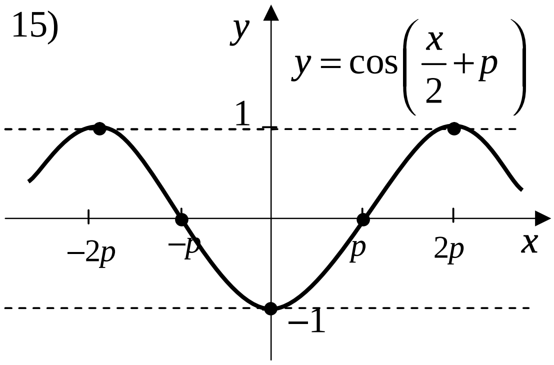
13)



14)



15)



6

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Самостоятельная работа № 16

I. 1) $x>-\dfrac{3}{11}$**; 2)** $x>\dfrac{66}{7}$**; 3)** $\left]-\sqrt{\dfrac{8}{3}};\sqrt{\dfrac{8}{3}}\right[$**; 4)** $]-4;-2[$**; 5)** $\left]-\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3}\right[$**;**

6) $\left]-\infty;-\dfrac{3}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3}{2};+\infty\right[$**; 7)** $[0,6;5[$**; 8)** $]-3;5[$**; 9)** R**; 10)** $\varnothing$**;**

11) $]-\infty;-2] \cup [4;+\infty[$**; 12)** $[0;2[\cup]2;4]$**; 13)** $]-3;-2] \cup [1;2[$**;**

14) $\left[\frac{7-\sqrt{3}}{6};\frac{7+\sqrt{3}}{6}\right]\setminus\left\{\frac{7}{6}\right\}$**; 15)** $\left]-\infty;-1\right]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ **; 16)** $\left]0;\frac{5}{7}\right[$**.**

II. 1) $]-\infty;1[\cup]4;+\infty[$**; 2)** $\left]-\infty;-\frac{3}{4}\right]\cup\left[-\frac{2}{3};+\infty\right[$ **; 3)** $[-2;3]$**; 4)** $\left]-\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right[$**;**

5) $]-3;2[$**; 6)** $[2;6[$**; 7)** $[0;+\infty[$**; 8)** $]-\infty;5]\cup[8;+\infty[$**; 9)** $]-\infty;-3[\cup]1;4[$**;**

10) $\left]-\sqrt{3};\sqrt{3}\right[$**; 11)** $]-\infty;-4[\cup]-1;1[\cup]2;+\infty[$**;**

12) $]-\infty;-3[\cup]-2;0[\cup\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$ **; 13)** $]-\infty;-3[\cup\left]0;\frac{3}{2}\right[\cup]3;+\infty[$**;**

14) $]-4;2[\cup]2;3]$**; 15)** $]-2;-1[\cup]1;2[$**; 16)** $]-\infty;1[\cup]2;3[$**;**

17) $\left[1-\sqrt{2};1\right]\cup\left[1+\sqrt{2};+\infty\right[$**; 18)** $]-\infty;-3]\cup[-1;0]$**; 19)** $]-\infty;-6]\cup[9;+\infty[$**;**

20) $]-\infty;-2]\cup[0;1[$; **21)** $]-2;0[\cup]0;2[\cup]2;4[$;

22) $]-4;-2[\cup]-2;1[\cup]3;+\infty[$**; 23)** $]-\infty;-4[\cup]-4;-3[\cup[1;2[$**;**

24) $]-\infty;-1[\cup\left]\frac{3}{2};3\right[\cup]4;+\infty[$**.**

III. 1) $]1;2]$**; 2)** $[-3;0[\cup]0;2[$**; 3)** $]-1;2[\cup]2;7[$**; 4)** $]0;1[$**; 5)** $\varnothing$**;**

6) $]-2;-1[\cup]1;2]$**.**

IV. 1) $\varnothing$**; 2)** 0**; 3)** $]-\infty;0[\cup]0;9[\cup]9;+\infty[$**; 4)** $]-3;4[$**; 5)** $-6;0$**; 6)** $[1{,}5;+\infty[$**;**

7) $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$**; 8)** $]-2;2[$**; 9)** $]-\infty;1]\cup[2;4]\cup[5;+\infty[$**;**

10) $]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$**; 11)** R**; 12)** $[-1;0]$**.**

V. 1) $\varnothing$**; 2)** $]-\infty;0[$**; 3)** $[14;+\infty[$**; 4)** $\varnothing$**; 5)** $\varnothing$**; 6)** $]-\infty;3]$**; 7)** $[3;+\infty[$**;**

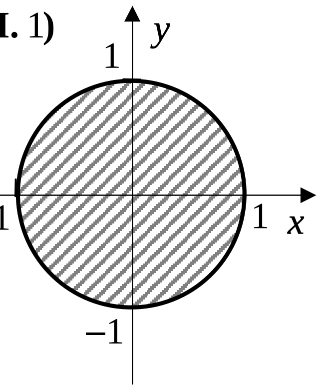
8) $[1;+\infty[$**; 9)** $]3;+\infty[$**; 10)** 3**; 11)** $[-5;-3]$**; 12)** $]-\infty;-2]\cup\left[5;\frac{74}{13}\right[$**;**

