Комплекс навчально-методичного забезпечення дисципліни

“ОПТИМІЗАЦІЯ ПРОЦЕСІВ В МУЛЬТИСЕРВІСНИХ СИСТЕМАХ ТА МЕРЕЖАХ”

Частина 1

Лекції

Тема 1. Методи безумовної оптимізації
Лекція 1. Оптимізація унімодальних функцій

1. ***Стаціонарні точки функцій однієї змінної.***
2. ***Завдання безумовної оптимізації в мультисервісних мережах.***
3. ***Унімодальні функції однієї змінної.***
4. ***Метод дихотомії.***
5. ***Метод золотого перетину*.**

Основні поняття та визначення

Оптимізація в мультисервісних мережах - вибір такого варіанту модифікації мультисервісної мережі, який дозволить підвищити її ефективність і продуктивність у порівнянні з іншими можливими варіантами без зміни її функціональності.

Екстремум - максимальне або мінімальне значення функції на заданій множині.

Локальний максимум (мінімум) - це найбільше (найменше) значення функції в деякій області розглянутої точки.

Нехай функція f (x) визначена в деякій області ε = (x0 - δ, x0 + δ), δ> 0, деякої точки x0. Тоді точка x0 називається точкою локального максимуму, якщо в деякій такий області ε виконується нерівність f (x) ≤ f (x0), ∀x <ε; і точка x0 називається точкою локального мінімуму, якщо в деякій такий області ε виконується нерівність f (x) ≥ f (x0), ∀x <ε. Поняття локальний максимум і локальний мінімум об'єднуються терміном локальний екстремум.

Стаціонарна точка - точка, в якій всі частинні похідні першого порядку аналізованої функції дорівнюють нулю.

Сідлова точка - така точка з області визначення функції, яка є стаціонарною для даної функції, однак не є її локальним екстремумом.

1. Стаціонарні точки функцій однієї змінної

Найбільш просто стаціонарні точки визначаються для функції однієї змінної. Для їх знаходження необхідно вирішити задачу безумовної оптимізації, сформульовану далі.

Завдання безумовної оптимізації: задані множині X (допустиме множині задачі) і функція f (x) (цільова функція), визначена на X; потрібно знайти точки мінімуму або максимуму функції f на X:

$$f(x) \to extr, \quad x \in [a,b].$$

Так, завдання оптимізації, в якій цільова функція підлягає мінімізації, має вигляд:

$$f(x) \to \min, \quad x \in X.$$

Умови існування локальних максимумів і мінімумів відомі з математичного аналізу: якщо існує похідна f '(a), то функція f (x) може мати в точці a локальний максимум чи мінімум лише в тому випадку, коли

$$f'(a)=0. \tag{1.1}$$

Умова (1.1) - необхідна умова екстремуму.

Якщо існує друга похідна f " (a), то функція f (x) має в точці a

$$\begin{array}{c} \text{максимум при } f'(a)=0 \text{ и } f''(a)<0, \\ \text{мінімум при } f'(a)=0 \text{ и } f''(a)>0. \end{array} \tag{1.2}$$

Умова (1.2) - достатня умова екстремуму.

Якщо f '(a) = 0, то у всіх випадках кажуть, що функція f (x) при вигляді x = a має стаціонарне значення, а точка x = a є стаціонарною.

Завдання на мінімум і максимум дуальні:

якщо $f(x^*) = min\, f(x), \quad x^* \in [a,b]$, то вірно $-f(x^*) = \max f(x), \quad x^* \in [a,b]$, , тому в подальших алгоритмах можна розглядати тільки мінімізацію або максимізацію.

Крім того, на практиці часто зустрічаються задачі безумовної оптимізації, що базуються на умовах оптимальності. Розрізняють необхідні умови оптимальності, тобто умови, яким повинна задовольняти точка, що є рішенням завдання, і достатні умови оптимальності, тобто умови, з яких випливає, що дана точка є вирішенням завдання.

Стандартний алгоритм визначення точок локальних і глобальних екстремумів функції однієї змінної:

1. Знаходиться f '(x).

2. Обчислюються корені рівняння f '(x) = 0 - стаціонарні точки x (i),

i∈I = {1,2, ..., N}, де N - число стаціонарних точок. Покладається k = 2.

3. Знаходиться $f^{(k)}\left(x_{(i)}\right)$

4. Обчислюються значення для всіх i∈I.

Якщо $f^{(k)}\left(x_{(i)}\right) \neq 0$, то визначається тип стаціонарної точки $x_{(i)}$ та її номер виключається з множину I.

5. Перевіряється умова визначення типу усіх стаціонарних точок I = ∅.

Якщо воно виконується, то здійснюється перехід до п.6.

Якщо умова не виконується, то покладається k = k + 1 і здійснюється перехід до п.3.

6. Обчислюються граничні (при x → ∞ і x → -∞) значення f (x). Якщо f (x) не має кінцевих глобальних екстремумів, то обчислення припиняються. В іншому випадку здійснюється перехід до п.7.

7. Обчислюються значення f (x) на множині точок локальних екстремумів. За найменшим з отриманих значень f (x) визначається точка глобального мінімуму, за найбільшим з отриманих значень f (x) - точка глобального максимуму.

Приклад 1.1. Визначити стаціонарні точки степеневої функції x^n (N≥2, ціле число).
Рішення. $(x^n)' = nx^{n-1}$, тому, відповідно до алгоритму, кожна з функцій x^2, x^4, x^6, ... має при x=0 мінімум, а кожна з функцій x^3, x^5, x^7, ...має x=0 точкою перегиба.

Більш загальним, ніж вираз (1.1) - (1.2), і часто більш зручним, є таке правило: якщо похідна $f'(x)$ при переході через стаціонарну точку a змінює

знак “+” на ”–”, то стаціонарна точка – точка максимум,

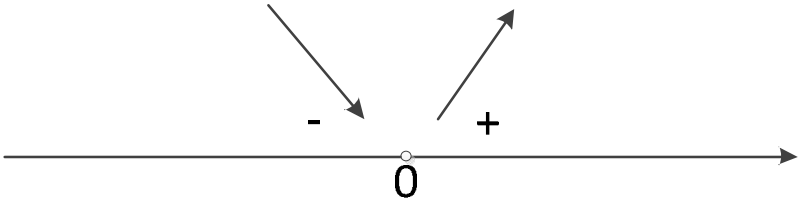
знак “–” на ”+”, то стаціонарна точка – точка мінімум. (1.3)

Якщо $f'(x)$ знак не зміеює, то екстремума немає.

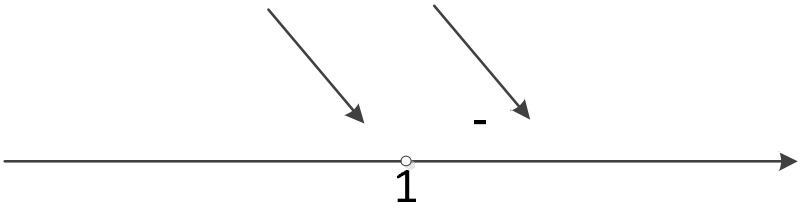
Приклад 1.2. Функція Коши $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ ($f(0)=0$) має при $x=0$ похідні всіх порядків, причому всі вони рівні нулю. хоча при $x=0$ ця функція має мінімум, встановити цей факт за допомогою правила (1.2) неможливо. За допомогою ж правила (1.3) це вдається зробити $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$,

ліворуч від нуля $f'(x)<0$, праворуч $f'(x)>0$.

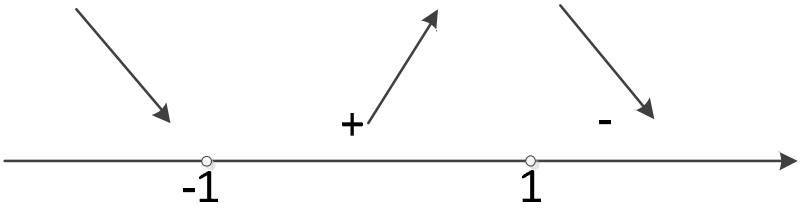
За правилом (1.3) в точці x = 0 функція $f(x)$ звертається до мінімум.



Приклад 1.3. Для функції $f(x)=(1-x)^3$, $f'(x)=-3(1-x)^2$ и точка перегиба



Приклад 1.4. $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$, $f'(x)=\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$



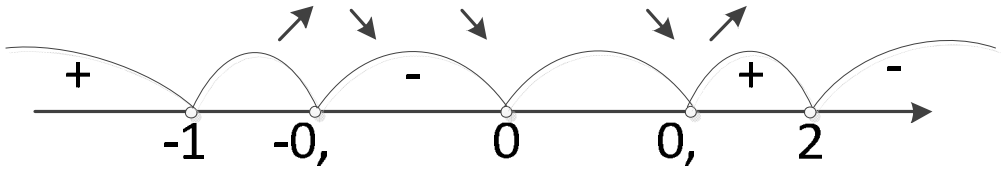
x=-1 – локальний мінімум, x=1 – локальний максимум.

Приклад 1.5. Найти екстремум функції $f(x) = x^3(x^2 - 1)$ при $-1 \le x \le 2$.

Необхідна умова оптимальності:

$$f'(x)=5x^4 - 3x^2 = x^2(5x^2 - 3) = 0.$$

Корені цього рівняння: $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3/5} = \pm 0{,}775$. Приєднуючи до них граничні значення x = -1 і x = 2, отримуємо п'ять стаціонарних точок:
$x_1 = -1$, $x_2 = -0{,}775$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0{,}775$, $x_5 = 2$.
Оскільки $f'(x_1) > 0$ и $f'(x_5) > 0$, в точці x_1 – граничний мінімум, в точці x5 - граничний максимум.



-1 – min, -0,8 – max, 0 – перегиб, 0,8 – min, 2 – max

2. Завдання безумовної оптимізації в мультисервісних мережах

При маршрутизації інформаційних потоків в мультисервісних мережах, на комутаційних пристроях вирішується велика кількість оптимізаційних завдань, причому деякі з них є завданнями безумовної оптимізації. Зауважимо, що вибір методу рішення оптимізаційної задачі на комутаційному вузлі визначається її часом рішення. Для прикладу розглянемо задачу оцінки часу проходження одиночного пакета за обраним маршрутом в мультисервісної мережі. Дану задачу можна звести до наступної постановці.
Завдання (загальна постановка). Аналіз часу проходження пакета в мультисервісної мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного вираженню:

$$T = f(x), \tag{1.4}$$

де $x \in [a, b]$ – узагальнений числовий параметр, що характеризує процес доставки пакета.
Знайти f* – оцінку мінімального часу проходження пакету і x * - оцінку точки мінімуму функції f (x).

Для функцій f (x), які можна задати простим аналітичним виразом, мінімум знаходиться серед стаціонарних точок всередині відрізка $(f'(x) = 0)$ і його кордонів (f (a) і f (b)), відповідно до алгоритму, розглянутим вище. Однак, в мережевих процесах, функція часу проходження пакету по маршруту f досить складна і часто не може бути приведена до аналітичного увазі, тому необхідно розглядати наближені методи розв'язання оптимізаційної задачі (1.4). Найбільш простий варіант швидкого вирішення можна отримати, якщо на розглянутій області визначення функція f є унімодальної.

3. Унімодальна функції однієї змінної

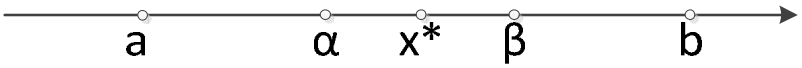
Унімодальної називається функція, що має на заданому відрізку [a, b] один локальний максимум чи мінімум.

Приклад : $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$ – один мінімум!

Використання властивості унімодальності дозволяє побудувати ефективні методи локалізації екстремуму - методи дихотомії, золотого перетину, чисел Фібоначчі та інші, засновані на наступному властивості унімодальних функцій. Якщо f (x) унімодальне, то

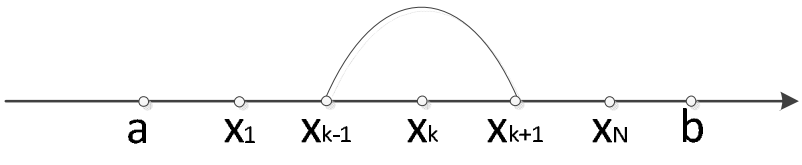
$$f(x_1) \le f(x_2) \Rightarrow x^* \le x_1,$$
$$f(x_1) \ge f(x_2) \Rightarrow x^* \ge x_2.$$

Тому наближене значення x * можна локалізувати, тобто укласти в не-великий інтервал $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ дуже швидко, не розраховуючи похідну.



$[\alpha,\beta]$ – ділянку локального екстремуму.

Методи пошуку відрізка локалізації діляться на активні і пасивні. В активних методах точки розбиття (xi) вибираються залежно від характеру поведінки функції, зазвичай послідовно, враховуючи інформацію з попередніх кроків. Пасивні методи не залежать від характеру функції, основний принцип полягає у формуванні розбиття області визначення функції. При цьому не проводиться аналіз характеру поведінки функції в даній області. Зазвичай, в пасивних методах вибирається кілька точок, можливо рівномірно розподілених, і в них розраховуються значення f (x). Шуканий інтервал визначається з центром в точці x_k - мінімальному розрахованому значенні відповідно з малюнком нижче



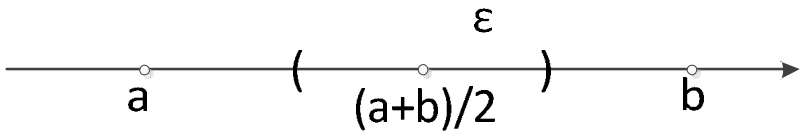
Активні методи, на відміну від пасивних, дозволяють більш швидко знайти інтервал, в якому знаходиться шуканий екстремум. Проте, у ряді випадків, можна випадково пропустити локальний мінімум (зазвичай, на практиці, це несуттєво, оскільки знаходиться близьке до нього значення).

У свою чергу, пасивні методи, хоча і вимагають більшого числа обчислень, але знаходять рішення з більшою точністю. Їх доцільно застосовувати у випадку унімодальних функцій з різко вираженою несиметричністю щодо області визначення.

4. Метод дихотомії (половинного ділення)

Метод дихотомії відноситься до активних методів, в яких застосовується ітераційний підхід до розбиття області визначення функції. До вихідних даних, які необхідні для реалізації методу, відносяться: межа області визначення, значення функції на цих кордонах і вимоги до точності результату.

На кожному з кроків ітерацій ділянку області визначення, що містить локальний екстремум (відрізок локалізації), ділиться навпіл, і, виходячи з значень функції на краях отриманих відрізків, знаходиться новий відрізок локалізації, в якому дана процедура згодом повторюється. Для зменшення ймовірності втрати локального екстремуму, значення функції розраховується не в середині відрізка локалізації, а на кордонах інтервалу довжиною 2 епсилон з центром в даній точці (малюнок нижче). При цьому отримується відрізок локалізації збільшується на довжину епсилон.



Зауваження. Для зменшення кількості розрахунків, екстремум на відрізку локалізації вибирається з усіх потрапили на нього точок розрахунку.

Умови закінчення ітераційного процесу залежать від вимог до точності знаходження локального екстремуму і можуть визначатися або граничним числом ітерацій, або розміром відрізка локалізації рішення.

Алгоритм метода:

1. Задати вихідні дані : N, ε, a, b; ($a^{(0)}$=a, $b^{(0)}$=b).

2. Нехай j – номер ітерації, шаг – 1, почати с 1; на j-ю ітерацію розрахувати :

$$x_1^{(j)} = \frac{1}{2}\left(a^{(j-1)} + b^{(j-1)}\right) - \frac{\varepsilon}{2};$$

$$x_2^{(j)} = \frac{1}{2}\left(a^{(j-1)} + b^{(j-1)}\right) + \frac{\varepsilon}{2};$$

$$f_1^{(j)} = f\left(x_1^{(j)}\right),\ f_2^{(j)} = f\left(x_2^{(j)}\right)$$

На j-й ітерації присвоїти значення:

якщо $f_1^{(j)} \le f_2^{(j)}$, то $a^{(j)} = a^{(j-1)}$, $b^{(j)} = x_2^{(j)}$;

якщо $f_1^{(j)} > f_2^{(j)}$, то $a^{(j)} = x_1^{(j)}$, $b^{(j)} = b^{(j-1)}$.

3. якщо $j \ge N/2$, то закінчить ітераційний процес.

4. Визначити підсумковий інтервал локалізації $\Delta = \left[a^{(j)}, b^{(j)}\right]$ (для максимального значення j, рівного J).

5. Для усіх $x_1^{(j)}, x_2^{(j)} \in \Delta\ (j = 1...J)$ вибрати x*, на якому f(x) приймає мінімальне значення f*.

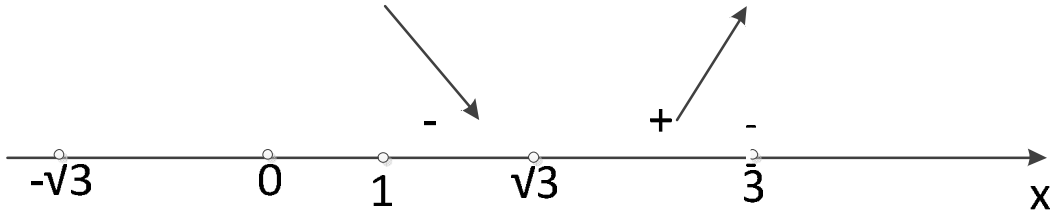
Приклад. Визначити методом дихотомії мінімум функції $f(x)=x^4-6x^2+10$ на відрізку $\Delta=[1,3]$.

Рішення.

1) f(x) задана простим аналітичним виразом, тому екстремум можна знайти точно

$$f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x\left(x^2 - 3\right)$$

$$x_1 = 0;\ x_{2,3} = \pm\sqrt{3} \approx 1{,}71$$



$$x_{min} = \sqrt{3} \approx 1{,}71$$

$$f^* = f(x_{min}) = \left(\sqrt{3}\right)^4 - 6\left(\sqrt{3}\right)^2 + 10 = 9 - 18 + 10 = 1$$

2) Нехай кількість обчислень N = 8, ε = 0,1. Тоді будуть виконані N / 2 = 4 ітерації. Результати обчислень заносимо в таблицю.

Номер ітерації	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$	$f_1^{(j)}$	≤ >	$f_2^{(j)}$	$a^{(j)}$	$b^{(j)}$
0	-	-	-		-	1	3
1	1,95	2,05	1,644	<	2,446	1	2,05
2	1,475	1,575	1,680	>	1,270	1,475	2,05
3	1,713	1,813	1,004	<	1,082	1,475	1,813
4	1,594	1,694	1,211	>	1,017	1,594	1,813

Оскільки j = N / 2 = 4, то обчислення завершуються. Точка мінімуму локалізована на відрізку Δ=[1,594; 1,813].

На даному відрізку досліджені 4 точки:

$$\left.\begin{aligned} a^{(4)} &= 1{,}594 \to f\left(a^{(4)}\right) = 1{,}211; \\ b^{(4)} &= 1{,}813 \to f\left(b^{(4)}\right) = 1{,}082; \\ x_2^{(4)} &= 1{,}694 \to f\left(x_2^{(4)}\right) = 1{,}017; \\ x_1^{(3)} &= 1{,}713 \to f\left(x_1^{(3)}\right) = 1{,}004; \end{aligned}\right\} \quad x^* \cong x_1^{(3)} = 1{,}713,\ f^* \cong f\left(x_1^{(3)}\right) = 1{,}004.$$

Відповідь : Δ_8=[1,594; 1,813], $x^* \cong 1{,}713$, $f^* \cong 1{,}004$.

5. Метод золотого перетину

Недоліком методу дихотомії є те, що повинно бути задано кількість обчислень N. Метод золотого перетину майже настільки ж ефективний, як і раніше розглянуті методи, але при цьому не залежить від N. Алгоритм пошуку оптимального рішення за методом золотого перерізу визначається наступним правилом симетрії: на кожної наступної ітерації вибирається одна точка, розташована симетрично залишилася то-

чки, причому симетрія заснована на розподілі відрізка локалізації «золотим перетином», тобто такому розподілі, коли ставлення більшої частини відрізка до всього відрізку дорівнює відношенню меншої частини до більшої.

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CB}{AC}.$$

При такому розподілі використовуються дві дробу Фібоначчі:

$$\Phi_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cong 0{,}382,\ \ \Phi_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cong 0{,}618,$$

задовольняють умовам

$$\Phi_1+\Phi_2=1,\ \Phi_1=(\Phi_2)^2.$$

У разі застосування методу золотого перетину використовуються дві умови закінчення обчислень:

а) виконання заданої кількості обчислень N (при жорсткому завданні числа обчислень);

б) досягнення заданої величини δ зменшення відрізка локалізації (при тимчасові обмеження, не пов'язаних з числом обчислень - найбільш прийнятний варіант). Отже, алгоритм пошуку мінімуму унімодальної функції методом золотого перетину полягає в наступному:

1. Задаються значення N, a, b, $a^{(0)}=a$, $b^{(0)}=b$, Φ_1, Φ_2.

2. На j-й ітерації, з кроком 1 починаючи зі значення 1, обчислюються

$$x_1^{(j)}=a^{(j-1)}+\Phi_1\left(b^{(j-1)}-a^{(j-1)}\right),$$
$$x_2^{(j)}=a^{(j-1)}+\Phi_2\left(b^{(j-1)}-a^{(j-1)}\right),$$
$$f_1^{(j)}=f\left(x_1^{(j)}\right),\ \ f_2^{(j)}=f\left(x_2^{(j)}\right).$$

Якщо $f_1^{(j)}\le f_2^{(j)}$, то $a^{(j)}=a^{(j-1)}$, $b^{(j)}=x_2^{(j)}$, $x_2^{(j+1)}=x_1^{(j)}$, $f_2^{(j+1)}=f_1^{(j)}$.

Якщо $f_1^{(j)}>f_2^{(j)}$, то $a^{(j)}=x_1^{(j)}$, $b^{(j)}=b^{(j-1)}$, $x_1^{(j+1)}=x_2^{(j)}$, $f_1^{(j+1)}=f_2'$.

3. Перевіряється умова закінчення обчислень:

. Кроки 4 і 5 аналогічні відповідним крокам алгоритму методу дихотомії.

Пример: Визначити методом золотого перетину мінімум функції $f(x)=x^4-6x^2+10$, заданої на відрізку $\Delta=[1,3]$ при N=4.

Рішення. В даному випадку будуть виконані N-1 = 3 ітерації. Результати обчислень заносимо в таблицю.

Номер ітерації	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$	$f_1^{(j)}$	≤ >	$f_2^{(j)}$	$a^{(j)}$	$b^{(j)}$
0	-	-	-		-	1	3
1	1,764*	2,236*	1,012	<	4,999	1	2,236
2	1,472*	1,764	1,694	>	1,012	1,472	2,236
3	1,764	1,944*	1,012	<	1,607	1,472	1,944

Оскільки j = N-1 = 3, то обчислення завершуються.

Точка мінімуму локалізована на відрізку $\Delta_4=[1{,}472;\ 1{,}944]$, $x^* \cong x_1^{(3)} = 1{,}764,\ f^* \cong f\left(x_1^{(3)}\right) = 1{,}012$.

Відповідь. $\Delta_4=[1{,}472;\ 1{,}944],\ x^* = 1{,}764,\ f^* = 1{,}012$.

Обґрунтування і опис методів наведено в [2, 3]. Тут розглядаються тільки алгоритми.

Алгоритм 1 (пошуку екстремуму унімодальної функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ методом золотого перетину)

1. Ввести вихідні дані (ВД): a, b, необхідна точність локалізації екстремуму ε, адреса процедури обчислення f (x), ознака

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{поиск max;} \\ -1, & \text{поиск min.} \end{cases}$$

2. Обчислити $k = 0{,}5(\sqrt{5} - 1)$.
3. Виконати присвоєння $a1:=a$, $a2:=b$, $i:=1$.
4. Обчислити $x1:=a1+k^2(a2-a1)$. (Процедура 1.1)
5. Обчислити $x2:=a1+k(a2-a1)$. (Процедура 1.2)
6. Обчислити $y1:=f(x1)$ (Процедура 2.1)
7. Обчислити $y2:=f(x2)$ (Процедура 2.2)
8. Обчислити $d=\delta(y1-y2)$.
9. Перевірити виконання умови $a2-a1\le\varepsilon$. Якщо воно виконується, то перейти к п. 14, якщо ні – к п. 10
10. Виконати присвоєння $i:=i+1$.
11. Перевірити виконання умови $d>0$. Якщо умова виконуються , то перейти к п. 12, якщо ні – к п. 13.
12. Покласти $a2:=x2$, $y2:=y1$, $x2:=x1$, виконати процедури 1.1 и 2.1, и перейти к п.8.
13. Покласти $a1:=x1$, $y1:=y2$, $x1:=x2$, виконати процедури 1.2 и 2.2, и перейти к п.8.
14. Print ($a1$, $a2$, $y1$, $y2$, i).
15. End

Алгоритм 2 (пошуку екстремуму унімодальної функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ методом чисел Фібоначчі)

1. Дії такі ж, як в п. 1 алгоритму 1.
2. Виконати присвоєння $a1:=a$, $a2:=b$.
3. Обчислити $c_{1,2}=\dfrac{\sqrt{5}\pm1}{2\sqrt{5}}$ и $r_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
4. Обчислити $n=\begin{cases} E(n_1), & \text{если } \{n_1\}=0; \\ E(n_1)+1, & \text{если } \{n_1\}>0, \end{cases}$

де

$$n_1 = 0{,}671 + 2{,}078\ln\frac{a2-a1}{\varepsilon};$$

$E(x)$ – ціла частина x; $\{x\}$ – дрібна частина x.

5.Обчислити $F_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n, F_{n-1} = c_1 r_1^{n-1} + c_2 r_2^{n-1}$ и Виконати присвоєння

$D:=F_n$; $B:=F_{n-1}$ и $A:=F_n-B$.

6. Обчислити $x1=a1+A(a2-a1)/D$. (Процедура 1.1)

7. Обчислити $x2=a1+B(a2-a1)/D$. (Процедура 1.2)

8. Обчислити $y1:=f(x1)$. (Процедура 2.1)

9. Обчислити $y2:=f(x2)$. (Процедура 2.2)

10. Виконати присвоєння $i:=1$.

11.Обчислити $d=\delta(y1-y2)$ и Виконати присвоєння $D:=B$, $C:=B-A$, $B:=A$, $A:=C$.

12. . Перевірити виконання умови $d>0$. Якщо умова виконуються , перейти к п.13, якщо ні – к п. 14.

13Дії такі ж, як в п. 12 алгоритму 1. Перейти до п. 15.

14. Дії такі ж, як в п. 13 алгоритму 1. Перейти до п. 15.

15. Виконати присвоєння $i:=i+1$.

16. Перевірити виконання умови $i=n$. Якщо умова не виконуються , перейти к п.11,якщо виконуються – к п. 17.

17. Print ($a1$, $a2$, $y1$, $y2$, n).

18. End.

Тема 1. Методи безумовної оптимізації

Лекція 2. Оптимізація багатоекстремальних функцій

1. Особливості оптимізації багатоекстремальних функцій.

2. Метод рівномірного сканування.

3. Метод пошуку з уточненням.

1. Особливості оптимізації багатоекстремальних функцій

Задача оптимізації багатоекстремальних функцій зводиться до знаходження глобального екстремуму на області визначення функції. Для цього можливо знайти всі локальні екстремуми, розглядаючи стаціонарні точки функції шляхом дослідження першої похідної функції. Далі розглядаються значення функції в стаціонарних точках і на межах області визначення (для однієї змінної зазвичай це інтервал допустимих значень). Серед цих значень простим перебором вибираються глобальні мінімум і максимум.

Однак, для практичної реалізації в МСМ необхідно використовувати чисельні методи, що швидко дають наближене рішення. Швидкі методи пошуку оптимуму для унімодальних функцій не застосовні для многоекстремальних функцій, оскільки в будь-якому випадку треба сканувати результат.

Існує дві основні групи методів знаходження глобального екстремума - методи сканування і градієнтні (тобто пов'язані із знаходженням 1-й похідної) методи.

Для функцій однієї змінної в МСМ зазвичай використовують алгоритми методів сканування, як найбільш легко реалізовані і не потребують знаходження першої похідної. Однак, якщо перша похідна знаходиться досить просто (наприклад, для функцій, заданих аналітичним виразом), то глобальний екстремум знаходиться стандартними засобами функціонального аналізу, як показано на прикладах нижче.

Приклад 1. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4,\ x \in [0,3]$

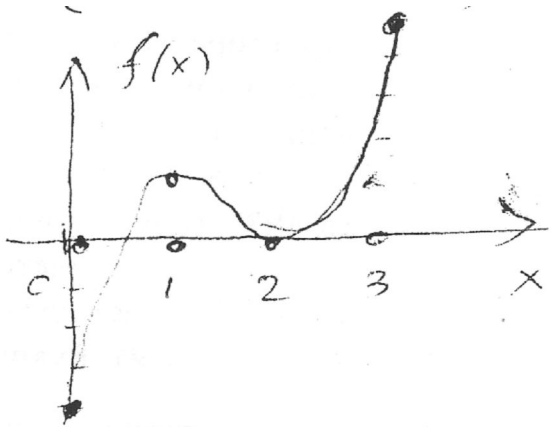
$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = -4 \ \text{(min)}$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 0$$

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = 5 \ \text{(max)}$$



Приклад 2. $f(x)=2x^4-8x^3+8x^2-x,\ x\in[-1,4],\ f(x)\to\min$

$$f'(x)=8x^3-24x^2+16x-1=0$$

Однак, в даному прикладі, отриманий аналітичний вираз для першої похідної є многочлен 3-го ступеня, для якого знаходження коренів - трудомісткий обчислювальний процес (розрахунок за формулою Герона), тому в даному випадку застосування методів функціонального аналізу є недоцільним.

2. Метод рівномірного сканування

Метод сканування являє собою метод максимізації і мінімізації функції шляхом послідовного перебору і порівняння значень функції в усіх точках деякої підмножини допустимої множини. Такі точки лежать на заздалегідь детермінованою траєкторії.

Перевагами методів сканування є відсутність обмежень на спосіб завдання функції та функціональні класи, до яких вона може належати. Останнє (поряд з великою трудомісткістю перебору) являється у той же час і головним недоліком методів сканування: не використовується для скорочення обчислень додаткова інформація, наявна у обчислювачі. Тому в обчислювальній практиці методи сканування рідко застосовуеться без комбінації з іншими методами оптимізації.

Необхідною умовою для методів сканування є наявність початкового рішення (першого наближення). Для його пошуку можна розрахувати будь-яке значення аргументу з розглянутої області визначення або використовувати спеціальні алгоритми. Однак, в даних випадках, це призводить до додаткових обчислювальних витрат, недоцільним при реалізації методів в МСМ. Тому в алгоритмах, що реалізують дані методи, вводяться два додаткові параметри - α і β. Параметр α - будь-яке значення аргументу поза аналізованої області визначення, параметр β - число, напевно перевершуе шуканий глобальний екстремум. Значення цих параметрів вводяться як вихідні дані для першого кроку ітераційного процесу сканування. Зауважимо, що на збіжність методу значення даних параметрів суттєвого впливу не роблять.

Алгоритм методу.

1. Задати вихідні дані: N, a, b, α, β.
2. Побудувати масив точок сканування

$$x_i = a + \frac{b-a}{2N}(2i-1),\ i = 1,\ldots,N$$

3. Присвоїти $x^* = \alpha$, $f^* = \beta$.

4. Послідовно розраховуючи $f(x_i)$ перевіряти умову: якщо $f(x_i) < f^*$, то $x^* = x_i$, $f^* = f(x_i)$.

5. Локалізувати інтервал, на якому знаходиться мінімальне значення $\left[x_{i_{min}-1}; x_{i_{max}+1}\right]$.

6. Уточнити точку мінімуму, повторивши сканування при $a = x_{i_{min}-1}$, $b = x_{i_{max}+1}$ (для сканування з уточненням).

$$\Delta = \frac{b-a}{N},$$

де N - число точок сканування, [a, b] - інтервал допустимих значень параметру, $\alpha > b$, $\beta >> f(x)$.

Приклад. Визначити за допомогою сканування мінімум функції $f(x)=2x^4-8x^3+8x^2-x$, заданої на відрізку [-1, 4] при N = 10.

Рішення. Задаємо $\alpha = 10$, $\beta = 1000$. Визначаємо x_i:

$$x_i = -1 + \frac{4+1}{20}(2i-1) = -1{,}25 + 0{,}5i,\ i = \overline{1, 10}.$$

Результати обчислень заносимо у таблицю.

Номер відліку	x_i	$f(x_i)$	$\leq$ $>$	f^*_{i-1}	x^*_{i-1}
1	-0,75	9,26	<	1000	10
2	-0,25	0,883	<	9,26	-0,75
3	0,25	0,133	<	0,883	-0,25
4	0,75	1,01	>	0,133	0,25
5	1,25	0,508	>	0,133	0,75
6	1,75	-1,37	<	0,133	1,25
7	2,25	-1,62	<	-1,37	1,75
8	2,75	5,76	>	-1,62	2,25
9	3,25	29,8	>	-1,62	2,25
10	3,75	82,4	>	-1,62	2,25
				-1,62	2,25

Оскільки i = 10 = N, то обчислення завершуються.

Відповідь. $x^* \cong 2{,}25,\ f^* \cong -1{,}62$.

3. Метод пошуку з уточненням

Модифікацією методу рівномірного сканування, з метою зменшення кількості обчислень, є метод пошуку (сканування) з уточненням. У цьому випадку процедура рівномірного сканування виконується n разів.

Алгоритм методу.

1. Задати вихідні дані: N (кількість обчислень), N_0 (число відліків (циклів) для уточнень), a, b, α, β. Обов'язкова умова: $N > \frac{3N_0}{2}$.

2. Провести «уточнення» на інтервалі $D_1 = \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ методом сканування, використовуючи точки $y_i = a + \frac{b-a}{N_0} \cdot (2i-1),\ i = 1,\ldots,\frac{N_0}{2}$.

3. Розрахувати $M_1 = \frac{\sum f(y_i)}{N_0} \cdot 2$.

4. Провести «уточнення» на інтервалі $D_2 = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ методом сканування, використовуючи точки $z_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{N_0} \cdot (2i-1),\ i = 1,\ldots,\frac{N_0}{2}$.

5. Розрахувати $M_2 = \frac{\sum f(z_i)}{N_0} \cdot 2$.

6. Якщо $M_1 > M_2$, то a замінити на $\frac{a+b}{2}$, інакше b замінити на $\frac{a+b}{2}$.

7. Використовуючи отримані на кроці 6 значення a і b, провести сканування обраної половини з наступними точками:

$x_i = a + \frac{b-a}{2(N-N_0)}(2i-1),\ i = \overline{1, N-N_0}$.

В якості α і β взяти y* (або z*) і f*, отримані при «уточненні» на обраному відрізку.

Приклад. Визначити за допомогою пошуку з уточненням мінімум функції $f(x)=2x^4-8x^3+8x^2-x$, заданої на відрізку Δ=[-2,4] при N = 10 і N_0=6.

Рішення.

Визначаємо D_1 і D_2:

D1 = [- 2,1], D2 = [1,4].

Перший етап.

Проводимо уточнення в [-2,1]. Задаємо α = 10, β = 1000.

Визначаємо y_i за допомогою наступного співвідношення:

$$y_i = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{N_0}(2i-1),\ i = \overline{1, N_0/2}.$$

В результаті отримуємо

$$y_i = -2 + \frac{1+2}{6}(2i-1) = -2{,}5 + i,\ i = \overline{1,3}.$$

Результати обчислень заносимо в таблицю.

Номер відліку	y_i	$f(y_i)$	$\geq$ $<$	f^*_{i-1}	y^*_{i-1}
1	-1,5	56,6	<	1000	10
2	-0,5	3,63	<	56,6	-1,5
3	0,5	0,625	<	3,63	-0,5
				0,625	0,5

Оскільки i =3= $N_0/2$, то обчислення завершуються. В результаті отримуємо

$$y^*_3=0{,}5,\ f(y^*_3)=0{,}625,$$

$$M_1 = \frac{56{,}6 + 3{,}63 + 0{,}625}{3} = 20{,}3.$$

Проводимо уточнення в [1,4]. Задаємо $\alpha = 10$, $\beta = 1000$.

Визначаємо z_i за допомогою наступного співвідношення:

$$z_i = a_2 + \frac{b_2 - a_2}{N_0}(2i-1),\ i = \overline{1, N_0/2}.$$

В результаті отримуємо

$$z_i = 1 + \frac{4-1}{6}(2i-1) = 0{,}5 + i,\ i = \overline{1,3}.$$

Результати обчислень заносимо в таблицю.

Номер відліку	z_i	$f(z_i)$	$\geq$ $<$	f^*_{i-1}	z^*_{i-1}
1	1,5	- 0,375	<	1000	10
2	2,5	0,625	>	- 0,375	1,5
3	3,5	51,6	>	- 0,375	1,5
				- 0,375	1,5

Оскільки i=3=$N_0/2$, то обчислення завершуються. В результаті отримуємо

$$z^*_3=1{,}5,\ f(z^*_3)=-\ 0{,}375,$$

$$M_1 = \frac{-0{,}375 + 0{,}625 + 51{,}6}{3} = 17{,}3.$$

Оскільки $M_1 > M_2$, то вибираємо для подальшого дослідження D_2 = [1,4]. Крім того, перевизначаються a=1.

Другий етап.

Вважаємо $x^*_0=1{,}5$, $f^*_0=-0{,}375$.

Визначаємо x_i за допомогою наступного співвідношення:

$$x_i = a + \frac{b-a}{2(N-N_0)}(2i-1),\ i = \overline{1, N-N_0}\ .$$

В результаті отримуємо

$$x_i = 1 + \frac{4-1}{8}(2i-1) = 0{,}625 + 0{,}75i,\ i = \overline{1,4}\ .$$

Результати обчислень заносимо в таблицю.

Номер від-рахунки xi f (xi) ≥

Номер відліку	x_i	$f(x_i)$	≥ <	f^*_{i-1}	x^*_{i-1}
1	1,375	1,02	<	-0,375	1,5
2	2,125	-1,98	<	-0,375	1,5
3	2,875	9,78	>	-1,98	2,125
4	3,625	65,8	>	-1,98	2,125
				-1,98	2,125

Оскільки $i=4=N-N_0$, то обчислення завершуються.

Відповідь. $x^* \cong 2{,}125,\ f^* \cong -1{,}98$.

Тема 1. Методи безусловної оптимізації

Лекція 3. Оптимізація функцій з декількома змінними

1. ***Стаціонарні точки функцій декількох змінних.***
2. ***Постановка задачі безусловної оптимизації при двох параметрах.***
3. ***Аналітичне рішення задачі оптимизації.***
4. ***Градієнтний метод із дробленням кроку.***

1. Стаціонарні точки функцій декількох змінних

Далеко не всі задачі оптимізації, що виникають в процесі обробки інформації в МСС, зводяться до знаходження екстремумів функції однієї змінної. На практиці досліджувані системні характеристики зазвичай залежать від двох і більше параметрів, тобто задача оптимізації зводиться до знаходження екстремума функції з декількома змінними. Дане завдання в будь-якому випадку має значну обчислювальну складність і тому основний упор при виборі методів робиться на час знаходження рішення, зазвичай навіть на шкоду точності одержуваного відповіді.

Як і у випадку функції однієї змінної, найбільш просто рішення задачі знаходиться у разі існування приватних похідних першого порядку. Для цього можна використовувати стандартні аналітичні методи знаходження екстремуму функцій кількох змінних.

Необхідні умови існування екстремуму функції декількох змінних в точці наступні: якщо функція $f(x1, x2, ..., x_n)$ диференційована в точці $a = (a1, a2, ..., a_n)$, то вона може мати в цій точці локальний максимум чи мінімум лише в тому випадку, коли її перший диференціал *df* звертається в цій точці в нуль, тобто коли

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 . \qquad (1.5)$$

Достатні умови існування екстремуму функції декількох змінних в точці наступні: якщо функція *f* має в точці *a* безперервні другі приватні похідні і якщо в цій точці виконуються необхідні умови (1.5), то у випадку, коли другий диференціал

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\bigg|_{(a_1, a_2, \ldots, a_n)} \qquad \Delta x_i \Delta x_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \Delta x_i \Delta x_k \qquad (1.6)$$

визначається негативно певною квадратичною формою, функція *f* має в точці *a* максимум, якщо $d^2 f$ визначається позитивно певною квадратичною формою, то функція *f* має в точці *a* мінімум. Якщо квадратична форма не визначена або дорівнює нулю, то локального екстремуму функції *f* в стаціонарній точці *a* не існує, а сама точка *a* називається сідловою (одновимірний аналог - точка перегину функції однієї змінної).

У свою чергу, з курсу вищої математики відомо, що квадратична форма є позитивно визначеною, якщо всі власні значення матриці $A = \|a_{ik}\|$ позитивні, і негативно певної - якщо всі власні значення негативні. Якщо частина власних значень позитивна, а інша частина негативна, квадратична форма не визначена.
Як відомо, власні значення λ_i матриці $A = \|a_{ik}\|$ є корінням алгебраїчного рівняння

$$\det(A - \lambda I) = \begin{Vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{Vmatrix} \qquad (1.7)$$

Виходячи з вищесказаного, можна представити наступний алгоритм визначення точок локальних екстремумів функції багатьох змінних:

1. Знаходиться диференціал $df(\bar{x})$, где $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

2. Вирішується система $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} = 0, \ j = \overline{1,n}$. В результаті обчислюються стаціонарні точки $x_{(i)}$, i =1,…,N.

3. Знаходиться $d^2f(\bar{x})$, покладається i=1.

4. Розраховуються значення другого диференціала $d^2f(x_{(i)})$ у всіх стаціонарних точках.

5. Обчислюються кутові мінори матриці квадратичної форми диференціала $[d^2f(x_{(i)})]$.

Якщо не всі кутові мінори ненульові, то для визначення характеру стастаціонарної точки $x_{(i)}$ потрібно дослідження похідних більш високого порядка. При цьому здійснюється перехід до п.8.

В іншому випадку здійснюється перехід до п.6.

6. Аналізуються знаки кутових мінорів матриці квадратичної форми диференціала $[d^2f(x_{(i)})]$. Якщо дана квадратична форма є позитивними але певної, то відповідна точка $x_{(i)}$ є точкою локального мінімума. При цьому здійснюється перехід до п.8. В іншому випадку здійснюється перехід до п.7.