13) $]-\infty;-4]\cup\left]\frac{9}{4};+\infty\right[$**; 14)** $\left[-4;\frac{1}{2}\right[$**; 15)** $]-2;4[$**; 16)** $[-4;-3]\cup[2;+\infty[$**;**

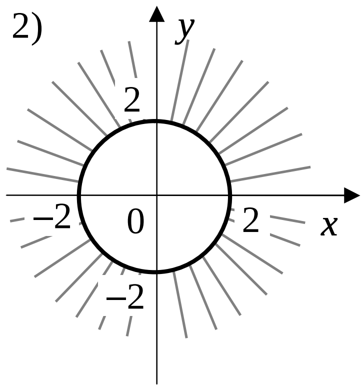
17) $\left[\frac{5}{2};3\right[$**; 18)** $]-\infty;-5]\cup\left[-1;\frac{1+\sqrt{13}}{3}\right[$**; 19)** $[2;8[$**; 20)** $\left]-\infty;\frac{3}{4}\right[\cup]4;7[$**;**

21) $]2;+\infty[$**; 22)** $\left]\frac{5}{4};+\infty\right[$**; 23)** $\varnothing$**; 24)** $\varnothing$**.**

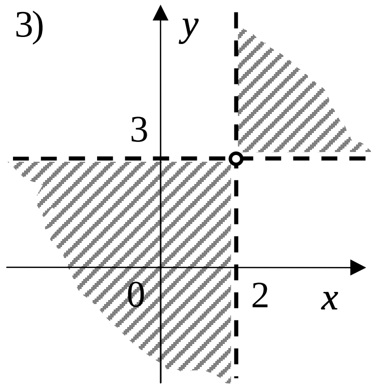
VI. 1)



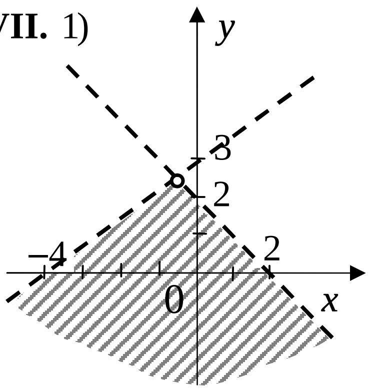
2)



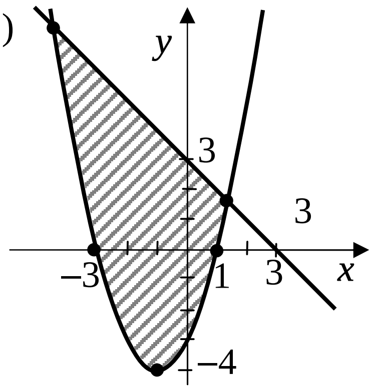
3)



VII. 1)



2)



7

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Самостоятельная работа № 17

I. 1) $\frac{5}{3}$**; 2)** $-\frac{4}{3}$**; 3)** $-\frac{3}{2}$**; 4)** 27**; 5)** 25**; 6)** $-\frac{4}{3}$**; 7)** 9**; 8)** 3**.**

II. 1) $8\sqrt{14}$**; 2)** $\log_7\left(\frac{7}{8}\right)$**; 3)** 3**; 4)** $\frac{50}{3}$**; 5)** 7**.**

III. а) $\log_3 30$**; б)** $\log_9 10$**; в)** ÷čńëŕ đŕâí ű **; г)** $\log_3 7$**.**

IV. 1) 4**; 2)** -5**; 3)** $\varnothing$**; 4)** $-\frac{2}{3}$**; 5)** 9**; 6)** 6**; 7)** $-2; 4$**; 8)** 1**; 9)** 4**; 10)** 1**.**

V. 1) 3**; 2)** 1**; 3)** 9**; 4)** 1**; 5)** 0**; 6)** $\log_{\frac{5}{3}}\frac{7}{6}$**; 7)** $\log_{\frac{9}{4}}21$**; 8)** $\log_{\frac{4}{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$**;**

9) $0; \log_7 5$**; 10)** $-1; \log_{0,4}5$**; 11)** 0**; 12)** $1; 0,2$**; 13)** $-2; 2$**; 14)** $-4; 9$**; 15)** $\frac{9}{5}$**;**

16) $-1; 1$**; 17)** $-\frac{1}{5}; \frac{1}{2}$**.**

Ответы на задания для самостоятельной работы

VI. 1) 9**; 2)** $8{,}5$**; 3)** 0**; 4)** 9**; 5)** 64**; 6)** -2**; 7)** 14**; 8)** 2**; 9)** $1{,}5;\ 2{,}5$.

VII. 1) -1**; 2)** 1**; 3)** -9**; 4)** 21**; 5)** $11+\sqrt{226}$**; 6)** 3**; 7)** $0{,}5;\ 8$**; 8)** $10;\ 100$**;**

9) $-\dfrac{1}{27}$**; 10)** -10000**; 11)** $\dfrac{1}{5};\ 5$**; 12)** $1;\ 10\pm\sqrt{\lg 13}$**; 13)** 81**; 14)** $4;\ \dfrac{1}{4}$**;**

15) $81^{\log_{12}2}$**; 16)** $\dfrac{1}{\sqrt{5}};\ \dfrac{1}{5\sqrt{5}}$**; 17)** $\dfrac{1}{3};\ 27$**; 18)** 2**; 19)** $\dfrac{1}{4};\ 16$**; 20)** 6**;**

21) $10;\ 20$**; 22)** 6**; 23)** $\dfrac{17}{12}$**; 24)** $\dfrac{1}{4};\ 3$**; 25)** 10.

VIII. 1) $\{(2;32);(32;2)\}$**; 2)** $(2;1)$**; 3)** $\{(1;2);(16;-28)\}$**; 4)** $(10;10000)$**;**

5) $(100;10)$; **6)** $\left\{\left(\sqrt[4]{10};10\right);\left(10;\sqrt[4]{10}\right)\right\}$; **7)** $\left\{(1;1);\left(8;2\sqrt{2}\right)\right\}$;

8) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$**; 9)** $\left(10^{\frac{3}{2}};10^{-\frac{9}{4}}\right)$.

IX. 1) $x>4$**; 2)** $x\ge 5$**; 3)** $]-\infty;1[\,\mathbf{U}\,]3;+\infty[$**; 4)** $\left[4-\dfrac{1}{2}\sqrt{42};\ 4+\dfrac{1}{2}\sqrt{42}\right]$**;**

5) $]-\infty;-9[\,\mathbf{U}\,]5;+\infty[$**; 6)** $x<\log_{0,5}3$**; 7)** $x>\log_2 3$**; 8)** $]-\infty;0[\,\mathbf{U}\,]4;+\infty[$**;**

9) $]-3;0[$**; 10)** $x<\log_2 3$**; 11)** $x\le -2$**; 12)** $x<1$**; 13)** $]\log_5 11;+\infty[$**;**

14) $x<-1$**; 15)** $]-\infty;3[$**; 16)** $]3;3{,}5[\,\mathbf{U}\,]4;+\infty[$**;**

17) $]-\infty;0{,}2[\,\mathbf{U}\,\left]1;\ 4-2\sqrt{2}\right[\,\mathbf{U}\,\left]4+2\sqrt{2};\ 7\right[$**; 18)** $]-\infty;-1[\,\mathbf{U}\,]0;2[$**;**

19) $]-1;0[$.

X. 1) $x>1$**; 2)** $\left]\dfrac{1}{4};2\right[$**; 3)** $]-1{,}5;-1[$**; 4)** $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]\mathbf{U}\,]8;16]$**; 5)** $]0;1[\,\mathbf{U}\,]2;+\infty[$**;**

6) $\left]\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right[\,\mathbf{U}\,]1;+\infty[$**; 7)** $x>5$**; 8)** $]-\infty;-2[\,\mathbf{U}\,]1;+\infty[$**; 9)** $\left]\dfrac{1}{3};\dfrac{3}{4}\right[$**;**

10) $]5;10[$**; 11)** $x>2$**; 12)** $\left]-\sqrt{3};-\sqrt{2}\right[\,\mathbf{U}\,[-1;1[$**; 13)** $\left]0;\dfrac{1}{2}\right[\,\mathbf{U}\,]1;5[$**;**

14) $]-\infty;-4[$.

XI. 1) $]1;343[$**; 2)** $]2;+\infty[$**; 3)** $]-\infty;-0{,}5[$**; 4)** $\left[-1;-\dfrac{\sqrt{8}}{3}\right]\mathbf{U}\left[\dfrac{\sqrt{8}}{3};1\right]$**;**

5) $]-\infty;-1[\,\mathbf{U}\,[2;3]$**; 6)** $\left]\dfrac{1}{3};1\right[\,\mathbf{U}\,]1;3[$.

8

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Самостоятельная работа № 18

I. $\frac{p}{9}$; $\frac{3p}{4}$; $\frac{4p}{3}$; $\frac{5p}{18}$; $\frac{5p}{6}$; $\frac{7p}{4}$.

II. 10^{o}; 18^{o}; 120^{o}; 270^{o}; 450^{o}.

III. -1; 1; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

IV. **1)** $\cos a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\mathrm{tg}\, a = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\mathrm{ctg}\, a = 2\sqrt{2}$; $\sec a = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $\mathrm{cosec}\, a = 3$;

2) $\sin a = \frac{\sqrt{21}}{5}$; $\mathrm{tg}\, a = \frac{\sqrt{21}}{2}$; $\mathrm{ctg}\, a = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$; $\sec a = -\frac{5}{2}$; $\mathrm{cosec}\, a = \frac{5\sqrt{21}}{21}$;**;**

3) $\cos a = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\sin a = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\mathrm{ctg}\, a = 2$; $\sec a = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\mathrm{cosec}\, a = \sqrt{5}$;**;**

4) $\sin a = -\frac{1}{\sqrt{10}}$; $\cos a = -\frac{3}{\sqrt{10}}$; $\mathrm{tg}\, a = \frac{1}{3}$; $\sec a = -\frac{\sqrt{10}}{3}$; $\mathrm{cosec}\, a = -\sqrt{10}$;**.**

V. 1) $\mathrm{tg}^2 a$ **; 2)** 1**; 3)** 1**; 4)** 21**; 5)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$**; 6)** $\frac{1}{2}$**; 7)** 1**; 8)** $\cos 2b$ **; 9)** $2\sin^3 a$ **;**