7. Обчислюються кутові мінори матриці квадратичної форми диференціала $[-d^2f(x_{(i)})]$ і аналізуються їх знаки. Якщо дана квадратична форма являється позитивно певної, то вихідна квадратична форма є негативно визначеною і відповідна точка $x_{(i)}$ є точкою локального максимуму. В іншому випадку вихідна квадратична форма являються невизначеною і точка $x_{(i)}$ є сідловою.

8. Перевіряється умова визначення характеру усіх стаціонарних точок i = N. Якщо воно виконується, то обчислення завершуються. Якщо умова не виконується, то покладається i = i +1 і здійснюється перехід до п.4

2. Постановка задачі безумовної оптимізації при двох параметрах

У процесі обробки і передачі даних у вузлах мультисервісних мереж, в загальному випадку, розглядається досить великий набір оптимізаційних завдань, для вирішення яких використовується математичний апарат безумовної оптимізації функції декількох змінних. Зокрема, такий набір завдань формується, як правило, мережевим, транспортним та сеансовим рівнями еталонної моделі взаємодії відкритих систем (OSI), наприклад, при маршрутизації, управлінні трафіком, обробці даних і т.д. Так, у попередніх розділах, розглядалася задача оцінки часу проходження одиночного пакету за обраним маршрутом в мультисервісної мережі, яка вирішувалася за допомогою математичного апарату оптимізації функцій однієї змінної. Однак, при розгляді реальних завдань маршрутизації, для аналізу часу прохождення пакету, недостатньо одного параметра, зазвичай аналізується декілька параметрів різної розмірності, між якими не встановлюються вагові коефіцієнти.

Розглянемо найбільш простий випадок - залежність часу проходження пакету від двох параметрів x_1 і x_2.

Завдання (загальна постановка). Аналіз часу проходження пакета в мультисервісної мережі показав, що воно залежить від двох параметрів (x_1 і x_2), утворюючих вектор параметрів $\bar{x}$ і може бути зведене до наступного аналітичного вираженню:

$$T = f(\bar{x})$$

знайти f * - оцінку мінімального часу проходження пакету і $\bar{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$ - значення параметрів.

3. Аналітичне рішення задачі оптимізації

У випадку, якщо оптимізується функція може бути задана в аналітичному виді, і існують її другі похідні по всіх аргументів, то оптимальне рішення можна знайти, використовуючи стандартні методи математичного аналізу функції кількох змінних. Розглянемо рішення задачі п.2 для двох змінних в загальному вигляді.

Рішення. Якщо $f(\bar{x})$ двічі диференційовна по всіх аргументів, то f* і $\bar{x}^*$ можна знайти, використовуючи наступний алгоритм:

1. Знаходимо стаціонарні точки функції, прирівнявши до нуля її градієнт:

$$\left(\frac{df}{dx_1}, \frac{df}{dx_2}\right) = 0,$$

що є необхідною умовою існування локального екстремуму.

2. Для визначення типу стаціонарної точки (достатня умова існування локального екстремуму) необхідно побудувати її гессіан (матрицю всіх приватних похідних функції):

$$G(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{d^2 f}{dx_1 dx_1} & \frac{d^2 f}{dx_1 dx_2} \\ \frac{d^2 f}{dx_2 dx_1} & \frac{d^2 f}{dx_2 dx_2} \end{pmatrix}.$$

3. Розраховуються власні значення гессіан наступним чином:

$$\det\left(G(\bar{x})-\bar{\lambda}I\right)=0 \quad \left(\bar{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2)\right).$$

Якщо всі власні числа гессіан позитивні (λ> 0), то стаціонарна точка є локальним мінімумом досліджуваної функції. Якщо всі власні числа гессіан негативні (λ <0), то стаціонарна точка є локальним максимумом досліджуваної функції. У випадку, якщо власні числа гессіан мають різні знаки (або існують нульові значення), то стаціонарна точка - сідлова точка (для двох змінних - це сідлова точка поверхні, характерезує досліджувану функцію).

Приклад. Задана функція двох змінних

$$f(x,y) = 3x^3 - x + y^3 - 3y^2 - 1$$

знайти екстремуми і відповідні значення: f *, (x *, y *).

Рішення.

1. Шукаємо вектор-градієнт Δ:

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dx} = 9x^2 - 1 \\ \dfrac{df}{dy} = 3y^2 - 6y \end{cases} \quad => \quad \Delta=(9x^2\text{-}1;\ 3y^2\text{-}6y)$$

$$\Delta=0 \quad => \quad \begin{cases} 9x^2 - 1 = 0 \\ 3y(y-2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 1/3 \\ y \in \{0,2\} \end{cases}$$

Таким чином, у заданої функції є 4 стаціонарні точки: $A_1(1/3;0)$, $A_2(-1/3;0)$, $A_3(1/3;2)$, $A_4(-1/3;2)$.

2. Будуємо гессіан заданої функції:

$$G(\bar{x})=\begin{pmatrix} \dfrac{d^2f}{dxdx} & \dfrac{d^2f}{dxdy} \\ \dfrac{d^2f}{dydx} & \dfrac{d^2f}{dydy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{d^2f}{dx^2}=18x & \dfrac{d^2f}{dxdy}=0 \\ \dfrac{d^2f}{dxdy}=0 & \dfrac{d^2f}{dy^2}=6y-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18x & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{pmatrix}.$$

3. Розраховуються власні значення гессіана:

$$\det\left(G-\bar{\lambda}\right)=\begin{vmatrix} 18x-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 6y-6-\lambda_2 \end{vmatrix}=(18x-\lambda_1)\cdot(6y-6-\lambda_2)=0 \ => \begin{cases} \lambda_1 = 18x, \\ \lambda_2 = 6y-6 \end{cases}$$

Розраховані власні значення для кожної стаціонарної точки поміщаємо в таблицю 1.

Таблиця 1. Визначення характеру стаціонарних точок

	A_1	A_2	A_3	A_4
	(1/3;0)	(-1/3;0)	(1/3;2)	(-1/3;2)
λ_1	6	-6	6	-6
λ_2	-6	-6	6	6
характер	седло	max	min	седло
$f(A_i)$	–11/9	–7/9	–47/9	–43/9

$f(A_1)=3\cdot(1/3)^3 - 1/3 + 0^3 - 3\cdot 0^2 - 1=-11/9$ (сідлова точка);
$f(A_2)=3\cdot(-1/3)^3 - (-1/3) + 0^3 - 3\cdot 0^2 - 1=-7/9$ (точка локального максимуму);
$f(A_3)=3\cdot(1/3)^3 - 1/3 + 2^3 - 3\cdot 2^2 - 1=-47/9$ (точка локального мінімуму);
$f(A_4)=3\cdot(-1/3)^3 - (-1/3) + 2^3 - 3\cdot 2^2 - 1=-43/9$ (сідлова точка).

4. Градієнтний метод із дробленням кроку

На практиці в мультисервісних мережах аналітичний метод практично не реалізують, оскільки важко апроксимувати другу похідну. Однак, якщо можлива проста апроксимація першої похідної, використовують градієнтні методи (більш точні, ніж сканування, але і більш витратні), наприклад:

- метод із дробленням кроку;
- метод найшвидшого спуску;
- метод Ньютона та ін.

Найбільш простий в реалізації метод із дробленням кроку.

Загальне положення для всіх градієнтних методів: з вихідної точки X (0) будується послідовність $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., для якої виконується умова $f(x^{(k)})<f(x^{(k-1)})$. Зазвичай значення на k-му кроці ітерації в градієнтних методах знаходиться за допомогою лінійної залежності від значення на (k-1) -му кроці

$$x^{(k)}=x^{(k-1)}+\lambda_k h^{(k)},$$

де λ_k - коефіцієнт, що визначається в градієнтному методі, а $h^{(k)}$ - вектор, визначаючи напрямок убування (зростання) функції:

$$h^{(k)} = -f'\left(x^{(k-1)}\right),$$

тобто $x^{(k)} = x^{(k-1)} - \lambda_k f'\left(x^{(k-1)}\right)$.

Для методу з дробленням кроку використовується наступна ітераційна залежність:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \lambda_k \cdot \frac{f'\left(x^{(k-1)}\right)}{\left\|f'\left(x^{(k-1)}\right)\right\|},$$

де для вибору коефіцієнта λk необхідно задати дві константи: α> 0 (зазвичай α - досить велике число, гарантовано перевищує можливі значення функції в досліджуваній області) і 0 <β <1 (зазвичай β = 0,5).

У методі з дробленням кроку На k-й ітерації $\lambda_k = \alpha$. Якщо функція збільшилась, то λk = αβ і т.д. Критерієм закінчення є точність ε. Норма вектора (або відстань) обчислюється як

$$\left\|f\left(x^{(k)}\right)\right\| = \sqrt{\left(x_1^{(k)}\right)^2 + \left(x_2^{(k)}\right)^2}\ .$$

Алгоритм методу с дробленням кроку:

1. Введення вихідних даних $\left\lfloor \alpha, \beta, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \varepsilon \right\rfloor$.
2. k=0 (номер кроку); $\lambda_0=\alpha$. Обчислення

$$f\left(\overline{x}^{(0)}\right),\ f'\left(\overline{x}^{(0)}\right),\ \left\|f'\left(x^{(0)}\right)\right\| = \sqrt{\left(x_1^{(0)}\right)^2 + \left(x_2^{(0)}\right)^2}\ .$$

3. k=k+1, $\lambda_k=\lambda_k$-1.
4. Обчислення для кожної координати $\overline{x}^{(k)}$:

$$\Delta x^{(k)} = -\lambda_k \cdot \frac{f'\left(x^{(k-1)}\right)}{\left\|f'\left(x^{(k-1)}\right)\right\|}$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \Delta x^{(k)}$$

$$f\left(\overline{x}^{(k)}\right)$$

5. Перевірити умову

$$f\left(\overline{x}^{(k)}\right) < f\left(\overline{x}^{(k-1)}\right).$$

При його виконанні перехід до п.6.

При невиконанні: $\lambda_k := \lambda_k \cdot \beta$ и перехід до п.4.

6. Обчислення $f'\left(\overline{x}^{(k)}\right),\ \left\|f'\left(\overline{x}^{(k)}\right)\right\|$.
7. Перевірка умови закінчення обчислень: $\left\|f'\left(\overline{x}^{(k)}\right)\right\| \le \varepsilon$.

При виконанні: $\begin{cases} \overline{x}^* = \overline{x}^{(k)} \\ f^* = f\left(x^{(k)}\right). \\ \textit{вихід} \end{cases}$

При невиконанні: перехід до п.3.

Приклад. $f(x)=x_1^2+2x_2^2-4x_1+2x_2\to\min;\ \overline{X}^{(0)}=(1,0);\ \alpha=1;\ \beta=0{,}5;\ \varepsilon=0{,}3$.

Рішення.

Аналітично:

$$\begin{cases}2x_1-4=0\\4x_2+2=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x_1=2\\x_2=-0{,}5\end{cases}\qquad\begin{vmatrix}2-\lambda_1 & 0\\0 & 4-\lambda_2\end{vmatrix}=0\quad=>\quad\begin{cases}\lambda_1=2\\\lambda_2=4\end{cases}\quad=>\min$$

Метод з дробленням кроку:

1. Знаходимо градієнт: $\Delta=\left(\frac{df}{dx_1},\frac{df}{dx_2}\right)=(2x_1-4;\ 4x_2+2)$.

Вихідні умови: $\alpha=1;\ \beta=0{,}5;\ \varepsilon=0{,}3;\ \lambda_0=\alpha=1;\ x_1^{(0)}=1;\ x_2^{(0)}=0$.

2. k=0

$$f\left(\overline{x}^{(0)}\right)=1-4=-3$$

$$\frac{df}{dx_1}\left(\overline{x}^{(0)}\right)=-2;\ \frac{df}{dx_2}\left(\overline{x}^{(0)}\right)=2$$

$$\left\|f'\left(\overline{x}^{(0)}\right)\right\|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}\approx 2{,}83$$

3. k=1, λ_1=1

$$\Delta x_1^{(1)}=-\lambda_1\cdot\frac{\frac{df}{dx_1}\left(\overline{x}^{(0)}\right)}{\left\|f'(x_0)\right\|}=\frac{2}{2\sqrt{2}}\approx 0{,}707;\qquad \Delta x_2^{(1)}=-\lambda_1\cdot\frac{\frac{df}{dx_2}\left(\overline{x}^{(0)}\right)}{\left\|f'(x_0)\right\|}=-1\cdot\frac{2}{2\sqrt{2}}\approx -0{,}707$$

$$x_1^{(1)}=x_1^{(0)}+\Delta x_1^{(1)}=1+0{,}707$$

Номер итерац.	λ	Δx_1	Δx_2	x_1	x_2	f(x)	$\frac{df}{dx_1}$	$\frac{df}{dx_2}$	$\|f'\|$
0				1	0	-3	-2	2	2,83
1	1	0,707	-0,707	1,71	-0,707	-4,32	-0,586	-0,828	1,01
2	1	0,580	0,820	2,29	0,113	-3,67			
$f(x^{(2)})>f(x^{(1)})\to\lambda=\alpha\beta=0{,}5$									
2	0,5	0,290	0,410	2,00	-0,297	-4,42	0	0,812	0,812
3	0,5	0	-0,5	2,00	-0,797	-4,32			
$f(x^{(3)})>f(x^{(2)})\to\lambda=\alpha\beta=0{,}25$									
3	0,25	0	-0,25	2,00	-0,547	-4,496	0	-0,188	0,188

Оскільки умова закінчення обчислень виконано $\left(\left\|f'\left(x^{(3)}\right)\right\|=0{,}188<\varepsilon=0{,}3\right)$, то обчислення завершуються.

В результаті рішення задачі безумовної мінімізації отримуємо $x^*\cong x^{(3)}=(2;-0{,}547)$, $f^*\cong f\left(x^{(3)}\right)=-4{,}496$

Відповідь. $x^*\cong(2;-0{,}547)$, $f^*\cong -4{,}496$

Тема 2. Умовна оптимізація. Лінійні моделі

Лекція 1. Графічний метод

1. ***Основні поняття і визначення.***
2. ***Загальна постановка завдання лінійного програмування.***
3. ***Типове завдання ЛП з двома змінними в МСС.***
4. ***Графічний метод рішення.***

1. Основні поняття і визначення

Лінійне програмування - це метод оптимізації моделей, в яких цільові функції і обмеження строго лінійні.

На алгоритмах лінійного програмування (враховуючи їх комп'ютерну ефективність) базуються оптимізаційні алгоритми для інших, складніших типів моделей і завдань дослідження операцій, включаючи цілочисельне, нелінійне і стохастичне програмування.

Завдання (модель) ЛП, як і будь-яке завдання дослідження операцій, включає три основні елементи:

1. Змінні, які слід визначити.
2. Цільова функція, яка підлягає оптимізації.
3. Обмеження, яким повинні задовольняти змінні.

Властивість лінійності функцій допускає, що:

1. Значення лівих частин нерівностей обмежень і значення цільової функції прямо пропорційні значенням змінних.
2. Адитивність змінних (загальний вклад усіх змінних в значення цільової функції і лівих частин нерівностей обмежень є прямою сумою вкладів кожної окремої змінної).

2. Загальна постановка завдання лінійного програмування

У загальній постановці, завдання ЛП допускає наявність цільової функції, яка оптимізується (знаходження локального або глобального максимуму або мінімуму), і наявність ряду лінійних обмежень на змінні:

$$L(x1, x2,., xn) \rightarrow extr$$

якщо li(x1, x2, ., xn) "R" ai

де "R" - відношення типу "= "><"L, li - лінійні функції, ai - константи, i=_ - номер обмеження.

Будь-яке рішення, що задовольняє обмеженням, є допустимим. Оптимальне рішення задачі ЛП шукається на безлічі допустимих рішень.

Розглядаємо завдання оптимального розподілу ресурсів МСС на наступному прикладі.

3. Типове завдання ЛП з двома змінними в МСС

Формулювання завдання: МСС обслуговує два однорідні інформаційні потоки А і В з трафіком T_A и T_B Гб/с відповідно, декількома комутаційними вузлами (КУ). Впродовж одного циклу обслуговування, фіксований КУ К може виділити для зберігання до кінця циклу a_1 Кб (для службової інформації, СлІ) і a_2 Мб (для статистичної інформації, СтІ). За 1 секунду потік А записує a_{1A} Кб СлІ і a_{2A} Мб СтІ, потік В – a_{1B} Кб і a_{2B} Мб відповідно. Яким чином через вузол К пропустити за цикл обслуговування максимальний сумарний об'єм трафіку?

4. Графічний метод рішення

Завдання ЛП може бути вирішене як аналітичним, так і графічним методами рішення. Перевага графічного методу полягає в його наочності, проте, він застосовний, в основному, для завдань з двома змінними (рідше - з трьома). Графічний метод базується на наступній теоремі.

Теорема. Точки екстремуму завдання ЛП знаходяться на межі многогранника допустимих рішень.

Доказ опускаємо.

Слідство. Екстремум завдання ЛП можна знайти послідовним або цілеспрямованим перебором значень цільової функції у вершинах багатогранника допустимих значень.

Для двох зміних, завдання ЛП можна вирішити графічно в 2 етапи:

1. Етап 1. Побудувати багатокутник (простір) області допустимих значень, що задовольняють усім обмеженням моделі.
2. Етап 2. Знайти оптимальне рішення серед усіх точок простору допустимих рішень шляхом побудови ліній рівня цільової функції. Оскільки цільова функція – площина над багатокутником допустимих значень, то екстремуми – граничні лінії рівня.

Приклад рішення типової задачі (п.2) з наступними числовими даними: Інтенсивність трафіку інформаційних потоків : T_A=5 Гб/с; T_B=4 Гб/с; розміри буферів критичної ділянки для зберігання службової і статистичної інформації a_1=24 Кб; a_2=6 Мб; інтенсивності СлІ и СтІ для кожного з потоків a_{1A}=6 Кб/с; a_{2A}=1 Мб/с; a_{1B}=4 Кб/с; a_{2B}=2 Мб/с.

При використанні графічного методу для вирішення завдання ЛП, основні початкові дані рекомендується представити у вигляді наступної таблиці:

	Потік А	Потік В	Граничне значення	
Ресурс 1 вузлу К (СлІ)	6 Кб/с	4 Кб/с	24 Кб	(обмеження 1)
Ресурс 2 вузлу К (СтІ)	1 Мб/с	2 Мб/с	6 Мб	(обмеження 2)
Трафік	5 Гб/с	4 Гб/с		

Додаткові обмеження: у потоку В на комутаційному вузлі К може обслуговуватися не більше 8 Гб трафіку, тобто потрібно не більше 10/5=2 с; (обмеження 3)

Тривалість обслуговування потоку В не може перевищувати тривалість обслуговування потоку А більше, ніж на 1 с. (обмеження 4)

Рішення:

0. Формалізація завдання ЛП:

Введемо змінні x_A и x_B - тривалість обслуговування потоків на комутаційному вузлі К в с. Тоді максимальний сумарний об'єм трафіку за один цикл обробки у рівний $5x_A+4x_B$. Тому цільова функція завдання має наступний вигляд:

$$y = 5x_A + 4x_B \to \max .$$

Виходячи з вищеописаних обмежень 1-4, система обмежень завдання ЛП може бути формалізована таким чином:

$$\begin{cases} x_A \cdot 6 + x_B \cdot 4 \le 24 & (1) \\ x_A \cdot 1 + x_B \cdot 2 \le 6 & (2) \\ x_B - x_A \le 1 & (3) \\ x_B \le 2 & (4) \end{cases}$$

Крім того, існують неявні смислові обмеження (значення тривалості обслуговування потоків на комутаційному вузлі не може бути негативним):

$$x_A \ge 0 \qquad (5)$$
$$x_B \ge 0 \qquad (6)$$

1. Етап 1.

У системі координат x_AOx_B будуємо багатокутник допустимих значень (рис.1), виходячи з формалізованих обмежень (1) – (6):

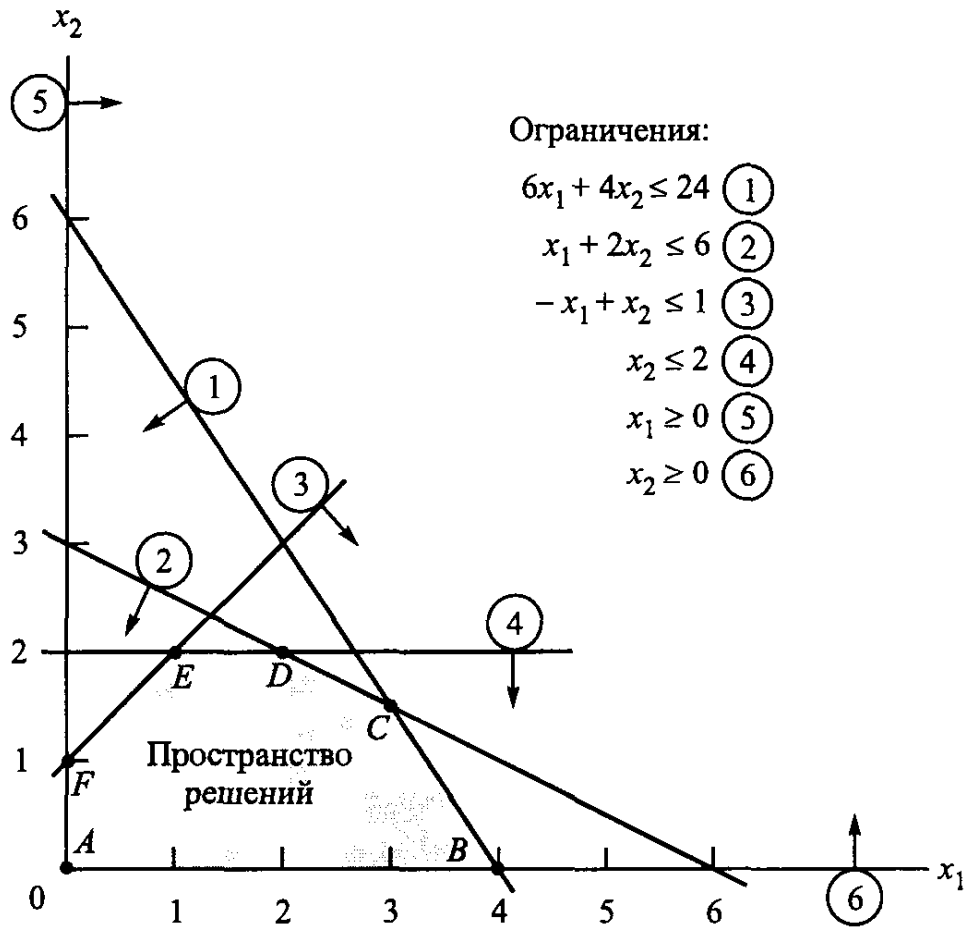


Рис.1. Багатокутник допустимих значень

Тепер розглянемо, як графічно інтерпретуються нерівності. Кожна нерівність ділить площину x_1, x_2) на два полупространства, которые располагаются по обе стороны прямой, которая, как показано выше, соответствует данному неравенству. на два напівпростори, які розташовуються по обидві сторони прямої, яка, як показано вище, відповідає цій нерівності. Точки площини, розташовані по одну сторону прямої, задовольняють нерівності (допустимий напівпростір), а точки, що лежать по іншу сторону – ні.

"Тестовою" точкою, яка перевіряє, точки якого напівпростору задовольняють нерівності, а якого — ні, може служити точка (0, 0). Наприклад, ця точка задовольняє першій нерівності $6x_1 + 4x_2 < 24$. Це означає, що точки напівпростору, що містить початкову точку (0, 0), задовольняють цій нерівності. На р допустимі напівпростори показані стрілками.

Якщо точка (0, 0) не задовольняє нерівності, допустимим напівпростором буде те, яке не містить цю точку. Якщо ж пряма проходить через цю точку, слід в якості "тестової" узяти яку-небудь іншу точку.

Точки простору допустимих рішень, показаного на рисунку, задовольняють одночасно усім обмеженням. Цей простір обмежений відрізками прямих, які з'єднуються в кутових точках A, B, C, D, E і F. Будь-яка точка, розташована усередині або на межі області, обмеженої ламаною ABCDEF, є допустимим рішенням, тобто задовольняє усім обмеженням. Оскільки простір допустимих рішень містить нескінченне число точок, потрібна деяка процедура пошуку оптимального рішення.

2. Етап 2.

Для того, щоб знайти оптимальне рішення, необхідно визначити напрям зростання цільової функції $z= 5x_1 + 4x_2$ (оскільки її слід максимізувати). Ми можемо прирівняти z до декількох зростаючих значень. Ці значення, підставлені замість z у вираження цільової функції, породжують рівняння прямих (рис.2). Цільова функція може зростати до тих пір, поки прямі, що відповідають зростаючим значенням цієї функції, перетинають область допустимих рішень. Точка перетину області допустимих рішень і прямої, що відповідає максимально можливому значенню цільової функції, і буде точкою оптимуму.

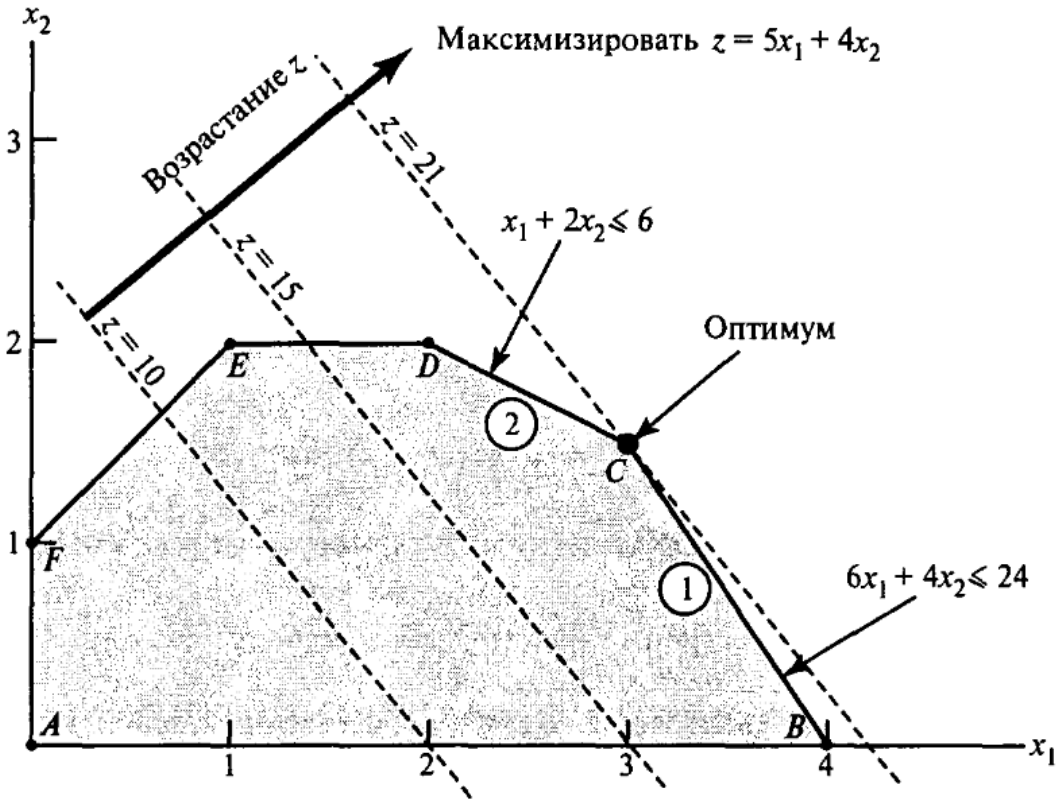


Рис.2. Знаходження оптимального рішення

На рисунку видно, що оптимальне рішення відповідає точці С. Ця точка є місцем перетину прямих (1) і (2), тому її координати x_A и x_B знаходяться як рішення системи рівнянь, що задають ці прямі:

$$\begin{cases} 6x_A + 4x_B = 24 \\ x_A + 2x_B = 6 \end{cases}$$

Рішенням цієї системи буде $x_A = 3$ и $x_B = 1{,}5$, при цьому значення цільової функції дорівнює $z = 5*3 + 4*1{,}5 = 21$.

$$\begin{cases} x_a = 3 \\ x_b = 1{,}5 \end{cases} \Rightarrow \quad y_C = 21\ (Гб)$$

Не випадково, що оптимальне рішення розташоване в кутовій точці простору допустимих рішень, де перетинаються дві прямі. Якщо ми змінимо нахил функції z (шляхом зміни її коефіцієнтів), то виявимо, що у будь-якому випадку рішення досягається в одній з кутових точок (чи одночасно в декількох кутових точках).

Тема 2. Умовна оптимізація. Лінійні моделі

Лекція 2. Аналітичний розв'язок задачі лінійного програмування

1. ***Стандартний вигляд задачі ЛП.***
2. ***Алгоритм симплекс-методу.***
3. ***Приклад розв'язку задачі ЛП симплекс-методом.***

1. Стандартний вигляд задачі ЛП

Як було доведено в теоремі 1, точки екстремуму задачі ЛП завжди знаходяться на межі багатогранника допустимих розв'язків. Це є ключовою ідеєю при розробці загального алгебраїчного симплекс-методу для розв'язку будь-якої задачі лінійного програмування.

Перехід від графічного способу розв'язку задачі ЛП до симплекс-методу пов'язаний з алгебраїчним описом вершин багатогранника допустимих розв'язків. Тому, враховуючи лінійність цільової функції і обмежень, розв'язок можна звести до вирішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Одним із методів розв'язку є метод Гауса, який є найбільш зручним у формалізації. Для використання даного методу необхідно привести задачу ЛП до стандартного вигляду, перетворивши нерівності обмежень на рівності шляхом введення додаткових змінних.

Одним із машинно-орієнтованих загальних методів розв'язку задачі ЛП, який найбільш зручно піддається формалізації, є симплекс-метод. Основна властивість симплекс-методу полягає в тому, що розв'язок задачі ЛП здійснюється ітераційно. На кожній ітерації алгоритм переходить до наступної вершини багатогранника, яка потенційно може покращити значення цільової функції. Цей процес переходу закінчується, коли подальше покращення значень цільової функції неможливе.

Процес реалізації симплекс-методу включає велику кількість однотипних громіздких і стомливих розрахунків. Це робить комп'ютер незамінним інструментом для розв'язку задач ЛП, оскільки обчислювальний алгоритм симплекс-методу дозволяє порівняно легко автоматизувати розрахунки.

Вимоги до стандартного вигляду задачі ЛП.

1) Значення всіх змінних мають бути невід'ємними.

2) Всі обмеження мають бути записані у вигляді рівностей із невід'ємною правою частиною.

3) Цільова функція повинна бути приведена до виразу, що підлягає максимізації чи мінімізації (в залежності від алгоритму реалізації методу).

Для реалізації вищезазначених вимог існую ряд простих правил.

1. Правила для вимоги 1.

Змінні, які можуть приймати від'ємне значення, замінюються на різницю двох нових невід'ємних змінних.

2. Правила для вимоги 2.

Обмеження типу нерівностей (зі знаками нерівностей ≤ або ≥) можна перетворити у рівності шляхом додавання до лівої частини нерівностей додаткових змінних.

Для обмежень типу нерівностей "≤" у ліву частину нерівності вводиться невід'ємна додаткова (залишкова) змінна, яка позначає залишок (невикористану кількість) ресурсу, перетворюючи це обмеження на рівність.

Для обмежень типу нерівностей "≥" (які зазвичай встановлюють нижню границю) у ліву частину нерівності вводиться невід'ємна додаткова (надлишкова) змінна, яка позначає перевищення значення лівої частини нерівності над границею.

Крім того, праву частину рівності завжди можна зробити невід'ємною, помноживши всю рівність на –1.

Приклади перетворень:

1.1. Заміна змінних, які можуть приймати від'ємне значення (завжди є першим кроком):

$$x_3 \text{ може бути від'ємним} => \begin{cases} x_3 = x_{31} - x_{32} \quad \textit{підстановка}! \\ x_{31} \ge 0 \\ x_{32} \ge 0 \end{cases}$$

У результаті введено дві додаткові змінні замість одної заданої, за допомогою яких реалізована підстановка у всі обмеження і цільову функцію, які містять дану змінну.

1.2. Перетворення обмежень типу нерівностей "≤":

$$x_1 + 2x_2 \le 6 \quad => \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + \varsigma_1 = 6 \\ \varsigma_1 \ge 0 \end{cases}$$

В результаті введена одна додаткова змінна.

1.3. Перетворення обмежень типу нерівностей "≥":

$$2x_1 + x_2 \ge 8 \quad => \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - \varsigma_2 = 8 \\ \varsigma_2 \ge 0 \end{cases}$$

В результаті введена одна додаткова змінна.

1.4. Перетворення обмежень типу рівностей з від'ємною правою частиною:

$$x_1 + x_2 = -5 \quad => \quad -x_1 - x_2 = 5$$

2. Правило для вимоги 3 (виконується після перетворення всіх обмежень).

$$z = 5x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\Updownarrow$$
$$z - 5x_1 - 2x_2 \to \max$$
$$-z + 5x_1 + 2x_2 \to \min$$

Приклад.
Привести до стандартної форми

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$
$$\text{при } x_1+x_2=10,\ 2x_1+3x_2 \le 5,\ 7x_1-4x_2 \le 6,\ x_2 \ge 0.$$

Маємо:
а) всі змінні невід'ємні:

$$x_1=y_1-y_2,\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0.$$

б) обмеження:

$$y_1-y_2+x_2=10$$
$$-\left[\left(-2y_1+2y_2+3x_2\right)+\varsigma_1\right]=5$$
$$7y_1-7y_2-4x_2+\varsigma_2=6$$
$$x_2, y_1, y_2, \varsigma_1, \varsigma_2 \ge 0$$

в) цільова функція:

$$z=2y_1-2y_2+3x_2 \to \min$$
$$\text{при } y_1-y_2+x_2=10,\ 2y_1-2y_2-3x_2-\varsigma_1=5,\ 7y_1-7y_2-4x_2+\varsigma_2=6,$$
$$x_2,\ y_1,\ y_2,\ \varsigma_1,\ \varsigma_2 \ge 0.$$

2. Алгоритм симплекс-методу

Суть симплекс-методу – пройтись по кутовим точкам області розв'язків. Починають із одної кутової точки – початкової, і рухаються по суміжним. Підстава для такого вибору – властивість лінійних моделей – мінімальному розв'язку завжди відповідає хоча б одна кутова точка.

Припущення:

1. Лінійна модель приведена до стандартної форми.
2. Число обмежень моделі – m, число невідомих моделі – n, $m \le n$.

Якщо прирівняти до нуля n-m змінних, то отримаємо однозначний розв'язок системи обмежень, що називається базисним (або допустимим). В базисному розв'язку нульові змінні називаються небазисними, інші – базисними. Допустимий базисний розв'язок – розв'язок із невід'ємними значеннями базисних змінних.

Змінна, що включається, (або змінна, що вводиться) – це змінна, що переходить із небазисної в базисну, змінна, що виключається, – навпаки.

Крок 1. Привести задачу до стандартної форми. Визначити початковий допустимий базисний розв'язок (прирівняти до нуля *n-m* змінних).

Крок 2. Скласти симплекс-таблицю.

Крок 3.(умова оптимальності) Із небазисних змінних обирається змінна, що покращує значення цільової функції, тобто змінна, що включається. Якщо такої немає – розв'язок оптимальний.

Крок 4. (умова допустимості) Із базисних змінних обирається змінна, що виключається.

Крок 5. (метод Гауса) Знаходиться новий базисний розв'язок, потім здійснюється перехід до кроку 3.

Формат симплекс-таблиці:

Рядок 1 – цільова функція;

Рядки із 2 по m+1 – обмеження;

Рядок 1 – базис;

Рядок із 2 по n+1 – змінні;

Рядок n+2 – результати (розв'язок) – значення цільової функції, значення обмежень.

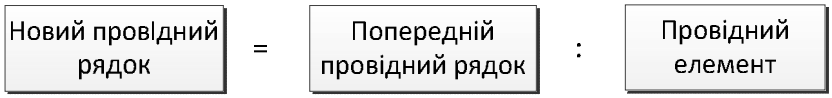
Провідний стовпець – стовпець із змінною, що включається базис (в першому рядку від'ємне значення).

Провідний рядок – рядок зі змінною, що виключається (максимально покращений розв'язок).

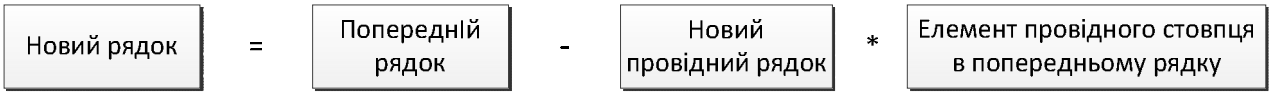
Провідний елемент – на їх перетині.

Процес обчислення нового базисного розв'язку складається з двох етапів: обчислення елементів нового провідного рядку (використовуючи перетворення Т1) і обчислення елементів інших рядків (використовуючи перетворення Т2).

Перетворення типу 1 (Т1):



Перетворення типу 2 (Т2):



3. Приклад розв'язку задачі ЛП симплекс-методом

$$z = 5x_A + 4x_B \to \max$$
$$\begin{cases} 6x_A + 4x_B \le 24 & (1) \\ x_A + 2x_B \le 6 & (2) \\ x_B \le 2 & (3) \end{cases}$$
$$x_A \ge 0,\ x_B \ge 0$$
(без одного обмеження)

Крок 1. Приводимо до стандартної форми:

$$z=5x_A+4x_B+0\varsigma_1+0\varsigma_2+0\varsigma_3\to\max$$
$$6x_A+4x_B+\varsigma_1 = 24$$
$$1x_A+2x_B+\varsigma_2 = 6$$
$$x_B+\varsigma_3 = 2$$
$$x_A,\ x_B,\ \varsigma_1,\ \varsigma_2,\ \varsigma_3 \ge 0$$

Це відповідає наступним множинам базисних і небазисних змінних: небазисні (нульові) змінні: (x_A, x_B), базисні змінні: (ς_1, ς_2, ς_3). Кількість базисних змінних дорівнює кількості обмежень.

Крок 1а. Визначаємо базисний розв'язок.

Оскільки небазисні змінні і коефіцієнти при базисних змінних в рівнянні цільової функції рівні нулю, а в формулах лівих частин рівностей-обмежень - 1, то одразу без додаткових обчислень отримуємо один допустимий розв'язок:

$$\left.\begin{array}{l} x_A = x_B = 0 \\ \varsigma_1 = 24;\ \varsigma_2 = 6;\ \varsigma_3 = 2 \end{array}\right\} z = 0$$

Крок 2. Будуємо симплекс-таблицю по стандартному вигляду:

базис	x_A	x_B	ς_1	ς_2	ς_3	розв'язок
z	**-5**	-4	0	0	0	0
ς_1	**6**	4	1	0	0	24
ς_2	1	2	0	1	0	6
ς_3	0	1	0	0	1	2

Крок 3 (умова оптимальності). Оскільки коефіцієнт при змінній x_A в формулі цільової функції більший за коефіцієнт при x_B, змінну x_A слід ввести до базисних (в цьому випадку вона стане змінною, що вводиться). Обираємо провідний стовпець – той, у якого в рядку z, найменше від'ємне значення. Це x_A, стовпець – провідний.

Якщо звернутися до наведеної вище таблиці, то змінна, що вводиться, визначається серед множини небазисних як змінна, що має найбільший невід'ємний коефіцієнт в z-рядку (оскільки розв'язується задача максимізації). Якщо всі коефіці-

єнти в z-рядку будуть невід'ємними, то подальше збільшення значення цільової функції буде неможливим; це буде означати, що досягнуто оптимального значення.

Крок 4 (умова допустимості). Для визначення змінної, що виключається, безпосередньо з таблиці, необхідно обчислити точки перетину всіх функцій обмежень з додатнім напрямком осі x_A. Координати цих точок перетину можна обчислити як відношення правих частин рівностей (стовпець «Розв'язок») до коефіцієнтів при змінній x_A в цих рівностях: 24/6=4; 6/1=6, 2/0=∞.

Мінімальне невід'ємне відношення відповідає базисній змінній ς_1. Така змінна виключається (тобто на наступній ітерації її значення дорівнюватиме нулю), а рядок – провідним.

Елемент, що знаходиться на перетині провідного стовпця і провідного рядку, назвемо провідним (в нашому випадку 6).

Крок 5 (метод Гауса). Формуємо нову симплекс-таблицю.

5.1. Новий провідний рядок обчислюється шляхом використання перетворення Т1: (новий провідний ς_1-рядок = попередній провідний ς_1-рядок / 6):

x_A ~~ς_1~~	1	4/6	1/6	0	0	4

5.2. Для інших рядків використовується перетворення Т2:
(новий z-рядок = попередній z-рядок - (-5) * новий провідний рядок)
(новий ς_2-рядок = попередній ς_2-рядок - (1) * новий провідний рядок)
(новий ς_3-рядок = попередній ς_3-рядок - (0) * новий провідний рядок):

-	z	**-5**	-4	0	0	0	0
	~~x_A~~	-5	-20/6	-5/6	0	0	-20
=	z	0	-4/6	5/6	0	0	20

5.3. Нова симплекс-таблиця має вигляд:

базис	x_A	$\mathbf{x_B}$	ς_1	ς_2	ς_3	розв'язок
z	0	-4/6	5/6	0	0	20
x_A	1	4/6	1/6	0	0	4
ς_2	0	**8/6**	-1/6	1	0	2
ς_3	0	1	0	0	1	2

Нова таблиця має ті ж властивості, що й початкова: тільки небазисні змінні (x_B і ς_1) дорівнюють нулю, в стовпці «Розв'язок» представлено новий базисний розв'язок (x_A = 4, ς_2 = 2, ς_3 = 2) разом з новим значенням цільової функції z = 20.

Крок 3. (2)

Із останньої таблиці видно, що отриманий базисний розв'язок ще не є оптимальним, оскільки в z-рядку змінна x_B має від'ємний коефіцієнт (робимо її змінною, що вводиться), це і буде наступним провідним стовпцем.

Крок 4. (2): Далі визначимо змінно, що виключається. Для цього обчислимо відношення правих частин рівностей, що відповідають обмеженням, до коефіцієнтів, що стоять при x_B в цих рівностях: 4/(4/6)=6; 2/(8/6)=1,5; 2/1=2. Обчислення показують, що мінімальне (невід'ємне) відношення відповідає змінній ς_2, яка виключається, а відповідний рядок – стає провідним; при цьому значення відношення (= 1,5) дорівнює новому значенню змінної x_B. Таким чином, x_B – провідний стовпець.ς_2 – провідний рядок, 8/6 – провідний елемент.