10) $\mathrm{ctg}^4 a$ **; 11)** $\mathrm{ctg}^2 a$ **; 12)** $\sin a + \cos a$ **; 13)** $8 - \mathrm{ctg}\, a - \mathrm{tg}\, a$ **; 14)** $1 - \sin a$ **;**

15) $\cos(a - b)$**; 16)** $\sin a$ **.**

VI. 1) $2\cos\frac{15a}{2}\cos\frac{45a}{2}$; **2)** $2\,\mathrm{tg}\, a \cos^2\frac{a}{2}$; **3)** $4\sin\frac{9a}{2}\cos 3a \cos\frac{3a}{2}$;

4) $-4\sin a \sin\frac{a}{2}\cos\frac{7a}{2}$; **5)** $-\cos 2a \cos 2b$; **6)** $8\sin^4\frac{a}{4}$;

7) $-2\cos(a + b)\cos a \cos b$ **.**

VIII. 1) $\frac{2}{5}$**; 2)** $\frac{\sqrt{8}}{3}$**; 3)** $\frac{p}{8}$**; 4)** $\frac{1}{5}$**; 5)** $\frac{\sqrt{15}}{4}$**; 6)** $\frac{p}{8}$**; 7)** $\frac{1+2\sqrt{30}}{12}$**; 8)** $\frac{\sqrt{10}}{10}$**;**

9) $-\frac{32\sqrt{2}+9\sqrt{15}}{7}$**; 10)** $\frac{17}{18}$**.**

IX. 1) $\frac{pn}{3}, n \in Z$ **; 2)** $\left\{\pm\frac{3p}{4} + 2pn,\ n \in Z\right\}$**; 3)** $\left\{(-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + pn,\ n \in Z\right\}$**;**

4) $2p+4pn,\quad n\in Z$ **; 5)** $-\frac{p}{24}+\frac{pn}{6},\quad n\in Z$ **; 6)** $\left\{\operatorname{arcctg}2+pn,\quad n\in Z\right\}$ **;**

7) $\frac{p}{12}+\frac{pn}{2},\quad n\in Z$ **; 8)** $\frac{p}{12}\pm\frac{p}{30}+\frac{2pn}{5},\quad n\in Z$ **; 9)** $-\frac{5p}{4}+3pn,\quad n\in Z$ **;**

10) $\frac{17p}{72}+\frac{pn}{4},\quad n\in Z$ **; 11)** $\frac{p}{3}+(-1)^n\arcsin\frac{p}{6}+pn,\quad n\in Z$ **; 12)** $\varnothing$ **;**

13) $\left\{-\frac{5p}{6}+2pn,\quad n\in Z\right\}$ čëč **;** $\left\{\frac{7p}{6}+2pn,\quad n\in Z\right\}$ **14)** $\varnothing$**.**

X. 1) $x_1=pn;\ x_2=\frac{p}{2}+2pn,\quad n\in Z;$ **2)** $x_1=\frac{p}{2}+pn;\ x_2=p+2pn,\quad n\in Z;$

3) $\left\{pn;\ \pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{9}+\frac{2pn}{3},\quad n\in Z\right\};$ **4)** $\left\{pn;\ \frac{p}{4}+\frac{pn}{2},\quad n\in Z\right\};$

5) $\left\{2pn;\ \pm\frac{p}{6}+\frac{pn}{2},\quad n\in Z\right\};$ **6)** $\left\{\frac{p}{2}+pn;\ \frac{p}{4}+pn,\quad n\in Z\right\};$

7) $\operatorname{arctg}3+pn,\quad n\in Z;$ **8)** $\left\{\frac{4p}{3}+2pn;\ \frac{p}{6}+\frac{2pn}{3},\quad n\in Z\right\}.$

XI. 1) $-\frac{p}{2}+2pn;\ (-1)^{n+1}\frac{p}{6}+pn, n\in Z$ **; 2)** $\pm\frac{2p}{3}+2pn, n\in Z$ **; 3)** $\frac{p}{4}+\frac{pn}{2},$

$n\in Z$ **; 4)** $\frac{p}{4}+pn;\ -\operatorname{acctg}2+pn, n\in Z$ **; 5)** $(-1)^{n+1}\frac{p}{3}+2pn, n\in Z$ **;**

6) $(-1)^n\frac{5p}{6}+5pn,\quad n\in Z;$ **7)** $\pm\frac{p}{24}+\frac{pn}{8},\quad n\in Z;$ **8)** $\pm\frac{p}{18}+\frac{pn}{3};$

$\pm\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\frac{pn}{3}, n\in Z$ **.**

XII. 1) $\frac{p}{2}+2pn;\ 2\operatorname{arctg}\frac{4}{5}+2pn, n\in Z$ **; 2)** $-2\operatorname{arctg}4+2pn;\ p+2pn, n\in Z$ **;**

3) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+2pn;\ p+2pn, n\in Z$ **; 4)** $2pn;\ \frac{p}{2}+2pn, n\in Z$ **; 5)** $\frac{p}{2}+2pn;$

$p+2pn, n\in Z$ **; 6)** $\left\{\pm\frac{p}{4}+pn, n\in Z\right\}$**.**

XIII. 1) $\left\{\pm\operatorname{arctg}\frac{7}{6}+pn,\quad n\in Z\right\};$ **2)** $\frac{p}{4}+pn,\quad n\in Z;\ \operatorname{arctg}\frac{3}{2}+pn,\quad n\in Z;$