Крок 5. (2) Обчислюємо елементи нової симплекс-таблиці.

5.1.(2). Новий провідний рядок:

x_B	0	1	-1/8	6/8	0	1,5

5.2.(2)
(3)

базис	x_A	x_B	ς_1	ς_2	ς_3	розв'язок
z	0	0	9/12	1/2	0	**21**
x_A	1	0	1/4	-1/2	0	**3**
x_B	0	1	-1/8	6/8	0	**1,5**
ς_3	0	0	1/8	-6/8	1	0,5

Оскільки z-рядок не має від'ємних коефіцієнтів, що відповідають небазисним змінним ς_1 і ς_2, отриманий розв'язок є оптимальним.

Оптимальний розв'язок задачі ЛП можна «зчитати» із симплекс-таблиці наступним чином. Невід'ємні (базисні) змінні представлені в стовпці «Базис», а їх значення – в стовпці «Розв'язок». В даному прикладі маємо наступне: z=21 при x_A=3, x_B=1,5.

По третьому обмеженню запас 0,5.

Тема 2. Умовна оптимізація. Лінійні моделі

Лекція 3. Двоїстість і особливі випадки задач лінійного програмування

1. ***Двоїста задача.***
2. ***Виродженість.***
3. ***Багатоальтернативність.***
4. ***Необмеженість.***
5. ***Відсутність рішення задачі ЛП.***

1. Двоїста задача

Вихідна задача лінійного програмування називається прямою. Двоїсте завдання - це завдання, яке формується за допомогою певних правил безпосередньо з прямої задачі.

У відношенні подвійності задачі ЛП, якщо одна задача є задачею максимізації, то друга обов'язково є завданням мінімізації. З цією точки зору існує таке співвідношення між значеннями цільових функцій двох завдань. Для будь-якої пари допустимих рішень прямої та двоїстої задач

$$\begin{pmatrix} значення\,цільової\ функції \\ в\ задачі\ максимізації \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} значення\ цільової\ функції \\ в\ задачі\ мінімізації \end{pmatrix}.$$

У точці оптимуму це співвідношення приймає вигляд суворої рівності.

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \begin{Bmatrix} \min \\ \max \end{Bmatrix} \qquad \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \begin{Bmatrix} \max \\ \min \end{Bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1,m} \quad => \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \begin{pmatrix} \le \\ \ge \end{pmatrix} c_j,\ j = \overline{1,n}$$

$$x_j \ge 0,\ b_i \ge 0 \qquad y_i - цінність\ \ ресурсів$$

Приводимо задачу лінійного програмування до стандартної форми (n змінних, m обмежень):

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to extr$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ x_j \ge 0,\ i = 1,...,m$$

По прямій задачі будується подвійність за правилами:

1. Max змінюється на Min і навпаки.
2. В подвійній задачі на Max всі обмеження ≤, на Min - ≥.
3. В подвійній задачі не існує обмежень на невід'ємність змінних.
4. Таблиця змін має такий вигляд:

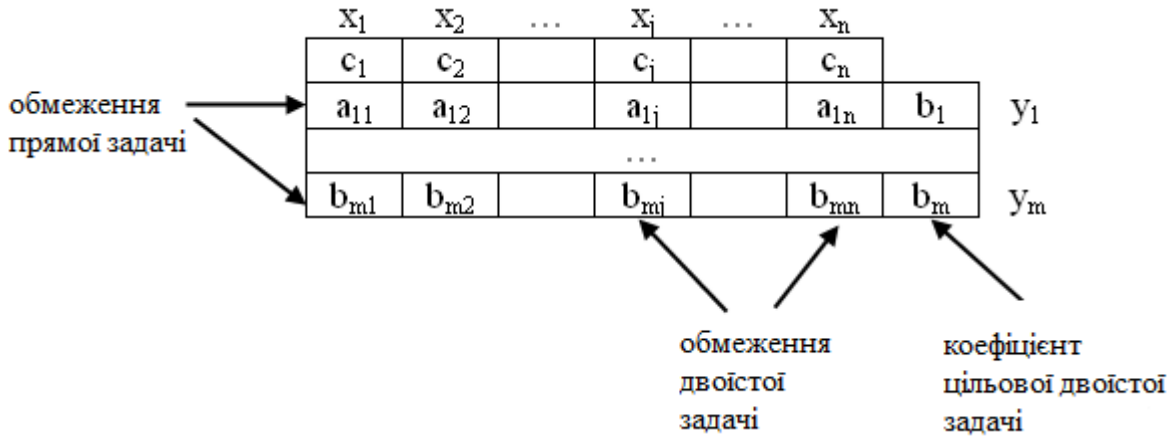


Рисунок 1

Приклад.

$$Z=x_1+2x_2\rightarrow\min$$
$$x_1+x_2\geq 3$$
$$4x_1+5x_2\leq 6$$
$$x_1\geq 0$$

стандартна форма:

$$x_2=x_3-x_4;\ \ x_3,x_4\geq 0$$
$$z=x_1+2x_3-2x_4+0x_5+0x_6\rightarrow\min$$
$$x_1+x_3-x_4-x_5=3$$
$$4x_1+5x_3-5x_4+x_6=6$$
$$x_1,x_3,x_4,x_5,x_6\geq 0$$

подвійна задача:

$$w=3y_1+6y_2\rightarrow\max$$
$$y_1+4y_2\leq 1 \quad x_1$$
$$y_1+5y_2\leq 2 \quad x_3$$
$$-y_1-5y_2\leq -2 \quad x_4$$
$$-y_1\leq 0 \ \Rightarrow\ y1\geq 0 \quad x_5$$
$$y_2\leq 0 \quad x_6$$

2. Виродженість

У ході виконання симплекс-методу перевірка умови допустимості може привести до неоднозначного вибору змінної. У цьому випадку на наступній ітерації одна або декілька базисних змінних візьмуть нульове значення. Тоді нове рішення буде виродженим.

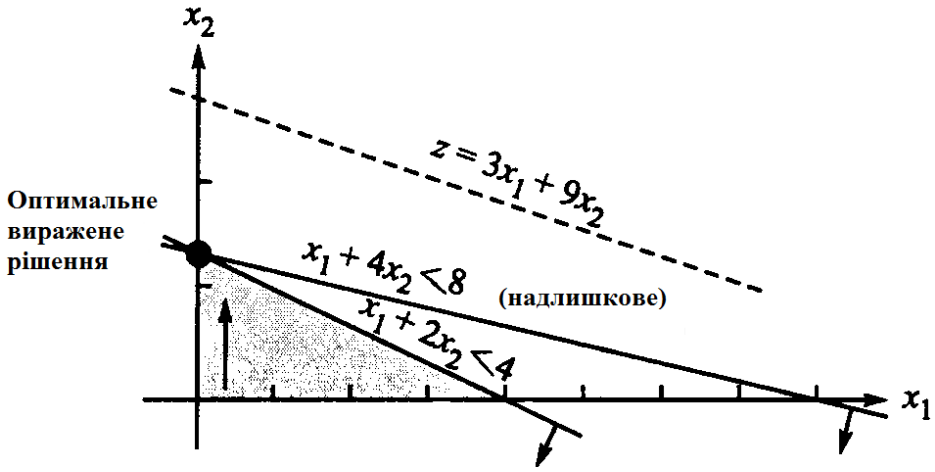
Причина – наявність надлишкових обмежень.

Недоліки:

а) надлишковість симплекс-таблиць;

б) можливість зациклення програми.

$$\begin{cases} z = 3x_1 + 9x_2 \to \max \\ x_1 + 4x_2 \le 8 \qquad (1) \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \qquad (2) \end{cases}$$



Боротьба: попередній аналіз області допустимих значень.

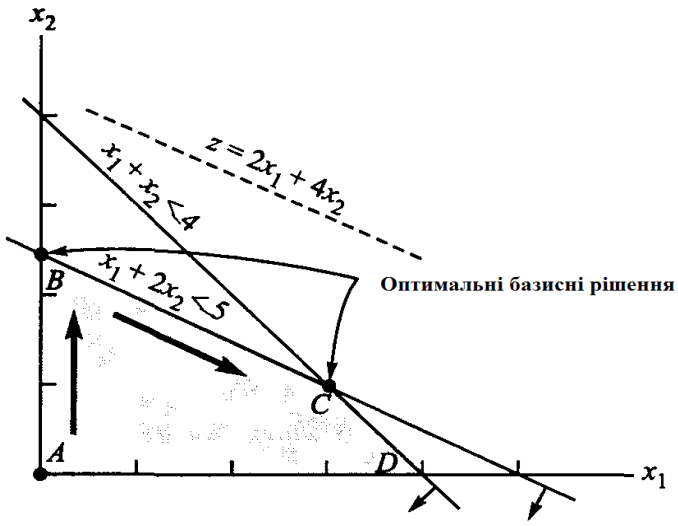
3. Багатоальтернативність

Коли пряма (якщо розглядається двомірна задача ЛП, у загальному випадку – гіперплощина), що представляє цільову функцію, паралельна прямій (гіперплощині), відповідно зв'язує нерівності (яке в точці оптимуму виконується як точне рівність), цільова функція приймає одне і те ж оптимальне значення на деякій множині точок межі простору рішень. Ці рішення називаються альтернативними оптимальними рішеннями. Наступний приклад показує безмежність таких рішень (якщо вони існують) . Цей приклад також проілюструє практичну значимість альтернативних рішень.

Причина - цільова функція і з обмежень для критичного ресурса паралельні.

$$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$$



Визначається двома рівнозначними точками в симплекс-таблиці.

На першій ітерації отримуємо оптимальне рішення x1 = 0, x2 = 5/2 і z = 10, яке відповідає точці B. Як дізнатися із симплекс-таблиці, що існує альтернативне оптимальне рішення? Подивіться на коефіцієнти небазисних змінних в z-рядку першої ітерації. Коефіцієнт небазисної змінної x1 дорівнює нулю, це означає, що дану змінну можна ввести в базис без зміни значення цільової функції, але значення самої змінної x1 зміниться. Введення змінної x1 в базисне рішення виконано на другій ітерації, при цьому з базису виключена змінна x4. Отримано нове рішення x1 = 3, x2 = 1, z = 10, яке відповідає точці C.

4. Необмеженість

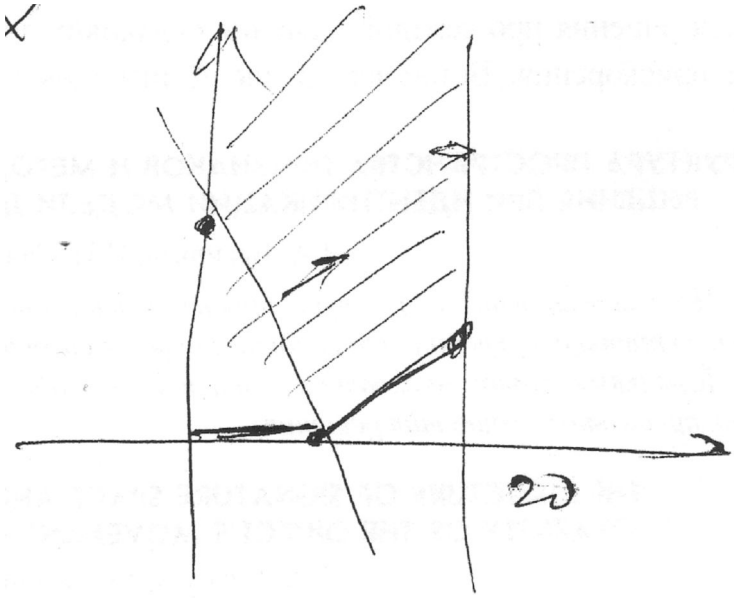
У деяких завданнях ЛП значення змінних можуть необмежено зростати без порушення обмежень. Це говорить про те, що простір допустимих рішень не обмежений принаймні по одному напрямку. В результаті цього цільова функція може зростати (завдання максимізації) або спадати (задача мінімізації) необмежено. Необмеженість рішення задачі свідчить тільки про одне: модель розроблена не досить коректно. Типові помилки, що призводять до побудови таких моделей, полягають в тому, що не враховуються обмеження, які не є надлишковими, і не точно оцінюють параметри (коефіцієнти) обмежень.

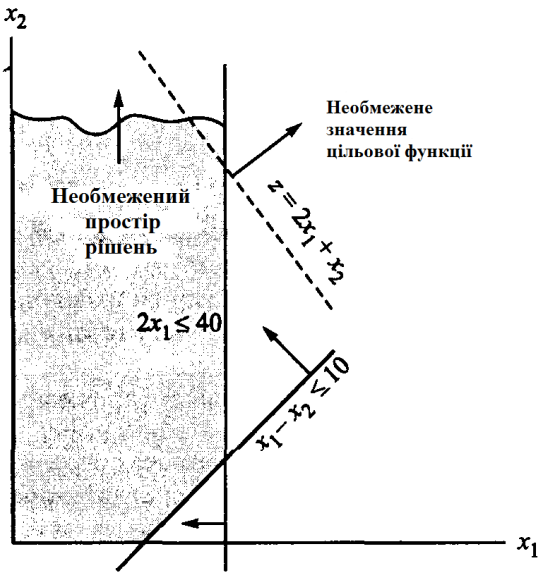
Причини: не врахували якесь обмеження або помилкові оцінки параметрів.

Недолік: симплекс-процес може бути нескінченним.

Боротьба: аналіз коефіцієнтів симплекс-таблиці.

$$z = 2x_1 + x_2 \to \max$$
$$x_1 - x_2 \le 10$$
$$x_1 \le 20$$





6. Відсутність рішення задачі ЛП

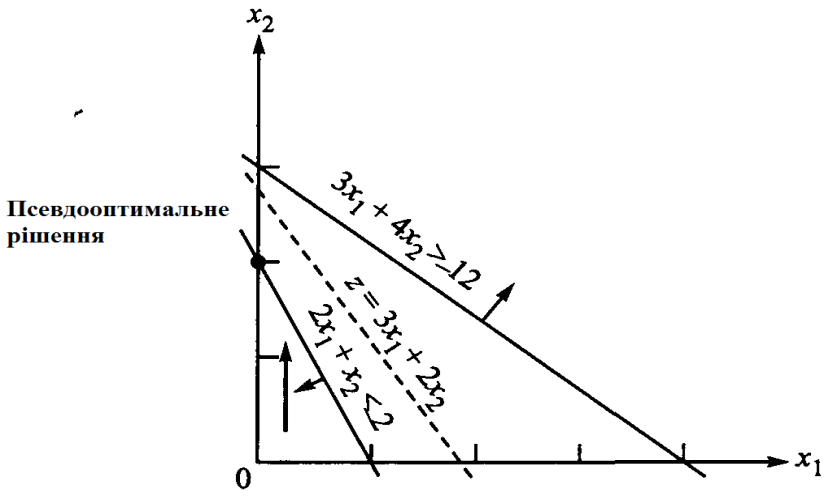
Якщо обмеження задачі ЛП несумісні (тобто вони не можуть виконуватися одночасно), то задача не має допустимих рішень. Така ситуація не може виникнути, якщо всі нерівності, складові системи обмежень, мають тип "≤" з невід'ємними правими частинами, так як в цьому випадку додаткові змінні можуть скласти допустиме рішення. Для других типів обмежень використовуються штучні змінні. І хоча в оптимальному вирішенні всі штучні змінні в силу штрафів рівні нулю, такий результат можливий тільки тоді, коли задача має непорожній простір допустимих рішень. В іншому випадку в оптимальному рішенні буде присутня хоча б одна позитивна штучна змінна. З практичної точки зору відсутність допустимих рішень свідчить про те, що завдання погано сформульовано.

Причини:

- Некоректна модель;

- Рознесення обмежень у часі.

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12 \end{cases}$$


Псевдооптимальне рішення
x_2
x_1
0
$3x_1 + 4x_2 \geq 12$
$z = 3x_1 + 2x_2$
$2x_1 + x_2 \leq 2$

Тема 2. Умовна оптимізація. Лінійні моделі

Лекція 4. Лінійна модель задачі маршрутизації (транспортна задача)

1. ***Постановка збалансованої задачі маршрутизації.***
2. ***Транспортні таблиці.***
3. ***Метод північно-західного кута для знаходження початкового рішення.***
4. ***Метод потенціалів.***

1. Постановка збалансованої задачі маршрутизації

Транспортна задача - це задача щодо транспортування з декількох вихідних пунктів у кілька заданих з різними варіантами маршрутів. У мережах транспортна задача використовується при маршрутизації і являє собою задачу лінійного програмування великої розмірності. Отже, симплекс-метод небажаний. Якщо доставка збалансована (тобто скільки відправили, стільки і можемо прийняти), то зручно використовувати метод потенціалів.

Постановка задачі (збалансованої): З вузла А у вузол В треба переслати Q ГБ інформації з мінімальними витратами обраного ресурсу. У вузлі А інформація розподілена по m каналам, i-й канал ($i = \overline{1,m}$) передає a_i ГБ ($\sum_{i=1}^{m} a_i = Q$). У вузлі В її можуть прийняти n каналів по b_j ГБ ($j = \overline{1,n}$), $\sum_{j=1}^{n} b_j = Q$. При передачі по маршруту з i в j блоку інформації розміром 1 ГБ, витрачається c_{ij} одиниць ресурсу.

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,n$$

$$\text{при } \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1,m$$

$$x_{i,j} \geq 0$$

m*n – число змінних,
m+n – число обмежень ”=”

2. Приклад складання транспортної таблиці

Послідовність етапів алгоритму вирішення транспортної задачі в точності повторює аналогічну послідовність етапів симплексного алгоритму:

Крок 1. Визначаємо початкове базисне допустиме рішення, потім переходимо до виконання другого етапу.

Крок 2. На підставі умови оптимальності симплекс-методу серед усіх небазисних змінних визначаємо ту, яка вводиться в базис. Якщо всі небазисні змінні задовольняють умови оптимальності, обчислення закінчуються; в іншому випадку переходимо до третього етапу.

Крок 3. За допомогою умови допустимості симплекс-методу серед поточних базисних змінних визначаємо ту, яка виключається. Потім знаходимо нове базисне рішення. Повертаємося до другого етапу.

Умова збалансованості: $\sum a_i = \sum b_j$

$$m=3;\ n=2;$$

$$a=(a_i)=(1000;\ 1500;\ 1200)$$

$$b=(b_j)=(2300;\ 1400)$$

$$c_{ij}=\begin{pmatrix} 80 & 215 \\ 100 & 108 \\ 102 & 68 \end{pmatrix}$$

Транспортна таблиця:

a_i \ b_j	2300	1400
1000	80 x_{11}	215 x_{12}
1500	100 x_{21}	108 x_{22}
1200	102 x_{31}	68 x_{32}

$$Z=80x_{11}+215x_{12}+\ldots\rightarrow\min$$

при

$$80x_{11}+215x_{12}=1000 \quad (1)$$

$$80x_{11}+100x_{21}+102x_{31}=2300 \quad (2)$$

$$\ldots \quad (5)$$

2.1 Незбалансована транспортна таблиця

Порушується умова збалансованості.

Наприклад, зменшимо обсяг по 3-му каналу до 1000 ГБ. Тоді, для збалансованості, додаємо 4-й фіктивний канал

200	0	0

Якщо змінюється j, то додаємо стовпець з 0-ми вартостями.

3. Метод північно-західного кута для знаходження початкового рішення

Алгоритм:

Крок 1. Привласнюємо x11 максимальне значення. Тобто можемо відправити за маршрутом 1000 од., а отримати - 2300 од. Тому максимальне завантаження маршруту - 1000 од. Ставимо 1000 в клітинку x11.

Крок 2. Викреслюємо рядок або стовпець з реалізованою пропозицією (тільки один елемент) якщо в них присутній 0.

Крок 3. Викреслений стовпець → на схід, викреслений рядок → на південь. Так як в стовпчику залишилося 1300, від 1500 віднімаємо це значення, залишається 200. Таким чином стовпець реалізований повністю. Ставимо 1300 в x21. Рухаємося на схід. Від 1400 віднімаємо 200. У рядку залишається 0, її викреслюємо і ставимо 200 в x22.

Крок 4. Залишився невикресленим один ряд → кінець. У рядку й стовпчику по 1200, тобто є варіант рішення задачі (неоптимальний).

	0 ~~1300~~ ~~2300~~	1200 ~~1400~~
0 ~~1000~~	80	215
	x_{11} **1000**	x_{12}
0 ~~200~~ ~~1500~~	100	108
	x_{21} **1300**	x_{22} **200**
1200	102 x_{31}	68 x_{32}

Тепер можна підрахувати сумарну вартість транспортування по всіх маршрутах: $1000x_{11}+1300x_{21}+200x_{22}+1200x_{32}=\ldots$

4. Метод потенціалів

1. Складаємо транспортну таблицю.

2. Знаходимо початкове рішення, наприклад, за методом північно-західного кута. Заповнені клітинки складають базис, незаповнені - небазисні.

3. Використовуємо метод потенціалів, алгоритм якого наведено нижче. Один цикл методу потенціалів видаляє одну базисну клітку і замість неї вводить в базис одну з небазисних. Циклів може бути не більше ніж небазисних клітин.

Приклад. a = (15; 25; 5), b=(5; 15; 15; 10), $c_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 20 & 11 \\ 12 & 7 & 9 & 20 \\ 0 & 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$.

Крок 1. Складаємо транспортну таблицю.

Крок 2. Знаходимо початкове рішення методом північно-західного кута.

i \ j	5	5 ~~15~~	15	10
10 ~~15~~	5	10		
5 ~~20~~ ~~25~~		5	15	5
5				5

Це початковий варіант: Z=5*10+10*0+5*7+15*9+5*20+5*18=410 (одиниць ресурсу).

Крок 3.1. Визначаємо клітинку, що вводиться в базис. Для цього рядкам і стовпчикам присвоюємо потенціали u_i та v_j (i – номер рядка, j – номер стовпчика). Для базисных клітинок x_{ij} потенціали повинні задовільняти рівнянню:

$$u_i+v_j=c_{ij},$$

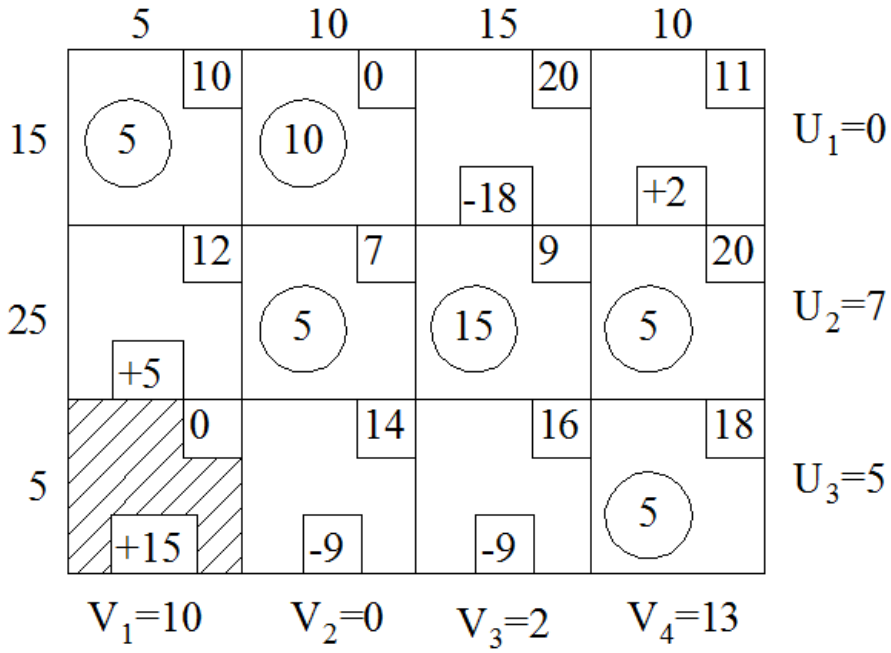
$u_1=0$ – завжди.

Далі, використовуючи знайдені значення потенціалів, для кожної небазисної клітинки обчислюються величини:

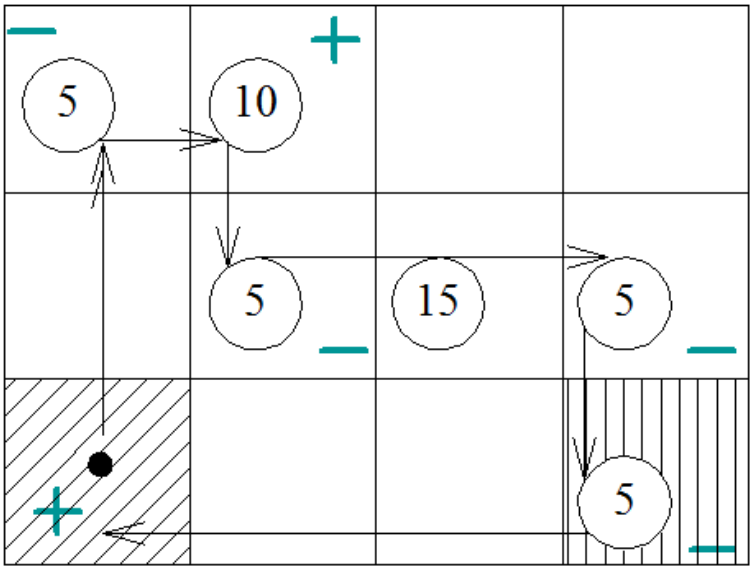
$$\bar{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}.$$

Якщо усі $\bar{c}_{ij} \le 0$, то рішення оптимальне.

У базис вводится клітинка з максимальним (додатним) значенням $\bar{c}_{ij}$.



Крок 3.2. Знаходимо клітинку, що виводиться з базису. Для цього шукаємо цикл, у якого повороти на 90º, тільки в базисних клітинках і обов'язково в тих які вводяться.

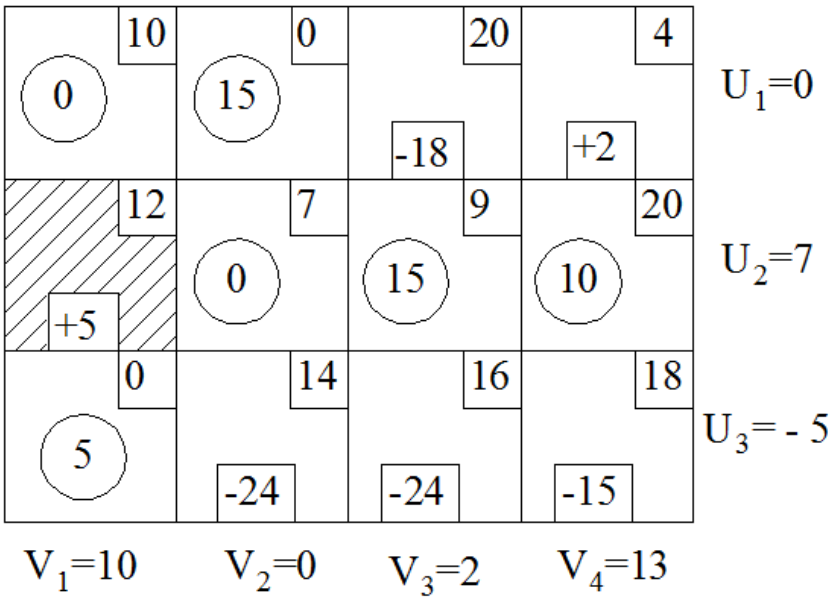


У новій клітинці ставимо «+», далі чергуємо по циклу з «-». Із клітинок зі знаком «-» вибираємо мінімальну, відкидаємо, а її значення по поворотам додамо або віднімемо.

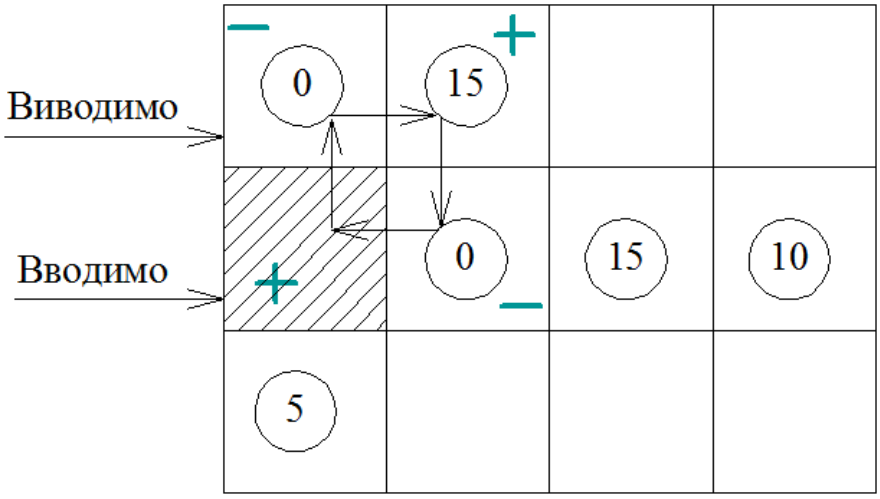
Крок 3.3. Новий базис:

0	15		
	0	15	10
5			

Крок 3.1. (2):



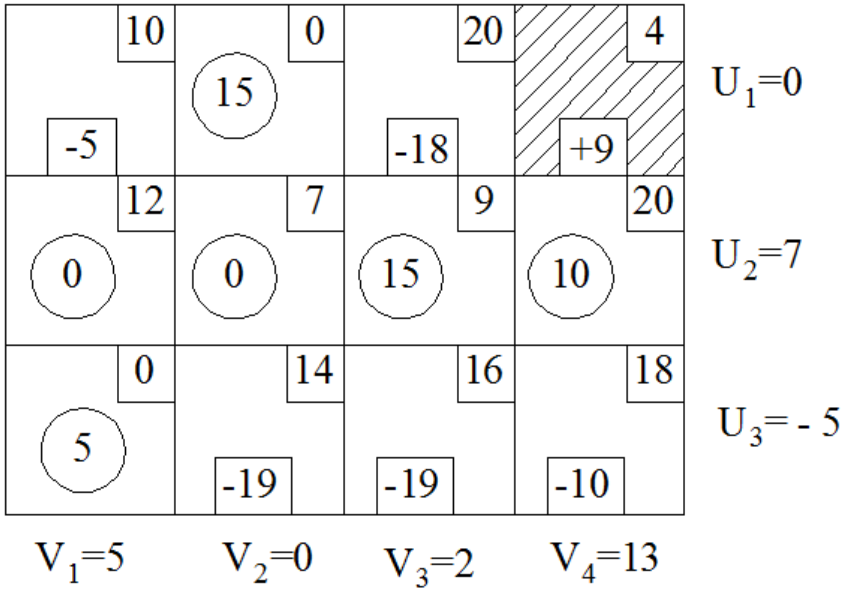
Крок 3.2. (3):



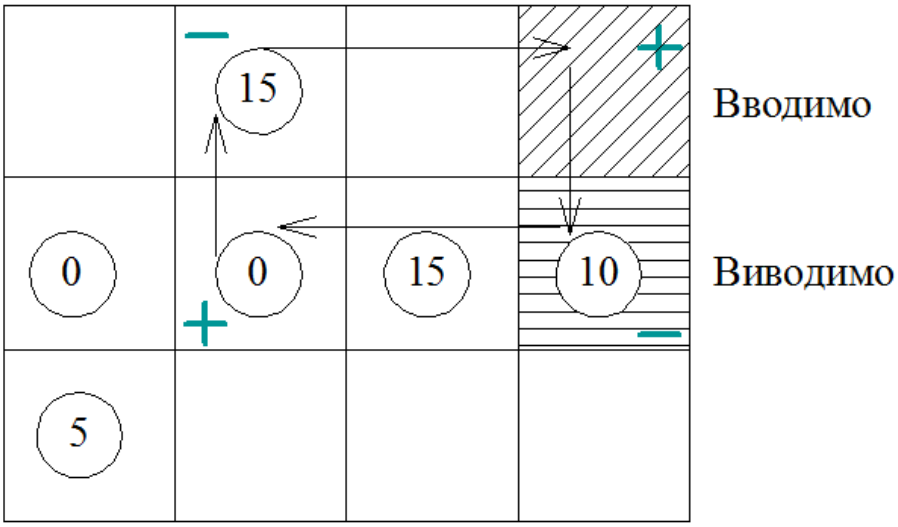
C=335 (одиниць ресурсу)

Крок 3.1. (4) Новий базис:

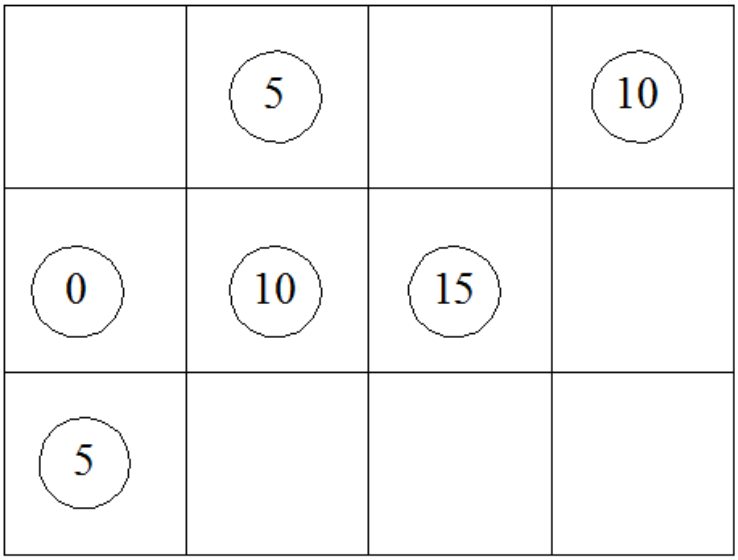
	15		
0	0	15	10
5			


10
0
20
4
15
-5
-18
+9
12
7
9
20
0
0
15
10
0
14
16
18
5
-19
-19
-10
U1=0
U2=7
U3= - 5
V1=5
V2=0
V3=2
V4=13

Крок 3.2. (4)

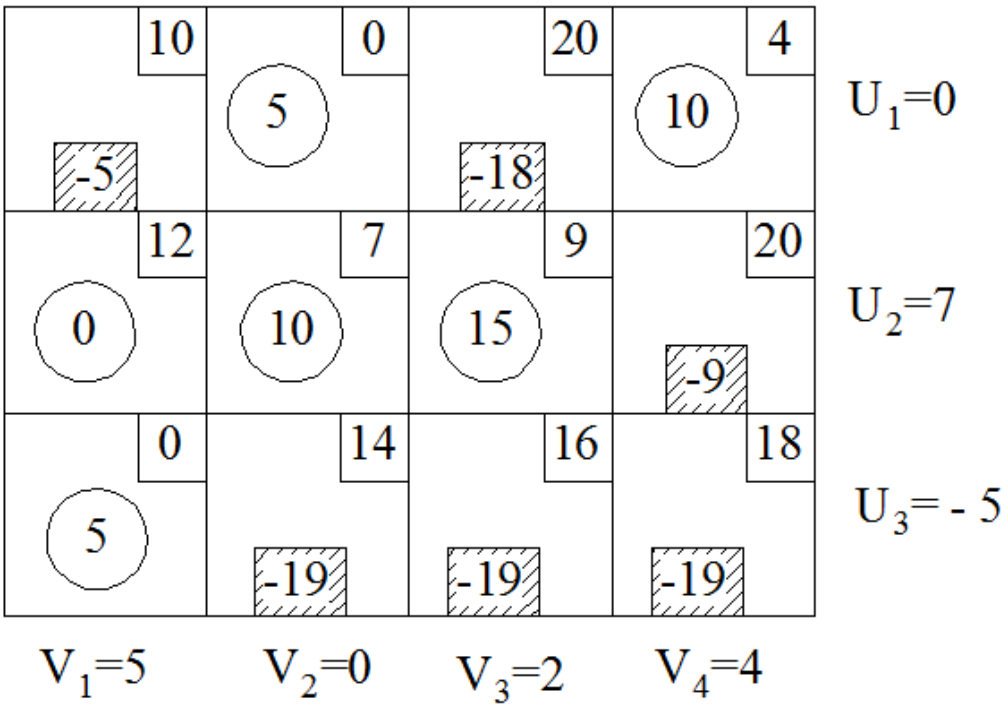

15
0
0
15
10
5
Вводимо
Виводимо

Крок 3.3. (4)



C=315 (одиниць ресурсу)

Крок 3.1. (5)



Оскільки усі $\bar{c}_{ij} \le 0$, то результати, отримані на кроці 3.3 (4) являються рішенням задачі.

Тема 3. Мережеве моделювання

Лекція 1. Знаходження оптимальних маршрутів

1. ***Постановка завдання мінімізації мережі.***
2. ***Алгоритм Краскала.***
3. ***Постановка задачі знаходження мінімальної відстані в мережі.***
4. ***Алгоритм Дейкстра.***

1. Постановка завдання мінімізації мережі

Між N віддаленими підмережами (S1, ..., SN) МСС необхідно прокласти оптоволоконний кабель. Витрати на прокладку кабелю між підмережами Si і Sj складають Cij (умов. од.). Всі підмережі рівноправні. Мінімізувати витрати на прокладку кабелю.

2. Алгоритм Краскала

Являє собою алгоритм побудови мінімального остовного дерева зваженого зв'язкового неорієнтованого графа: на вході алгоритму мається на увазі наявність готового навантаженого графа, а результатом роботи алгоритму є таблиця маршрутів (мінімальні відстані між усіма вершинами графа).

Крок 1. Визначаємо безліч номерів підмереж: M = Ø - під'єднанні підмережі, B = {1, 2, ..., N} - не під'єднанні вузли (підмережі), C = Ø - безліч вибраних маршрутів прокладки кабелю.

Крок 2. Шукаємо мінімальне ребро:

$$C_{i_0 j_0} = \min_{i,j}\{C_{i,j}\};\ B = B - \{i_0, j_0\};\ k = 2;\ C = \{C_{i_0 j_0}\};\ M = \{i_0, j_0\}$$

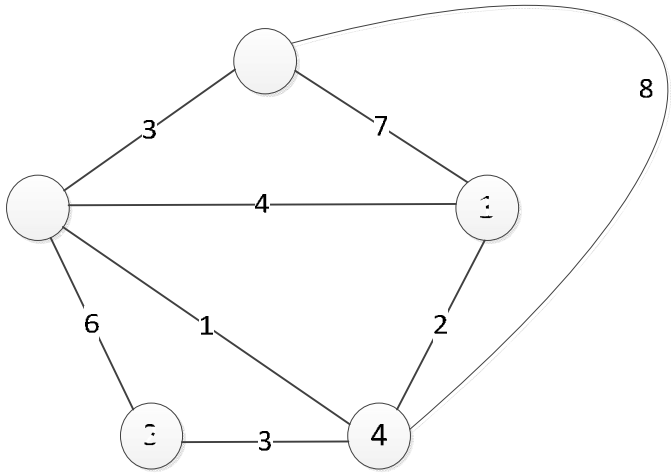
Крок 3. (k-я ітерація) Пошук найближчої нерозподіленої вершини графа:

$$K=k+1, \text{ якщо } k>N - \text{вихід},$$

$$C_{i_k j_k} = \min_{\substack{i\in M \\ j\in B}}\{C_{i,j}\}.$$

Результатом є безліч мінімальних витрат C: $C_{min} = \sum_{C_{i,j}\in C} C_{i,j}$.

Приклад.



1) M={1, 4}, B={2, 3, 5}, C={C_{14}}.
2) Між M і B наймінімальніша відстань – 2 (4-3):

M={1,4,3}, B={2,5}, C={C_{14}; C_{43}}.

3) Між M і B наймінімальніша відстань – 3 (4-5; 2-1), обираємо будь-яке:

M={1,4,3,2}, B={5}, C={C_{14}; C_{43}; C_{12}}.

4) Вершина 5 ближче за все до 4, тобто:

M={1,4,3,2,5}, B=Ø, C={C_{14}, C_{43}, C_{12}, C_{45}},

C_{min}=1+2+3+3=9 (од.)

Рішення з таблицею маршрутів: стовпці M, рядки B, шукаємо мінімальні елементи на перетині M і B, далі за алгоритмом:

M / B	1	2	3	4	5
1	x	3	4	1	6
2	3	x	7	8	∞
3	4	7	x	2	∞
4	1	8	2	x	3
5	6	∞	∞	3	x

3. Постановка задачі знаходження мінімальної відстані в мережі

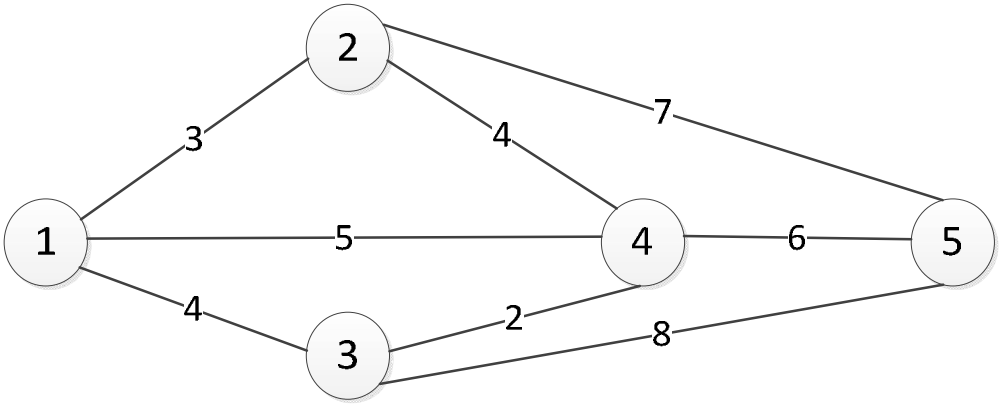
Є N мережевих вузлів, пронумерованих від 1 до N. Необхідно передати повідомлення з вузла 1 до вузла N з мінімальними витратами мережевого ресурсу, якщо витрати при передачі з вузла i у вузол j дорівнюють dij (i <j). Передбачається, що вузли впорядковані і повідомлення може бути передано далі тільки на вузол з великим номером (це можливо, оскільки передбачається мережу без циклів).

4. Алгоритм Дейкстра

Крок 1. Нехай u_j – довжина мінімального маршруту з вузла 1 у вузол j; j=0; u_1=0.

Крок 2. j=j+1. Якщо j>N, то u_N – довжина маршруту, котрий шукаємо.
Крок 3. $u_j = \min\limits_{i<j}\{u_i + d_{ij}\}$

Приклад.