3) $\operatorname{arctg}\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}+pn,\quad n\in Z;$ **4)** $-\frac{p}{12}+\frac{pn}{3};\ \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\frac{pn}{3},\quad n\in Z;$

5) $\frac{p}{4}+pn$; $\operatorname{arctg}\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}+pn,\quad n\in Z$; **6)** $\frac{p}{4}+pn$; $\operatorname{arctg}\frac{-3\pm\sqrt{3}}{2}+pn,$ $n\in Z$; **7)** $\frac{p}{2}+pn$; pn; $\frac{p}{4}+pn,\quad n\in Z$; **8)** $-\frac{p}{4}+pn$; $\operatorname{arctg}\frac{-5\pm\sqrt{41}}{4}+pn,\ n\in Z.$

XIV. 1) pn; $\frac{2pk}{3}, k\neq 3m$; $n,k,m\in Z$ **; 2)** $\pm\frac{2p}{3}+2pn$; $\frac{p}{8}+\frac{pn}{2}, n\in Z$ **;** **3)** $\frac{p}{8}+\frac{pn}{2}$; $\frac{p}{4}+pn, n\in Z$ **; 4)** $\frac{pn}{4}, n\in Z$ **; 5)** $\frac{pn}{8}, n\in Z$ **; 6)** $\frac{p}{6}+\frac{2pn}{3}$; $(-1)^{n+1}\frac{p}{18}+\frac{pn}{3}, n\in Z$ **.**

XV. 1) $-\frac{3p}{4}+2pn,\quad n\in Z$; **2)** $-\frac{p}{6}+2pn,\quad n\in Z$; **3)** $-\frac{p}{3}+2pn,\quad n\in Z$; **4)** $\frac{p}{8}+(-1)^n\frac{p}{8}+\frac{pn}{2},\quad n\in Z$; **5)** $-\frac{3p}{4}+(-1)^n\frac{3p}{4}+3pn,\quad n\in Z$; **6)** $\varnothing$**.**

XVI. 1) $\pm\frac{p}{9}+\frac{pn}{3}, n\in Z$ **; 2)** $\frac{p}{4}+\frac{pn}{2}$; $\pm\frac{p}{6}+pn, n\in Z$ **;** **3)** $\pm\arccos\frac{\sqrt{17}-3}{4}+2pn, n\in Z$ **; 4)** $\pm\frac{p}{18}+\frac{pn}{3}, n\in Z$ **; 5)** $\pm\frac{p}{6}+pn, n\in Z$ **;** **6)** $\frac{p}{20}+\frac{pn}{10}$; $\frac{p}{8}+\frac{pn}{4}, n\in Z$ **.**

XVII. 1) $2pn$; $\pm\frac{2p}{3}+2pn, n\in Z$ **; 2)** $\pm\frac{2p}{3}+2pn, n\in Z$ **; 3)** $-\frac{2p}{3}+2pn, n\in Z$ **;** **4)** $\frac{p}{4}+pn$; $-\operatorname{arctg}2+pk,\ n,k\in Z$ **; 5)** $\frac{p}{4}+\frac{pn}{2}$; $\pm\frac{p}{6}+pn, n\in Z$ **;** **6)** $-\frac{p}{4}+pn$; $\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}+\frac{pn}{2}, n\in Z$ **; 7)** $-\frac{p}{4}+(-1)^n\frac{p}{4}+pn, n\in Z$ **;** **8)** $-\arccos\left(\sqrt{3}-1\right)+2pn, n\in Z$ **.**

XVIII. 1) $x=-\frac{p}{4}+(-1)^n\frac{p}{4}+pn$; $y=\frac{9p}{4}-(-1)^n\frac{p}{4}-pn, n\in Z$ **;**
2) $x=-\frac{p}{4}+(-1)^{n+1}\frac{p}{12}+\frac{pn}{2}+kp$; $y=\frac{p}{4}+(-1)^{n+1}\frac{p}{12}+\frac{pn}{2}-kp,\ n,k\in Z$ **;**
3) $x=\frac{p}{2}+p\,(n+k)$; $y=\frac{p}{2}+p\,(n-k),\ n,k\in Z$ **;**

4) $\left\{\left(x_1 = p n;\ y_1 = \frac{p}{4} - p n\right);\ \left(x_2 = \frac{p}{4} + p n;\ y_2 = -p n\right);\ n, k \in Z\right\}$**;**

5) $\left\{\left(x_1 = \frac{p}{6} + p\,(n+k);\ y_1 = \frac{p}{6} + p\,(n-k)\right);\right.$

$\left.\left(x_2 = -\frac{p}{6} + p\,(n+k);\ y_2 = -\frac{p}{6} + p\,(n-k)\right);\ n, k \in Z\right\}$**;**

6) $x = \frac{p}{4} + 2p n;\ \ y = \frac{p}{4} - 2p n,\ n \in Z$**.**

XIX. 1) $-p + 2p n \le x \le 2p n,\ \ n \in Z$ **; 2)** $-\frac{p}{2} + 2p n \le x \le \frac{p}{2} + 2p n,\ \ n \in Z$ **;**