1) $u_1=0$
2) $u_2=\min\{u_1+d_{12}\}=3$
3) $u_3=\min\{u_1+d_{13}\}=4$
4) $u_4=\min\{u_1+d_{14};\ u_2+d_{24};\ u_3+d_{34};\}=\min\{0+5;\ 3+4;\ 4+2\}=5$
5) $u_5=\min\{u_2+d_{25};\ u_3+d_{35};\ u_4+d_{45};\}=\min\{3+7;\ 4+8;\ 5+6\}=10$
Шлях 5→2→1=10 (од.)

Тема 3. Мережеве моделювання

Лекція 2. Алгоритм Флойда

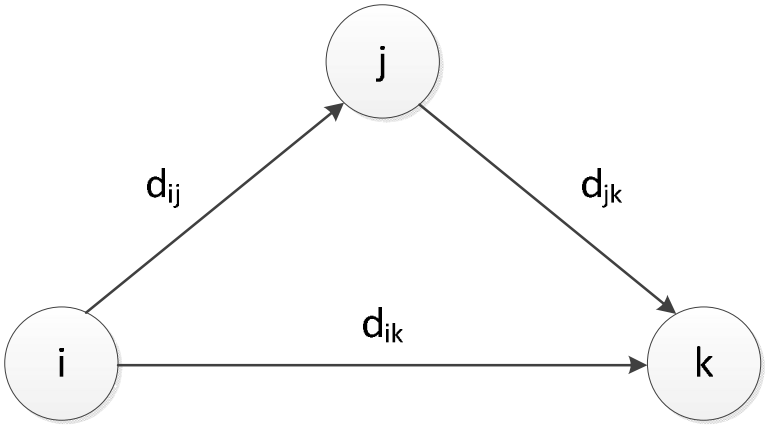
1. ***Постановка задачі маршрутизації.***
2. ***Алгоритм Флойда.***
3. ***Приклад рішення задачі алгоритмом Флойда.***

1. Постановка задачі маршрутизації.

Маємо N мережевих вузлів, пронумерованих від 1 до N. Необхідно передати повідомлення з вузла 1 до вузла N з мінімальними витратами мережевого ресурсу, якщо затрати при передачі з вузла i у вузол j рівні d_{ij} (i<j). Допускається існування циклів в мережі.

2. Алгоритм Флойда.

Основним елементом алгоритму є трикутний оператор.



Якщо $d_{ij}+d_{jk}<d_{ik}$, то шлях i→k змінюємо на i→j→k.

Крок 0. Визначаємо D_0 – матрицю відстаней и S_0 – матрицю послідовностей вузлів. Визначаємо номер кроку: К=0.

Крок К.

1) К=К+1, якщо К>N (числа вузлів), то алгоритм закінчений.

2) Застосовуємо трикутний оператор до всіх i, j ≠ k, i ≠ j. Якщо $d_{ik}+d_{kj}<d_{ij}$, то:

2а) в матриці D_{k-1} змінюємо d_{ij} на суму $d_{ik}+d_{kj}$

2б) в матриці S_{k-1} змінюємо S_{ij} на К.

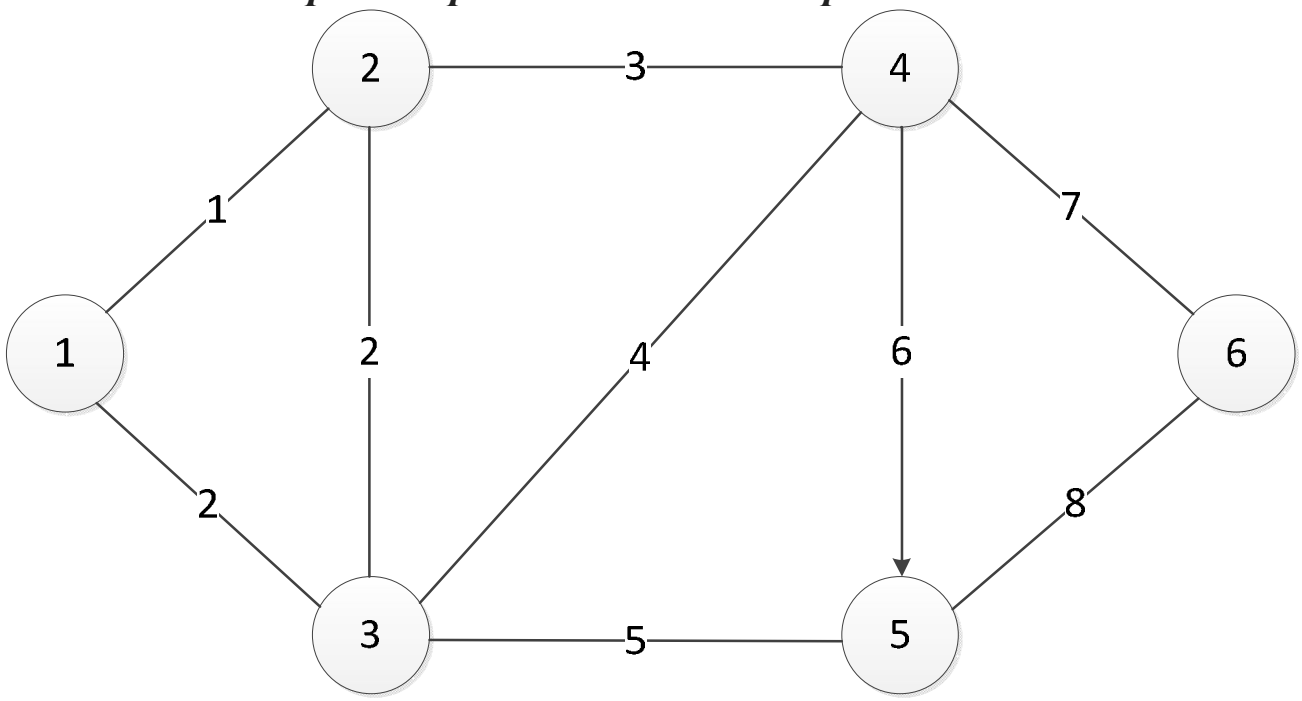
3) Позначаємо матриці $D_k=D_{k-1}$; $S_k=S_{k-1}$ і переходимо до наступного кроку.

Результат роботи алгоритму.

1) Элемент d_{ij} матриці D_k – найкоротша відстань з і в j.

2) Проміжні вузли з і в j визначаються згідно матриці S_k: якщо $s_{ij}=k$ => $i \to k \to j$, якщо $s_{ik}=k$, $s_{kj}=j$ – все, інакше продовжуємо за цією ж схемою.

3. Приклад рішення задачі алгоритмом Флойда.



Матриця D

	1	2	3	4	5	6
1	-	1	2	~~∞~~ 4	∞	∞
2	1	-	2	3	∞	∞
3	2	2	-	4	5	∞
4	~~∞~~ 4	3	4	-	6	7
5	∞	∞	5	∞	-	8
6	∞	∞	∞	7	8	-

Матриця S

	1	2	3	4	5	6
1	-	2	3	~~4~~ 2	5	6
2	1	-	3	4	5	6
3	1	2	-	4	5	6
4	2 ~~1~~	2	3	-	5	6
5	1	2	3	4	-	6
6	1	2	3	4	5	-

Крок 1. К=1.

$d_{i1}+d_{1j}<d_{ij}$

i,j=4,5,6 - ∞ => не покращиться

$d_{32}=d_{23}=2$ => не покращиться

Крок 2. К=2.

$d_{i2}+d_{2j}<d_{ij}$

i,j=5,6 - ∞ => не покращиться

$4=d_{34}=d_{43} < d_{32}+d_{24}=2+3=5$ -

$2=d_{31}=d_{13}$ – не покращиться

$\infty=d_{14}=d_{41} > d_{12}+d_{24}=1+3=4$ +

ТЕМА 4. МОДЕЛЮВАННЯ АГРЕГОВАНОГО ТРАФІКУ

Лекція 1.
Визначення статистичних характеристик точкового джерела еластичного трафіку

Розглянемо інформаційно-телекомунікаційну мережу, що має I точкових джерел еластичного трафіку (ТДЕТ) [61]. Припустимо, що i-те джерело ($i = \overline{1,I}$) характеризується випадковим процесом $V_i(t)$, котрий визначає сімейство випадкових функцій швидкості передачі інформації конкретних сеансів. Даний стохастичний процес, що розглядається в перебігу деякого часового інтервалу $[0,T_i]$, можна охарактеризувати такими ключовими параметрами [21]:

$V_i^{(\max)} = \max\limits_{t\in[0,T_i]} V_i(t)$ – піковою швидкістю передачі i-го ТДЕТ;

$V_i^{(cp)} = \int\limits_0^{T_i} V_i(t)\,dt$ – середньою швидкістю передачі (математичним сподіванням) i-го ТДЕТ;

$k_i^{(p)} = \dfrac{V_i^{(\max)}}{V_i^{(cp)}}$ – коефіцієнтом пачковості [21], котрий визначає співвідношення між величинами пікової і середньої швидкості (величина, зворотна коефіцієнту пачковості, називається коефіцієнтом можливого заповнення – $k_i^{(zap)} = \left(k_i^{(p)}\right)^{-1}$);

$T_i^{(\max)}$ – тривалістю пікового навантаження.

Припустимо також, що об'єм інформації, переданої за час $t \in [0,T_i]$, характеризується випадковою величиною $W_i(t)$ з максимально можливим значенням

$$W_i^{(\max)} = V_i^{(\max)} \cdot T_i^{(\max)}.$$

Тоді

$$V_i(t) = \frac{dW_i(t)}{dt}.$$

Розглянемо ймовірність досягнення пікової швидкості передачі трафіку *i*-го ТДЕТ на розглядаємому часовому інтервалі $[0, T_i]$:

$$p_i = P\left(V_i(t) = V_i^{(\max)} \right).$$

Дана ймовірність характеризує не тільки швидкість передачі інформації, але і її об'єми, що передаються:

$$V_i(t) = V_i^{(\max)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(V_i(t) \cdot T_i^{(\max)} = V_i^{(\max)} \cdot T_i^{(\max)} \right) \equiv \left(W_i(t) = W_i^{(\max)} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_i = P\left(W_i(t) = W_i^{(\max)} \right).$$

Розіб'ємо часовий інтервал $[0, T_i]$ на дві підмножини вкладених інтервалів $\Im_i^{(1)}$ і $\Im_i^{(2)}$ таким чином (рис. 1):

$$\Im_i^{(1)} \cup \Im_i^{(2)} = [0, T_i]; \;\; \Im_i^{(1)} \cap \Im_i^{(2)} = \varnothing;$$

$$\forall t^{(1)} \in \left[t_i'^{(1)}; t_i''^{(1)} \right] \subset \Im_i^{(1)} \Rightarrow V_i\left(t^{(1)} \right) = V_i^{(\max)};$$

$$\forall t^{(2)} \in \left[t_i'^{(2)}; t_i''^{(2)} \right] \subset \Im_i^{(2)} \Rightarrow V_i\left(t^{(2)} \right) < V_i^{(\max)}.$$

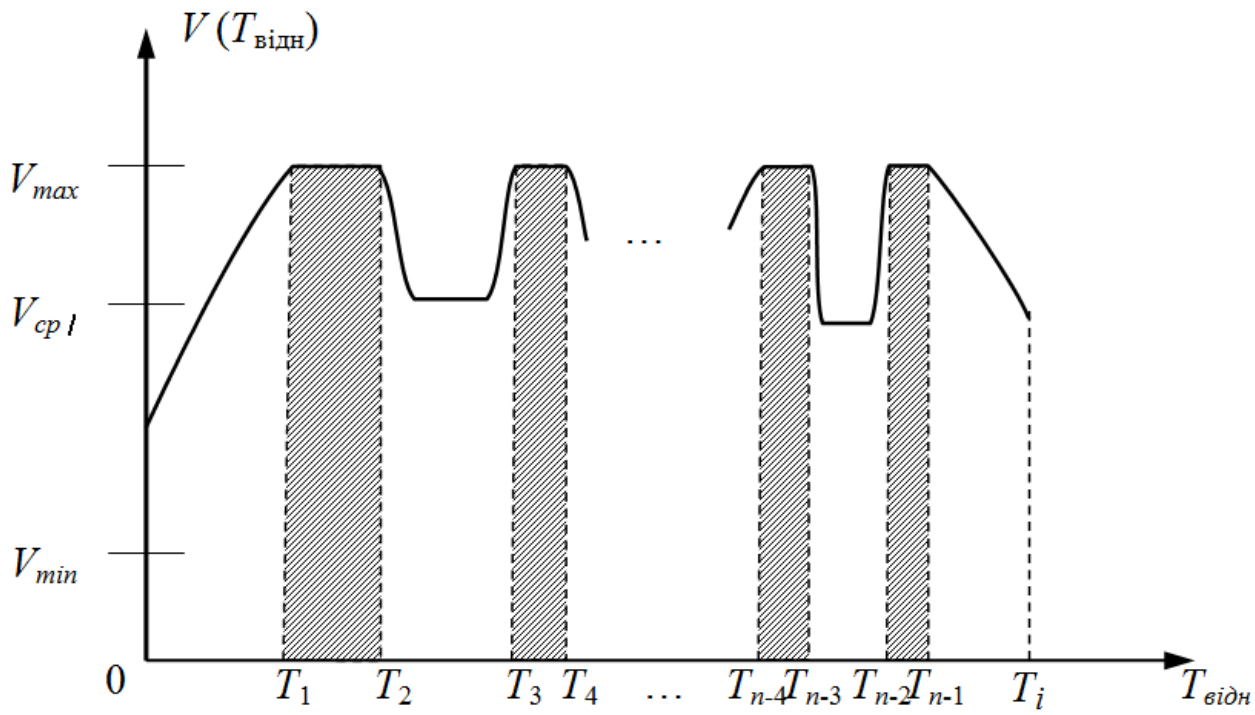


Рисунок 1 – Схема розбиття інтервалу

Дане розбиття дозволяє визначити тривалість пікового навантаження на заданому інтервалі, що дорівнює

$$T_i^{(\max)} = \sum_{\left[t_i^{'(1)}; t_i^{''(1)}\right] \subset \Im_i^{(1)}} \left| t_i^{''(1)} - t_i^{'(1)} \right| \qquad (1)$$

і знайти значення ймовірності досягнення пікової швидкості передачі трафіка *i*-го ТДЕТ на даному часовому інтервалі.

Для цього розрахуємо площі, що відповідають даним підмножинам $\Im_i^{(1)}$ і $\Im_i^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \int_{\Im_i^{(1)}} V_i(t)\,dt = V_i^{(\max)} \cdot T_i^{(\max)}; \\ \Theta_2 &= \int_{\Im_i^{(2)}} V_i(t)\,dt; \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 = V_i^{(\max)} \cdot T_i^{(\max)} + \Theta_2 .$$

Тоді шукана ймовірність дорівнює

$$p_i = \frac{\Theta_1}{\Theta} = \frac{V_i^{(\max)} \cdot T_i^{(\max)}}{V_i^{(\max)} \cdot T_i^{(\max)} + \Theta_2}. \quad (3)$$

Використовуючи узагальнену інтегральну теорему про середнє (можливість застосування визначається еластичністю трафіка), запишемо, що

$$\exists\, \eta \in [0, T_i] \;\Big|\; \Theta_2 = V_i(\eta) \cdot \left(T_i - T_i^{(\max)}\right). \quad (4)$$

Враховуючи, що

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 = V_i^{(cp)} \cdot T_i ,$$

а також значення для площ, котрі були розраховані в (2), знайдемо значення Θ_2:

$$\Theta_2 = \Theta_2 = V_i^{(cp)} \cdot T_i - V_i^{(\max)} \cdot T_i^{(\max)}. \quad (5)$$

Відмітимо, що використовуючи вирази (4) і (5) можна розрахувати значення $V_i(\eta)$ таким чином:

$$V_i(\eta) = \frac{\Theta_2}{T_i - T_i^{(\max)}} = \frac{V_i^{(cp)} \cdot T_i - V_i^{(\max)} \cdot T_i^{(\max)}}{T_i - T_i^{(\max)}}.$$

Використовуючи вираз (3), отримуємо, що

$$p_i = \frac{V_i^{(\max)} \cdot T_i^{(\max)}}{V_i^{(cp)} \cdot T_i} = k_i^{(p)} \cdot \frac{T_i^{(\max)}}{T_i}. \quad (6)$$

Оскільки розглядається джерело еластичного трафіку, то $\Theta_2 > 0$, тобто виходячи з виразу (5) отримуємо:

$$V_i^{(cp)} \cdot T_i - V_i^{(\max)} \cdot T_i^{(\max)} > 0;$$

$$\frac{V_i^{(\max)}}{V_i^{(cp)}} \cdot \frac{T_i^{(\max)}}{T_i} < 1 \;\Rightarrow\; k_i^{(p)} \cdot \frac{T_i^{(\max)}}{T_i} < 1,$$

що цілком узгоджується з виразом (6).

Знаючи ймовірність досягнення пікової швидкості, можна визначити ймовірність того, що пікова швидкість не буде досягнута, таким чином:

$$q_i = 1 - p_i = P\left(V_i(t) < V_i^{(\max)} \right).$$

Для подальшого аналізу необхідно знати величину розкиду можливих значень випадкової величини V_i на розглядаємому часовому інтервалі $[0, T_i]$. Для цього визначимо щільність розподілу $f(V_i)$ даної випадкової величини, при котрій досягається $\sup D[V_i]$.

При відомій щільності ймовірності дисперсія розраховується таким чином:

$$\begin{aligned} D[V_i] &= \int_{-\infty}^{\infty} V_i^2 f(V_i) dV_i - M^2[V_i] = \\ &= \int_0^{V_i} V_i^2 f(V_i) dV_i - \left(\int_0^{V_i} V_i f(V_i) dV_i \right)^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Відмітимо, що аргумент V_i приймає значення в діапазоні від $V_i^{(\min)}$ до $V_i^{(\max)}$ $\left(0 \le V_i^{(\min)} < V_i^{(\max)} \right)$. Виходячи з цього проведе-

мо апроксимацію $D[V_i]$, поділивши відрізок $\Delta = \left[V_i^{(\min)}; V_i^{(\max)} \right]$ на n рівних частин $\Delta_j = \left[V_i^{(j-1)}; V_i^{(j)} \right]$ таким чином, що

$$\bigcup_{j=1}^{n} \Delta_j = \Delta; \quad \bigcap_{j=1}^{n} \Delta_j = \varnothing.$$

Тоді, вибравши усередині кожного відрізку Δ_j за теоремою про інтегральне середнє точку ξ_j, дисперсію можна представити, виходячи з (7), як

$$D[V_i] = \sum_{o=1}^{m} \xi_j^2 \cdot \int_{V_i^{j-1}}^{V_i^j} f(V_i) dV_i - \left(\sum_{o=1}^{m} \xi_j \int_{V_i^{j-1}}^{V_i^j} f(V_i) dV_i \right)^2. \qquad (8)$$

Відмітивши, що

$$\int_{V_i^{j-1}}^{V_i^j} f(V_i) dV_i = p_j, \quad \sum_{j=1}^{n} p_j = 1,$$

і позначивши $\vec{p} = (p_1, \ldots p_n)$ знайдемо екстремум дисперсії (8), використовуючи метод множників Лагранжа для вирішення задачі оптимізації:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \xi_j^2 - \left(\sum_{o=1}^{n} p_j \cdot \xi_j \right)^2 \to extr \qquad (9)$$

при $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1; \;\; p_j \geq 0.$

Складемо лагранжіан задачі (9):

$$L(\vec{p},\lambda) = \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \xi_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \xi_j \right)^2 - \lambda \left(\sum_{j=1}^{n} p_j - 1 \right)$$

і знайдемо його безумовний екстремум з такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial p_j} = 0, j = \overline{1,n}; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_j^2 - 2\xi_j \left(\sum\limits_{j=1}^{n} p_j \cdot \xi_j \right) - \lambda = 0; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_j - 1 = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння системи знайдемо ξ_j:

$$\xi_j = \tilde{m}_\xi \pm \sqrt{\tilde{m}_\xi^2 + \lambda} \text{ де } \tilde{m}_\xi = \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \xi_j$$

тобто для множників Лагранжа, що задовольняють умові

$$\lambda > -\tilde{m}_\xi^2,$$

існує рівно два різні значення ξ_j: ξ_1 і ξ_2, при цьому:

$$n = 2; p_1 = p_i; p_2 = 1 - p_1 = q_i,$$

тобто функція розподілу ймовірності має дискретний вигляд, а щільність розподілу

$$f(V_i) = p_i \delta(V_i - \xi_1) + q_i (V_i - \xi_2),$$

де $\delta(\cdot)$ – функція Дірака.

Тепер можна розрахувати математичне сподівання і дисперсію випадкової величини V_i:

$$M[V_i] = p_i \xi_1 + q_i \xi_2 = p_i \xi_1 + (1 - p_i) \xi_2; \qquad (10)$$

$$D[V_i] = p_i\xi_1^2 + (1-p_i)\xi_2^2 - M^2[V_i] = p_i\xi_1^2 +$$
$$+(1-p_i)\xi_2^2 - p_i^2\xi_1^2 - 2p_i\xi_1\xi_2(1-p_i) - (1-p_i)^2\xi_2^2 = \qquad (11)$$
$$= (1-p_i)p_i(\xi_1-\xi_2)^2.$$

Очевидно, що $\sup D[V_i]$ досягається при максимальному значенні множника $(\xi_1-\xi_2)^2$, тобто

$$\xi_1 = V_i^{(\max)}; \xi_2 = V_i^{(\min)},$$

а, отже

$$M[V_i] = p_i V_i^{(\max)} + (1-p_i)V_i^{(\min)}. \qquad (12)$$

Але

$$M[V_i] = V_i^{(cp)},$$

а значення $V_i^{(\min)}$ для реальних процесів з еластичним трафіком без обмеження спільності можна прирівняти до нуля. Тому:

$$V_i^{(cp)} = p_i V_i^{(\max)} \Rightarrow \quad p_i = \frac{V_i^{(cp)}}{V_i^{(\max)}} = \left(k_i^{(p)}\right)^{-1};$$

$$D[V_i] = (1-p_i)p_i\left(V_i^{(\max)}\right)^2.$$

Знайдемо значення p_i, при якому досягається максимальне значення дисперсії V_i:

$$\frac{dD[V_i]}{dp_i} = \left(V_i^{(\max)}\right)^2(-2p_i+1) \quad \Rightarrow \quad p_i = 1/2,$$

тобто при p_i=q_i=1/2 спостерігається максимальний розкид значень випадкової величини V_i.

Також відзначимо, що стосовно оцінки даного ТДЕТ, використовуючи (6), можна визначити максимальну тривалість пакету, котрий передається з піковою швидкістю $T_i^{(\max_d)}$:

$$k_i^{(p)} \cdot \frac{T_i^{(\max_d)}}{T_i} = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad T_i^{(\max_d)} = \frac{T_i}{2 \cdot k_i^{(p)}}. \qquad (13)$$

Отже, запропонований підхід до визначення статистичних характеристик точкового джерела еластичного трафіку інформаційно-телекомунікаційної мережі дозволяє провести імовірнісну оцінку швидкості передачі інформації, використовуючи апроксимацію її функції щільності розподілу, і є базою для моделювання агрегованого трафіку від декількох джерел еластичного трафіка.

Математична модель еластичного трафіку

У більшості робіт для моделювання агрегованого трафіку декількох служб інформаційно-телекомунікаційної мережі використовується класичний підхід, заснований на побудові адекватної динамічної моделі у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь, наприклад [201]. Проте для побудови такої моделі необхідне знання значного об'єму апріорної інформації про досліджуваний процес [195]. Окрім цього, обов'язковим є припущення про гаусовий характер окремих складових процесу [39]. Проте, докладний аналіз реального трафіку, створюваного ІПД інформаційно-телекомунікаційної мережі, показує наявність в нім довготривалих залежностей, котрі призводять до розподілів з «важкими хвостами» [97]. А врахування фрактального характеру як сумарного трафіку, так і трафіку від окремих джерел (ОД) конкретних мережевих служб, не дозволяє побудувати класичну динамічну модель.

Проте, застосування апарату сплайн-функцій з достатньо малими інтервалами розбиття для кожного окремого джерела дозволяє провести достатньо точну і швидку апроксимацію досліджуваної сесії [1].

Сплайн-інтерполяція еластичного трафіку

Розглянемо інформаційно-телекомунікаційну мережу, котра має K служб, причому k-та служба $\left(k=\overline{1,K}\right)$ обслуговує трафік, що надходить з L_k джерел. Нехай $W^{(k,\ell_k)}(t)$ – об'єм інформації, що надходить до k-ої служби від джерела ℓ_k $\left(\ell_k=\overline{1,L_k}\right)$ за досліджуєму сесію $t\in[t_0,T_c]$. Для аналізу характеру цієї функції використовуємо апарат локальних сплайнів [51], котрий дозволяє врахувати різний характер поведінки $W^{(k,\ell_k)}(t)$ на різних часових інтервалах сесії з найменшою помилкою апроксимації щодо норми в просторі $L_2[t_0,T_c]$. Для побудови локального $n^{(k,\ell_k)}$-сплайна з вузлами інтерполяції $t_i^{(k,\ell_k)}$, де $i=\overline{0,n^{(k,\ell_k)}}$, $t_0^{(k,\ell_k)}=t_0$, $t_{n^{(k,\ell_k)}}^{(k,\ell_k)}=T_c$, необхідно на кожному відрізку інтерполяції $\tau_i^{(k,\ell_k)}=\left[t_{i-1}^{(k,\ell_k)},t_i^{(k,\ell_k)}\right]$ побудувати інтерполяційний поліном $P_{n^{(k,\ell_k)},i}^{(k,\ell_k)}(t)$. Тоді сплайн, що апроксимує $W^{(k,\ell_k)}(t)$, у загальному випадку можна представити як [51]:

$$S^{(k,\ell_k)}(t)=\sum_{i=1}^{n^{(k,\ell_k)}}\alpha_i^{(k,\ell_k)}\cdot P_{n^{(k,\ell_k)},i}^{(k,\ell_k)}(t), \qquad (14)$$

де $\alpha_i^{(k,\ell_k)}$ – набір постійних коефіцієнтів в незалежному функціональному базисі $\left\{P_{n^{(k,\ell_k)},i}^{(k,\ell_k)}\right\}$, який істотно залежить від характеру поведінки функцій $W^{(k,\ell_k)}(t)$ на розглядаємому інтервалі $\tau_i^{(k,\ell_k)}$.

Так, якщо

$$W^{(k,\ell_k)}(t)\in C^{\beta}(\tau_i), \qquad (15)$$

то відповідний апроксимуючий поліном може мати ступінь не вище 2β + 1, а при $W^{(k,\ell_k)}(t) \in C^{\infty}(\tau_i)$ також можлива апроксимація і тригонометричними сплайнами [45].

Розглянемо побудову кусково-поліноміального сплайна на інтервалі τ_i при виконанні умови (15). Задамо вузли $t_{j,i}^{(k,\ell_k)}$ $\left(j = 0, n_i^{(k,\ell_k)}\right)$ та визначимо значення функції $W^{(k,\ell_k)}(t)$ в них: $W^{(k,\ell_k)}\left(t_{j,i}^{(k,\ell_k)}\right)$.

В якості міри апроксимуючого полінома будемо розглядати число $\gamma = \overline{0, \beta - 1}$. Для кожного j-го вузла побудуємо інтерполяційний поліном $P_{\beta}\left(t, W_{j,i}^{(k,\ell_k)}\right)$, виходячи зі значень у вузлах $t_{j-\gamma,i}^{(k,\ell_k)}$, … , $t_{j-\gamma+\beta,i}^{(k,\ell_k)}$. Тоді відповідний кусочно-поліноміальний сплайн для інтервалу $\tau_i^{(k,\ell_k)}$ визначається як

$$S_i^{(k,\ell_k)}(t,\beta) = Q_{2\beta+1}^{(k,\ell_k)}(t,j),$$

де $$\frac{d^m}{dt^m} Q_{2\beta+1}^{(k,\ell_k)}(t,j)\Big|_{t=t_{j,i}^{(k,\ell_k)}} = \frac{d^m}{dt^m} P_{\beta}\left(t, W_{j,i}^{(k,\ell_k)}\right)\Big|_{t=t_{j,i}^{(k,\ell_k)}};$$

$$\frac{d^m}{dt^m} Q_{2\beta+1}^{(k,\ell_k)}(t,j)\Big|_{t=t_{j+1,i}^{(k,\ell_k)}} = \frac{d^m}{dt^m} P_{\beta}\left(t, W_{j,i}^{(k,\ell_k)}\right)\Big|_{t=t_{j+1,i}^{(k,\ell_k)}}; \; m = \overline{1,\beta}.$$

Представимо поліном $Q_{2\beta+1}^{(k,\ell_k)}(t,j)$ як

$$Q_{2\beta+1}^{(k,\ell_k)}(t,j) = P_{\beta}\left(t, W_{j,i}^{(k,\ell_k)}\right) + R_{2\beta+1}^{(k,\ell_k)}(t,j),$$

де останній член даного розкладання $R_{2\beta+1}^{(k,\ell_k)}(t,j)$ є поправкою до класичного інтерполяційного полінома на інтервалі τ_i, котра при виконанні (15) розраховується як [45]:

$$R_{2\beta+1}^{(k,\ell_k)}(t,j) =$$

$$= (t_{j+1} - t_j)^{\beta+1} \cdot W_{2\beta+1}^{(k,\ell_k)}(t_{j-\gamma}, t_{j-\gamma+1}, \dots, t_{j-\gamma+\beta+1}) \cdot q_{2\beta+1}(\tilde{t}, j),$$

де $W_{2\beta+1}^{(k,\ell_k)}(t_{j-\gamma}, t_{j-\gamma+1}, \dots, t_{j-\gamma+\beta+1})$ – різницеве відношення порядку $2\beta+1$; $\tilde{t} = \dfrac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j}$;

$$q_{2\beta+1}(\tilde{t}, j) =$$

$$= \frac{t_{j+\beta-\gamma+1} - t_{j-\gamma}}{t_{j+1} - t_j} \cdot \sum_{r=0}^{\beta} \left(\left(\frac{d^2}{d\tilde{t}^2} \prod_{\xi=0}^{\beta} \left(\tilde{t} - \frac{t_{j-\gamma+\xi}}{t_{j+1} - t_i} \right) \right|_{\tilde{t}=1} \right) \cdot \theta_r(\tilde{t}) \right);$$

$$\theta_r(\tilde{t}) = \frac{\tilde{t}^{j+1} \cdot (\tilde{t} - 1)^r}{r!\, j!} \cdot \sum_{m=0}^{\beta-r} (-1)^m \frac{(\beta + m)!}{m!} (\tilde{t} - 1)^m.$$

В якості інтерполяційного поліному (ІП) в даному випадку можна вибрати ІП Лагранжа ступеню β [45]:

$$P_\beta\left(t, W_{t_{j,i}}^{(k,\ell_k)}\right) = \sum_{m=0}^{\beta} W^{(k,\ell_k)}\left(t_{m,i}^{(k,\ell_k)}\right) \times$$

$$\times \frac{\prod_{m_1=0}^{\beta} \left(t - t_{m_1,i}^{(k,\ell_k)}\right)}{\prod_{m_2=0}^{m-1} \left(t_{m,i}^{(k,\ell_k)} - t_{m_2,i}^{(k,\ell_k)}\right) \cdot \prod_{m_3=m+1}^{\beta} \left(t_{m,i}^{(k,\ell_k)} - t_{m_3,i}^{(k,\ell_k)}\right)}. \qquad (16)$$

Відповідно до [125] можна оцінити погрішність (16) як норму значення нев'язки

$$R_{\beta,i}^{(k,\ell_k)} = \left\| W^{(k,\ell_k)}(t) - S_i^{(k,\ell_k)}(t,\beta) \right\|_{L_2(\tau_i)},$$

отже

$$R_{\beta,j,i}^{(k,\ell_k)}(t) \le \sup_{t\in\tau_{j,i}^{(k,\ell_k)}} \left| \frac{d^{n_i^{(k,\ell_k)}}}{dtn_i^{(k,\ell_k)}} W_{j,i}^{(k,\ell_k)}(t) \right| \cdot \frac{\prod_{m=0}^{\beta} (t - t_{m,i}^{(k,\ell_k)})}{(\beta+1)!}, \qquad (17)$$

тобто при збільшенні β росте точність інтерполяційного наближення, проте збільшується складність обробки.

Тому вибір значення $\beta^{(i)} \le \beta$ для кожного інтервалу τ_i є окремим завданням, котре залежить від вимог до апроксимації $W^{(k,\ell_k)}(t)$. Окрім цього, необхідно розглянути питання адекватності запропонованої сплайн-интерполяційної моделі агрегованого трафіку реальному процесу.

Ітераційний метод оцінки адекватності моделі трафіку

Використовуючи вирази (14) – (17) можна запропонувати ітераційний метод оцінки адекватності узагальненого сплайна

$$S = \bigcup_{k=1}^{K} \bigcup_{\ell_k=1}^{L_k} S^{(k,\ell_k)}(t)$$

реальному трафіку на інтервалі $[t_o, T_c]$.

Представимо інтервал $[t_o, T_c]$ як об'єднання I часових інтервалів

$$[t_o, T_c] = \bigcup_{i=1}^{I} [t_{i-1}, t_i], \quad t_i|_{i=0} = t_o;\ t_i|_{i=I} = T_c,$$

на кожному з яких проводилася та кількість вимірювань, котра необхідна для побудови сплайн-полінома необхідного ступеня гладкості, а в якості критерію точності інтерполяції будемо використовувати $\varepsilon_i^{(k,\ell_k)}$ - обмежену нев'язку [20]:

$$\rho\left(W^{(k,\ell_k)}(t), S_m^{(k,\ell_k)}(t)\right) \le \varepsilon_i^{(k,\ell_k)}, \tag{18}$$

де $t \in \tau_i = [t_{i-1}, t_i]$; m – ступінь інтерполюючого полінома, котру можна розрахувати як

$$m = \arg\min_{m'} S_{m'}^{(k,\ell_k)}(t), \tag{19}$$

а відстань $\rho(\bullet)$ визначена в просторі $L_2[t_o, T_c]$, тобто

$$\rho\left(W^{(k,\ell_k)}(t), S_m^{(k,\ell_k)}(t)\right) = \sup_{t\in\tau_i}\left|W^{(k,\ell_k)}(t) - S_m^{(k,\ell_k)}(t)\right|. \tag{20}$$

Ввівши позначення

$$\tilde{S}_m^{(k,\ell_k)} = \sup_{t\in\tau_i}\left|\frac{d^m S^{(k,\ell_k)}(t)}{dt^m}\right|$$

і використовуючи вирази (19), (20), критерій (18) можна записати таким чином:

$$\sup_{t\in\tau_i}\left|W^{(k,\ell_k)}(t) - S_m^{(k,\ell_k)}(t)\right| \le \frac{\tilde{S}_{m+1}^{(k,\ell_k)}}{(m+1)!}\sup_{t\in\tau_i}\left|\prod_{r=0}^{m}(t - t_r)\right| \le \varepsilon_i^{(k,\ell_k)}. \tag{21}$$

Тоді з виразу (21) для кожної пари (k,ℓ_k) можна знайти такі значення $\tilde{m}^{(k,\ell_k)}$ і $\tilde{S}^{(k,\ell_k)}_{\tilde{m}^{(k,\ell_k)}+1}$, при котрих буде забезпечена необхідна точність інтерполяції. Для цього необхідно вибирати $t_j^{(i)}$ і t_i таким чином, щоб ці значення співпадали із коренями полінома Чебишева

$$t_j^{(i)} = \frac{t_{i-1} + t_i}{2} - \frac{t_{i+1} + t_i}{2}\cos\left(\frac{2j-1}{2m}\pi\right), \quad j \in \overline{1,m},$$

для використання відомої [39] верхньої оцінки

$$\sup_{t\in\tau_i}\left|\prod_{r=0}^{m}(t^{(i)}-t_r^{(i)})\right| \le 2\left(\frac{t_{i-1}-t_i}{4}\right)^m. \qquad (22)$$

Оцінюючи з використанням виразів (18) – (22) адекватність сплайн-інтерполяції реальному трафіку, на кожному із кроків ітерації будемо проводити аналіз виразу (21) на ступінь невідповідності по всіх $k \in \overline{1,K}$ і $\ell = \overline{1,L}$ [8] і залежно від ступеня відхилення від $\varepsilon_i^{(k,\ell)}$ проводити нове розбиття $[t_o, T_c]$. Згідно [20] даний інтегральний процес є швидкозбіжним і дозволяє визначити поліноміальну сплайн-інтерполяцію трафіку, таку, що надає високу точність апроксимації сумарного трафіку мережі *W(t)* на часовому інтервалі $[t_o, T_c]$ типової сесії мережі.

Запропонований підхід можна використовувати при проведенні оцінки адекватності сплайнової інтерполяції трафіку інформаційно-телекомунікаційної мережі. Для майже регулярного трафіку можлива реалізація методу в режимі реального часу з динамічним уточненням постійних коефіцієнтів сплайна (14). Відсутність швидкої збіжності описаного вище ітераційного процесу свідчитиме про неможливість інтерполяції сплайна, котра викликана наявністю великої кількості нерегулярних складових, обумовлених фрактальним характером трафіку, що буде розглянуте в подальшому (підрозділ 6 даної монографії).

Розглянута математична модель використана для синтезу двовимірної динамічної моделі еластичного трафіку інтегрального потоку даних, що базується на оперативній статистичній інформації про проходження потоку, припускає близькість трафіку ІПД до еластичного і наявності вимірювань по декількох сесіях.

ТЕМА 4. МОДЕЛЮВАННЯ АГРЕГОВАНОГО ТРАФІКУ

Лекція 2.
Синтез двовимірної динамічної моделі трафіку ІПД

Розглянемо інформаційно-телекомунікаційну мережу, характер поведінки мережевого трафіку в котрій невідомий, проте передбачається, що часовий інтервал проведення чергової сесії можна розбити на кінцеве число підінтервалів, на кожному трафік є близьким до еластичного, а для аналізу його параметрів і синтезу адекватної моделі використовуються статистичні оцінки, отримані при обробці даних, накопичених за деяке число сесій. При цьому, на відміну від існуючих моделей, поведінку процесу будемо вважати залежною не тільки від часу, але і від початкових умов (зокрема від початкової швидкості передачі інформації в кожній сесії).

Нехай $\left\{ W^{(k,\ell_k)}(t) \right\}$ – сімейство динамічних функцій, котрі характеризують об'єм інформації від джерела ℓ_k, що оброблюється k-ою службою $(k = \overline{1,K})$ мультисервісної мережі з середньою швидкістю $V^{(k,\ell_k)}(t) = \dfrac{dW^{(k,\ell_k)}(t)}{dt}$, що описується апріорі невідомою залежністю $V^{(k,\ell_k)}(t) = \Psi\left(W^{(k,\ell_k)}, t \right)$, причому

$$V^{(k,\ell_k)}(t_0) = \left. \frac{dW^{(k,\ell_k)}(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = V_0^{(k,\ell_k)};$$
$$t \in \left[t_0^{(k,\ell_k)}, t_0^{(k,\ell_k)} + T^{(k,\ell_k)} \right], \qquad (23)$$

де $t_0^{(k,\ell_k)}$ – нижня межа даного часового інтервалу, а $T^{(k,\ell_k)}$ – його довжина.

Проведемо R вимірювань в межах N різних сесій з початковими умовами $V_{0,n}^{(k,\ell_k)}$ $(n = \overline{0,N-1})$ в моменти часу

$t_{r,n}^{(k,\ell_k)}$, $r = \overline{0, R-1}$.

Для завдання двовимірної області моделі в межах кожної сесії розглядатимемо відносний час (до реального часу додається $t_{0,n}^{(k,\ell_k)}$). Тоді у якості довжини інтервалу моделювання виберемо $T^{(k,\ell_k)} = \max\limits_{n} T_n^{(k,\ell_k)}$ (рис. 2).

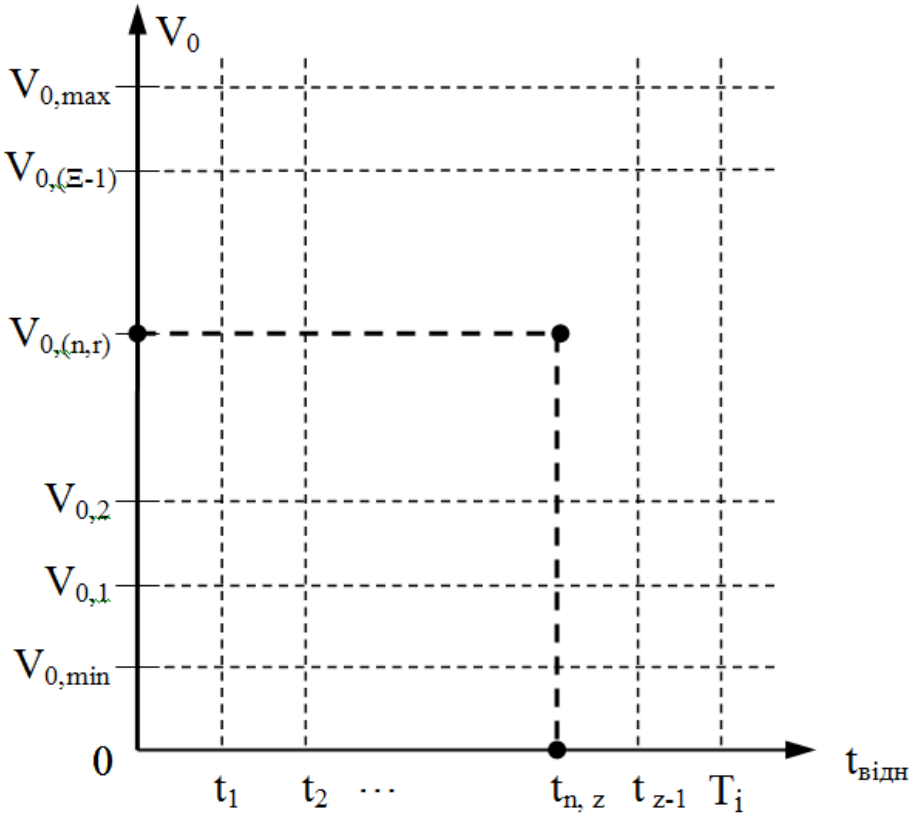


Рисунок 2 – Схема області двовимірної інтерполяції

Тоді отримані вимірювання потрапляють в допустиму область моделі, що задається таким чином:

$$\Im^{(k,\ell_k)} = \left[V_{\min}^{(k,\ell_k)}, V_{\max}^{(k,\ell_k)} \right] \times \left[0; T^{(k,\ell_k)} \right] \subset \Re^2, \qquad (24)$$

де $V_{\min}^{(k,\ell_k)}, V_{\max}^{(k,\ell_k)}$ – мінімальна і максимальна межі варіювання пер-

ших похідних функцій сімейства $\left\{ W^{(k,\ell_k)}(t) \right\}$ в межах даних сесій.