3) $-\frac{p}{6} + \frac{p n}{3} \le x \le \frac{p n}{3},\ \ n \in Z$ **; 4)** $5p n < x \le \frac{5p}{2} + 5p n,\ \ n \in Z$ **;**

5) $\frac{8p}{27} + \frac{8p n}{3} \le x \le \frac{20p}{27} + \frac{8p n}{3},\ \ n \in Z$ **;**

6) $\frac{p}{4} + p n \le x \le \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + p n,\ \ n \in Z$ **;**

7) $-\frac{p}{18} + \frac{2p n}{3} \le x \le \frac{p}{18} + \frac{2p n}{3},\ \ n \in Z$ **; 8)** $-\frac{p}{12} + p n \le x \le \frac{p}{4} + p n,\ \ n \in Z$**.**

9

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ЕЕ ПРЕДЕЛ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Самостоятельная работа № 19

I. 1) 23; 2) 9.

II. 1) 91; 2) 83,5.

III. $a_1 = 7;\ \ a_5 = 39.$

IV. 9. **V.** 3; 13; 23; 33; **K**

VI. 15; 8; 1; **K** čĕč 1; 8; 15; **K**

VII. 1) ± 3; 2) 3.

VIII. 5461.

IX. 24; 12; 6; 3 čĕč 3; 6; 12; 24.

X. $b_1 = 9;\ \ q = 3$ čĕč $b_1 = -\frac{9}{2};\ \ q = -3.$

XI. 1) $\frac{7}{9}$; 2) $\frac{2}{9}$; 3) $\frac{28}{225}$.

XII. 32.

XIII. $b_1 = 7;\ \ q = \frac{1}{2}$.

XIV. $\frac{8}{81}$**.**

XV. 3; 7; 11 čĕč 35; 7; -21**.**

XVI. 54; 18; 6; 2**.**

XVII. 5; 15; 45**.**

XVIII. 2; 4; 8; 12 čĕč 12,5; 7,5; 4,5; 1,5**.**

Самостоятельная работа № 20

I. **1)** 9; **2)** 0; **3)** -1; **4)** 3; **5)** e^{-1}; **6)** 6; **7)** ∞; **8)** e^{-1}; **9)** $\frac{1}{2}$; **10)** 0; **11)** $\frac{1}{2}$; **12)** $-\frac{1}{56}$; **13)** $\frac{1}{2}$.

10

ПРОИЗВОДНЫЕ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИИ

Самостоятельная работа № 21

I. **1)** $15x^2$; **2)** $\frac{1}{8\sqrt[8]{x^7}}$; **3)** $6x^2(4x+1)$; **4)** $5(1+\ln x)$; **5)** $3x(2\sin x + x\cos x)$; **6)** $x\cdot 2^x(2+x\ln 2)$; **7)** $-3\sin 3x$; **8)** $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$; **9)** $-\frac{2x}{5x^4+4x^2+1}$; **10)** $\frac{10x}{(5x^2+3)\ln 2}$; **11)** $21\cdot(3x+5)^6$; **12)** $2x\left(e^{-x^2}+a^{x^2}\ln a\right)$; **13)** $\frac{b^2x}{a^2y}$; **14)** $6x^{3x}\cdot(1+\ln x)$; **15)** $2\left(\frac{x}{2}\right)^{2x}\cdot\left(1+\ln\frac{x}{2}\right)$; **16)** $x^{\frac{1-2x}{x}}(1-\ln x)$; **17)** $\frac{y}{x}\cdot\frac{y-x\ln y}{x-y\ln x}$.

II. **1)** 1; **2)** 1; **3)** 0; **4)** $\frac{17}{6}$.

III. -9. **IV.** $\frac{p}{4}$.

V. $9x+y-1=0$. **VI.** $x+11y+9=0$.

VII. **1)** $dy=9(2+3x)^2dx$; **2)** $dy=5\cos 5x dx$; **3)** $dy=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$; **4)** $dy=\left(2x+2^x\ln 2\right)dx$.

VIII. **1)** $0{,}5151$; **2)** $3{,}875$.

IX. **1)** $12x-6$; **2)** $5\left(6\cos x-6x\sin x+x^2\cos x\right)$; **3)** 0.

X. **1)** -27; **2)** $-\frac{1}{2}$; **3)** 3; **4)** 0; **5)** $\frac{3}{5}$; **6)** 0; **7)** $\frac{9}{50}$; **8)** 2.

11

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

Самостоятельная работа № 22

I. 1) □ êî ãäà $x\in \left]-\infty; \frac{7}{2}\right[$ **;** □ êî ãäà $x\in \left]\frac{7}{2}; +\infty\right[$ **;**

2) □ êî ãäà $x\in \left]\frac{7}{2}; +\infty\right[$ **;** □ êî ãäà $x\in \left]-\infty; \frac{7}{2}\right[$ **;**

3) □ êî ãäà $x\in \left]0; 1\right[$ **;** □ êî ãäà $x\in \left]-1; 0\right[$ **;**

4) монотонно □ ï ðè $x\in D(y)$**,** в точке $x=-1$ функция неопределена**;**

5) □ êî ãäà $x\in \left]\frac{-2-\sqrt{13}}{9}; \frac{-2+\sqrt{13}}{9}\right[$ **;**

□ êî ãäà $x\in \left]-\infty; \frac{-2-\sqrt{13}}{9}\right[\mathbf{U} \left]\frac{-2+\sqrt{13}}{9}; +\infty\right[$ **;**

6) □ êî ãäà $x\in \left]-\infty; \frac{5}{2}\right[$ **;** □ êî ãäà $x\in \left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$ **;**

7) □ êî ãäà $x\in \left]-5; +\infty\right[$**.**

II. 1) $y_{\min}(1)=-36;$ **2)** $y_{\min}\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=\frac{21}{4};$ $y_{\max}(0)=4;$ **3)** $y_{\min}(0,7886)=5,9;$ $y_{\max}(0,2116)=6,2728;$**; 4)** функция экстремумов не имеет**; 5)** функция экстремумов не имеет**; 6)** $y_{\max}\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{201}{4}$**.7)** $y_{\min}(4)=-32;$ $y_{\max}(0)=0;$

8) $y_{\min}(0)=0;$ $y_{\max}(2)=\frac{4}{e^2};$ **9)** $y_{\min}\left(\frac{5p}{4}+2kp\right)=-\sqrt{2};$ $y_{\max}\left(\frac{p}{4}+2kp\right)=\sqrt{2};$

10) $y_{\max}(0)=3;$ **11)** $y_{\min}(e)=e;$ **12)** $y_{\min}(2)=4;$ $y_{\max}(-2)=4.$

III. 1) $\min y = y\left(\frac{7}{2}\right)=-\frac{25}{2}$**;** $\max y = y(0)=y(7)=12$**;**

2) $\min y = y(0)=-10$**;** $\max y = y(2)=10$**;**

3) $\min y = y(2)=2(1-\ln 2)$**;** $\max y = y(1)=1$**;**

4) $\min y = y(\pm 1) = 4$**;** $\max y = y(\pm 2) = 13$**;**

5) $\min y = y(0) = 0$**;** $\max y = y(2) = 8$**;**

6) $\min y = y(0) = -1$**;** $\max y = y(4) = \frac{3}{5}$**;**

7) $\min y = y\left(\frac{p}{2}\right) = -\frac{p}{2}$**;** $\max y = y\left(-\frac{p}{2}\right) = \frac{p}{2}$**;**

8) $\min y = y(0) = 1$**;** $\max y = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}$**.**

IV. 1) выпуклая на $x \in \left]-\infty; 1\right[$, вогнутая на $x \in \left]1; +\infty\right[$; $x = 1$ – точка перегиба**;**

2) выпуклая на $x \in \left]2; 4\right[$, вогнутая на $x \in \left]-\infty; 2\right[$ и $x \in \left]4; +\infty\right[$; $x = 2$ и $x = 4$ – точки перегиба**;**

3) выпуклая на $x \in \left]-\infty; -3\right[$ и $x \in \left]2; +\infty\right[$, вогнутая на $x \in \left]-3; 2\right[$; $x = -3$ и $x = 2$ – точки перегиба**;**

4) выпуклая на $x \in \left]-2; +\infty\right[$, вогнутая на $x \in \left]-\infty; -2\right[$; $x = -2$ – точка перегиба**;**

5) вогнутая на $x \in \left]-\infty; +\infty\right[$; точек перегиба нет.

V. 1) $y_{\max} = y(1) = 1,\ y_{\min} = y(-1) = -1$**; 2)** $y_{\max} = y\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^4}{16},\ y_{\min} = y(0) = 0$**.**

VI. 1) $y_{\max} = y(0) = 0$**; 2)** $y_{\min} = y(0) = 15$**.**

VII. 1) $y = 0$**; 2)** $y = x$**; 3)** $x = 2$ и $x = -2$**; 4)** $x = -2$ и $y = 2x - 4$**;**

5) $y = x - 2$**; 6)** $x = 3$ и $y = 1$**.**

VIII. 1) y □ ďđč $x \in \left]-\infty; -3\right[\mathbf{U} \left]1; +\infty\right[$; y □ ďđč $x \in \left]-3; 1\right[$;

2) y □ ďđč $x \in \left]-\infty; 0\right[\mathbf{U} \left]0; 2\right[$; y □ ďđč $x \in \left]2; +\infty\right[$;

3) y □ ďđč $x \in \left]-1; 3\right[$; y □ ďđč $x \in \left]-\infty; -1\right[\mathbf{U} \left]3; +\infty\right[$;

4) y □ ďđč $x \in \left]-1; 0\right[\mathbf{U} \left]1; +\infty\right[$; y □ ďđč $x \in \left]-\infty; -1\right[\mathbf{U} \left]0; 1\right[$;

5) y □ ďđč $x \in \left]3; +\infty\right[$; y □ ďđč $x \in \left]-\infty; 3\right[$;

6) y □ ďđč $x \in \left]-\infty; -2\right[\mathbf{U} \left]0; 2\right[$; y □ ďđč $x \in \left]-2; 0\right[\mathbf{U} \left]2; +\infty\right[$;

7) y □ ďđč $x \in \left]-\infty; 0\right[\mathbf{U} \left]1; +\infty\right[$; y □ ďđč $x \in \left]0; 1\right[$**.**

12

ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Самостоятельная работа № 23

I. 1) $x^3 - x^2 + 5x + C$; **2)** $x - \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{2}\ln\left(x-2\right)^2 + C$; **3)** $x - \operatorname{arctg} x + C$;

4) $\dfrac{x^3}{9}\left(3 \cdot \ln x - 1\right) + C$; **5)** $\dfrac{\left(3x+1\right)^{101}}{303} + C$; **6)** $\dfrac{1}{9}e^{3x}\left(3x-1\right) + C$;

7) $\dfrac{1}{3}\cos 3x + C$; **8)** $\dfrac{1}{4}\left(2x + \sin 2x\right) + C$.