Тоді задача побудови динамічної моделі еластичного трафіку ІТМ може бути сформульована таким чином.

Сформувати сімейство сплайн-функцій, що задовольняють умові адекватності трафіку

$$\rho\left(W^{(k,\ell_k)}\left(V_0^{(k,\ell_k)},t \right),\ \tilde{W}^{(k,\ell_k)}\left(V_0^{(k,\ell_k)},t \right) \right) \le \varepsilon^{(k,\ell_k)};$$
$$\left(V_0^{(k,\ell_k)},t \right) \in \Im^{(k,\ell_k)}, \tag{25}$$

де $\tilde{W}(\bullet)$ – функція, що апроксимує $W(\bullet)$ за заданих початкових умов, а аргумент $\left(t, V_0^{(k,\ell_k)} \right)$ виділяє з сімейства $\left\{ W^{(k,\ell_k)}(t) \right\}$ таку функцію, для якої виконана умова (23).

Оскільки $\Im^{(k,\ell_k)} \subset \Re^2$, то в (25) відстань $\rho(\bullet)$ є стандартною метрикою простору, тобто

$$\max_{t, W_0^{(k,\ell_k)}} \left| W^{(k,\ell_k)}\left(V_0^{(k,\ell_k)},t \right) - \tilde{W}^{(k,\ell_k)}\left(V_0^{(k,\ell_k)},t \right) \right| \le \varepsilon^{(k,\ell_k)};$$
$$\left(V_0^{(k,\ell_k)},t \right) \in \Im^{(k,\ell_k)}. \tag{26}$$

Для подальшої побудови моделі скористаємося результатом виконання збору статистичних даних реального трафіку, що дозволило побудувати таку множину вимірювань

$$M^{(k,\ell_k)} = \left\{ m_{nr}^{(k,\ell_k)}, n = \overrightarrow{0, N-1}, r = \overrightarrow{0, R-1} \right\}, \tag{27}$$

де кожне вимірювання $m_{nr}^{(k,\ell_k)}$ можна представити як суму змодельованого вимірювання $\tilde{m}_{nr}^{(k,\ell_k)}$ і нев'язки $\delta\tilde{m}_{nr}^{(k,\ell_k)}$, пов'язаної з помилками вимірювань, причому, згідно [15], помилки некорельовані і мають нульове математичне сподівання.

Оскільки у вузлах передбачається локальна еластичність трафіку, то для синтезу математичної моделі можна розглянути уза-

гальнений інтерполяційний поліном двовимірного сплайн-представлення функції $\tilde{W}^{(k,\ell_k)}\left(V_0^{(k,\ell_k)},t\right)$ в базисі метричного простору L^2 над областю $\Im^{(k,\ell_k)}$ [79]:

$$\begin{aligned}&\tilde{W}^{(k,\ell_k)}\left(V_0^{(k,\ell_k)},t\right)=\\&=\sum_{(\xi=\overline{0,R-1})}^{(\zeta=\overline{0,N-1})}\alpha_{\zeta,\xi}^{(k,\ell_k)}\times f_{\zeta,\Xi}^{(k,\ell_k)}\left(V_0^{(k,\ell_k)}\right)\phi_{\xi,Z}^{(k,\ell_k)}(t),\end{aligned}\tag{28}$$

де $f_{\zeta,\Xi}^{(k,\ell_k)}\left(V_0^{(k,\ell_k)}\right)\phi_{\xi,Z}^{(k,\ell_k)}(t)$ – базис інтерполяційного розкладання в L^2, визначений над $\Im^{(k,\ell_k)}$ відповідно до [79], в якому Ξ і Z визначають порядок сплайна по осях n і r відповідно; $\alpha_{\zeta,\xi}^{(k,\ell_k)}$ – невідомі коефіцієнти даного розкладання, а для підсумовування за декількома індексами використовується запропоноване в [14] позначення, еквівалентне загальноприйнятому $\sum_{i_1=1}^{I_1}\sum_{i_2=1}^{I_2}(\bullet)$.

Для виконання $\varepsilon^{(k,\ell_k)}$-адекватності змодельованих значень із (28) необхідно при побудові сплайна накласти на елементи множини нев'язок $\delta\tilde{\mathrm{M}}(\bullet)$ функцій $W^{(k,\ell_k)}\left(V_0^{(k,\ell_k)},t\right)$ такі обмеження [79]:

$$\begin{aligned}&\max_{t,V_0^{(k,\ell_k)}}\left|\delta\tilde{m}^{(k,\ell_k)}\left(V_0^{(k,\ell_k)},t\right)\right|\le\varepsilon^{(k,\ell_k)};\\&\delta\tilde{m}^{(k,\ell_k)}\in\delta\tilde{M}^{(k,\ell_k)},\quad\left(V_0^{(k,\ell_k)},t\right)\in\Im^{(k,\ell_k)},\end{aligned}\tag{29}$$

які дозволять відповідно до способу оцінки адекватності визначити значення порядків сплайнів.

При виконанні умови (29) невідомі коефіцієнти розкладання (28) знаходяться з такої системи алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{(\xi=\overline{0,R-1})}^{(\zeta=\overline{0,N-1})}\alpha_{\zeta,\xi}^{(k,\ell_k)}\times f_{\zeta,\Xi}^{(k,\ell_k)}\left(V_{0,n}^{(k,\ell_k)}\right)\phi_{\xi,Z}^{(k,\ell_k)}(t_r)=m_{nr}.\tag{30}$$

Використання поліномів Лагранжа, як базисних функції інтерполяційного розкладання, в (28) і (30) приводить до такої моделі динамічного трафіку:

$$\tilde{W}^{(k,\ell_k)}\left(V_0^{(k,\ell_k)},t\right)=$$

$$=\sum_{(\xi=\overline{0,R-1})}^{(\zeta=\overline{0,N-1})}\alpha_{\zeta,\xi}^{(k,\ell_k)}\cdot L_{\zeta,\Xi}^{(k,\ell_k)}\left(V_0^{(k,\ell_k)}\right)\cdot L_{\xi,Z}^{(k,\ell_k)}(t)= \qquad (31)$$

$$=\sum_{(r=\overline{0,R-1})}^{(n=\overline{0,N-1})}m_{n,r}^{(k,\ell_k)}\cdot\sum_{\zeta=0}^{Z}\frac{\Im_\zeta\left(V_0^{(k,\ell_k)}\right)}{\Im_\zeta\left(V_{0,\zeta}^{(k,\ell_k)}\right)}\cdot\sum_{\xi=0}^{\Xi}\frac{\aleph_\xi(t)}{\aleph_\xi\left(t_{n,\xi}\right)},$$

де $$\Im_\zeta\left(V_0^{(k,\ell_k)}\right)=\prod_{i=0,\,i\neq\zeta}^{Z}\left(V_0^{(k,\ell_k)}-V_{0,i}^{(k,\ell_k)}\right);$$

$$\aleph_\xi(t)=\prod_{j=0,\,j\neq\xi}^{\Xi}\left(t-t_{n,j}\right).$$

Для виконання умови адекватності (29) необхідно вибрати кроки розбиття γ області $\Im^{(k,\ell_k)}$ вузлами $\left(V_{0,n}^{(k,\ell_k)},t\right)$, виходячи з умови мінімізації оцінки погрішності двовимірної інтерполяції [52]. Проведений аналіз показав, що при відносно невеликій кількості точок порушення еластичності $W^{(k,\ell_k)}\left(V_0^{(k,\ell_k)},t\right)$ розмірність розбиття γ є відносно невеликою і дозволяє провести оперативний аналіз якості функціонування мережі.

Запропонована математична модель дозволяє на основі накопичених статистичних даних синтезувати трафік, що створюється декількома джерелами за наявності даних вимірювань по декількох сесіях. Результати порівняння трафіку, змодельованого стандартними і запропонованою моделями, показали, що сумарне відхилення від реального трафіку зменшилося в середньому на 15%. Моделювання мережевого нееластичного трафіку, для якого не існує розбиття, що задовольняє умові (28), розглянуте в наступних підрозділах. При цьому необхідно враховувати складні взаємозв'язки

між флуктуаціями робочого навантаження і різними мережевими механізмами управління, що виникають в процесі конвергенції трафіку (підрозділ 4), а також характеристики викидів, пов'язаних з пульсуючим характером такого трафіку (підрозділ 5).

Конвергенція трафіку в мультисервісних мережах

Система комутації інформаційно-телекомунікаційної мережі при обслуговуванні виклику, ініційованого ІПД, залежно від виду інформації повинна сполучати між собою одночасно деяку кількість (i) каналів ($1 \le i \le V$, V – кількість каналів у напрямі зв'язку), що призводить до подальшого ускладнення механізмів управління мережею. Тому у разі перевантаження мережі може з'являтися додаткова нелінійність [232]. Важливо відзначити, що в подібних ситуаціях можуть виникати дуже складні взаємозв'язки між флуктуаціями робочого навантаження і різними мережевими механізмами управління. Ці взаємодії є потенційною причиною виникнення фрактальної структури трафіку в ІТМ [216]. Тому перед моделюванням трафику, що має фрактальний характер, необхідно розглянути процес його конвергенції, при котрому одноканальні системи масового обслуговування типу M/M/1/∞ об'єднуються в багатоканальну систему масового обслуговування.

Розглядатимемо процеси, що відбуваються в ІТМ при одночасному обслуговуванні великої, але скінченної кількості каналів і споживачів. Для проведення таких досліджень розглядатимемо ефекти об'єднання одноканальних систем масового обслуговування (СМО) типу M/M/1/∞ в багатоканальну систему. Добре відомі моделі телекомунікаційного трафіку, створені на основі теорії масового обслуговування з пріоритетами [85, 116]. Ці моделі дозволяють враховувати деякі специфічні особливості фрактального трафіку, такі як існування кластеризації і непостійність характеристик у всіх часових масштабах. Крім того, фрактальний трафік добре описується поволі затухаючими розподілами (наприклад, розподіли Парето, Вейбулла, логонормальний, гіперекспоненціальний). У даному підрозділі для спрощення будуть розглянуті лише такі стохасти-

чні моделі, функціонування котрих описується дискретними марківськими процесами, що дозволить скористатися відомими формулами для стаціонарних розподілів процесу загибелі і народження, а також мультиплікативною теоремою для мереж Джексонівського типу. Проведемо дослідження системи масового обслуговування, отриманої з декількох одноканальних СМО типу M/M/1/∞ шляхом їхнього об'єднання в багатоканальну СМО.

Об'єднуючи рівнопотужні одноканальні СМО типу M/M/1/∞, побудуємо СМО, у котрої стаціонарна довжина черги і час релаксації є істотно меншими, ніж у її складових.

Проведемо дослідження впливу способу комутації на показники ефективності сконструйованих систем, виявляючи конвергенційні ефекти.

Нехай X_1, X_2, … – послідовність незалежно працюючих систем масового обслуговування типу M/M/1/∞, що мають інтенсивність вхідного потоку λ і інтенсивність обслуговування, μ а також задовольняють умові ергодичності

. $$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1.$$

Побудуємо із заданих n елементів послідовності таку систему обслуговування S, в котрій стаціонарна довжина черги $a(S)$ і характерний час релаксації (встановлення стаціонарного режиму) $\tau(S)$ задовольняють нерівностям:

$$a(S) \le A;\ \ \tau(S) \le T,$$

де $A,\ T$ – числа, що менші ніж аналогічні показники $a(X_i)$, $\tau(X_i)$ елементів початкової послідовності.

Розглянемо об'єднання n незалежних однолінійних систем масового обслуговування X_1, ..., X_n в багатолінійну систему S_n типу M/M/n/∞, надану на рис. 3.

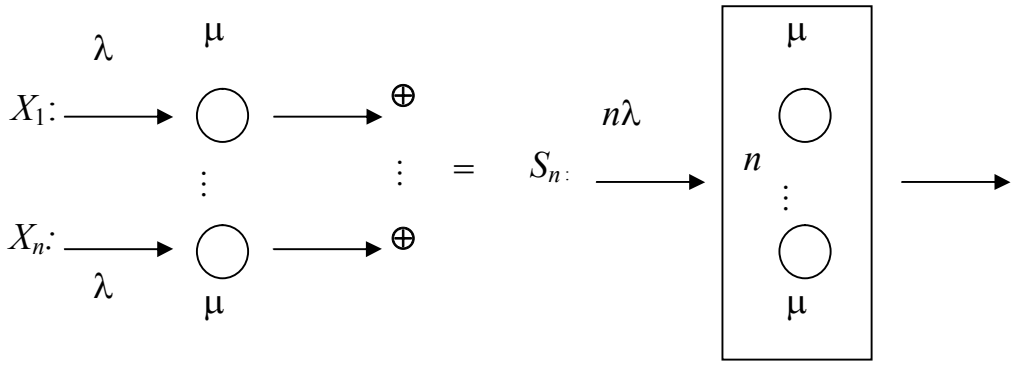


Рисунок 3 – Конвергенція незалежних однолінійних СМО в багатолінійну систему

На рис. 3 стрілки зображають вхідні і початкові потоки, вузли – обслуговуючі прилади з чергами, прямокутник – багатоканальну систему із загальною чергою.

Операцію комутації, яка задана в цьому випадку, запишемо у вигляді формули

$$S_n = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n .$$

Оскільки виконані умови ергодичності систем,, то при деяких позитивних C і α стаціонарна середня довжина черги $a(S_n)$ в системі S_n задовольняє нерівності

$$a(S_n) \le Ce^{-\alpha n}.$$

Розглянемо тепер об'єднання систем X_1, ..., X_n в наступну систему Σ_n типу М/м/1/e, зображену на рис. 4.

Задану в цьому випадку операцію комутації запишемо у вигляді формули

$$\Sigma_n = X_1 \otimes \ldots \otimes X_n .$$

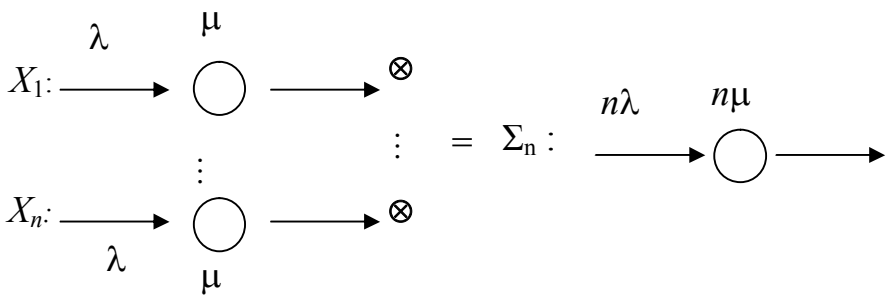


Рисунок 4 – Конвергенція незалежних однолінійних СМО в систему типу М/м/1/е

При виконанні наведених вище умов стаціонарна середня довжина черги $a(\Sigma_n)$ в системі Σ_n задовольняє такому співвідношенню:

$$a\left(\sum n\right) \equiv a\left(X_1\right) < \infty .$$

З'ясуємо, як впливає тип комутації на час релаксації. З аналізу часу релаксації $\tau(S_n)$ системи S_n виходить, що при наведених обмеженнях комутація систем X_1, ..., X_n за типом «⊕» призводить до геометричної збіжності до нуля стаціонарної середньої довжини черги при $n \to \infty$, а комутація за типом «⊗» впливу на середню довжину черги не надає.

Справедливо і зворотне: комутація систем X_1, ..., X_n за типом «⊕», по суті, на час релаксації не впливає, а комутація X_1, ..., X_n за типом «⊗» призводить до убування часу релаксації до нуля із швидкістю порядку біля $1/n,. n \to \infty$

Якщо система обслуговування S_n^m синтезована з $N = nm$ систем типу М/М/1/∞, то маючи достатньо велику кількість N початкових систем обслуговування і використовуючи способи комутації «⊕», «⊗», можна синтезувати з них таку систему, в котрій і час релаксації, і стаціонарна середня довжина черги будуть достатньо малими.

Характерною особливістю трафіку інтегральних потоків даних є збільшення середнього часу очікування заявки в черзі (середньої

довжини черги) із зростанням завантаження системи. У нашому випадку, коли із зростанням кылькості екземплярів *n* систем M/M/1/∞, що об'єднуються в систему S_n, завантаження росте, характер поведінки системи нагадує за своєю суттю фазовий перехід у фізичних системах.

Припустимо тепер, що об'єднувані системи (для простоти – в двоканальну) мають різні швидкості обслуговування. Позначимо через X', X'' інтенсивності вхідних потоків, μ', μ'' – інтенсивності обслуговування в початкових одноканальних системах. Тоді інтенсивність вхідного потоку λ дорівнює $\lambda' + \lambda''$. Коефіцієнти завантаження дорівнюють $\rho = \lambda'/\mu' = \lambda''/\mu'' = \lambda/\mu$.

Неважко довести [107], що при $\rho < 1$ марківський процес *i(t)* має граничний розподіл, який задовольняє системі лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda p(0) = \mu' p(1') + \mu'' p(1''); \\ (\lambda + \mu') p(1') = \lambda' p(0) + \mu'' p(2); \\ (\lambda + \mu'') p(1'') = \lambda'' p(0) + \mu' p(2); \\ (\lambda + \mu) p(2) = \lambda\left(p(1') + p(1'')\right) + \mu p(3); \\ (\lambda + \mu') p(i) = \lambda p(i-1) + \mu p(i+1); \quad i = 3,4,...; \\ p(0) + p(1') + p(2) + p(3) + ... = 1. \end{cases} \tag{32}$$

Введемо наступні позначення:

$$\alpha = \mu'/\mu = \lambda'/\lambda; \quad \beta = \alpha(1-\alpha);$$
$$A = p(1') \,/\, P(1'')$$

і проведемо дослідження системи рівнянь (32). Величина *A* характеризує відмінність в стаціонарній ймовірності завантаження окремих каналів, а *B* – стаціонарну ймовірність відсутності очікування для заявки, що знову поступила до об'єднаної системи. При цьому при фіксованому α, $1/2 < \alpha < 1$, , є вірною монотонна збіжність

$$A \downarrow \left(1-\alpha^2\right) \Big/ \left(\alpha(2-\alpha)\right) \text{ при } p \uparrow 1,$$

а при фіксованому p, $0 < p < 1$, є вірною збіжність $A \to 0$ при $\alpha \to 1$.

Іншими словами, в об'єднаній двоканальній системі більш потужніший канал є менш завантаженим, чим інший. Цей ефект посилюється при збільшенні коефіцієнта завантаження r і при наближенні коефіцієнта α до одиниці. Таким чином, стаціонарна ймовірність B відсутності очікування збільшується при зменшенні різниці потужності каналів.

Використовуємо отримані результати при моделюванні трафіку ІПД, при котрому можна говорити про сильну взаємодію між об'єднуваними окремими процесами, а конвергований трафік володіє властивостями довготривалої залежності (гіперболічна залежність основних параметрів об'єднаного трафіку) і масштабної інваріантності, тобто має фрактальний характер.

ТЕМА 4. МОДЕЛЮВАННЯ АГРЕГОВАНОГО ТРАФІКУ

Лекція 3.
Фрактальна модель трафіку ІПД

Флуктуаційний характер трафіку інтегральних інформаційних потоків в інформаційно-телекомунікаційних мережах сприяє створенню локальних перевантажень навіть при обслуговуванні процесів, які сумарно не досягли номінальних значень. Хаотичний вплив трафіку на параметри мережі, що виникає в результаті його фрактального характеру, пред'являє додаткові вимоги до моделей трафіку [193, 231]. У даному підрозділі проаналізовані процеси, які створюють трафік ІПД в ІТМ, виведені вирази для розрахунку фрактальної розмірності цих процесів, визначені їх спектральні особливості і розраховані основні характеристики.

Визначення фрактальної розмірності трафику

Трафік, створюваний ІПД, описується випадковим процесом, який в загальному випадку має фрактальний характер з властивостями самоподібності і самоафінності (самоподібність при афінних перетвореннях) [107, 246]. Дані властивості можна розглядати як в широкому, так і у вузькому сенсі, тобто самоподібними будуть нестаціонарні випадкові процеси, для яких одновимірна щільність ймовірності $w(x,t)$ зберігає свій вигляд при узгодженій зміні масштабів по змінних x та t, наприклад, для узагальненого вінерівського процесу

$$w(b^{-H}x, bt) = b^{-H} w(x,t),$$

де $0 < H < 2$ (при $H = 1/2$ маємо стандартний вінерівський процес). Величину показника Херста H в [202] пропонується знаходити на основі моделі генератора фрактала. Зважаючи на складність побудови подібної конструкції часто простіше безпосередньо обчислити розмірність за визначенням фрактала. У [193] таким чином ви-

значена розмірність корельованого гаусівського випадкового процесу за допомогою вирішення рівняння Ланжевена першого і другого порядку.

Розглянемо спосіб обчислення показника Херста H, що базується на метриці Хаусдорфа, обчислювальна складність якого менша, ніж в способах, запропонованих у [193, 202].

Розмірність Хаусдорфа множини X визначимо наступним чином [189].

Введемо δ-покриття множини X як

$$K(\delta) = \left\{ X_j,\ j = 1,2\ldots \right\},$$

де $X \subseteq \bigcup_j X_j$; $0 < diam\,(X_j) \le \delta \ \ \forall j$; $diam\,(X_j)$ – діаметр множини.

Тоді міра Хаусдорфа s визначається величиною

$$K_s(X) = \lim_{\delta \to 0} \left(\inf_{K(\delta)} \sum_j \left(diam(X_j) \right)^s \right). \qquad (51)$$

Згідно [59] для фракталів $K_s(x)$ існує та є хаусдорфовою розмірністю D_H множини X (одне з визначень фрактала – множина, хаусдорфова розмірність якої не співпадає з топологічною).

При визначенні розмірності самоподібності траєкторії випадкового процесу $X(t)$ допускається, що коефіцієнти при x та t у виразі щільності ймовірності $w(x,t)$ є однаковими, тобто траєкторія випадкового процесу покривається множинами, котрі мають однаковий характерний розмір по осях x і t, наприклад, квадратами. Тому

$$diam\,(X_j) = \left| X(t_j) - X(t_{j-1}) \right|,$$

тобто мірою Хаусдорфа (51) є s-довжина [189]:

$$K_s(X) \equiv L_s[X(t)] = \lim_{\delta \to 0} \alpha(s,\delta),$$

$$\alpha(s,\delta) = \inf\left[\sum_{j=1}^{N}\left|X(t_j) - X(t_{j-1})\right|^s\right] \text{ при } \left|t_j - t_{j-1}\right| < \delta, \qquad (52)$$

де $N = T / \delta$ – кількість інтервалів дискретизації реалізації даного випадкового процесу за час спостереження Т.

Для самоафінних процесів спроба визначення «штучної» розмірності самоподібності, тобто величини, яка не враховує властивостей процесу, призведе до деяких аномальних результатів [193]. В цьому випадку потрібно покривати траєкторію множинами, які враховують різні масштабні коефіцієнти по різних осях, наприклад, прямокутниками з розміром

$$\left|X(t_j) - X(t_{j-1})\right| \times \left|t_j - t_{j-1}\right|^s.$$

Тоді $$K_s(X) = \lim_{\delta \to 0} b(s,\delta),$$

де $$b(s,\delta) = \inf\left(\left(\sum_{j=1}^{k}\left|X(t_j) - X(t_{j-1})\right| \cdot \left|t_j - t_{j-1}\right|^s\right)^{1/2}\right) \qquad (53)$$

$$\text{при } \left|t_j - t_{j-1}\right|^{s/2} < \delta.$$

Розмірність D_H в обох випадках визначається як критичне значення s-переходу між нулем і нескінченністю величини $\langle K_s(X)\rangle$ – усередненої за ансамблем реалізацій міри Хаусдорфа [194]. Таким чином, розрахунок хаусдорфової розмірності D_H пов'язаний з обчисленням s-го абсолютного моменту приростів випадкового процесу.

Для випадкового гаусового процесу $X(t)$ з нульовим математичним сподіванням і кореляційною функцією $K(t_1, t_2)$ приросту

$$\Delta X_j = X(t_j) - X(t_{j-1})$$

також мають нульове середнє і дисперсію, співпадаючу із структурною функцією процесу, тобто

$$D\left[\Delta X_j\right] = K(t_j,t_j) + K(t_{j-1},t_{j-1}) - 2\cdot K(t_{j-1},t_j) = \\ = \Psi(t_{j-1},t_j) \equiv \Psi_{j-1,j}.$$

Далі розглядатимемо лише процеси, структурна функція яких має таку локальну поведінку:

$$\Psi(t,t+\delta) = A(t)\delta^{\alpha} + O(\delta^{\alpha+1}),$$

де $A(t)$ обмежена величиною M, а $0 < \alpha <$

Оскільки

$$\left\langle \left|\Delta X_j\right|^s \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{2\pi\Psi_{j-1,j}}} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} y^s \exp(-\frac{y^2}{2\Psi_{j-1,j}})dy = \frac{2^{s/2+1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Psi_{j-1,j}^{s/2};$$

$$\left\langle \sum_{j=1}^{N}\left|\Delta X_j\right|^s \right\rangle = f(s)\sum_{j=1}^{N}\Psi_{j-1,j}^{s/2},$$

де Г(x) – гамма-функція, а функція $f(\cdot)$ залежить від s і не залежить від δ, то враховуючи (52) з точністю до співмножника, котрий залежить лише від s:

$$\alpha(s,\delta) \sim \left(\delta^{\alpha}\right)^{s/2}\cdot N \sim \left(\delta^{\alpha}\right)^{s/2}\cdot\delta^{-1} = \delta^{\frac{\alpha s}{2}-1}.$$

Границя цього виразу при $\delta \to 0$ визначає $\left\langle K_s(X)\right\rangle$ у виразі (56) і є кінцевим лише при виконанні умови $\alpha s_0 / 2 - 1 = 0$, тобто $s_0 = 2/\alpha$.

Отже, відповідно до раніше викладеного, для самоподібних процесів хаусдорфова розмірність дорівнює

$$D_{Hc} = D_H = 2 / \alpha . \tag{54}$$

Аналогічні обчислення, що були проведені для хаусдорфової міри, котра задається співвідношенням (34), призвели до виразу

$$\langle b(s,\delta) \rangle \sim \delta^{\alpha/2 \cdot 1/2} \cdot \delta^{s/2} \cdot N \sim \delta^{\alpha/4+s/2-1},$$

тобто для самоафінних процесів хаусдорфова розмірність дорівнює

$$D_{Ha} = D_H = 2 - \alpha / 2 . \tag{55}$$

Далі розглянемо фрактальний броунівський рух (узагальнений вінерівський процес)

$$B_H(t) = \int_0^t (t-\tau)^{H-1/2} n(\tau) d\tau \tag{56}$$

де $n(\tau)$ – білий гаусів шум.

Відмітимо, що приріст величини $B_H(t)$ відбувається відповідно до виразу

$$|t_1 - t_2|^H , 0 < H < 1,$$

а кореляційна функція має вигляд

$$K_H(t_1,t_2) = \frac{t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}}{2}.$$

При H = 1/2 отримаємо вінерівський процес з приростом порядку $|t_1 - t_2|^{1/2}$ і кореляційною функцією

$$K_{1/2}(t_1,t_2) = \left[t_1 + t_2 - |t_1 - t_2| \right] / 2 = \min(t_1,t_2) .$$

Структурна функція $B_H(t)$ задається співвідношенням

$$\psi(t_1,t_2) = |t_1 - t_2|^{2H},$$

тому

$$\psi(t,t+\delta) = \delta^{2H},\ \Delta > 0,$$

отже $\alpha = 2H$, тобто:

$$D_{Hc} = 1 / H; \quad D_{H\alpha} = 1 - H. \qquad (57)$$

Зокрема для стандартного вінерівського процесу (H = 1/2) набуваємо загальновідомих значень, які інтерпретується як розмірність сліду багатовимірного броунівського руху [193]:

$$D_{Hc} = 2;\ D_{H\alpha} = 3 / 2.$$

Фрактальні властивості трафіку ІПД з повторними запитами

Спираючись на результати, отримані в підрозділі 6.1, проведемо дослідження фрактальних властивостей трафіку ІПД з повторними запитами на прикладі об'єднаного трафіку служби передачі службової інформації і підсистеми обслуговування запитів (забезпечення розмови). Розглянемо модель, яка описує взаємодію цих підсистем.

Імовірнісні характеристики каналів передачі даних при певних припущеннях визначаються відношенням сигнал-шум і прийнятим способом кодування повідомлень (кодограмами). Помилки при передачі кодограм призводять до виникнення повторних запитів на обслуговування. Запити повинні реєструватися і обслуговуватися, тому повторні запити виникають при зайнятості пристрою реєстрації, який надалі вважатимемо одноканальним [224]. Структура даної підсистеми передачі службовій інформації представлена на рис. 8.

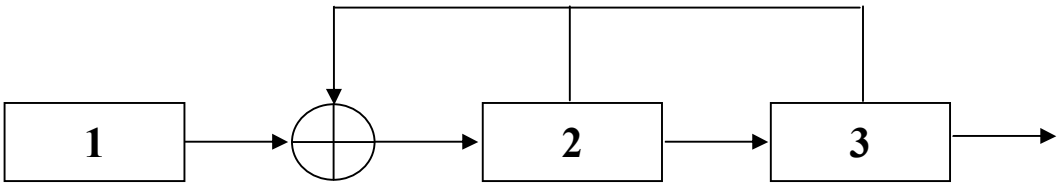


Рисунок 8 – Схема передачі службовій інформації:
1 – джерело запитів на обслуговування (навантаження)
2 – приймач службової інформації
3 – одноканальний пристрій реєстрації запитів на обслуговування

Хай джерело 1 генерує пуассонівський потік первинних запитів з інтенсивністю λ, котрий обслуговується пристроєм реєстрації з часом реєстрації, розподіленим за експоненціальним законом з параметром $\mu = 1$. Якщо пристрій реєстрації зайнятий, то виникають повторні запити на обслуговування. Для опису поведінки абонента при відмові в обслуговуванні використовуємо модель, в котрій запит повторюється доти, поки не буде обслугований. Тоді кількість повторних запитів в одиницю часу задається співвідношенням

$$Y = Y_1 \cdot Y_2,$$

де Y_1 – кількість джерел повторних запитів, а Y_2 – кількість запитів в одиницю часу, створюваних джерелом, що генерує пуассонівський потік з інтенсивністю ν. Кількість повторних запитів у момент часу t задається співвідношенням

$$Z(t) = \int_0^t Y(t - \tau) d\tau. \qquad (58)$$

Для системи, представленої на рис. 8, можуть бути отримані динамічні рівняння для часової залежності середньої (за ансамблем) кількості обслугованих $x(t)$ і повторних $y(t)$ запитів в одиницю часу. На основі рівнянь для перехідної ймовірності [123] отримуємо закони збереження середніх значень кількості обслуго-

ваних і повторних запитів для системи з нульовими початковими умовами:

$$\dot{x} = q\lambda - \nu y - x - (1+\nu)\left(\frac{x^2}{1-x} + \frac{p}{q}x\right);$$

$$\dot{y} = -\nu y + (1+\nu)\left(\frac{x^2}{1-x} + \frac{p}{q}x\right); \qquad (59)$$

$$x(0) = 0, y(0) = 0,$$

де p – ймовірність помилок при передачі службового повідомлення; $q = 1 - p$; λ і ν – інтенсивності потоків первинних і повторних запитів (враховуємо $\mu = 1$). Стаціонарне рішення системи рівнянь (59) виглядає таким чином:

$$x_c = q\lambda; \quad y_c = \frac{\nu+1}{\nu}\left(\frac{q^2\lambda^2}{1-q\lambda} + p\lambda\right).$$

При $p \neq 0$ система (59) має єдину стаціонарну точку (аттрактор) у вузлі (x_c, y_c) при $0 < \nu < \infty$.

Аналіз залежностей $x(t)$ і $y(t)$ в подвійному логарифмічному масштабі дозволяє використовувати такі наближені вирази:

$$x(t) \sim t^{\beta}(\beta \sim 1); \quad y(t) \sim t^{\alpha}(\alpha \sim 3).$$

Оцінимо фрактальну розмірність процесу $Z(t)$, задану виразом (58) при високій інтенсивності потоку запитів, що поступає. Оскільки кожне джерело повторних запитів генерує пуассонівський потік з інтенсивністю ν, то залежність кількості запитів від часу описується пуассонівським процесом.

При великих інтенсивностях він апроксимується дифузійним вінерівським процесом, а кількість запитів за малий інтервал часу (приріст вінерівського процесу) – гаусів білий шум і, отже

$$Y_2(t) \approx n(t),$$

де $n(t)$ – імпульсна характеристика.

Якщо $Y_1(t)$ оцінимо математичним сподіванням кількості запитів $\overline{Y_1(t)}$, що надійшли в момент часу t, то враховуючи стаціонарність $n(t)$ в співвідношенні (58) можна використовувати інтеграл Дюамеля:

$$Z(t) = \int_0^t h(t-\tau)n(\tau)d\tau; \quad h(t) = \overrightarrow{Y_1(t)},$$

Рішення системи рівнянь (59) визначає перехідні процеси для системи з нульовими початковими умовами, проте по ним можна оцінити і характеристики перехідного процесу за будь-яких початкових умов.

Середня кількість повторних запитів у момент часу t зростає пропорційно $y(t)$ і убуває пропорційно $x(t)$ (за рахунок зростання кількості обслугованих запитів), тобто пропорційно $t^{\alpha-\beta}$. Тому середня кількість повторних запитів в одиницю часу (похідна) задає перехідну характеристику системи $g(t) \sim t^{\alpha-\beta-1}$.

Оскільки $h(t) = g'(t)$, то остаточно в умовах високої інтенсивності потоку запитів, що надходять, отримуємо.

$$Z(t) = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-\beta-2} n(\tau)d\tau. \qquad (60)$$

$Z(t)$ є процесом фрактального броунівського руху (37) з показником Херста (38) $H = \alpha - \beta - 3/2$ і хаусдорфовою самоафінною розмірністю $D_{Ha} = 2 - H$.

Система рівнянь (59) може бути вирішена чисельно.

Наприклад, при $\nu = 10,\ \lambda = 0,75,\ \nu = 10,\ \mu = 1$ отримаємо: $\alpha \approx 2,86,\ \beta \approx 0,96,$

Запропоновані в даному підрозділі аналітичні вирази для визначення фрактальних характеристик трафіку інтегрального потоку

використані при побудові моделі, що враховує властивість масштабної інваріантності відповідного процесу.

Фрактальна модель трафіку ІПД, що використовує властивість масштабної інваріантності

Для управління механізмами утворення віртуальних з'єднань необхідна розробка конструктивних математичних моделей мережевих процесів, що враховують фрактальний характер трафіку ІПД, що дозволяє надалі використовувати їх для розробки нових методів управління ІПД [146]. Використання властивості масштабної інваріантності фрактальних процесів дозволяє застосовувати різні імовірнісні методи для оперативного прогнозування процесів за допомогою моделей з мінімальною кількістю параметрів, що настроюються. Одним з параметрів фрактальних моделей таких процесів може бути кількість відліків при їхньої агрегації, коли починає виявлятися масштабна інваріантність. Для цілей дослідження важливою характеристикою таких процесів є їхня фрактальна розмірність, спосіб розрахунку котрої з використанням хаусдорфової міри наведений в підрозділі 6.1.

Пов'яжемо фрактальну розмірність з масштабом вимірювання його значень такою формулою [193]:

$$L(\delta) = a \cdot \delta^{1-D_H}, \qquad (61)$$

де $L(\delta)$ – фрактальна міра процесу; δ – масштаб, що зіставляється вибраному вимірювальному елементу; a – коефіцієнт, що характеризує евклідову міру, котра може бути зіставлена даному процесу. Якщо величина D_H відмінна від одиниці, то значення $L(\delta)$ зростає зі зменшенням величини масштабу вимірювань δ.

Таким чином, $L(\delta)$ характеризує структуру процесу або об'єкту шляхом опису його властивостей за допомогою окремих складових, кожна з котрих в якомусь сенсі подібна до цілого. В результаті незалежно від масштабу спостереження процес виглядає однаково з погляду тих його характеристик, що володіють фрактальними влас-

тивостями. Так, інтенсивність трафіку в комп'ютерній мережі можна зміряти шляхом підрахунку кількості $N(\delta)$ пакетів, що надходять у період, заданий часовим інтервалом (базовим елементом) вибраної тривалості δ.

Введемо вимірювальний елемент вигляду $h(\delta) = \gamma(d)\delta^d$. В результаті міра множини вводиться як адитивна функція, котру можна записати як

$$M_d = \sum_{h(\delta)\in H} h(\delta),$$

де H – множина вимірювальних елементів. У загальному випадку при $\delta \to 0$ міра M_d дорівнює нулю або нескінченності, що залежить від вибору параметра d – розмірності вибраної міри. Тому вираз для міри можна записати у вигляді

$$M_d = \sum h(\delta) = \sum \gamma(d)\delta^d = \gamma(d)N(\delta)\delta^d \underset{\delta\to 0}{\to} \begin{cases} 0, d > D_H; \\ \infty, d < D_H. \end{cases} \quad (62)$$

Якщо *Г(N)* – коефіцієнт подібності, що дозволяє множину L накрити N множинами $L' = \Gamma(L)$, то розмірність подібності дорівнює

$$D_s = -\ln N / \ln \Gamma(N). \quad (63)$$

Для фрактальних об'єктів, що володіють властивістю самоподібності, має місце рівність [205]

$$D_H = D_s.$$

Простим фрактальним і самоподібним об'єктом, що почав використовуватися як модель складних процесів, є множина Кантора, для котрої після n-го етапу розбиття для відрізку завдовжки $\delta_i = (\xi)^n$ $(\xi = 1/3)$

$$M_d = N(\delta)\delta^d \underset{\delta\to 0}{\to} \lim_{n\to\infty} 2^n (1/\xi)^{n\cdot d}. \quad (64)$$

Така міра не розходиться, якщо $2^n(1/\xi)^{n\cdot d} = 1$, тому використовуючи (62) і (63), отримаємо, що

$$D_S = D_H = -\ln 2 / \ln(1/3) = \ln 2 / \ln 3.$$

Для побудови моделі мережевих процесів узагальнимо отримані результати на випадок, коли у якості об'єкту досліджень обраний часовий інтервал довільної тривалості t. Нехай відповідно до прийнятої умови нормування на цьому інтервалі задана деяка відносна щільність початкових станів ρ_0. Тоді "відносна маса" всього інтервалу дорівнює добутку $\rho_0 \cdot t$.

Розділимо даний інтервал на три складові і видалимо середню частину. На кінцях інтервалу залишиться два відрізки довжиною ξt $(\xi < 1/2)$. Координати точок після першого поділу дорівнюють $[0,\xi t]$ і $[t(1-\xi),t]$. Щільність станів, що залишилися, збільшимо таким чином, щоб "маса" всього інтервалу не змінилася. В цьому випадку щільність станів буде дорівнювати величині $1/(2\xi t)$. На другому етапі ділення кількість даних точок зростає до восьми, а їхні координати в порядку зростання визначать таку послідовність відрізань:

$$[0,\xi^2 t],\ [(\xi(1-\xi)t,\xi t],\ [t(1-\xi),t(1-\xi+\xi^2)],\ [t(1-\xi^2),t].$$

Щільність станів на цих відрізках, виходячи з умови нормування, визначається виразом $1/(2\xi)^2 t$.

Довжини отриманих відрізків рівні, а їхня "відносна маса" обчислюється як

$$\mu_i = \ell_i^{\nu} = \left(t\cdot\xi^2\right)^{\ln 2/\ln(1/\xi)} = t\cdot\left(\frac{1}{\xi}\right)^{-2\cdot\ln(1/2)/\ln(1/\xi)} = t\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2, \tag{65}$$

де ℓ_i – довжина відрізання, $\nu = \ln 2 / \ln(1/\xi)$ – фрактальна розмірність даної множини станів, а щільність кожного з відрізків (ста-

нів), що залишилися, дорівнює

$$\rho_i = \frac{\mu_i}{\ell_i} = \rho_0 \ell_i^{\nu-1}. \qquad (66)$$

Показник μ_i може бути мірою будь-якого процесу, що має своїм носієм множину Кантора, з його допомогою можна отримати залежність «маси» деякого об'єкту при зміні його довжини в інтервалі $[0, x]$ у вигляді такого співвідношення:

$$M(x) = \int_0^x \rho(t)dt = \int_0^x d\mu(t).$$

Використовуючи описані вище властивості канторівської множини, представимо характер зміни станів деякого процесу, наприклад, зміни кількості пакетів, переданих по лінії зв'язку з постійною інтенсивністю $\lambda = 1$, за допомогою функції $f(t)$. Для $r_L t$ частини огинає виконується рівність $f(r_L t) = \frac{1}{N} f(t)$. Проте, при розбитті інтервалу спостереження з використанням елементів канторівської множини ця рівність перетворюється на тотожність, якщо виконується умова

$$1/3^2 = \left(1/2^2\right)^{1/\beta},\ \beta = \ln 2 / \ln 3.$$

Аналогічно для n-го етапу розбиття отримаємо $\left(1/3^n\right)^{\beta} = 1/2^n$, що призводить до значення $\beta = \ln 2 / \ln 3$, котре співпадає з розмірністю подібності для канторівської множини при $\xi = 1/3$. У загальному випадку задача побудови моделі процесу полягає у визначенні огинаючої функції $f(t)$, котра задовольняє рівнянню $f(r_L t) = \frac{1}{N} f(t)$, нетривіальне рішення якого має вид степеневої функції

$$f(t) = A_\beta t^{-\beta}, \quad \beta = \ln N / \ln r_L,$$

що дозволяє визначити клас моделей, за допомогою котрих можна кількісно характеризувати прояви властивості масштабної інваріантності.