II. 1) $\dfrac{25}{3}$; **2)** $-\left(1-\cos 1\right)$; **3)** $\dfrac{100}{3}$; **4)** $\dfrac{p}{2} - 1$; **5)** $\operatorname{arctg} 6 - \operatorname{arctg} 5$; **6)** 1.

III. 1) $S = \dfrac{13}{3}$; **2)** $S = \dfrac{8}{3}$; **3)** $S = \dfrac{9}{2}$; **4)** $S = 4$; **5)** $S = 10\dfrac{2}{3}$.

IV. 1) $75p$; **2)** $64p$; **3)** $18\dfrac{2}{15}p$.

V. 1) $\dfrac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \approx 9{,}07$; **2)** $2\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$;

3) $\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\left(\ln\dfrac{\sqrt{1+e^2} - 1}{\sqrt{1+e^2} + 1} - \ln\left|\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}\right|\right)$; **4)** $2\sqrt{6} + \ln\left|\sqrt{2} + \sqrt{3}\right|$.

VI. 1) $S = 2p\left(4 + 3\ln 3\right)$; **2)** $S = 100p$; **3)** $S = \dfrac{14}{3}p$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алексеев В.М. Элементарная математика. Решение задач. – Киев: Вища школа, 1984. – 351 с.
2. Бермант А.Ф. Курс математического анализа, тт. I–II. – М., 1965. – 432 с.
3. Введение в язык предмета: Черчение. Математика. Химия. Физина: Учебное пособие для иностранных студентов подготовит. ф-тов / И.Я. Ясницкая, А.И. Лобода, Т.А. Снегурова и др. Под общ.ред. И.А. Ясницкой. – 3-е изд.перераб.и доп. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2007. – 160 с.
4. Гуминская Н.А., Дорохин Д.П., Ильенко Н.А. и др. Математика. Алгебра и начала анализа / Под общ. ред. А.И. Лобанова. – Киев: Вища школа, 1987. – 304 с.
5. Гусев В.А., Мордкович А.Г. Математика. Справочные материалы. – М.: Просвещение, 1988. – 416 с.
6. Егерев В.К., Зайцев В.В., Кордемский Б.А. и др. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / Под ред. А.И. Сканави. – М.: Высшая школа, 1992. – 528 с.
7. Курпа Л.В. и др. Высшая математика. Общий курс. Учебное пособие. – Харьков: ХГПУ, 1997. – 112 с.
8. Кутасов А.Д. и др. Пособие по математике для поступающих в вузы / Под ред. Г.Н. Яковлева. – М.: Наука, 1982. – 608 с.
9. Лобода А.И. Математический анализ. Учебное пособие для иностранных студентов. – Харьков, НТУ "ХПИ", 2006. – 178 с.
10. Математика. Алгебра и начала анализа / Под ред. А.И. Лобанова. –К.: Вища школа, 1987. –304 с.
11. Математика: Большой справочник для школьников и поступающих в вузы / Д.И. Аверьянов, П.И. Алтынов, И.И. Баврин и др. – 3-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2000. – 864 с.

12. Математика: Лекции, задачи, решения / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров,_М.И. Шабунин и др. – Мн.: ООО "Попурри", 1996. – 640 с.
13. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1969. – 412 с
14. Нелин Е.П. Алгебра в таблицах. Учебное пособие для учащихся 7–11 классов. – Харьков: "Мир Детства", 2001. – 55 с.
15. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление, т. I. – М.: Наука, 1972. – 575 с.
16. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление, т. II. – М.: Наука, 1972. – 453 с.
17. Сборник задач и упражнений по математике: Учебное пособие для иностранных учащихся подготовительных отделений вузов. Дорохин Д.П., Плаксенко З.Е., Бажора Г.Ф. – 2-е изд., перераб., и доп. – М.: Высшая школа, 1986. – 248 с.
18. Титаренко А.М., Роганин А.Н., Форсированный курс школьной математики: старшекласснику и абитуриенту: Учебное пособие. – Харьков: Торсинг, 2005. – 448 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Навчальне видання

Лапузіна Олена Миколаївна
Лобода Анатолій Іванович

МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Українською мовою

Роботу до друку рекомендував Ю.Р. Гаврилюк

В авторській редакції

Оригінал-макет підготувала О.А. Романова

План 2008 р., поз. 92

Підписано до друку ______.200_ р. Формат 70х100 1/16. Папір офсетн.
Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 17,9.
Обл.-вид. арк. 23,4 . Наклад 150 прим. Зам. № _______ Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ "ХПІ".
Свідоцтво ДК № 116 від 10.07.2000 р.

Друкарня НТУ "ХПІ", 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.