Розглянемо модель мережевих процесів, для котрих має місце втрата окремих пакетів. Ці процеси можна назвати процесами з неповною пам'яттю, в основі котрих лежать властивості розглянутої вище фрактальної канторівської множини. Зв'язок між вхідним і вихідним сигналами задається інтегралом згортки

$$u(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau, \qquad (67)$$

де $h(t)$ – імпульсна перехідна функція, котра характеризує вплив на вихідну координату $u(t)$ об'єкту всіх значень вхідного сигналу $f(\tau)$ для $0 \le \tau < t$. Проте, якщо в якості $h(t)$ використовувати дельта-функцію Діраку, то співвідношення (67) призводить до тривіальної рівності $u(t) = f(t)$, що характеризує властивості об'єкту, в якому відсутня пам'ять або який-небудь вплив на його стан сигналу $f(\tau)$ $0 \le \tau < t$.

Визначимо імпульсну перехідну функцію вигляду

$$h(\tau) = \begin{cases} 1/t, & 0 \le \tau \le t, \\ 0, & \tau < 0; \tau > t, \end{cases} \qquad (68)$$

яка задовольняє умові нормування $\int_0^t h(\tau) d\tau = 1$. Тоді процесу $u(t)$ на виході системи з повною пам'яттю відповідає процедура усереднювання на інтервалі

$$u(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(\tau) d\tau. \qquad (69)$$

Таким чином, типовою операцією обробки результатів вимірювань є ковзаюче згладжування вигляду $X_T(t) = \frac{1}{T}\int\limits_{t-T}^{t} \xi(\tau)d\tau$.

Обчислимо моменти і спектральну щільність процесу $X_T(t)$, за умови, що $\xi(t)$ – стаціонарний в широкому сенсі випадковий процес з математичним сподіванням m_ξ, кореляційною функцією $C_\xi(\tau)$ і спектральною щільністю $F_\xi(\omega)$. Тоді

$$m_{X_T}(\tau) = M\{X_T(t)\} = \frac{1}{T}\int\limits_{t-T}^{t} m_\xi d\tau = m_\xi,$$

а кореляційна функція має вигляд

$$C_{X_T}(\tau) = M\left\{\left(X_T(t) - m_{X_T}\right)\left(X_T(t+\tau) - m_{X_T}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int\limits_{t-T}^{t}\int\limits_{t-T+\tau}^{t+\tau} C_\xi(u_1 - u_2)du_1du_2.$$

Оскільки процес $\xi(\tau)$ має спектральну щільність $F_\xi(\omega)$, то

$$C_\xi(u_1 - u_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_\xi(\omega)\exp\{j\omega(u_1 - u_2)\}d\omega.$$

Тому вираз для кореляційної функції процесу $X_T(t)$ представимо як

$$C_{X_T} = \frac{1}{2\pi T^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_\xi(\omega)\int\limits_{t-T}^{t}\exp\{-j\omega u_2\}du_2\int\limits_{t-T+\tau}^{t+\tau}\exp\{-j\omega u_1\}du_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi T^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_\xi(\omega)\left[\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega u_2}\Big|_{u_2=t-T}^{u_2=t}\right]\cdot\left[\frac{1}{j\omega}e^{j\omega u_1}\Big|_{u1=t-T}^{u_1=t+\tau}\right]d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi T^2} \int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(\omega) \left[-\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega T} \left(1 - e^{j\omega T}\right) \right] \cdot \left[\frac{1}{j\omega} e^{j\omega(t+\tau)} \left(1 - e^{j\omega T}\right) \right] d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi T^2} \int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(\omega) \frac{1}{j\omega^2} e^{-j\omega\tau} \left(1 - e^{j\omega T}\right) d\omega.$$

Зважаючи на формулу Ейлера, отримаємо

$$C_{X_T}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(\omega) \frac{2(1 - \cos\omega T)}{\omega^2 T^2} e^{j\omega\tau} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(\omega) \left(\frac{\sin \omega T / 2}{\omega T / 2} \right) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Таким чином, вираз для кореляційної функції процесу $X_T(t)$ має вигляд

$$C_{X_T}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(\omega) \left(\frac{\sin \omega T / 2}{\omega T / 2} \right) e^{j\omega\tau} d\omega,$$

тому спектральна щільність початкового $\xi(t)$ і агрегованого $X_T(t)$ процесів зв'язані співвідношенням

$$F_{X_T}(\omega) = F_\xi(\omega) \left(\frac{\sin \omega T / 2}{\omega T / 2} \right)^2.$$

Відмітимо, що функція $\dfrac{\sin \omega T / 2}{\omega T / 2}$ має найбільше значення при малих значеннях $\omega T / 2$. Тому така операція агрегації пригнічує високочастотні складові початкового сигналу і сприяє прояву низькочастотних або протяжних статистичних залежностей.

Проведемо подальші перетворення, для чого підставимо в отримане співвідношення для C_{X_T} вираз для спектральної щільності

$$F_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C_\xi(u)\exp\{-j\omega u\}du\,.$$

В результаті після зміни порядку інтеграції отримаємо новий вираз

$$C_{X_T} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(u)du \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-j\omega u\}\left(\frac{\sin\omega T\ /\ 2}{\omega T\ /\ 2}\right)^2 \exp\{j\omega\tau\}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_\xi(u)du \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{j\omega(\tau-u)\}\left(\frac{\sin\omega T\ /\ 2}{\omega T\ /\ 2}\right)^2 \exp\{j\omega\tau\}d\omega.$$

Для обчислення цього виразу зробимо заміну змінних $\tau - u = \lambda$. Внутрішній інтеграл в отриманому виразі для

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{j\omega\lambda\}\left(\frac{\sin\omega T\ /\ 2}{\omega T\ /\ 2}\right)^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{T^2}\cdot c\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega\lambda)\left(\frac{\sin\omega T\ /\ 2}{\omega T\ /\ 2}\right)^2 d\omega.$$

є табличним. Для його обчислення використовуємо те, що інтеграл $J_1 = c\int_0^{\infty} f(\omega)\cos(\omega\lambda)d\omega$ при $f(\omega) = \sin^2(a\omega)\big/\omega^2$ дорівнює

$$J_1 = \begin{cases} c^{-1}\left(a - \dfrac{1}{2}\lambda\right) & \lambda < 2a \\ 0 & \lambda > 2a. \end{cases}$$

Остаточний вираз для кореляційної функції набере вигляду

$$C_{X_T} = \frac{1}{T^2}\int_{-T}^{T}\left(T - |u|\right)C_\xi(\tau - u)\,du\,.$$

Зіставимо інтервалу, на якому обчислюється імпульсна пе-

рехідна функція , процедуру побудови канторівської множини з параметром $\xi = 1/3$. Тоді після першого етапу ділення координати станів, що залишилися, будуть рівні $(0,\xi t)$ $(2\xi t, t)$ $2\xi t$. З урахуванням умови (65) щільність цих станів повинна змінитися і буде рівна $1/2\xi t$. На наступному етапі розбиття щільність станів, що залишилися, обчислюється за формулою $1/(2\xi)^2 t$.

На n-му етапі отримаємо 2^n підінтервалів завдовжки $\xi^n t$ з координатами

$$\left(t_m^{(n)}, t_m^{(n)} + \xi^n t\right),$$

де $m = 1,...,2^n, t_m^{(n)}$ – початкова координата інтервалів, що залишилися.

Щільність станів, що залишилися, визначається виразом $1/(2\xi)^n t$, тому інтеграл (69) можна записати у вигляді

$$u(t) = \frac{1}{(2\xi)^n t} \cdot \int_0^t f(\tau)\left[e\left(t_m^{(n)} \le \tau < t_m^{(n)} t\right) \right] d\tau,$$

де, а одинична функція задається виразом

$$e\left(t_m^{(n)} \le \tau < t_m^{(n)} + \xi^n t\right) = \begin{cases} 1, & \tau \in \left(t_m^{(n)} + \xi^n t\right) \\ 0, & \tau < t_m^{(n)}, \tau \ge t_m^{(n)} + \xi^n t. \end{cases}$$

Після граничного переходу $n \to \infty$ отримаємо вираз інтеграла згортки на канторівській множині [199] у вигляді співвідношення

$$u(t) = B_\xi \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \frac{1}{t^\beta} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau, \qquad (70)$$

де $\beta = \ln 2 / \ln 3$ – фрактальна розмірність канторівської множини, $\Gamma(\beta)$ – гамма-функція від аргументу β, B_ξ – константа, за-

лежна від характеристики канторівської множини. Співвідношення (70) є однією із форм запису операції дробового інтегрування [45]. Запишемо (70) у формі інтеграла згортки

$$u(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau, \qquad (71)$$

де $h(t) = kt^{\beta-1}$ – імпульсна перехідна функція, $k = B_\xi \Gamma^{-1}(\beta) t^{-\beta}$ – константа нормування.

Зміна форми запису інтеграла при збереженні значення обумовлена тим, що стан системи змінюється не на всьому безперервному інтервалі, а лише в точках не усюди щільної або фрактальної канторівської множини. В результаті при побудові моделі системи з неповною пам'яттю інтеграл (69) замінюється на інтеграл від функції, помноженої на нескінченну послідовність δ-функцій з координатами в точках канторівської множини, сумарна інтенсивність котрих дорівнює одиниці. У результаті значення (71) визначається сумою нескінченної кількості нескінченно малих стрибків функції $f(\tau)$ в точках канторівської множини.

Повернемося до передграничного випадку.

Розглянемо вираз

$$\int_0^t f(\tau) \left[1\left(t_m^{(n)} \le \tau < t_m^{(n)} + \xi^n t \right) \right] d\tau, \qquad (72)$$

котрому відповідає інтеграл вигляду

$$\phi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau. \qquad (73)$$

Порівнюючи (69) і (73), отримаємо $\phi(t) = t \cdot u(t)$. У свою чергу, помножаючи (70) на t^β, тобто обчислюючи $t^\beta \cdot u(t)$, отримаємо

$$\phi_k(t) = \int_0^t k_1 \cdot (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau, \qquad (74)$$

де $k_1 = B_\xi \Gamma^{-1}(\beta)$ – коефіцієнт нормування. Відмітимо, що отриманий вираз для коефіцієнта k_1 може бути використаний для побудови моделі процесів, якщо на інтервалі інтеграції $f(\tau)$ є постійною величиною. В цьому випадку значення дробового інтеграла (74) на інтервалі $[0,t]$ менше значення інтеграла (73) на цьому ж інтервалі, оскільки $\beta = \ln 2 / \ln 3 < 1$. Дана властивість отриманої моделі процесів є наслідком втрати частини станів на елементах фрактальної канторівської множини. Стосовно мережевого трафіку це означає, що для досягнення певного об'єму переданих даних, інтеграл (74) повинен обчислюватися в ширших часових межах. В цьому випадку права межа границі інтегрування буде дорівнювати $t^{1/\beta}$. Таким чином, процеси, відповідні операції дробового інтегрування, стають як би протяжнішими, а швидкість їхньої зміни описується інтегральними співвідношеннями дробового порядку.

В результаті, якщо для передачі файлу в каналі зв'язку з постійною інтенсивністю λ пакетів в секунду потрібно t секунд, то об'єм файлу дорівнює $x = \lambda t$, а $f(\tau) = \lambda$. Використання моделі з неповною пам'яттю дозволяє врахувати, що частина пакетів в процесі передачі може бути втрачена. Тому втратам пакетів зіставимо фрактальну канторівську множину з параметром ξ. Тоді на першому етапі побудови моделі каналу з втратами кількість переданих пакетів можна оцінити величиною $\lambda(2 \cdot \xi)^n t$, а кількість втрачених пакетів – значенням $\lambda t\left[1-(2\xi)^n\right]$. Після граничного переходу, коли $n \to \infty$, кількість пакетів, переданих через канал, буде дорівнювати

$$x_k = \int_0^t k_1 \cdot (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau,$$

де $f(\tau) = \lambda$ – інтенсивність посилки пакетів, а $k_1 = B_\xi \Gamma^{-1}(\beta)$.

Ввівши нові змінні $t - \tau = y$ і $f(\tau) = \lambda$, отримаємо

$$x_k = \lambda t^\beta \int_0^t k y^{\beta-1} dy. \qquad (75)$$

Враховуючи умову нормування у виразі (75) отримаємо, що кількість переданих пакетів λt^β менше кількості посланих – λt, отже, на передачу втрачених пакетів, наприклад, за допомогою протоколу TCP, необхідно витратити додатковий час $t^{1/\beta} - t$.

Отже, використання властивостей масштабної інваріантності при моделюванні мережевого трафіку дозволяє побудувати адекватну модель мережевого процесу, ініційовану фрактальним трафіком, в котрому втрати пакетів компенсуються збільшенням часу передачі повідомлень, що призводить до формування протяжних статистичних часових залежностей.

У отриманій моделі вплив втрат і причина появи протяжних залежностей формально враховані за допомогою введення операції дробового інтегрування. Проте, для практичного використання такої моделі необхідно ідентифікувати значення параметра, кількісно характеризуючих властивості масштабної інваріантності мережевих процесів, ініційованих фрактальним трафіком.

Частина 2

Методичні вказівки з лабораторних робіт

Перелік тем лабораторних робіт

№ роб.	Назва тем	Годин
	Лабораторні роботи	
1	Розробка програмної моделі для оптимізації часу проходження пакету в МСМ	2
2	Розробка програми, що використовує метод сканування для оптимізації часу проходження пакету в МСМ	2
3	Розробка програми знаходження оптимального розподілу ресурсів МСМ при одночасному проходженні двох інформаційних потоків даних	2
4	Використання додаткових можливостей MS OFFICE при моделюванні процесу управління інформаційними потоками даних в МСМ	
5	Програмування алгоритмів маршрутизації	2
6	Програмна побудова дерева рішень для процесу вибору ІТ-проекту МСМ	2
7	Побудова програмної моделі відокремленого вузла МСМ	2
8	Розробка програми цілочисельної оптимізаціїї у МСМ	2

Завдання до лабораторних робіт 1 – 7 наведені в методичних вказівках.

Матеріал до лабораторної роботи 8 та таблиці з додатковим матеріалом наведений нижче.

Лабораторна робота № 8

Розробити програму розрахунку характеристик найпростішого потоку вимог в МСС (завдання 1 - 3) і перевірити її на вихідних даних свого варіанта з табл. 1.

1. Аналіз і синтез систем масового обслуговування з відмовами

2.1. Постановка задач.

Задача 1. АТС містить **n** сполучних приладів. Протягом **τ** хвилин на АТС в середньому надходить **α** викликів. Поток викликів можна вважати найпростішим. Тривалість розмови є випадковою величиною, розподіленою по показовому закону з середнім значенням $\overline{T}_p$ мин. Визначити:

- ймовірність того, що в даний момент часу на АТС зайняті **h** сполучних приладів – **P_h;**
- характеристики АТС.

Задача 2. Обчислювальна система (ВС) містить **n** однотипних ЕОМ. Протягом середнього часу вирішення даного завдання до ВС в середньому надходить **λ** заявок на вирішення завдань. Зовнішніх ЗУ ВС не має. Яким чином необхідно змінити кількість ЕОМ, щоб ймовірність відмови у вирішенні завдання зменшилася в 10 разів?

Задача 3. В умовах завдання 1 розрахувати, яка кількість з'єднувальних приладів повинна мати АТС, щоб ймовірність відмови в з'єднанні не перевищувала **$P_{отк\ доп}$**?

2.2. Варіанти вихідних даних для задач 1-3 представлені в табл.2.

2.3. Рішення типових прикладів.

Пример 1. У відповідності з формулюванням завдання 1 задано: n=5; τ=2 хв.; α =4; $\overline{T}_p$=1,5 хв; h=3.

Рішення: Визначимо інтенсивність потоку викликів

$$\lambda=\frac{\alpha}{\tau}=\frac{4}{2}=2 \text{ (викл./хв).}$$

Далі, середнє число вимог (викликів), що надходять в систему протягом середнього часу обслуговування (розмови), так само $\alpha=\frac{\lambda}{\mu}=\lambda\ \overline{T}_{об}=\lambda\ \overline{T}_p=2*1,5=3.$

Ймовірність P_3 обчислимо, визначивши попередньо ймовірність відсутності зайнятих каналів P_0 по формулі:

$$P_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{5}\frac{3^k}{k!}}=\frac{1}{1+3+\frac{9}{2}+\frac{27}{6}+\frac{81}{24}+\frac{243}{120}}=0,05\ .$$

$$\text{Тогда } P_3=\frac{3^3}{3!}*0,0543=0,2444.$$

Імовірність відмови в обслуговуванні $P_{отк}=\frac{a^n}{n!}*P_0=\frac{3^5}{3!}*0,0543=0,1101.$

Тоді відносна пропускна здатність АТС Q=1-0,1101=0,8899, а абсолютна пропускна здатність D=λ*Q=2*0,8899=1,7798 з'єдн./хв.

Середнє число зайнятих каналів і коефіцієнт завантаження АТС визначаються наступним чином:

$\overline{n}_3$=αQ=3*0,8899=2,6697; $K_3=\frac{\overline{n}_3}{n}=\frac{2,6697}{5}=0,53.$

Тоді середнє число вільних каналів та коефіцієнт простою відповідно рівні:

$\overline{n}_{св}=n-\overline{n}_3=5-2,6697=2,3303.$

K_0=1-K_3=1-0,5339=0,4661.

Приклад 2. У відповідності з формулюванням завдання 2 задано: n=5; λ=2 выкл./хв.

Рішення: Дана ВС є СМО з відмовами (немає ВЗУ, можливості мати чергу). Тоді, згідно табл. 1 додатка 2, при α=2, n=5, $P_{отк}$=0,0367.

Для того, щоб забезпечити виконання умови $\frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}} \le 0{,}00367$

при α = 2, необхідно, згідно табл.2 додатка 2, щоб число ЕОМ було n = 8.

Приклад 3. У відповідності з формулюванням завдання 2 задано: λ = 3 виз./Хв., $P_{откдоп}$=0,001.

Рішення: Необхідно скористатися виразом

$$P_{откдоп} \ge \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}},$$

праву частину якого потрібно обчислювати при α = 3 і різних значеннях n. Так при n = 8 $P_{откдоп}$ = 0,0081, при n = 9 $P_{отк}$ = 0,0027, при n = 10 $P_{отк}$ = 0,008. Таким чином, при заданих вимогах АТС повинна містити 10 сполучних приладів. Даний результат також може бути отриманий з використанням табл.1 додатка 2.

Таблиця 2

Варіанти вихідних даних

№ вар	№ задачі							№ вар	№ задачі						
	1				2		3		1				2		3
	n	a	τ	$\overline{T}_p$	n	α	$P_{откдоп}$		n	a	τ	$\overline{T}_p$	n	α	$P_{откдоп}$
1	6	5	3	2	2	0,5	10^{-3}	14	8	3	2	3,5	8	4	10^{-2}
2	5	3	4	2,5	3	0,75	10^{-2}	15	5	2	3	2,5	2	1	10^{-3}
3	7	4	2	3	4	1	10^{-3}	16	6	3	4	1,5	3	1,5	10^{-2}
4	8	3	4	3,5	5	1,5	10^{-2}	17	5	2	1	2	4	2	10^{-3}
5	6	2	2	2,5	6	2	10^{-3}	18	7	4	3	3	5	2,5	10^{-2}
6	5	4	3	4	7	2	10^{-2}	19	9	5	3	3,5	6	3,5	10^{-3}
7	7	3	4	3	8	3	10^{-3}	20	8	6	2	2,5	7	3	10^{-2}
8	6	3	2	3,5	2	0,75	10^{-2}	21	7	3	1	4	8	5	10^{-3}
9	5	2	1	2	3	0,5	10^{-3}	22	9	6	4	3,5	2	1,5	10^{-2}
10	8	4	3	2,5	4	1,5	10^{-2}	23	7	4	2	2	3	1	10^{-3}
11	9	5	2	1,5	5	1	10^{-3}	24	6	2	3	4	4	3	10^{-2}
12	7	5	3	2	6	2,5	10^{-2}	25	8	4	3	2	5	4	10^{-3}
13	6	4	2	4	7	4	10^{-3}	26	7	3	3	2,5	6	5	10^{-3}

3. Аналіз і синтез систем масового обслуговування з очікуванням (обмеженою довжиною черги)

3.1. Постановка задач.

Задача 1. Обчислювальна система (ВС) складається з n однотипних ЕОМ. Потік заявок на вирішення завдань є найпростішим з інтенсивністю λ заявок/год. Час вирішення одного завдання розподілено по показовому закону з середнім значенням $\overline{T}_{реш}$ хв. ВЗУ дозволяє зберігати вихідні дані для вирішення m завдань.

Визначити: 1) Характеристики обслуговування ВС.

2) Характеристики очікування.

3) Імовірність виникнення черги.

Задача 2. В умовах задачі 1 визначити, яке число ЕОМ повинно входити до складу ВС, щоб ймовірність відмови у вирішенні завдання не перевищувала заданої величини $P_{отк}^{зад}$.

Задача 3. Визначити допустимий середній час для вирішення одного завдання ВС (при умовах задачі 1), щоб ймовірність відмови в прийнятті задачі на рішення не перевищувала допустимої величини $P_{отк}^{доп}$.

Варіанти вихідних даних для задач 1-3 представлені в табл.3.

3.2. Рішення типових прикладів.

Приклад 1. У відповідності з формулюванням задачі 1 задано: n=4; λ=12 заявок/хв; $\overline{T}_{реш}$=15 хв.; m=5.

Рішення: 1) $\alpha=\lambda\cdot\overline{T}_{реш}=12\cdot(1/4)=3$.

Імовірність відмови $P_{отк}=\frac{\alpha^{n+m}}{n!n^m}P_0=\frac{3^{4+5}}{4!4^5}P_0$,

де $P_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\frac{\frac{\alpha}{n}-(\frac{\alpha}{n})^{m+1}}{1-\frac{\alpha}{n}}}$.

Обчислюючи послідовно, отримаємо $P_{отк}$=0,0332.

Даний результат також може бути отриманий з використанням табл. 2 додатка 2.

Відносна пропускна здатність Q=1-0,0332=0,96.

Абсолютна пропускна здатність D=αQ=11,6016 заявок/год.

$\overline{n}_з$= αQ = 3*0,9668 = 2,9004.

$K_З$= 2,9004/4 = 0,7251.

$\overline{n}_{св}$ = 4 – 2,9004 = 1,0996.

K_0 = 1 – 0,7251 = 0,2749

2) Середня довжина черги визначається за формулою

$$m_{ОЖ}=\frac{(\frac{\alpha}{n})^{1-m}-\frac{\alpha}{n}(m+1-\frac{m\alpha}{n})}{(1-\frac{\alpha}{n})^2}*P_{отк}=\frac{(\frac{3}{4})^{1-5}-\frac{3}{4}(5+1-5\frac{3}{4})}{(1-\frac{3}{4})^2}*0{,}0332=0{,}7403.$$

Середній час очікування $T_{ОЖ}=\frac{m_{ОЖ}}{\lambda}=\frac{0{,}7403}{12}=0{,}0617$ [ч]=3,7[хв.].

3) Імовірність виникнення черги дорівнює ймовірності того, що до момента надходження чергової заявки всі ЕОМ ВС зайняті вирішенням завдань, що надійшли раніше, тобто:

$P_{оч}=P_n=\frac{\alpha^n}{n!}P_0$, але $P_0=\frac{n!n^m}{\alpha^{n+m}}P_{отк}$, тоді

$$P_{оч}=(\frac{n}{\lambda})^m\cdot P_{отк}=(\frac{4}{5})^5\cdot 0{,}0332=0{,}137.$$

Приклад 2. У відповідності з формулюванням задачі 2 задано: m=5; λ=3; $P_{отк}^{зад}=0{,}002$.

Рішення: При заданих α = 3 та m = 5 на основі табл.2 додатку 2 визначаються значення $P_{отк}$ для різних n з наступною перевіркою умови $P_{отк}\le P_{отк}^{зад}$. Так, при n = 4$P_{отк}$=0,0332, n = 5$P_{отк}$=0,0074, n = 6$P_{отк}$=0,0016, отже $n_{треб}$=6.

Приклад 3. У відповідності з формулюванням задачі 3 задано: n=5; m=3; $P_{отк}^{доп}=0{,}003$.

Рішення: При заданих n = 4 і m = 5 на підставі табл.2 додатка 2 визначаємо величину α, при якій виконується умова $P_{отк}\le P_{отк}^{доп}$. Так, при α = 3$P_{отк}$=0,0332, при α = 2,5$P_{отк}$=0,0117, при α = 2$P_{отк}$=0,0027, отже $\alpha_{треб}$=2.

Тоді, оскільки $\alpha=\lambda\overline{T}_{реш}$, маємо $\overline{T}_{решдоп}=\frac{\alpha_{треб}}{\lambda}=\frac{2}{12}\approx 0{,}17[ч]\approx 10хв$

Таблиця 3

Варіанти вихідних даних

№ вар.	№ Задачі						№ вар	№ Задачі					
	1				2	3		1				2	3
	n	λ	$\overline{T}_{реш}$	m	$P_{отк.}^{зад}$	$P_{отк.}^{доп}$		n	λ	$\overline{T}_{реш}$	m	$P_{отк.}^{зад}$	$P_{отк.}^{доп}$
1	5	10	20	6	0,003	0,004	14	8	16	15	6	0,003	0,004
2	6	11	25	5	0,002	0,006	15	4	10	18	3	0,002	0,003
3	4	9	18	4	0,004	0,005	16	6	13	20	4	0,005	0,005
4	7	12	16	7	0.005	0,003	17	5	11	25	3	0,006	0,002
5	5	10	20	4	0,001	0,004	18	7	15	22	6	0,004	0,001
6	6	12	22	6	0,002	0,002	19	8	16	16	5	0,001	0,003
7	4	10	25	5	0,004	0,001	20	6	11	18	3	0,002	0,004
8	7	13	15	7	0,003	0,004	21	4	9	20	2	0,003	0,005
9	6	14	18	4	0,002	0,005	22	5	12	24	4	0,005	0,003
10	8	15	20	6	0,005	0,006	23	7	14	20	3	0,006	0,002
11	5	10	22	5	0,006	0,007	24	8	15	25	6	0,004	0,003
12	4	12	25	7	0,004	0,003	25	6	13	18	5	0,003	0,001
13	7	13	18	5	0,001	0,002	26	4	8	15	3	0,002	0,006

Додаток 2

Таблиця 1

Значення імовірності $P_{отк}$ для СМО з відмовами

n \ α	0.25	0.5	0.75	1	1.5	2	2.5	3	4	5
1	0.2000	0.3333	0.4286	0.5000	0.6000	0.6667	0.7143	0.7500	0.8000	0.8333
2	0.0244	0.0769	0.1385	0.2000	0.3103	0.4000	0.4717	0.5294	0.6154	0.6757
3	0.0020	0.0127	0.0335	0.0625	0.1343	0.2105	0.2822	0.3462	0.4507	0.5297
4	0.0001	0.0016	0.0062	0.0154	0.0480	0.0952	0.1499	0.2061	0.3107	0.3983
5		0.0002	0.0009	0.0031	0.0142	0.0367	0.0697	0.1101	0.1991	0.2849
6			0.0001	0.0005	0.0035	0.0125	0.0282	0.0522	0.1172	0.1918
7				0.0001	0.0008	0.0089	0.0100	0.0219	0.0627	0.1205
8					0.0001	0.0009	0.0031	0.0081	0.0304	0.0700
9						0.0002	0.0009	0.0008	0.0033	0.0184
10							0.0002	0.0008	0.0033	0.0184

Таблиця 2

Значення імовірності $P_{отк}$ для СМО з обмеженою довжиною черги

m=1

n \ α	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
1	0.1428	0.3333	0.4786	0.5714	0.6410	0.6923	0.7313	0.7619	0.7864	0.8064
2	0.0189	0.0909	0.1888	0.2857	0.3709	0.4426	0.5021	0.5517	0.5931	0.6281
3	0.0021	0.0204	0.0629	0.1230	0.1903	0.2571	0.3193	0.3753	0.4250	0.4688
4	0.0002	0.0038	0.0177	0.0454	0.0856	0.1338	0.1855	0.2370	0.2863	0.3324
5		0.0006	0.0042	0.0144	0.0336	0.0619	0.0973	0.1373	0.1794	0.2217
6		0.0001	0.0008	0.0040	0.0116	0.0257	0.0459	0.0724	0.1036	0.1378
7			0.0001	0.0009	0.0035	0.0092	0.0194	0.0346	0.0547	0.0732
8				0.0002	0.0009	0.0030	0.0073	0.0149	0.0264	0.0419
9					0.0002	0.0009	0.0025	0.0058	0.0116	0.0203
10						0.0002	0.0008	0.0021	0.0047	0.0091

m=2

n \ α	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
1	0.0667	0.2500	0.4153	0.5333	0.6157	0.6750	0.7190	0.7529	0.7796	0.8012
2	0.0046	0.0434	0.1240	0.2222	0.3167	0.3990	0.4677	0.5245	0.5716	0.6109
3	0.0003	0.0067	0.0305	0.0758	0.1369	0.2045	0.2714	0.3335	0.3893	0.4386
4		0.0009	0.0065	0.0222	0.0508	0.0912	0.1396	0.1916	0.2436	0.2935
5		0.0001	0.0013	0.00057	0.0165	0.0350	0.0638	0.0990	0.1390	0.1814
6			0.0002	0.0013	0.0048	0.0125	0.0261	0.0460	0.0721	0.1030
7				0.0002	0.0012	0.0039	0.0096	0.0194	0.0340	0.0536
8					0.0003	0.0011	0.0032	0.0044	0.0146	0.0255
9						0.0003	0.0010	0.0026	0.0057	0.0111
10							0.0003	0.0008	0.0021	0.0045

m=3

n \ α	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
1	0.0322	0.2000	0.3839	0.5161	0.6062	0.6694	0.7156	0.7507	0.7782	0.8003
2	0.0011	0.0212	0.0851	0.1818	0.2836	0.3744	0.4501	0.5120	0.5626	0.6034
3		0.0022	0.0150	0.1481	0.1024	0.1698	0.2405	0.3078	0.3687	0.4223
4		0.0002	0.0024	0.0109	0.0307	0.0641	0.1088	0.1608	0.2152	0.2684
5			0.0004	0.0023	0.0082	0.0210	0.0427	0.0734	0.1112	0.1536
6				0.0004	0.0020	0.0062	0.0149	0.0258	0.0513	0.0791
7					0.0005	0.0016	0.0047	0.0110	0.0214	0.0368
8						0.0004	0.0014	0.0037	0.0082	0.0157
9							0.0004	0.0012	0.0029	0.0062
10								0.0003	0.0009	0.0022

m=4

n \ α	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
1	0.0158	0.1667	0.3654	0.5079	0.6025	0.6676	0.716	0.7502	0.7779	0.8000
2	0.0003	0.0150	0.0800	0.1538	0.2617	0.3596	0.4406	0.5059	0.5587	0.6017
3		0.0007	0.0075	0.0311	0.0786	0.1452	0.2191	0.2910	0.3361	0.4111
4			0.0010	0.0055	0.0189	0.0458	0.0870	0.1385	0.1949	0.2512
5			0.0001	0.0009	0.0041	0.0125	0.0291	0.0555	0.0910	0.1331
6				0.0001	0.0008	0.0031	0.0067	0.0135	0.0370	0.0619
7					0.0002	0.0007	0.0024	0.0062	0.0136	0.0257
8						0.0002	0.0006	0.0013	0.0046	0.0097
9							0.0002	0.0005	0.0014	0.0034
10								0.0001	0.0004	0.0011

m=5

n \ α	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
1	0.0069	0.1429	0.3541	0.5039	0.6010	0.6670	0.7144	0.7500	0.7778	0.8000
2	0.0001	0.0052	0.0431	0.1333	0.2465	0.3504	0.4354	0.5029	0.5569	0.6007
3		0.0002	0.0037	0.0203	0.0615	0.1268	0.2036	0.2795	0.3482	0.4078
4			0.0003	0.0027	0.0117	0.0332	0.0707	0.1216	0.1798	0.2390
5				0.0004	0.0020	0.0074	0.0199	0.0425	0.0757	0.1175
6					0.0003	0.0016	0.0050	0.0128	0.0270	0.0490
7						0.0003	0.0012	0.0035	0.0087	0.0180
8							0.0003	0.0009	0.0026	0.0060
9								0.0002	0.0007	0.0019
10									0.0002	0.0006

m=6

n \ α	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
1	0.0039	0.1250	0.3469	0.5020	0.6004	0.6667	0.7143	0.7500	0.7778	0.8000
2		0.0026	0.0313	0.1176	0.2356	0.3495	0.4324	0.5015	0.5562	0.6002
3		0.0001	0.0019	0.0134	0.0488	0.1125	0.1919	0.2715	0.3481	0.4046
4			0.0001	0.0014	0.0072	0.0243	0.0583	0.1085	0.1683	0.2300
5				0.0001	0.0010	0.0044	0.0138	0.0329	0.0638	0.1051
6					0.0001	0.0008	0.0029	0.0085	0.0199	0.0392
7						0.0001	0.0006	0.0020	0.0055	0.0127
8							0.0001	0.0005	0.0014	0.0033
9								0.0001	0.0004	0.0011
10									0.0001	0.0003

m=7

n \ α	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
1	0.0019	0.1111	0.3422	0.5010	0.6002	0.6667	0.7143	0.7500	0.7778	0.8000
2		0.0013	0.0229	0.1053	0.2275	0.3407	0.4308	0.5007	0.5558	0.6001
3			0.0009	0.0088	0.0390	0.1011	0.1830	0.2658	0.2298	0.4028
4				0.0007	0.0045	0.0179	0.0485	0.0919	0.1592	0.2233
5					0.0005	0.0027	0.0095	0.0256	0.0543	0.0951
6						0.0004	0.0017	0.0056	0.0147	0.0317
7							0.0003	0.0011	0.0035	0.0090
8								0.0002	0.0008	0.0023
9									0.0002	0.0006
10										0.0001

Додаток 3

Таблиця значень функції $P_k(a) = \frac{a^k e^{-a}}{k!}$

k\a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,904837	818731	740818	670320	606531	548812	496585	449329	406570
1	090484	163746	222245	268128	303265	329287	347610	359463	365913
2	004524	016375	033337	053626	075816	098786	121663	143785	164661
3	000151	001091	003334	007150	012636	019757	028388	038343	049398
4	000004	000055	000250	000715	001580	002964	004968	007669	011115
5		000002	000015	000057	000158	000356	000695	001227	002001
6			000001	000004	000013	000035	000081	000164	000300
7					000001	000003	000008	000019	000039
8								000002	000004

Продовження таблиці

k\a	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,367879	135335	049787	018316	006738	002479	000912	000335	000123
1	367879	270671	149361	073263	033690	014873	006383	002684	001111
2	183940	270671	224042	146525	084224	044618	022341	010735	004998
3	061313	180447	224042	195367	140374	089235	052129	028626	014994
4	015328	090224	168031	195367	175467	133853	091226	057252	033737
5	003066	036089	100819	156293	175467	160632	127717	091604	060727
6	000511	012030	050409	104194	146223	160632	149003	122138	091090
7	000073	003437	021604	059540	104445	137677	149003	139587	117116
8	000009	000859	008101	029770	065278	103258	130377	139587	131756
9	000001	000191	002701	013231	036266	068838	101405	124077	131756
10		000038	000810	005292	018133	041303	070983	099262	118580
11		000007	000221	001925	008242	022529	045171	072190	097020
12		000001	000055	000642	003434	011262	026350	048127	072765
13			000013	000197	001321	005199	014188	029616	050376
14			000003	000056	000472	002228	007094	016924	032384
15			000001	000015	000157	000891	003311	009026	019431
16				000004	000049	000334	001448	004513	010930
17				000001	000014	000118	000596	002124	005786
18					000004	000039	000232	000944	002893
19					000001	000012	000085	000397	001370
20						000004	000030	000159	000617
21						000001	000010	000061	000264
22							000003	000022	000108
23							000001	000008	000042
24								000003	000016
25								000001	000006
26									000002
27									000001

Додаток 4

Таблиця значень функції $\sum_{m=0}^{k} \frac{a^m}{m!} e^{-a}$

k\a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,904837	818731	740818	0,670230	606531	548812	496585	449329	406570
1	995321	982477	963063	938448	909796	878099	844195	808792	772483
2	999845	998852	996400	992074	985612	976885	965858	952577	937144
3	999996	999943	999734	999224	998248	996642	994246	990920	986542
4	1,0	999998	999984	999939	999828	999606	999214	998589	997657
5	1,0	1,0	999999	999996	999989	999962	999909	999816	999658
6	1,0	1,0	1,0	1,0	999999	999997	999990	999980	999958
7	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	999998	999999	999997
8							1,0	1,0	1,0

Продовження таблиці

k\a	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,367879	135335	049787	018316	006738	002479	000912	000335	000123
1	735759	406006	199148	091579	040428	017352	007295	003019	001234
2	919699	676677	423190	238105	124652	061970	029636	013754	006232
3	981012	857124	647232	433472	265026	151205	081765	042380	021228
4	996340	947348	815263	628839	440493	285058	172991	099632	054963
5	999406	983437	916082	785132	615960	445681	300708	191236	115690
6	999917	995467	966491	889326	762183	606304	449711	313374	206780
7	999990	998904	988095	948866	866628	743981	598714	452961	323896
8	999999	999763	996196	978636	931806	847239	729091	592548	455652
9	1,0	999954	998897	991867	968072	916077	830496	716625	587408
10		999992	999707	997159	986305	957380	901479	815887	705988
11		999999	999928	999084	994547	979909	946650	888077	803008
12		1,0	999983	999726	997981	991173	973000	936204	875773
13			999996	999923	999202	996372	987188	965820	926149
14			999999	999979	999774	998600	994282	982744	958533
15			1,0	999994	999931	999491	997593	991770	977964
16				999998	999980	999825	999041	996283	988894
17				999999	999994	999943	999637	998407	994680
18				999999	999998	999982	999869	999351	997573
19				999999	999999	999994	999955	999748	998943
20				1,0	999999	999998	999985	999907	999560
21					1,0	999999	999995	999967	999824
22						999999	999998	999989	999932
23						1,0	999999	999997	999974
24							999999	999999	999990
25							1,0	999999	999996
26								1,0	999998
27									999999
									1,0

Додаток 5

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0.0000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49639
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	497200	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49865	49861
3,0	49865									
3,1	49903									
3,2	49931									
3,3	49952									
3,4	49966									
3,5	49977									
3,6	49984									
3,7	49989									
3,8	49993									
3,9	49995									
4,0	499968									
4,5	499997									
5,0	49999997									

Частина 3

Методичні вказівки з практичних занять

Перелік тем практичних занять

№ роб.	Назва тем	Годин
	Практичні заняття	
1	Розв’язання задач за темою 1	2
2	Розв’язання задач за темою 3	2
3	Розв’язання задач за темою 5	2
4	Розв’язання задач за темою 7	
5	Розв’язання задач за темою 9	2
6	Розв’язання задач за темою 11	2
7	Розрахунок характеристик потоків вимог в мультисервісних системах із застосуванням теорії масового обслуговування	2
8	Аналіз черг в мультисервісних системах із застосуванням теорії масового обслуговування	2

Матеріал до практичних занять 1 – 6 наведений в методичних вказівках.

Матеріал до практичних занять 7, 8 наведений нижче.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №7

Тема. Розрахунок характеристик потоків вимог в мультисервісних системах із застосуванням теорії масового обслуговування.

1. Розрахунок характеристик найпростішого потоку вимог в МСС

1.1 Постановка задач.

Задача 1. На вузол МСС за τ_1 годин роботи в середньому надходить а заявок на вирішення завдань. Визначити:

а) ймовірність того, що за τ_2 годин надійде хоча б одна заявка;

б) найбільш ймовірне число заявок, яке може надійти за τ_3 годин роботи ВЦ;

в) ймовірність того, що інтервал часу між надходженням двох сусідніх заявок перевищить τ_4 годин;

г) середнє значення і дисперсію інтервалу часу між надходженням сусідніх заявок.

Задача 2. Під час роботи вузла МСС відбуваються помилки. Яка повинна бути максимальна інтенсивність потоку помилок, щоб ймовірність безпомилкового рішення задачі на ЕОМ протягом τ годин була не менша $P_{зад}$?

Задача 3. На вузол МСС надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ заявок/год.

Визначити, при якому значенні інтервалу часу τ ймовірність надходження точно К заявок досягне найбільшого значення.

Варіанти вихідних даних для задач 1-3 представлені в табл. 1.

1.2. Рішення типових прикладів.

Приклад 1. У відповідності з формулюванням завдання 1 задано: а=4; τ_1=10 год.; τ_2=2 год.; τ_3=6 год.; τ_4=8 год.

Рішення:

В першу чергу визначимо величину інтенсивного потоку заявок:

$\lambda = a/\tau_1 = 4/10 = 0{,}4$ (заявки/год).

а) Оскільки події, які полягають в тому, що на вузол МСС не надійшло жодної заявки або надійде хоча б одна заявка, складають повну групу, то $P[\geq 1] + V_0(\tau_2 = 2ч) = 1$, звідки $P[\geq 1] = 1 - V_0(\tau_2)$. Із таблиці додатку 3 для $a = \lambda\tau_2 = 0{,}4 * 2 = 0{,}8$ та К = 0 визначимо $V_0(\tau_2) = 0{,}4493$, тоді $P[\geq 1] = 1 - 0{,}4493 = 0{,}5507$.

б) Користуючись таблицею додатка 3, складемо таблицю значень ймовірностей $V_K(a)$ для різних значень К. В нашому випадку $a = \lambda\tau_3 = 0{,}4 * 6 = 2{,}4$.

К	$V_K(2{,}4)$
0	0,0907
1	0,2177
2	0,2613
3	0,2090
4	0,1254
5	0,0602
…	…
…	…

З цієї таблиці випливає, що протягом 6 годин найбільш імовірно надходження 2-х заявок, оскільки значення $V_K(2{,}4)$ максимально для всіх можливих значень К; із зростанням К значення $V_K(2{,}4)$ зменшується.

в) Визначимо ймовірність P [t > τ_4]. Так як події T > τ_4 а T ≤ τ_4 складають повну групу, то $P(T > \tau_4) + P(T \le \tau_4) = 1$, звідки P [t > τ_4] = 1 - P [t < τ_4] = 1 – F(τ_4), де F(τ_4) – функція розподілу інтервалів часу між сусідніми відмовами, що дорівнює $F(\tau_4) = 1 - e^{-\lambda_{\tau_4}}$.

Тоді $P(T > \tau_4) = e^{-\lambda\tau_4} = e^{-0.4*8} = e^{-3.2} = 0,0408.$

г) Середнє значення (математичне очікування) і дисперсія інтервалу часу між надходженням сусідніх заявок визначаються відповідно, як: M_T =1/λ=1/0,4=2,5 [ч]. D_T =1/λ^2= 1/0,4^2 = 6,25 [ч].

Приклад 2. У відповідності з формулюванням задачі 2 задано: τ=10 год.; $P_{зад}$=0,9.

Рішення:

Імовірність безпомилкового рішення задачі є V_0(a). По таблиці значень V_K(a) додатка 3 при К = 0 знаходимо, що умова V_0(a)>0,9 виконується при a < 0,1. Так як. a = λτ, то, підставляючи значення τ = 10 у нерівність a ≤ 0,1, вирішуючи його, отримаємо λ ≤ 0,01 [помилки/год].

Пример 3. Відповідно формулюванням завдання 3 задано: λ=2 заявки/год; К=3.

Рішення:

Аналізуючи таблицю значень ймовірності V_K(a) при К=3 (додаок 3), і різних a, визначаємо найбільше значення цієї ймовірності.

Для даного випадку – це V_3(a) = 0,2240, звідки по таблиці визначається відповідне значення a = 3,0.

Тоді τ = a/λ = 1,5 [ч].

Таблиця 1

Варіанти вихідних даних

№ вар	Задача 1					Задача 2		Задача 3		№ вар	Задача 1					Задача2		Задача3	
	a	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ	$P_{зад}$	λ	К		a	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ	$P_{зад}$	λ	К
1	4	8	3	6	5	8	0,8	2	3	14	4	15	3	9	8	9	0,82	3	4
2	3	9	2	7	6	9	0,82	3	4	15	3	16	4	6	7	8	0,89	4	5
3	2	10	4	8	7	10	0,85	4	5	16	2	9	5	7	6	10	0,87	2	3
4	4	12	5	5	6	11	0,9	3	4	17	5	10	6	4	5	13	0,86	5	6
5	5	9	3	4	5	12	0,84	4	5	18	4	18	2	5	4	12	0,86	2	3
6	3	8	2	9	8	8	0,9	2	3	19	3	16	4	8	7	10	0,85	4	5
7	2	11	4	8	7	9	0,82	3	4	20	2	15	5	6	5	11	0,84	3	4
8	4	10	6	6	5	10	0,8	4	5	21	5	14	3	7	8	12	0,83	5	6
9	5	9	3	7	6	11	0,85	2	3	22	4	11	2	8	7	13	0,85	2	3
10	4	10	2	5	4	12	0,86	5	6	23	3	13	6	9	8	12	0,82	4	5
11	3	16	4	4	5	13	0,83	2	3	24	2	14	5	6	7	8	0,81	3	4
12	2	14	6	3	4	12	0,88	4	5	25	5	20	4	4	5	9	0,9	5	6
13	5	17	8	8	7	11	0,9	3	4	26	4	17	3	5	4	10	0,85	4	5

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 8

Тема. Аналіз черг в мультисервісних системах із застосуванням теорії масового обслуговування

1. Аналіз і синтез систем вузлів МСС з відмовами

2.1. Постановка задач.

Задача 1. Вузол МСС одночасно може обслуговувати n інформаційних потоків. Протягом τ хвилин на вузол в середньому надходить α запитів на обробку. Потік викликів можна вважати найпростішим. Тривалість розмови є випадковою величиною, розподіленою по показовому закону з середнім значенням $\overline{T}_p$ хв. Визначити:

- Ймовірність того, що в даний момент часу вузол обслуговує h запитів
- P_h;
- характеристики вузла.

Задача 2. Фрагмент МСС містить n однотипних вузлів. Протягом середнього часу виконання запиту фрагмент в середньому отримує λ заявок. Черги заявок не передбачені. Яким чином необхідно змінити число вузлів, щоб ймовірність відмови в обслуговуванні заявки зменшилася в 10 разів?

Задача 3. В умовах задачі 1 розрахувати, яка кількість інформаційних потоків повинна одночасно обслуговувати вузол МСС, щоб ймовірність відмови в з'єднанні не перевищувала $\mathbf{P_{отк\ доп}}$?

Варіанти вихідних даних для задач 1-3 представлені в табл.2.

2.2. Рішення типових прикладів.

Приклад 1. У відповідності з формулюванням задачі 1 задано: n=5; τ=2 мин.; α =4; $\overline{T}_p$=1,5 мин; h=3.

Рішення: Визначимо інтенсивність потоку запитів

$$\lambda=\frac{\alpha}{\tau}=\frac{4}{2}=2 \text{ (в./хв).}$$

Далі, середнє число запитів, що надходять в систему протягом середнього часу обслуговування (розмови), дорівнює:

$$\alpha=\frac{\lambda}{\mu}=\lambda\ \overline{T}_{об}=\lambda\ \overline{T}_p=2*1,5=3.$$

Імовірність P_3 обчислимо, визначивши попередньо ймовірність відсутності зайнятих пристроїв обслуговування P_0 по формулі:

$$P_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{5}\frac{3^k}{k!}}=\frac{1}{1+3+\frac{9}{2}+\frac{27}{6}+\frac{81}{24}+\frac{243}{120}}=0,05\ .$$

$$\text{Тоді } P_3=\frac{3^3}{3!}*0,0543=0,2444.$$

Імовірність відмови в обслуговуванні $P_{отк}=\frac{a^n}{n!}*P_0=\frac{3^5}{3!}*0,0543=0,1101.$

Тоді відносна пропускна спроможність вузла МСС Q=1-0,1101=0,8899, а абсолютна пропускна здатність D=λ*Q=2*0,8899=1,7798 з'єдн./хв.

Середнє число зайнятих пристроїв обслуговування і коефіцієнт завантаження вузла визначаються наступним чином:

$\overline{n}_3=\alpha Q=3*0,8899=2,6697;\ K_3=\frac{\overline{n}_3}{n}=\frac{2,6697}{5}=0,53.$

Тоді середнє число вільних пристроїв обслуговування і коефіцієнт простою відповідно рівні:

$\overline{n}_{св}=n-\overline{n}_3=5-2,6697=2,3303.$

K_0=1-K_3=1-0,5339=0,4661.

Приклад 2. У відповідності з формулюванням задачі 2 задано: n=5; λ=2 в./хв.

Рішення: Даний фрагмент МСС можна розглядати як СМО з відмовами (немає ВЗУ, можливості мати чергу). Тоді, згідно табл. 1 додатка 2, при α=2, n=5, $P_{отк}$=0,0367.

Для того, щоб забезпечити виконання умови $\frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}} \le 0{,}00367$

при α = 2, необхідно, згідно табл.2 додатка 2, щоб число ЕОМ було n = 8.

Приклад 3. У відповідності з формулюванням задачі 3 задано: λ=3 в./хв., $P_{откдоп}$=0,001.

Рішення: Необхідно скористатися виразом:

$$P_{откдоп} \ge \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}},$$

праву частину якого потрібно обчислювати при α = 3 і різних значеннях n. Так при n = 8 $P_{откдоп}$ = 0,0081, при n = 9 $P_{отк}$ = 0,0027, при n = 10 $P_{отк}$ = 0,008. Таким чином, при заданих вимогах АТС повинна містити 10 сполучних приладів. Даний результат також може бути отриманий з використанням табл.1 додатка 2.

Таблиця 2

Варіанти вихідних даних

№ вар	№ задачі							№ вар	№ задачі						
	1				2		3		1				2		3
	n	a	τ	$\overline{T}_p$	n	α	$P_{откдоп}$		n	a	τ	$\overline{T}_p$	n	α	$P_{откдоп}$
1	6	5	3	2	2	0,5	10^{-3}	14	8	3	2	3,5	8	4	10^{-2}
2	5	3	4	2,5	3	0,75	10^{-2}	15	5	2	3	2,5	2	1	10^{-3}
3	7	4	2	3	4	1	10^{-3}	16	6	3	4	1,5	3	1,5	10^{-2}
4	8	3	4	3,5	5	1,5	10^{-2}	17	5	2	1	2	4	2	10^{-3}
5	6	2	2	2,5	6	2	10^{-3}	18	7	4	3	3	5	2,5	10^{-2}
6	5	4	3	4	7	2	10^{-2}	19	9	5	3	3,5	6	3,5	10^{-3}
7	7	3	4	3	8	3	10^{-3}	20	8	6	2	2,5	7	3	10^{-2}
8	6	3	2	3,5	2	0,75	10^{-2}	21	7	3	1	4	8	5	10^{-3}
9	5	2	1	2	3	0,5	10^{-3}	22	9	6	4	3,5	2	1,5	10^{-2}
10	8	4	3	2,5	4	1,5	10^{-2}	23	7	4	2	2	3	1	10^{-3}
11	9	5	2	1,5	5	1	10^{-3}	24	6	2	3	4	4	3	10^{-2}
12	7	5	3	2	6	2,5	10^{-2}	25	8	4	3	2	5	4	10^{-3}
13	6	4	2	4	7	4	10^{-3}	26	7	3	3	2,5	6	5	10^{-3}

3. Аналіз і синтез систем вузлів МСС з очікуванням (обмеженою довжиною черги)

3.1. Постановка задач.

Задача 1. Вузол МСС одночасно може обслуговувати n однотипних потоків (найпростіших, з інтенсивністю λ запитів / год). Час обслуговування одного запиту розподілено по показовому закону з середнім значенням $\overline{T}_{реш}$ хв. Вузол дозволяє зберігати вихідні дані для m запитів.

Визначити: 1) Характеристики обслуговування вузла.
2) Характеристики очікування.
3) Імовірність виникнення черги.

Задача 2. В умовах завдання 1 визначити, яке число вузлів повинно входити до складу МСС, щоб ймовірність відмови у прийнятті запиту на обробку не перевищувала заданої величини $P_{отк}^{зад}$.

Задача 3. Визначити допустимий середній час для виконання одного запиту (при умовах завдання 1), щоб ймовірність відмови в прийнятті задачі на рішення не перевищувала допустимої величини $P_{отк}^{доп}$.

Варіанти вихідних даних для задач 1-3 представлені в табл.3.

3.2. Рішення типових прикладів.

Приклад 1. У відповідності з формулюванням задачі 1 задано: n=4; λ=12 заявок/год; $\overline{T}_{реш}$=15 хв.; m=5.

Рішенн: 1) $\alpha=\lambda\cdot\overline{T}_{реш}=12\cdot(1/4)=3$.

імовірність відмови $P_{отк}=\frac{\alpha^{n+m}}{n!n^m}P_0=\frac{3^{4+5}}{4!4^5}P_0$,

де $P_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\frac{\frac{\alpha}{n}-(\frac{\alpha}{n})^{m+1}}{1-\frac{\alpha}{n}}}$.

Обчислюючи послідовно, отримаємо $P_{отк}$=0,0332.

Даний результат також може бути отриманий з використанням табл. 2 додатка 2.

Відносна пропускна здатність Q=1-0,0332=0,96.

Абсолютна пропускна здатність D=αQ=11,6016 заявок/год.

$\overline{n}_з$= αQ = 3*0,9668 = 2,9004.

$K_З$= 2,9004/4 = 0,7251.

$\overline{n}_{св}$ = 4 – 2,9004 = 1,0996.

K_0 = 1 – 0,7251 = 0,2749

2) Середня довжина черги визначається за формулою

$$m_{ОЖ}=\frac{(\frac{\alpha}{n})^{1-m}-\frac{\alpha}{n}(m+1-\frac{m\alpha}{n})}{(1-\frac{\alpha}{n})^2}*P_{отк}=\frac{(\frac{3}{4})^{1-5}-\frac{3}{4}(5+1-5\frac{3}{4})}{(1-\frac{3}{4})^2}*0{,}0332=0{,}7403.$$

Среднее время ожидания $T_{ОЖ}=\frac{m_{ОЖ}}{\lambda}=\frac{0{,}7403}{12}=0{,}0617$ [ч]=3,7[мин.].

3) Імовірність виникнення черги дорівнює ймовірності того, що до момента надходження чергового запиту всі вузли зайняті виконанням запитів, які надійшли раніше, тобто

$P_{оч}=P_n=\frac{\alpha^n}{n!}P_0$, але $P_0=\frac{n!n^m}{\alpha^{n+m}}P_{отк}$, тоді

$$P_{оч}=(\frac{n}{\lambda})^m\cdot P_{отк}=(\frac{4}{5})^5\cdot 0{,}0332=0{,}137.$$

Приклад 2. У відповідності з формулюванням задачі 2 задано: +m=5; λ=3; $P_{отк}^{зад}=0{,}002$.

Рішення: При заданих α = 3 і m = 5 на підставі табл. 2 додатка 2 визначаються значення $P_{отк}$ для різних n з подальшою перевіркою умови

$P_{отк}\le P_{отк}^{зад}$. Так, при n = 4$P_{отк}$=0,0332, n = 5$P_{отк}$=0,0074, n = 6$P_{отк}$=0,0016, отже $n_{треб}$=6.

Приклад 3. У відповідності з формулюванням задачі 3 задано: n=5; m=3; $P_{отк}^{доп}=0{,}003$.

Рішення: При заданих n = 4 і m = 5 на підставі табл.2 додатка 2 визначаємо величину α, при якій виконується умова $P_{отк}\le P_{отк}^{доп}$.

Так, при α = 3$P_{отк}$=0,0332, при α = 2,5$P_{отк}$=0,0117, при α = 2$P_{отк}$=0,0027, отже $\alpha_{треб}$=2.

Тоді, оскільки $\alpha = \lambda \overline{T}_{реш}$, маємо $\overline{T}_{решдоп} = \frac{\alpha_{треб}}{\lambda} = \frac{2}{12} \approx 0{,}17[ч] \approx 10хв.$

Таблиця 3

Варіанти вихідних даних

№ вар.	№ Задачі						№ вар	№ Задачі					
	1				2	3		1				2	3
	n	λ	$\overline{T}_{реш}$	m	$P^{зад}_{отк.}$	$P^{доп}_{отк.}$		n	λ	$\overline{T}_{реш}$	m	$P^{зад}_{отк.}$	$P^{доп}_{отк.}$
1	5	10	20	6	0,003	0,004	14	8	16	15	6	0,003	0,004
2	6	11	25	5	0,002	0,006	15	4	10	18	3	0,002	0,003
3	4	9	18	4	0,004	0,005	16	6	13	20	4	0,005	0,005
4	7	12	16	7	0.005	0,003	17	5	11	25	3	0,006	0,002
5	5	10	20	4	0,001	0,004	18	7	15	22	6	0,004	0,001
6	6	12	22	6	0,002	0,002	19	8	16	16	5	0,001	0,003
7	4	10	25	5	0,004	0,001	20	6	11	18	3	0,002	0,004
8	7	13	15	7	0,003	0,004	21	4	9	20	2	0,003	0,005
9	6	14	18	4	0,002	0,005	22	5	12	24	4	0,005	0,003
10	8	15	20	6	0,005	0,006	23	7	14	20	3	0,006	0,002
11	5	10	22	5	0,006	0,007	24	8	15	25	6	0,004	0,003
12	4	12	25	7	0,004	0,003	25	6	13	18	5	0,003	0,001
13	7	13	18	5	0,001	0,002	26	4	8	15	3	0,002	0,006

Частина 4

Методичні вказівки по самостійній роботі

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

ВСТУП

Самостійна робота активізує дослідницьку діяльність студентів та дає можливість набути знання необхідні для проведення практичної та наукової діяльності.

Метою самостійної роботи є вивчення додаткової інформації, викладеної у літературних джерелах, закріплення отриманих знань з спецкурсу шляхом виконання домашніх завдань з пророоблення матеріалу лекцій, оформлення звітів з лабораторних робіт і ін.

Значення самостійної роботи полягає в розвитку в студента мотивації вивчення конкретної теми за різними літературними джерелами, порівняльного аналізу матеріалу, навички формулювання питань для наступної дискусії в колективі і з викладачем. Розвиток необхідної якості фахівця - здатності до самоосвіти - є найважливішою складовою вищої освіти.

1 МЕТА ТА ЗАДАЧИ КУРСУ

Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах» є однією з нормативних дисциплін для спеціалістів та магістрів спеціальностей 6.050102-01 «Комп'ютерні системи та мережі», 6.050102-02 «Системне програмування» і 6.050102-03 «Спеціалізовані комп'ютерні системи».

Дисципліна базується на вивченні на третьому та четвертому курсах навчання студентами дисциплін «Теорія ймовірностей, математична статистика та планування експерименту», «Архітектура комп'ютерів» та «Системне програмування». Дисципліна забезпечує теоретичну та практичну підготовку для використання математичних методів оптимізації процесів в мультисервісних системах та мережах, а також для виконання розрахункових робіт, курсового та дипломного проектування.

Предметом дисципліни «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах» є вивчення математичних методів оптимізації процесів, що застосовуються у сучасних мультисервісних системах та мережах та способів їх звикористання у практичній та науковій діядбності.

Дисципліна має метою вивчення:

- отримання студентами загальних відомостей про математичні методи оптимізації процесів, що застосовуються у сучасних мультисервісних системах та мережах ;
- отримання студентами знань та навичок практичного застосування методів оптимізації процесів у сучасних мультисервісних системах та мережах .

1.2. Задачі вивчення дисципліни

Внаслідок вивчення дисципліни студент повинен **ЗНАТИ**:

- основні методи безумовної оптимізації в мультисервісних системах і мережах;
- основні методи лінійної умовної оптимізації в мультисервісних системах і мережах;
- методи маршруизації в мультисервісних системах і мережах;
- методи управління інформаційними потоками мультисервісних системах і мережах;
- методи розподілу мережевих ресурсів при управлінні інформаційними потоками;
- основні математичні методів умовної оптимізації при управлінні процесами в мультисервісних системах та мережах;
- методи знаходження оптимального маршруту при управлінні інформаційним потоком ;
- методи розпаралелювання етапів процесу управління обробкою даних;
- методи розрахунку характеристик потоків запитів в мультисервісних системах ;
- методи аналізу черг в мультисервісних системах;
- нелінійні алгоритми умовної оптимізації в мультисервісних системах та мережах.

Повинен **ВМІТИ**:

- проводити аналіз процесу, що виконується в мультисервісній мережі;
- вибрати найбільш прийнятний математичний метод для оптимізації аналізуємого процесу;
- застосовувати методи оптимізації при виконанні різноманітних процесів в мультисервісній мережі;
- розробляти програмне забезпечення для покращення характеристик процесів, що відбуваються в мультисервісних системах та мережах.

1.3 Організаційно-методичні вказівки щодо організації і методики проведення навчальних занять, організації і виконання індивідуальних завдань.

Організаційно-методичні особливості: наявність методичних вказівок для виконання практичних занять і лабораторних робіт, режим проведення лабораторних робіт передбачає один студент – один комп’ютер, виконання кожним студентом індивідуальних лабораторних робіт, поширення переліку тем лабораторних робіт для вибору студентами згідно з їх зацікавленістю,, поширення самостійної роботи за рахунок заміни поточних лабораторних робіт виконанням індивідуальних програмних розробок щодо розширення можливостей програмних засобів планування експерименту.

1.4 Система контролю якості навчання студентів

Система контролю якості навчання містить щотижневе поточне опитування на практичних заняттях та лабораторних роботах, перевірки

домашніх завдань та додаткових контрольних робіт, проведення раптових п’ятихвилинок на лекційних заняттях, проведення модульних контролів, складання заліків та іспитів, проведення контролю залишкових знань.

2 ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Самостійна робота студентів з даного курсу полягає у опрацюванні теоретичного матеріалу за літературними джерелами та складається з:

- конспектування та вивчення матеріалу визначених тем та теоретичних питань курсу “ Комп’ютерна логіка”;
- засвоєння змісту основних понять та термінів за відповідною темою;
- підготовки до практичних занять;
- виконання домашнього завдання;
- виконання та захист розрахункового завдання;
- виконання тестових завдань та надання відповідей на контрольні питання, що мають забезпечити поточну перевірку рівня засвоєння вивченого матеріалу.

Система контролю якості навчання містить проведення поточних контрольних робіт, проведення експерт опитування перед початком практичних занять, ви конання домашнього завдання, виконання та захист розрахункового завдання, проведення модульних контролів, складання іспиту, залучення студентів до різних олімпіад застосування комп’ютерних технологій. Якість знань студентів оцінюється за **100-бальної шкалою** в рамках кожного модуля, із них 40 балів відводиться під оцінювання лекційних поточних та підсумкових контрольних робіт, 40 балів відводиться під оцінювання практичних занять, 20 балів за виконання розрахункового завдання.

Конкретні завдання з індивідуальної роботи видаються студентам у процесі навчання як доповнення до досліджуваного матеріалу на лекціях, лабораторних і ін. заняттях. Завдання з індивідуальної роботи отримують студенти, які бажають покращити свій результат і отримати більшу кількість балів при підведенні семестрових результатів.

Індивідуальна робота студентів передбачає написання рефератів, написання та від лагодження текстів програм. Тема реферату обирається студентом за бажанням з розділу, вказаного викладачем дисципліни.

Поряд з цим студент може приймати участь у проведенні наукових досліджень. Напрями наукової роботи формулює викладач відповідно до проблем основних розділів курсу “ Комп’ютерна логіка” .

Консультації проводяться щотижня відповідно до графіку викладачами, що ведуть відповідний вид аудиторних занять.

Підсумковий контроль знань з даної дисципліни проводиться на модульних тижнях та на іспиті.

3 ЗАГАЛЬНИЙ ОБСЯГ ГОДИН НА ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ ТА ЇХ РОЗПОДІЛ НА АУДИТОРНІ ЗАНЯТТЯ І САМОСТІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТІВ

Загальний обсяг годин на вивчення дисципліни та їх розподіл на аудиторні заняття і самостійну роботу студентів

Загальний обсяг –181 година
В тому числі:
Лекції – 45 годин
Практичні заняття – 30 годин
Лабораторні заняття – 15 годин
Самостійна робота– 91 година
В тому числі:
забезпечення аудиторних занять – 32 (A)
забезпечення семестрового контролю – 15 (B)
забезпечення індивідуальних завдань – 32 (C)
забезпечення НДРС – 12 (D)

Самостійна робота з забезпечення індивідуальних завдань – це виконання завдань до практичних занять, а також виконання індивідуального розрахункового завдання (Р).

Розподіл часу з самостійної роботи за модулями та темами наведено в таблиці.

Таблиця - Розподіл часу з самостійної роботи

Модулі та теми	Самостійна робота				
	A	B	C	D	
Модуль 1. Безумовна та лінійна оптимізація процесів маршрутизації та управління інформаційними потоками даних в мультисервісних системах та мережах					
Тема 1. Використання методів безумовної оптимізації для прискорення проходження пакетів в мультисервісних мережах . Унімодальні функції. Аналіз часу проходження пакету в МСМ. Метод дихотомії. Метод «золотого перерізу»	1	1	1		1,2
Тема 2. Однопараметрична оптимізація процесів в МСС з використанням багатоекстремальних функцій Особливості формалізації однопараметричних процесів в МСС. Знаходження оптимуму багатоекстремальної функції при накладенні обмежень на оптимізуємий параметр.	2	1	1		1,2

Метод сканування. Метод «пошуку з розвідкою»					
Тема 3. Багатопараметрична оптимізація процесів в МСС Особливості формалізації багатопараметричних процесів в МСС. Знаходження стаціонарних точок процесу. Аналітичне рішення задачі безумовної оптимізації процесу з декількома параметрами. Градієнтний метод..	2	1	2		3,4
Тема 4. Моделювання процесу управління інформаційними потоками даних в МСМ з використанням методів лінійного програмування Загальна постановка задачі управління інформаційними потоками даних в МСМ. Використання методів лінійного програмування. Графічний метод знаходження оптимального рішення.	2	1	1	1	2,4
Тема 5. Використання аналітичних методів лінійного програмування при управлінні інформаційними потоками даних в МСМ Формалізація задачі управління інформаційними потоками даних Зведення задачі управління до стандартного вигляду задачі лінійного програмування. Аналіз існуючих методів оптимізації отриманої моделі. Симплекс-метод та особливості його застосування	2	1	1	1	3,4
Тема 6. Аналіз особливих випадків при управлінні інформаційними потоками даних в МСМ Загальні правила виявлення особливих випадків. Виродження моделі. Багатоальтернативність моделі. Нескінченність рішення. Відсутність рішення. Двоїстість задачі лінійного програмування та її використання при управлінні інформаційними потоками даних в МСМ .	1	1	1	1	4,5
Тема 7. Використання транспортної моделі при вирішенні задачі маршрутизації в МСМ Приведення задачі маршрутизації в МСМ до збалансованого вигляду. Транспортні таблиці. Знаходження начального рішення транспортної задачі. Метод потенціалів та особливості його використання при вирішенні задачі маршрутизації в МСМ	2	2	20	1	5
Тема 8. Методи розподілу мережевих ресурсів при управлінні інформаційними потоками Загальна постановка задачі розподілу мережевих ресурсів при управлінні інформаційними потоками. Методи приведення задачі до задачі лінійного програмування. Застосування існуючих методів оптимізації. Визначення окремих випадків швидкого знаходження оптимального рішення. Побудова таблиць вартості призначень.	1	1	1	1	6,7

Угорський метод рішення задачі про призначення. Особливості використання угорського методу при розподілі ресурсів.					
Модульний контроль 1	13	9	28	5	
МОДУЛЬ 2. Застосування математичних методів умовної оптимізації при управлінні процесами в мультисервісних системах та мережах					
Тема 9. Методи знаходження оптимального маршруту при управлінні інформаційним потоком даних для мереж без циклів Постановка задачі мінімізації мережі. Алгоритм Краскала. . Алгоритм Дейкстри для мережі без циклів.	1	1			3,6
Тема 10. Методи знаходження оптимального маршруту при управлінні інформаційним потоком даних для мереж із циклами Особливості маршрутизації при наявності циклів. Алгоритм Дейкстри для мережі із циклами. Алгоритм Флойда та його особливості при використанні у маршрутизаторах.	4	1	1	1	3,6
Тема 11. Розпаралелювання етапів процесу управління обробкою даних в МСС Загальна постановка задачі. Використання методів мережевого планування. Критичний шлях. Метод CPM. Знаходження критичного шляху та резервів часу на кожному етапі. Метод CPM у мультисервісних мережах.	4	1	1	1	3,6
Тема 12. Використання математичного апарату прийняття рішень в умовах ризику для оптимізації процесів в МСС Загальне формулювання задачі. Використання ймовірнісного апарату при оптимізації процесу у МСС. Складання дерева рішень, особливості знаходження оптимального рішення для процесу в МСС	1	1	1	1	8
Тема 13. Використання математичного апарату прийняття рішень в умовах невизначеності для оптимізації процесів в МСС Загальне формулювання задачі. Використання апарату теорії ігор при оптимізації процесу у МСС. Сідлова точка процесу. Платіжна матриця. Методи теорії ігор при визначенні маршруту проходження потоку	1	1	1	1	4,7
Тема 14. Розрахунок характеристик потоків запитів в мультисервісних системах з використанням математичного апарату теорії масового обслуговування Методи аналізу потоків запитів в мультисервісних системах . Найпростіший потік, розрахунок його	4	1	1	1	4,7

характеристик у вузлі МСМ. Аналіз процесів у відокремленому вузлі МСМ за допомогою математичного апарату теорії масового обслуговування.					
Тема 15. Аналіз черг в мультисервісних системах за допомогою математичного апарату теорії масового обслуговування Методи аналізу черг в мультисервісних системах. Вибір оптимальних розміру буфера пристрою обслуговування та граничного часу затримки пакетів у черзі	3	1	1	1	5,8
Тема 16. Нелінійні алгоритми умовної оптимізації в мультисервісних системах та мережах Застосування у МСС сепарабельного програмування. Застосування у МСС квадратичного програмування. Динамічне програмування при оптимізації процесів МСМ. Застосування у МСС цілочисельного програмування.	7	1	1	1	6
Модульний контроль 2.	21	7	6	6	
Усього за дисципліну	34	16	34	11	

4. ІНФОРМАЦІЙНО-МЕТОДИЧНЕ І МАТЕРІАЛЬНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

4.1. Технічні засоби та наочні посібники, які використовуються при викладанні навчальної дисципліни:

Персональні комп’ютери IBM PC/AT

4.2. Список основної літератури

1. Стеклов В.К. Оптимізація та моделювання пристроїв і систем зв'язку. Підруч. для вищ. навч закл. / В.К. Стеклов, Л.Н. Беркман, Є.В. Кільчицький; за ред. В. К. Стеклова. – К.: Техніка, 2004. – 576 с.

Чернихівський Є.М. Математичне моделювання телекомунікаційних систем та мереж: навчальний посібник / Є.М. Чернихівський. – Львів: НМР Львівської політехніки, 2011. – 272 с.

3. Стеклов В.К., Костік Б.Я., Беркман Л.Н. Сучасні системи управління в телекомунікаціях / За заг. ред. В.К. Стеклова. - К.: Техніка, 2005. - 400 с.

4. Стеклов В. К., Беркман Л. Н. Нові інформаційні технології: Транспортні мережі телекомунікацій. - К.: Техніка, 2004. - 488 с.

5. Степанов С.Н. Основи телетрафика мультисервисніх сетей / С.Н. Степанов. – М.: ЭкоТрендз, 2010. – 392 с..

6. Заборовский В.С., Мулюха В.А., Подгурский Ю.Е. Сети ЭВМ и телекоммуникации. исследования процессов в компьютерных сетях: телематический подход: учебное пособие. – Спб.: СПбГПУ, 2009. – 160 с.

7. Андронов С.А. Методы оптимального проектирования: Текст лекций. - СПб.: ГУАП, 2001. - 169 с.

8. Харчистов Б.Ф. Методы оптимизации: Учебное пособие. - Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2004. - 140 с.

4.3. Список додаткової літератури

1. Стеклов В. К., Кільчинський Є. В. Основи управління мережами та послугами телекомунікацій: Підручник / За ред. проф. Стеклова В.К. - К.: Техніка, 2002. - 438 с.

2. Лутманов С.В. Линейные задачи оптимизации: Учебное пособие. Ч.1. Линейное программирование. - Пермь: Перм. гос. ун-т, 2004. - 128 с.

3. Р.М. Ларин, А.В. Плясунов, А.В. Пяткин. Методы оптимизации. Примеры и задачи: учебное пособие // Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2003. 120 с.

4. Коган Д.И. Динамическое программирование и дискретная многокритериальная оптимизация: учебное пособие. Нижн. Новгород: Изд-во ННУ, 2004. 150 с.

5 СТРУКТУРНО-ЛОГІЧНА СХЕМА ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Т1 → Т2 → Т3 → Т4 → Т5 → Т6 → Т7 → Т8 → Т9 → Т10 →
→ Т11 → Т12 → Т13 → Т14 → Т15 → Т16

Конспект лекцій, методичні вказівки до виконання розрахункового завдання, розміщені на сайті кафедри: users.kpi.kharkov.ua/vtp

Частина 6

Питання з поточного та підсумкового контролю

№	Питання і задачі
	До модульного контролю МК-1
1	Унімодальні функції
2	Метод дихотомії
3	Метод «золотого перерізу»
4	Формалізація однопараметричного процесу в МСС
5	Метод сканування.
6	Метод «пошуку з розвідкою»
7	Особливості формалізації багатопараметричних процесів в МСС
8	Знаходження стаціонарних точок процесу в МСС
9	Градієнтний метод
10	Задача безумовної оптимізації процесу в МСС з декількома параметрами
11	Графічний метод знаходження оптимального рішення
12	Загальна постановка задачі управління інформаційними потоками даних в МСМ
13	Формалізація задачі управління інформаційними потоками даних
14	Стандартний вигляд задачі лінійного програмування
15	Симплекс-метод та особливості його застосування в МСМ
16	Загальні правила виявлення особливих випадків
17	Виродження моделі.
18	Багатоальтернативність моделі.
19	Нескінченність рішення.
20	Відсутність рішення
21	Двоїстість задачі лінійного програмування
22	Постановка задачі задачі маршрутизації в МСМ
23	Збалансована задача задачі маршрутизації в МСМ
24	Транспортні таблиці
25	Начальне рішення транспортної задачі
26	Метод потенціалів

27	Загальна постановка задачі розподілу мережевих ресурсів
28	Окремі випадки швидкого знаходження оптимального рішення
29	Побудова таблиць вартості призначень.
30	Угорський метод рішення задачі про призначення.
31	Особливості використання угорського методу при розподілі ресурсів.
	Задача
	Визначити оптимальні параметри заданого процесу маршрутизації, використовуючи методи безумовної або лінійної оптимізації
	До модульного контролю МК-2
1	Постановка задачі мінімізації мережі.
2	Алгоритм Краскала
3	Алгоритм Дейкстри для мережі без циклів
4	Особливості маршрутизації при наявності циклів.
5	Алгоритм Дейкстри для мережі **із** циклами.
6	Алгоритм Флойда
7	Використання методів мережевого планування у МСС
8	Критичний шлях.
9	Метод СРМ.
10	Використання ймовірнісного апарату при оптимізації процесу у МСС
11	Складання дерева рішень
12	Використання апарату теорії ігор при оптимізації процесу у МСС
13	Сідлова точка процесу.
14	Платіжна матриця.
15	Методи теорії ігор при визначенні маршруту проходження потоку
16	Методи аналізу потоків запитів в мультисервісних системах .
17	Найпростіший потік, розрахунок його характеристик у вузлі МСМ

18	Аналіз процесів у відокремленому вузлі МСМ
19	Методи аналізу черг в мультисервісних системах.
20	Вибір оптимального розміру буфера пристрою обслуговування у черзі
21	Вибір оптимального граничного часу затримки пакетів у черзі
22	Застосування у МСС квадратичного програмування.
23	Застосування у МСС сепарабельного програмування
24	Динамічне програмування при оптимізації процесів МСМ. .
25	Застосування у МСС цілочисельного програмування
	Задача
	Використовуючи задані емпіричні дані, визначити оптимальні параметри заданого процесу у МСС за допомогою методів умовної оптимізації

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 1

1. Загальна постановка задачі оптимізації для знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі з використанням математичного апарату унімодальних функцій. Навести приклад використання.

2. Використання методів теорії ігор при оптимізації процесів в МСМ. Навести приклади використання з поясненнями.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T=f(x)$$

де $x \in [a, b]$ – узагальнений числовий параметр, що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і **x*** – оцінку точки мінімуму функції f(x).

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень:

$f(x) = .x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ на інтервалі [0; 2].

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 2

1. Знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі з використанням методу дихотомії для унімодальних функцій. Навести загальну постановку задачі, алгоритм реалізації методу для МСМ та привести приклад використання з поясненнями.

2. Приклади оптимізації процесів в мультисервісних системах в умовах риску. Навести приклади з поясненнями.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T = f(\bar{x})$$

де $\bar{x}$ – узагальнений векторний параметр ($\bar{x}$ =(x, y)), що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і $\bar{x}^*$=(x*, y*) - оцінку значень параметрів.

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень (знайти градієнт та всі стаціонарні точки функції):

$f(x) = x^3 + y^3 - 3x - 3y - 3$.

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 3

1. Знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі з використанням методу «золотого перетину» для унімодальних функцій. Навести загальну постановку задачі, алгоритм реалізації методу для МСМ та привести приклад використання з поясненнями.

2. Загальна постановка задачі. Використання в МСМ мережевих методів для мінімізації часу виконання багатоетапного процесу. Навести приклади з поясненнями.

3. **Задача.** Мультисервісна мережа обслуговує два однорідних інформаційних потоки А и В із трафіком T_A и T_B Гб/с відповідно декількома комутаційними вузлами (КВ). На протязі одного циклу обслуговування фіксований КВ К обслуговує х секунд потік А та у секунд потік В. Для знаходження максимального об'єму трафіка, який може пройти вузлом К (змінна z), розроблена наведена математична модель (час х та час у – це відносні значення часу, тому можуть приймати і негативні значення):

$z = 2x + 3y \rightarrow \max;$
$2x + 2y \le 5;$
$x + y \ge -11$
$x \ge 0.$

Привести дану модель к стандартному вигляду. Приведення проводити покроково, з детальним описом дій на кожному кроці).

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 4

1. Загальна постановка задачі оптимізації часу проходження пакету в МСМ у випадку, коли оптимізуєма функція – багатоекстремальна. Навести приклади постановки та розв'язання задач.

2. Використання в МСМ алгоритму Флойда при знаходження оптимального маршруту в мережі, що припускає наявність циклів. Покрокове представлення алгоритму. Навести приклади з поясненнями.

3. **Задача.** З вузла А до вузла В мультисервісної мережі потрібно передати Q Гб с мінімальними витратами вибраного ресурсу. У вузлі А інформація розподілена по *m* каналах, *i*-й канал ($i = \overline{1,m}$) передає a_i Гб ($\sum_{i=1}^{m} a_i = Q$). У вузлі В її можуть прийняти *n* каналів по b_j Гб ($\sum_{j=1}^{m} b_j = Q$). При передачі за маршрутом із *i* до *j* 1 Гб витрачається c_{ij} одиниць ресурсу.

Знайти начальне рішення даної задачі методом північно-західного кута та показати збалансованість задачі при таких значеннях змінних:

a = (30, 40, 50);
b = (10, 10, 50, 50),
витрати розраховуються за формулою $c_{ij} = i + j$.

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 5

1. Знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі з використанням методу «пошуку з розвідкою». Навести загальну постановку задачі, алгоритм реалізації методу для МСМ та привести приклад використання з поясненнями.

2. Особливості транспортної моделі при розв'язанні задач лінійної оптимізації в МСМ. Навести приклади.

3. **Задача.** У мультисервісній мережі на даний час обслуговується n інтегральних інформаційних потоків (ІІП) (з різним характером трафіку), $i = \overline{1, n}$, та є стільки ж маршрутів, $j = \overline{1, m}$, $m = n$, причому кожний маршрут обслуговує тільки один ІІП Із-за різного характеру ІІП витрати вибраного ресурсу для кожного ІЇП на кожному маршруті різні. Розподілити ІІП по маршрутах з мінімальними витратами ресурсу. Навести числове рішення задачі при $m = n = 3$ та витратах ресурсу, заданих у наступній таблиці:

11	13	15
12	11	8
3	4	5

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 6

1. Знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі з використанням методу сканування. Навести загальну постановку задачі, алгоритм реалізації методу для МСМ та привести приклад використання з поясненнями.

2. Метод північно-західного кута при знаходженні початкового рішення задач лінійної оптимізації в МСМ. Навести різні приклади використання.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T = f(x)$$

де $x \in [a, b]$ – узагальнений числовий параметр, що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і **x*** – оцінку точки мінімуму функції f(x).

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень:

$f(x) = .x^5 - 5x + 4$ на інтервалі [–2; 2].

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 7

1. Загальна постановка задачі оптимізації для знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі для багатопараметричних функцій. Навести приклад використання.

2. Маршрутизація при двох збалансованих багатоканальних вузлах. Складання збалансованих транспортних таблиць для вибору оптимального маршруту.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T = f(\bar{x})$$

де $\bar{x}$ – узагальнений векторний параметр ($\bar{x}$ =(x, y)), що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і $\bar{x}^*$=(x*, y*) - оцінку значень параметрів.

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень (знайти градієнт та всі стаціонарні точки функції):

$f(x) = x^5 + 3y^5 – 5y^3 – 5x – 15.$

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 8

1. Використання градієнтних методів для знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі Навести загальну постановку задачі та привести приклад використання з поясненнями.

2. Знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі на інтервалі зміни параметру з одним екстремумом. Визначити властивості унімодальних функцій, навести приклади використання в МСМ.

3. **Задача.** Мультисервісна мережа обслуговує два однорідних інформаційних потоки A и B, витрачаючи мережевий ресурс на рівні T_A и T_B умовних одиниць/с відповідно декількома комутаційними вузлами (КВ). На протязі одного циклу обслуговування фіксований КВ К обслуговує x секунд потік А та y секунд потік В. Для знаходження мінімальних витрат мережевого ресурсу на вузлі К (змінна z), розроблена наведена математична модель (час x та час y – це відносні значення часу, тому можуть приймати і негативні значення):

$z = x + y \rightarrow \min;$
$x + 2y \le – 5;$
$7x + y \ge 7$
$y \ge 0.$

Привести дану модель к стандартному вигляду. Приведення проводити покроково, з детальним описом дій на кожному кроці).

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 9

1. Використання градієнтного методу з дробленням кроку для знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі Навести загальну постановку задачі, алгоритм методу та привести приклад використання з поясненнями.

2. Використання задачі про призначення для оптимального розподілу інформаційних потоків за маршрутами. Навести приклади з поясненнями.

3. **Задача.** З вузла А до вузла В мультисервісної мережі потрібно передати Q Гб с мінімальними витратами вибраного ресурсу. У вузлі А інформація розподілена по *m* каналах, *i*-й канал ($i = \overline{1,m}$) передає a_i Гб ($\sum_{i=1}^{m} a_i = Q$). У вузлі В її можуть прийняти *n* каналів по b_j Гб ($\sum_{j=1}^{m} b_j = Q$). При передачі за маршрутом із *i* до *j* 1 Гб витрачається c_{ij} одиниць ресурсу.

Знайти начальне рішення даної задачі методом північно-західного кута та показати збалансованість задачі при таких значеннях змінних:

a = (30, 30, 30);

b = (10, 10, 20, 20; 30),

витрати розраховуються за формулою $c_{ij} = i + 3j$.

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 10

1. Задача оптимізації розподілу ресурсів МСМ при обслуговуванні однорідних інформаційних потоків. Загальна постановка задачі, графічний метод розв'язання, навести приклади.

2. Загальна постановка задачі оптимального розподілу інформаційних потоків за маршрутами. Приклади математичних моделей.

3. **Задача.** У мультисервісній мережі на даний час обслуговується *n* інтегральних інформаційних потоків (ІІП) (з різним характером трафіку), $i = \overline{1,n}$, та є стільки ж маршрутів, $j = \overline{1,m}$, *m* = *n*, причому кожний маршрут обслуговує тільки один ІІП Із-за різного характеру ІІП витрати вибраного ресурсу для кожного ІЇП на кожному маршруті різні. Розподілити ІІП по маршрутах з мінімальними витратами ресурсу. Навести числове рішення задачі при *m* = *n* = *3* та витратах ресурсу, заданих у наступній таблиці:

22	77	88
33	66	99
44	55	11

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 11

1. Використання графічного методу розв'язання задач лінійної оптимізації при знаходженні оптимального розподілу ресурсів МСМ у випадку однорідних інформаційних потоків. Навести приклад розв'язання з поясненнями.

2. Мінімізації мережі. Шляхом знаходження остовного дерева. Алгоритм мінімізації, навести приклади з поясненнями.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T=f(x)$$

де $x \in [a, b]$ – узагальнений числовий параметр, що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і **x*** – оцінку точки мінімуму функції f(x).

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень:

$f(x) = .6x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 13$ на інтервалі $[-2; 2]$.

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 12

1. Стандартний вигляд задачі умовної оптимізації для процесу розподілу ресурсів МСМ у випадку, якщо модель розподілу – лінійна. Навести приклади зведення лінійних задач оптимізації МСМ до стандартної форми.

2. Знаходження оптимального маршруту в мережі без циклів. Алгоритм методу, навести приклади використання в МСМ з поясненнями.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T = f(\bar{x})$$

де $\bar{x}$ – узагальнений векторний параметр ($\bar{x}$ =(x, y)), що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і $\bar{x}^*$=(x*, y*) - оцінку значень параметрів.

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень (знайти градієнт та всі стаціонарні точки функції):

$f(x) = x^2 - y^2 + 2xy - 4x - 2y + 8$.

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 13

1. Використання симплекс-методу розв'язання задач лінійної оптимізації при знаходженні оптимального розподілу ресурсів МСМ у випадку однорідних інформаційних потоків. Навести приклад розв'язання з поясненнями.

2. Задача мінімізації дізбалансу в МСМ, приклади математичних моделей.

3. **Задача.** Мультисервісна мережа обслуговує два однорідних інформаційних потоки А и В із трафіком T_A и T_B Гб/с відповідно декількома комутаційними вузлами (КВ). На протязі одного циклу обслуговування фіксований КВ К обслуговує х секунд потік А та у секунд потік В. Для знаходження максимального об'єму трафіка, який може пройти вузлом К (змінна z), розроблена наведена математична модель (час х та час у – це відносні значення часу, тому можуть приймати і негативні значення):

$z = 4x + 5y \rightarrow \max;$

$5x + 2y \le 3;$

$11x + y \ge -3$

$x \ge 0.$

Привести дану модель к стандартному вигляду. Приведення проводити покроково, з детальним описом дій на кожному кроці).

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 14

1. Особливі випадки задач лінійного програмування при знаходженні оптимального розподілу ресурсів МСМ. Навести приклади.

2. Алгоритм транспортної моделі для розв'язання задач лінійної оптимізації в МСМ. Навести приклади використання.

3. **Задача.** З вузла А до вузла В мультисервісної мережі потрібно передати Q Гб с мінімальними витратами вибраного ресурсу. У вузлі А інформація розподілена по *m* каналах, *i*-й канал ($i = \overline{1,m}$) передає a_i Гб ($\sum_{i=1}^{m} a_i = Q$). У вузлі В її можуть прийняти *n* каналів по b_j Гб ($\sum_{j=1}^{m} b_j = Q$). При передачі за маршрутом із *i* до *j* 1 Гб витрачається c_{ij} одиниць ресурсу.

Знайти начальне рішення даної задачі методом північно-західного кута та показати збалансованість задачі при таких значеннях змінних:

30, 30, 20, 20);

b = (10, 10, 75, 5),

витрати розраховуються за формулою $c_{ij} = 2i + 3j$.

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 15

1. Використання двоїстої задачі при оптимізації розподілу ресурсів МСМ. Навести приклади формування двоїстої задачі.

2. Загальна постановку задачі знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі з використанням методу дихотомії, алгоритм реалізації методу для МСМ, його переваги та недоліки, приклади використання з поясненнями.

3. **Задача.** У мультисервісній мережі на даний час обслуговується n інтегральних інформаційних потоків (ІІП) (з різним характером трафіку), $i = \overline{1,n}$, та є стільки ж маршрутів, $j = \overline{1,m}$, $m = n$, причому кожний маршрут обслуговує тільки один ІІП Із-за різного характеру ІІП витрати вибраного ресурсу для кожного ІІП на кожному маршруті різні. Розподілити ІІП по маршрутах з мінімальними витратами ресурсу. Навести числове рішення задачі при $m = n = 3$ та витратах ресурсу, заданих у наступній таблиці:

21	21	23
31	25	35
41	42	46

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 16

1. Навести приклади формування лінійних процесів в МСМ, постановку задачі, побудувати відповідні математичні моделі.

2. Загальна постановку задачі знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі з використанням методу «золотого перетину», алгоритм реалізації методу для МСМ, його переваги та недоліки, приклади використання з поясненнями.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T=f(x)$$

де $x \in [a, b]$ – узагальнений числовий параметр, що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і **x*** – оцінку точки мінімуму функції f(x).

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень:
$f(x) = .x^3 - 4x + 4$ на інтервалі [–2; 2].

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 17

1. Навести приклад постановки задачі оптимізації платних послуг в МСМ, побудувати відповідну математичну модель.

2. Приклади використання в МСМ алгоритму Флойда та особливості його використання.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T = f(\bar{x})$$

де $\bar{x}$ – узагальнений векторний параметр ($\bar{x}$ =(x, y)), що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і $\bar{x}^*$=(x*, y*) - оцінку значень параметрів.

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень (знайти градієнт та всі стаціонарні точки функції):

$f(x) = y^5 + x^4 - 4x - 5y - 20$.

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 18

1. Навести приклад постановки задачі мінімізації дізбалансу в МСМ, побудувати відповідну математичну модель.

2. Приклади використанням методу сканування для МСМ та особливості його використання.

3. **Задача.** Мультисервісна мережа обслуговує два однорідних інформаційних потоки А и В, витрачаючи мережевий ресурс на рівні T_A и T_B умовних одиниць/с відповідно декількома комутаційними вузлами (КВ). На протязі одного циклу обслуговування фіксований КВ К обслуговує х секунд потік А та у секунд потік В. Для знаходження мінімальних витрат мережевого ресурсу на вузлі К (змінна z), розроблена наведена математична модель (час х та час у – це відносні значення часу, тому можуть приймати і негативні значення):

$z = 3x + 4y \rightarrow \min;$
$3x + 2y \le -4;$
$55x + y \ge 4$
$y \ge 0.$

Привести дану модель к стандартному вигляду. Приведення проводити покроково, з детальним описом дій на кожному кроці).

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 19

1. Використання транспортної моделі при розв'язанні задач лінійної оптимізації в МСМ. Навести приклади.

2. Загальна постановка задачі знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі з використанням методу «пошуку з розвідкою», її алгоритм для МСМ, особливості використання та приклад роботи.

3. **Задача.** З вузла А до вузла В мультисервісної мережі потрібно передати Q Гб с мінімальними витратами вибраного ресурсу. У вузлі А інформація розподілена по *m* каналах, *i*-й канал ($i = \overline{1,m}$) передає a_i Гб ($\sum_{i=1}^{m} a_i = Q$). У вузлі В її можуть прийняти *n* каналів по b_j Гб ($\sum_{j=1}^{m} b_j = Q$). При передачі за маршрутом із *i* до *j* 1 Гб витрачається c_{ij} одиниць ресурсу.

Знайти начальне рішення даної задачі методом північно-західного кута та показати збалансованість задачі при таких значеннях змінних:

a = (10, 60, 30);

b = (30, 30, 30, 10),

витрати розраховуються за формулою $c_{ij} = 2i + j$.

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 20

1. Використання транспортної моделі при розв'язанні задач лінійної оптимізації в МСМ. Навести приклади.

2. Сформулювати узагальнену постановку задачі оптимізації для знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі для багатопараметричних функцій. Визначити методи її розв'язання, навести приклади використання.

3. **Задача.** У мультисервісній мережі на даний час обслуговується *n* інтегральних інформаційних потоків (ІІП) (з різним характером трафіку), $i = \overline{1,n}$, та є стільки ж маршрутів, $j = \overline{1,m}$, *m* = *n*, причому кожний маршрут обслуговує тільки один ІІП Із-за різного характеру ІІП витрати вибраного ресурсу для кожного ІІП на кожному маршруті різні. Розподілити ІІП по маршрутах з мінімальними витратами ресурсу. Навести числове рішення задачі при *m* = *n* = *3* та витратах ресурсу, заданих у наступній таблиці:

99	98	98
95	1	97
93	94	96

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 21

1. Метод потенціалів при розв'язанні задач лінійної оптимізації в МСМ. Навести приклад використання.

2. Особливості використання градієнтних методів для знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі Навести приклад використання з поясненнями.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T=f(x)$$

де $x \in [a, b]$ – узагальнений числовий параметр, що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і **x*** – оцінку точки мінімуму функції f(x).

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень:

$f(x) = .x^5 – 80x + 128$ на інтервалі [–3; 3].

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 22

1. Загальна постановка задачі маршрутизації для двох збалансованих багатоканальних вузлів. Складання транспортної таблиці для вибору оптимального маршруту.

2. Особливості використання градієнтного методу з дробленням кроку для знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі Навести алгоритм методу та привести приклад використання з поясненнями.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T = f(\bar{x})$$

де $\bar{x}$ – узагальнений векторний параметр ($\bar{x}$ =(x, y)), що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і $\bar{x}^*$=(x*, y*) - оцінку значень параметрів.

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень (знайти градієнт та всі стаціонарні точки функції):

$f(x) = x^{11} + 3y^5 –10y^3 + 15y – 15.$

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 23

1. Методи теорії ігор при знаходженні оптимального БІЛЕТ № у в МСМ в умовах невизначеності. Вибір стратегії, навести приклади використання з поясненнями..

2. Особливості рішення задачі оптимізації розподілу ресурсів МСМ при обслуговуванні однорідних інформаційних потоків. Загальна постановка задачі, графічний метод розв'язання, навести приклади.

3. **Задача.** Мультисервісна мережа обслуговує два однорідних інформаційних потоки А и В із трафиком T_A и T_B Гб/с відповідно декількома комутаційними вузлами (КВ). На протязі одного циклу обслуговування фіксований КВ К обслуговує х секунд потік А та у секунд потік В. Для знаходження максимального об'єму трафіка, який може пройти вузлом К (змінна z), розроблена наведена математична модель (час х та час у – це відносні значення часу, тому можуть приймати і негативні значення):

$z = 4x + 5y \to \max;$

$5x + 2y \le 3;$

$11x + y \ge -3$

$x \ge 0.$

Привести дану модель к стандартному вигляду. Приведення проводити покроково, з детальним описом дій на кожному кроці).

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 24

1. Загальна постановка задачі оптимального розподілу інформаційних потоків за маршрутами. Приклади математичних моделей.

2. Особливості використання графічного методу розв'язання задач лінійної оптимізації при знаходженні оптимального розподілу ресурсів МСМ у випадку однорідних інформаційних потоків. Навести приклад розв'язання з поясненнями.

3. **Задача.** З вузла А до вузла В мультисервісної мережі потрібно передати Q Гб с мінімальними витратами вибраного ресурсу. У вузлі А інформація розподілена по *m* каналах, *i*-й канал ($i = \overline{1,m}$) передає a_i Гб ($\sum_{i=1}^{m} a_i = Q$). У вузлі В її можуть прийняти *n* каналів по b_j Гб ($\sum_{j=1}^{m} b_j = Q$). При передачі за маршрутом із *i* до *j* 1 Гб витрачається c_{ij} одиниць ресурсу.

Знайти начальне рішення даної задачі методом північно-західного кута та показати збалансованість задачі при таких значеннях змінних:

a = (40, 40, 40);

b = (10, 10, 30, 60, 10),

витрати розраховуються за формулою $c_{ij} = i + 2j$.

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 25

1. Використання угорського методу рішення задачі про призначення для оптимального розподілу інформаційних потоків за маршрутами. Навести приклади з поясненнями.

2. Зведення лінійних задач оптимізації МСМ до стандартної форми, особливості зведення та порядок виконання кроків. Приклади з поясненнями.

3. **Задача.** У мультисервісній мережі на даний час обслуговується n інтегральних інформаційних потоків (ІІП) (з різним характером трафіку), $i = \overline{1, n}$, та є стільки ж маршрутів, $j = \overline{1, m}$, $m = n$, причому кожний маршрут обслуговує тільки один ІІП Із-за різного характеру ІІП витрати вибраного ресурсу для кожного ІІП на кожному маршруті різні. Розподілити ІІП по маршрутах з мінімальними витратами ресурсу. Навести числове рішення задачі при $m = n = 3$ та витратах ресурсу, заданих у наступній таблиці:

666	111	3
66	11	333
6	1	33

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 26

1. Загальна постановки задачі мінімізації мережі. Алгоритм Краскала. Навести приклади з поясненнями.

2. Особливості використання симплекс-методу для розв'язання задач лінійної оптимізації при знаходженні оптимального розподілу ресурсів МСМ у випадку однорідних інформаційних потоків. Навести приклади.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T=f(x)$$

де $x \in [a, b]$ – узагальнений числовий параметр, що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і **x*** – оцінку точки мінімуму функції f(x).

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень:
$f(x) = .3x^5 - 10x^3 + 15x + 1$ на інтервалі $[-2; 2]$.

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 27

1. Загальна постановки задачі знаходження оптимального маршруту в мережі без циклів. Спрощений алгоритм Дейкстри та його використання в МСМ. Навести приклади з поясненнями.

2. Формування двоїстої задачі для лінійних моделей в МСМ. Навести приклади з поясненнями.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T = f(\bar{x})$$

де $\bar{x}$ – узагальнений векторний параметр ($\bar{x}$ =(x, y)), що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і $\bar{x}^*$=(x*, y*) - оцінку значень параметрів.

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень (знайти градієнт та всі стаціонарні точки функції):

$f(x) = x^2 – y^2 + 6xy – 8x – 4y + 24.$

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 28

1. Знаходження оптимального маршруту в мережі, що припускає наявність циклів. Спрощений алгоритм Флойда та його використання в МСМ. Навести приклади з поясненнями.

2. Приклади особливих випадків задач лінійного програмування при знаходженні оптимального розподілу ресурсів МСМ.

3. **Задача.** Мультисервісна мережа обслуговує два однорідних інформаційних потоки A и B, витрачаючи мережевий ресурс на рівні T_A и T_B умовних одиниць/с відповідно декількома комутаційними вузлами (КВ). На протязі одного циклу обслуговування фіксований КВ К обслуговує x секунд потік А та y секунд потік В. Для знаходження мінімальних витрат мережевого ресурсу на вузлі К (змінна z), розроблена наведена математична модель (час x та час y – це відносні значення часу, тому можуть приймати і негативні значення):

$z = 5x + 6y \rightarrow \min;$
$8x + 2y \le – 7;$
$4x + 4y \ge 12$
$x \ge 0.$

Привести дану модель к стандартному вигляду. Приведення проводити покроково, з детальним описом дій на кожному кроці).

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 29

1. Загальна постановка задачі мінімізації часу виконання багатоетапного процесу. Метод критичного шляху та його використання в МСМ. Навести приклади з поясненнями.

2. Математичні моделі лінійних процесів в МСМ: Постановка задачі, приклади моделей та методи розв'язання.

3. **Задача.** З вузла А до вузла В мультисервісної мережі потрібно передати Q Гб с мінімальними витратами вибраного ресурсу. У вузлі А інформація розподілена по *m* каналах, *i*-й канал ($i = \overline{1,m}$) передає a_i Гб ($\sum_{i=1}^{m} a_i = Q$). У вузлі В її можуть прийняти *n* каналів по b_j Гб ($\sum_{j=1}^{m} b_j = Q$). При передачі за маршрутом із *i* до *j* 1 Гб витрачається c_{ij} одиниць ресурсу.

Знайти начальне рішення даної задачі методом північно-західного кута та показати збалансованість задачі при таких значеннях змінних:

a = (10, 30, 40, 50);

b = (20, 10, 50, 50),

витрати розраховуються за формулою $c_{ij} = i + j$.

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет «ХПІ»
Факультет «Комп'ютерні інформаційні технології»
Кафедра «Обчислювальна техніка та програмування»
Дисципліна «Оптимізація процесів в мультисервісних системах та мережах»

БІЛЕТ № 30

1. Прийняття рішень щодо оптимізації процесу в ймовірнісних умовах (умовах риску). Навести приклади з поясненнями.

2. Оптимізація рівня послуг в МСМ, побудувати відповідну математичну модель.

3. **Задача.** У мультисервісній мережі на даний час обслуговується *n* інтегральних інформаційних потоків (ІІП) (з різним характером трафіку), $i = \overline{1,n}$, та є стільки ж маршрутів, $j = \overline{1,m}$, *m* = *n*, причому кожний маршрут обслуговує тільки один ІІП Із-за різного характеру ІІП витрати вибраного ресурсу для кожного ІІП на кожному маршруті різні. Розподілити ІІП по маршрутах з мінімальними витратами ресурсу. Навести числове рішення задачі при *m* = *n* = *3* та витратах ресурсу, заданих у наступній таблиці:

11	46	23
43	4	22
3	45	55

Завідувач кафедри ОТП _____ Семенов С.Г.
Викладач _____ Кучук Г.А.

Затверджено на засіданні каф.ОТП, протокол № 12 від «5» травня 2016 р.

Частина 7

Комплексна контрольна робота

КОМПЛЕКСНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА
ОПМСМ

ВАРІАНТ 1

1. Загальна постановка задачі оптимізації для знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі з використанням математичного апарату унімодальних функцій. Навести приклад використання.

2. Використання методів теорії ігор при оптимізації процесів в МСМ. Навести приклади використання з поясненнями.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T=f(x)$$

де $x \in [a, b]$ – узагальнений числовий параметр, що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і **x*** – оцінку точки мінімуму функції f(x).

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень:

$f(x) = .x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ на інтервалі [0; 2].

ВАРІАНТ 2

1. Знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі з використанням методу дихотомії для унімодальних функцій. Навести загальну постановку задачі, алгоритм реалізації методу для МСМ та привести приклад використання з поясненнями.

2. Приклади оптимізації процесів в мультисервісних системах в умовах риску. Навести приклади з поясненнями.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T = f(\bar{x})$$

де $\bar{x}$ – узагальнений векторний параметр ($\bar{x}$ =(x, y)), що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і $\bar{x}^*$=(x*, y*) - оцінку значень параметрів.

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень (знайти градієнт та всі стаціонарні точки функції):

$(x) = x^3 + y^3 - 3x - 3y - 3$.

ВАРІАНТ 3

1. Знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі з використанням методу «золотого перетину» для унімодальних функцій. Навести загальну постановку задачі, алгоритм реалізації методу для МСМ та привести приклад використання з поясненнями.

2. Загальна постановка задачі. Використання в МСМ мережевих методів для мінімізації часу виконання багатоетапного процесу. Навести приклади з поясненнями.

3. **Задача.** Мультисервісна мережа обслуговує два однорідних інформаційних потоки А и В із трафіком T_A и T_B Гб/с відповідно декількома комутаційними вузлами (КВ). На протязі одного циклу обслуговування фіксований КВ К обслуговує х секунд потік А та у секунд потік В. Для знаходження максимального об'єму трафіка, який може пройти вузлом К (змінна z), розроблена наведена математична модель (час х та час у – це відносні значення часу, тому можуть приймати і негативні значення):

$z = 2x + 3y \to \max$;
$2x + 2y \le 5$;
$x + y \ge -11$
$x \ge 0$.

Привести дану модель к стандартному вигляду. Приведення проводити покроково, з детальним описом дій на кожному кроці).

ВАРІАНТ 4

1. Загальна постановка задачі оптимізації часу проходження пакету в МСМ у випадку, коли оптимізуєма функція – багатоекстремальна. Навести приклади постановки та розв'язання задач.

2. Використання в МСМ алгоритму Флойда при знаходження оптимального маршруту в мережі, що припускає наявність циклів. Покрокове представлення алгоритму. Навести приклади з поясненнями.

3. **Задача.** З вузла А до вузла В мультисервісної мережі потрібно передати Q Гб с мінімальними витратами вибраного ресурсу. У вузлі А інформація розподілена по m каналах, i-й канал ($i = \overline{1,m}$) передає a_i Гб ($\sum_{i=1}^{m} a_i = Q$). У вузлі В її можуть прийняти n каналів по b_j Гб ($\sum_{j=1}^{m} b_j = Q$). При передачі за маршрутом із i до j 1 Гб витрачається c_{ij} одиниць ресурсу.

Знайти начальне рішення даної задачі методом північно-західного кута та показати збалансованість задачі при таких значеннях змінних:

a = (30, 40, 50);

b = (10, 10, 50, 50),

витрати розраховуються за формулою $c_{ij} = i + j$.

ВАРІАНТ 5

1. Знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі з використанням методу «пошуку з розвідкою». Навести загальну постановку задачі, алгоритм реалізації методу для МСМ та привести приклад використання з поясненнями.

2. Особливості транспортної моделі при розв'язанні задач лінійної оптимізації в МСМ. Навести приклади.

3. **Задача.** У мультисервісній мережі на даний час обслуговується n інтегральних інформаційних потоків (ІІП) (з різним характером трафіку), $i = \overline{1,n}$, та є стільки ж маршрутів, $j = \overline{1,m}$, $m = n$, причому кожний маршрут обслуговує тільки один ІІП Із-за різного характеру ІІП витрати вибраного ресурсу для кожного ІЇП на кожному маршруті різні. Розподілити ІІП по маршрутах з мінімальними витратами ресурсу. Навести числове рішення задачі при $m = n = 3$ та витратах ресурсу, заданих у наступній таблиці:

11	13	15
12	11	8
3	4	5

ВАРІАНТ 6

1. Знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі з використанням методу сканування. Навести загальну постановку задачі, алгоритм реалізації методу для МСМ та привести приклад використання з поясненнями.

2. Метод північно-західного кута при знаходженні початкового рішення задач лінійної оптимізації в МСМ. Навести різні приклади використання.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T = f(x)$$

де $x \in [a, b]$ – узагальнений числовий параметр, що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і **x*** – оцінку точки мінімуму функції f(x).

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень:

$f(x) = .x^5 - 5x + 4$ на інтервалі [–2; 2].

ВАРІАНТ 7

1. Загальна постановка задачі оптимізації для знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі для багатопараметричних функцій. Навести приклад використання.

2. Маршрутизація при двох збалансованих багатоканальних вузлах. Складання збалансованих транспортних таблиць для вибору оптимального маршруту.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T = f(\bar{x})$$

де $\bar{x}$ – узагальнений векторний параметр ($\bar{x}$ =(x, y)), що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і $\bar{x}^*$=(x*, y*) - оцінку значень параметрів.

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень (знайти градієнт та всі стаціонарні точки функції):

$f(x) = x^5 + 3y^5 - 5y^3 - 5x - 15$.

ВАРІАНТ 8

1. Використання градієнтних методів для знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі Навести загальну постановку задачі та привести приклад використання з поясненнями.

2. Знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі на інтервалі зміни параметру з одним екстремумом. Визначити властивості унімодальних функцій, навести приклади використання в МСМ.

3. **Задача.** Мультисервісна мережа обслуговує два однорідних інформаційних потоки А и В, витрачаючи мережевий ресурс на рівні T_A и T_B умовних одиниць/с відповідно декількома комутаційними вузлами (КВ). На протязі одного циклу обслуговування фіксований КВ К обслуговує x секунд потік А та y секунд потік В. Для знаходження мінімальних витрат мережевого ресурсу на вузлі К (змінна z), розроблена наведена математична модель (час x та час y – це відносні значення часу, тому можуть приймати і негативні значення):

$z = x + y \rightarrow \min;$

$x + 2y \le -5;$

$7x + y \ge 7$

$y \ge 0.$

Привести дану модель к стандартному вигляду. Приведення проводити покроково, з детальним описом дій на кожному кроці).

ВАРІАНТ 9

1. Використання градієнтного методу з дробленням кроку для знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі Навести загальну постановку задачі, алгоритм методу та привести приклад використання з поясненнями.

2. Використання задачі про призначення для оптимального розподілу інформаційних потоків за маршрутами. Навести приклади з поясненнями.

3. **Задача.** З вузла А до вузла В мультисервісної мережі потрібно передати Q Гб с мінімальними витратами вибраного ресурсу. У вузлі А інформація розподілена по *m* каналах, *i*-й канал ($i = \overline{1,m}$) передає a_i Гб ($\sum_{i=1}^{m} a_i = Q$). У вузлі В її можуть прийняти *n* каналів по b_j Гб ($\sum_{j=1}^{m} b_j = Q$). При передачі за маршрутом із *i* до *j* 1 Гб витрачається c_{ij} одиниць ресурсу.

Знайти начальне рішення даної задачі методом північно-західного кута та показати збалансованість задачі при таких значеннях змінних:

a = (30, 30, 30);

b = (10, 10, 20, 20; 30),

витрати розраховуються за формулою $c_{ij} = i + 3j$.

ВАРІАНТ 10

1. Задача оптимізації розподілу ресурсів МСМ при обслуговуванні однорідних інформаційних потоків. Загальна постановка задачі, графічний метод розв'язання, навести приклади.

2. Загальна постановка задачі оптимального розподілу інформаційних потоків за маршрутами. Приклади математичних моделей.

3. **Задача.** У мультисервісній мережі на даний час обслуговується *n* інтегральних інформаційних потоків (ІІП) (з різним характером трафіку), $i = \overline{1,n}$, та є стільки ж маршрутів, $j = \overline{1,m}$, $m = n$, причому кожний маршрут обслуговує тільки один ІІП Із-за різного характеру ІІП витрати вибраного ресурсу для кожного ІЇП на кожному маршруті різні. Розподілити ІІП по маршрутах з мінімальними витратами ресурсу. Навести числове рішення задачі при $m = n = 3$ та витратах ресурсу, заданих у наступній таблиці:

22	77	88
33	66	99
44	55	11

ВАРІАНТ 11

1. Використання графічного методу розв'язання задач лінійної оптимізації при знаходженні оптимального розподілу ресурсів МСМ у випадку однорідних інформаційних потоків. Навести приклад розв'язання з поясненнями.

2. Мінімізації мережі. Шляхом знаходження остовного дерева. Алгоритм мінімізації, навести приклади з поясненнями.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T=f(x)$$

де $x \in [a, b]$ – узагальнений числовий параметр, що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і **x*** – оцінку точки мінімуму функції f(x).

Обгрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень:

$f(x) = .6x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 13$ на інтервалі [–2; 2].

ВАРІАНТ 12

1. Стандартний вигляд задачі умовної оптимізації для процесу розподілу ресурсів МСМ у випадку, якщо модель розподілу – лінійна. Навести приклади зведення лінійних задач оптимізації МСМ до стандартної форми.

2. Знаходження оптимального маршруту в мережі без циклів. Алгоритм методу, навести приклади використання в МСМ з поясненнями.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T = f(\bar{x})$$

де $\bar{x}$ – узагальнений векторний параметр ($\bar{x}$=(x, y)), що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і $\bar{x}^*$=(x*, y*) - оцінку значень параметрів.

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень (знайти градієнт та всі стаціонарні точки функції):

$f(x) = x^2 - y^2 + 2xy - 4x - 2y + 8$.

ВАРІАНТ 13

1. Використання симплекс-методу розв'язання задач лінійної оптимізації при знаходженні оптимального розподілу ресурсів МСМ у випадку однорідних інформаційних потоків. Навести приклад розв'язання з поясненнями.

2. Задача мінімізації дізбалансу в МСМ, приклади математичних моделей.

3. **Задача.** Мультисервісна мережа обслуговує два однорідних інформаційних потоки А и В із трафіком T_A и T_B Гб/с відповідно декількома комутаційними вузлами (КВ). На протязі одного циклу обслуговування фіксований КВ К обслуговує х секунд потік А та у секунд потік В. Для знаходження максимального об'єму трафіка, який може пройти вузлом К (змінна z), розроблена наведена математична модель (час х та час у – це відносні значення часу, тому можуть приймати і негативні значення):

$z = 4x + 5y \to \max$;

$5x + 2y \le 3$;

$11x + y \ge -3$

$x \ge 0$.

Привести дану модель к стандартному вигляду. Приведення проводити покроково, з детальним описом дій на кожному кроці).

ВАРІАНТ 14

1. Особливі випадки задач лінійного програмування при знаходженні оптимального розподілу ресурсів МСМ. Навести приклади.

2. Алгоритм транспортної моделі для розв'язання задач лінійної оптимізації в МСМ. Навести приклади використання.

3. **Задача.** З вузла А до вузла В мультисервісної мережі потрібно передати Q Гб с мінімальними витратами вибраного ресурсу. У вузлі А інформація розподілена по m каналах, i-й канал ($i = \overline{1,m}$) передає a_i Гб ($\sum_{i=1}^{m} a_i = Q$). У вузлі В її можуть прийняти n каналів по b_j Гб ($\sum_{j=1}^{m} b_j = Q$). При передачі за маршрутом із i до j 1 Гб витрачається c_{ij} одиниць ресурсу.

Знайти начальне рішення даної задачі методом північно-західного кута та показати збалансованість задачі при таких значеннях змінних:

30, 30, 20, 20);

b = (10, 10, 75, 5),

витрати розраховуються за формулою $c_{ij} = 2i + 3j$.

ВАРІАНТ 15

1. Використання двоїстої задачі при оптимізації розподілу ресурсів МСМ. Навести приклади формування двоїстої задачі.

2. Загальна постановку задачі знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі з використанням методу дихотомії, алгоритм реалізації методу для МСМ, його переваги та недоліки, приклади використання з поясненнями.

3. **Задача.** У мультисервісній мережі на даний час обслуговується n інтегральних інформаційних потоків (ІІП) (з різним характером трафіку), $i = \overline{1,n}$, та є стільки ж маршрутів, $j = \overline{1,m}$, $m = n$, причому кожний маршрут обслуговує тільки один ІІП Із-за різного характеру ІІП витрати вибраного ресурсу для кожного ІЇП на кожному маршруті різні. Розподілити ІІП по маршрутах з мінімальними витратами ресурсу. Навести числове рішення задачі при $m = n = 3$ та витратах ресурсу, заданих у наступній таблиці:

21	21	23
31	25	35
41	42	46

ВАРІАНТ 16

1. Навести приклади формування лінійних процесів в МСМ, постановку задачі, побудувати відповідні математичні моделі.

2. Загальна постановку задачі знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі з використанням методу «золотого перетину», алгоритм реалізації методу для МСМ, його переваги та недоліки, приклади використання з поясненнями.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T=f(x)$$

де $x \in [a, b]$ – узагальнений числовий параметр, що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і **x*** – оцінку точки мінімуму функції f(x).

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень:

$f(x) = .x^3 - 4x + 4$ на інтервалі [–2; 2].

ВАРІАНТ 17

1. Навести приклад постановки задачі оптимізації платних послуг в МСМ, побудувати відповідну математичну модель.

2. Приклади використання в МСМ алгоритму Флойда та особливості його використання.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T = f(\bar{x})$$

де $\bar{x}$ – узагальнений векторний параметр ($\bar{x}$=(x, y)), що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і $\bar{x}^*$=(x*, y*) - оцінку значень параметрів.

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень (знайти градієнт та всі стаціонарні точки функції):

$f(x) = y^5 + x^4 - 4x - 5y - 20$.

ВАРІАНТ 18

1. Навести приклад постановки задачі мінімізації дізбалансу в МСМ, побудувати відповідну математичну модель.

2. Приклади використанням методу сканування для МСМ та особливості його використання.

3. **Задача.** Мультисервісна мережа обслуговує два однорідних інформаційних потоки A и B, витрачаючи мережевий ресурс на рівні T_A и T_B умовних одиниць/с відповідно декількома комутаційними вузлами (КВ). На протязі одного циклу обслуговування фіксований КВ K обслуговує x секунд потік A та y секунд потік B. Для знаходження мінімальних витрат мережевого ресурсу на вузлі K (змінна z), розроблена наведена математична модель (час x та час y – це відносні значення часу, тому можуть приймати і негативні значення):

$z = 3x + 4y \rightarrow \min$;

$3x + 2y \le -4$;

$55x + y \ge 4$

$y \ge 0$.

Привести дану модель к стандартному вигляду. Приведення проводити покроково, з детальним описом дій на кожному кроці).

ВАРІАНТ 19

1. Використання транспортної моделі при розв'язанні задач лінійної оптимізації в МСМ. Навести приклади.

2. Загальна постановка задачі знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі з використанням методу «пошуку з розвідкою», її алгоритм для МСМ, особливості використання та приклад роботи.

3. **Задача.** З вузла A до вузла B мультисервісної мережі потрібно передати Q Гб с мінімальними витратами вибраного ресурсу. У вузлі A інформація розподілена по m каналах, i-й канал ($i = \overline{1,m}$) передає a_i Гб ($\sum_{i=1}^{m} a_i = Q$). У вузлі B її можуть прийняти n каналів по b_j Гб ($\sum_{j=1}^{m} b_j = Q$). При передачі за маршрутом із i до j 1 Гб витрачається c_{ij} одиниць ресурсу.

Знайти начальне рішення даної задачі методом північно-західного кута та показати збалансованість задачі при таких значеннях змінних:

a = (10, 60, 30);

b = (30, 30, 30, 10),

витрати розраховуються за формулою $c_{ij} = 2i + j$.

ВАРІАНТ 20

1. Використання транспортної моделі при розв'язанні задач лінійної оптимізації в МСМ. Навести приклади.

2. Сформулювати узагальнену постановку задачі оптимізації для знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі для багатопараметричних функцій. Визначити методи її розв'язання, навести приклади використання.

3. **Задача.** У мультисервісній мережі на даний час обслуговується n інтегральних інформаційних потоків (ІІП) (з різним характером трафіку), $i = \overline{1,n}$, та є стільки ж маршрутів, $j = \overline{1,m}$, $m = n$, причому кожний маршрут обслуговує тільки один ІІП Із-за різного характеру ІІП витрати вибраного ресурсу для кожного ІЇП на кожному маршруті різні. Розподілити ІІП по маршрутах з мінімальними витратами ресурсу. Навести числове рішення задачі при $m = n = 3$ та витратах ресурсу, заданих у наступній таблиці:

99	98	98
95	1	97
93	94	96

ВАРІАНТ 21

1. Метод потенціалів при розв'язанні задач лінійної оптимізації в МСМ. Навести приклад використання.

2. Особливості використання градієнтних методів для знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі Навести приклад використання з поясненнями.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T=f(x)$$

де $x \in [a, b]$ – узагальнений числовий параметр, що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і **x*** – оцінку точки мінімуму функції f(x).

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень:

$f(x) = .x^5 – 80x + 128$ на інтервалі [–3; 3].

ВАРІАНТ 22

1. Загальна постановка задачі маршрутизації для двох збалансованих багатоканальних вузлів. Складання транспортної таблиці для вибору оптимального маршруту.

2. Особливості використання градієнтного методу з дробленням кроку для знаходження мінімального часу проходження пакету в мультисервісній мережі Навести алгоритм методу та привести приклад використання з поясненнями.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T = f(\bar{x})$$

де $\bar{x}$ – узагальнений векторний параметр ($\bar{x}$=(x, y)), що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і $\bar{x}^*$=(x*, y*) - оцінку значень параметрів.

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень (знайти градієнт та всі стаціонарні точки функції):

$f(x) = x^{11} + 3y^5 –10y^3 + 15y – 15$.

ВАРІАНТ 23

1. Методи теорії ігор при знаходженні оптимального варіанту в МСМ в умовах невизначеності. Вибір стратегії, навести приклади використання з поясненнями..

2. Особливості рішення задачі оптимізації розподілу ресурсів МСМ при обслуговуванні однорідних інформаційних потоків. Загальна постановка задачі, графічний метод розв'язання, навести приклади.

3. **Задача.** Мультисервісна мережа обслуговує два однорідних інформаційних потоки A и B із трафиком T_A и T_B Гб/с відповідно декількома комутаційними вузлами (КВ). На протязі одного циклу обслуговування фіксований КВ K обслуговує x секунд потік A та y секунд потік B. Для знаходження максимального об'єму трафіка, який може пройти вузлом K (змінна z), розроблена наведена математична модель (час x та час y – це відносні значення часу, тому можуть приймати і негативні значення):

$z = 4x + 5y \to \max;$

$5x + 2y \le 3;$

$11x + y \ge -3$

$x \ge 0.$

Привести дану модель к стандартному вигляду. Приведення проводити покроково, з детальним описом дій на кожному кроці).

ВАРІАНТ 24

1. Загальна постановка задачі оптимального розподілу інформаційних потоків за маршрутами. Приклади математичних моделей.

2. Особливості використання графічного методу розв'язання задач лінійної оптимізації при знаходженні оптимального розподілу ресурсів МСМ у випадку однорідних інформаційних потоків. Навести приклад розв'язання з поясненнями.

3. **Задача.** З вузла A до вузла B мультисервісної мережі потрібно передати Q Гб с мінімальними витратами вибраного ресурсу. У вузлі A інформація розподілена по m каналах, i-й канал ($i = \overline{1,m}$) передає a_i Гб ($\sum_{i=1}^{m} a_i = Q$). У вузлі B її можуть прийняти n каналів по b_j Гб ($\sum_{j=1}^{m} b_j = Q$). При передачі за маршрутом із i до j 1 Гб витрачається c_{ij} одиниць ресурсу.

Знайти начальне рішення даної задачі методом північно-західного кута та показати збалансованість задачі при таких значеннях змінних:

a = (40, 40, 40);

b = (10, 10, 30, 60, 10),

витрати розраховуються за формулою $c_{ij} = i + 2j$.

ВАРІАНТ 25

1. Використання угорського методу рішення задачі про призначення для оптимального розподілу інформаційних потоків за маршрутами. Навести приклади з поясненнями.

2. Зведення лінійних задач оптимізації МСМ до стандартної форми, особливості зведення та порядок виконання кроків. Приклади з поясненнями.

3. **Задача.** У мультисервісній мережі на даний час обслуговується n інтегральних інформаційних потоків (ІІП) (з різним характером трафіку), $i = \overline{1,n}$, та є стільки ж маршрутів, $j = \overline{1,m}$, $m = n$, причому кожний маршрут обслуговує тільки один ІІП Із-за різного характеру ІІП витрати вибраного ресурсу для кожного ІЇП на кожному маршруті різні. Розподілити ІІП по маршрутах з мінімальними витратами ресурсу. Навести числове рішення задачі при $m = n = 3$ та витратах ресурсу, заданих у наступній таблиці:

666	111	3
66	11	333
6	1	33

ВАРІАНТ 26

1. Загальна постановки задачі мінімізації мережі. Алгоритм Краскала. Навести приклади з поясненнями.

2. Особливості використання симплекс-методу для розв'язання задач лінійної оптимізації при знаходженні оптимального розподілу ресурсів МСМ у випадку однорідних інформаційних потоків. Навести приклади.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T=f(x)$$

де $x \in [a, b]$ – узагальнений числовий параметр, що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і **x*** – оцінку точки мінімуму функції f(x).

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень:

$f(x) = .3x^5 – 10x^3 + 15x +1$ на інтервалі $[–2; 2]$.

ВАРІАНТ 27

1. Загальна постановки задачі знаходження оптимального маршруту в мережі без циклів. Спрощений алгоритм Дейкстри та його використання в МСМ. Навести приклади з поясненнями.

2. Формування двоїстої задачі для лінійних моделей в МСМ. Навести приклади з поясненнями.

3. **Задача.** Аналіз часу проходження пакету в мультисервисній мережі показав, що воно може бути зведене до аналітичного виразу

$$T = f(\bar{x})$$

де $\bar{x}$ – узагальнений векторний параметр ($\bar{x}$ =(x, y)), що характеризує процес доставки пакету. Знайти **f*** – оцінку мінімального часу проходження пакету і $\bar{x}^*$=(x*, y*) - оцінку значень параметрів.

Обґрунтувати вибраний напрям розв'язання задачі та знайти рішення за таких значень (знайти градієнт та всі стаціонарні точки функції):

$f(x) = x^2 – y^2 + 6xy – 8x – 4y + 24$.

ВАРІАНТ 28

1. Знаходження оптимального маршруту в мережі, що припускає наявність циклів. Спрощений алгоритм Флойда та його використання в МСМ. Навести приклади з поясненнями.

2. Приклади особливих випадків задач лінійного програмування при знаходженні оптимального розподілу ресурсів МСМ.

3. **Задача.** Мультисервісна мережа обслуговує два однорідних інформаційних потоки А и В, витрачаючи мережевий ресурс на рівні T_A и T_B умовних одиниць/с відповідно декількома комутаційними вузлами (КВ). На протязі одного циклу обслуговування фіксований КВ К обслуговує x секунд потік А та y секунд потік В. Для знаходження мінімальних витрат мережевого ресурсу на вузлі К (змінна z), розроблена наведена математична модель (час x та час y – це відносні значення часу, тому можуть приймати і негативні значення):

$z = 5x + 6y \rightarrow \min;$

$8x + 2y \le -7;$

$4x + 4y \ge 12$

$x \ge 0.$

Привести дану модель к стандартному вигляду. Приведення проводити покроково, з детальним описом дій на кожному кроці).

ВАРІАНТ 29

1. Загальна постановка задачі мінімізації часу виконання багатоетапного процесу. Метод критичного шляху та його використання в МСМ. Навести приклади з поясненнями.

2. Математичні моделі лінійних процесів в МСМ: Постановка задачі, приклади моделей та методи розв'язання.

3. **Задача.** З вузла А до вузла В мультисервісної мережі потрібно передати Q Гб с мінімальними витратами вибраного ресурсу. У вузлі А інформація розподілена по m каналах, i-й канал ($i = \overline{1,m}$) передає a_i Гб ($\sum_{i=1}^{m} a_i = Q$). У вузлі В її можуть прийняти n каналів по b_j Гб ($\sum_{j=1}^{m} b_j = Q$). При передачі за маршрутом із i до j 1 Гб витрачається c_{ij} одиниць ресурсу.

Знайти начальне рішення даної задачі методом північно-західного кута та показати збалансованість задачі при таких значеннях змінних:

a = (10, 30, 40, 50);

b = (20, 10, 50, 50),

витрати розраховуються за формулою $c_{ij} = i + j$.

ВАРІАНТ 30

1. Прийняття рішень щодо оптимізації процесу в ймовірнісних умовах (умовах риску). Навести приклади з поясненнями.

2. Оптимізація рівня послуг в МСМ, побудувати відповідну математичну модель.

3. **Задача.** У мультисервісній мережі на даний час обслуговується n інтегральних інформаційних потоків (ІІП) (з різним характером трафіку), $i = \overline{1,n}$, та є стільки ж маршрутів, $j = \overline{1,m}$, $m = n$, причому кожний маршрут обслуговує тільки один ІІП Із-за різного характеру ІІП витрати вибраного ресурсу для кожного ІЇП на кожному маршруті різні. Розподілити ІІП по маршрутах з мінімальними витратами ресурсу. Навести числове рішення задачі при $m = n = 3$ та витратах ресурсу, заданих у наступній таблиці:

11	46	23
43	4	22
3	45	55