МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИСЦИПЛІНИ
«МЕТОДИ ПРОГНОЗУВАННЯ»

для здобувачів спеціальності 076 «Підприємництво та торгівля»
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
усіх форм навчання

Харків
НТУ «ХПІ»
2025

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИСЦИПЛІНИ
«МЕТОДИ ПРОГНОЗУВАННЯ»

для здобувачів спеціальності 076 «Підприємництво та торгівля»
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
усіх форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 3 від 13.02.2025 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2025

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Методи прогнозування» для здобувачів спеціальності 076 «Підприємництво та торгівля» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти усіх форм навчання / уклад. О.А. Сергієнко, Р.В. Мащенко, Р.О. Савченко. –Х. : НТУ «ХПІ», 2025. – 80 с.

Укладачі: О.А. Сергієнко
Р.В. Мащенко
Р.О. Савченко

Рецензент С. О. Степуріна

Кафедра підприємництва, торгівлі і логістики

ВСТУП

Становлення ринкових відносин на сучасному етапі розвитку економіки супроводжується формуванням нового господарського механізму, в якому важлива роль відводиться системному економічному аналізу та прогнозуванню. В умовах постійної зміни кон'юнктури ринку, зростання невизначеності зовнішнього середовища, загострення конкурентної боротьби, зростає потреба у прийнятті обґрунтованих управлінських рішень, які неможливо реалізувати без якісного прогнозного забезпечення.

Дисципліна «Методи прогнозування» спрямована на формування у здобувачів вищої освіти системи знань про теоретичні засади, інструментарій та практичні аспекти прогнозування економічних процесів. Особлива увага приділяється математичним і статистичним методам аналізу, що дозволяють будувати кількісні моделі та передбачати тенденції зміни показників, які характеризують функціонування соціально-економічних систем.

Курс передбачає поглиблене вивчення інструментів економіко-математичного моделювання, вивчення динаміки основних економічних показників, виявлення закономірностей їх змін, побудову трендів, аналіз сезонності та циклічності, визначення сценаріїв розвитку. Ці методи дозволяють проводити комплексне дослідження економічного середовища, виявляти потенційні ризики та формувати стратегії сталого розвитку підприємств, організацій, галузей економіки, а також регіонів і держави в цілому.

Метою вивчення навчальної дисципліни є оволодіння теоретичними знаннями та практичним інструментарієм прогнозування соціально-економічних процесів, визначення можливих станів економічних об'єктів у майбутньому, дослідження закономірностей їх розвитку за різних умов.

Об'єктом вивчення дисципліни є економічні процеси розширеного відтворення. Предметом дисципліни є сукупність методів і моделей розробки соціально-економічних прогнозів.

Ефективним засобом підготовки здобувачів вищої освіти до майбутньої, успішної професійної діяльності є практичні заняття. Вони сприяють активізації пізнавальної діяльності, формуванню самостійності суджень, умінню аргументовано відстоювати власні думки. Заняття практичного характеру сприяють оволодінню фундаментальними знаннями, допомагають роз-

вивати логічне мислення, формувати власний світогляд, що позитивно впливає на становлення здобувача вищої освіти як особистості.

Дані методичні вказівки спрямовані на розв'язання студентами практичних завдань з навчальної дисципліни «Методи прогнозування», яка належить до циклу обов'язкових фахових дисциплін професійної підготовки бакалавр із спеціальності «Підприємництво та торгівля» та вивчається згідно з навчальним планом підготовки фахівців спеціальності 076 «Підприємництво та торгівля» першого (бакалаврського) рівня всіх форм навчання.

У процесі підготовки до практичних занять студентам необхідно ознайомитися з матеріалами презентацій, конспектами лекцій і рекомендованою літературою.

Під час занять студент має бути готовий до обговорення основних термінів за кожною темою, дискусійних та винесених на заняття питань, виконання практичних і ситуаційних завдань.

МОДУЛЬ 1. МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ КОРОТКОСТРОКОВОГО ПРОГНОЗУВАННЯ

Практичне заняття 1

Мета практичного заняття: опанування особливостей розрахунку коефіцієнтів асоціації (коефіцієнт Юла) і контингенції (Ф)

Коефіцієнт асоціації (коефіцієнт Юла) та коефіцієнт контингенції (Ф) є важливими статистичними інструментами, які мають значну цінність для прогнозування у випадках, коли досліджувані ознаки мають якісний, категоріальний характер. Вони дають змогу виявляти ступінь та напрямок зв'язку між двома змінними, що є критично важливим при формуванні аналітичної бази для прийняття управлінських рішень, особливо у складному соціально-економічному середовищі.

З огляду на те, що традиційні методи прогнозування орієнтовані переважно на кількісні дані, коефіцієнти Юла і Ф розширюють спектр інструментів прогнозного аналізу, дозволяючи працювати з даними, які не піддаються числовій оцінці. Це особливо важливо у підприємництві, управлінні персоналом, логістиці, а також в оцінці ризиків і поведінкових моделей споживачів.

Крім того, ці методи добре поєднуються з експертними оцінками, які часто використовуються у ситуаціях обмеженої або фрагментарної інформації. Така інтеграція кількісних і якісних підходів дозволяє формувати більш достовірні прогнози, посилюючи аналітичну базу розробки стратегічних рішень.

Отже, використання коефіцієнтів асоціації та контингенції не лише актуальне, а й необхідне для підвищення якості соціально-економічного прогнозування. Їх застосування сприяє глибшому розумінню внутрішніх закономірностей між подіями та явищами, що дає змогу підвищити обґрунтованість та ефективність прийнятих управлінських рішень на рівні як підприємств, так і економіки загалом.

Завдання 1. Для приведених варіантів завдань необхідно дослідити вибірку даних і ступінь зв'язку двох ознак за допомогою коефіцієнта асоціації (коефіцієнт Юла) та контингенції (Ф).

Варіанти завдання

Варіант 1

Визначити відношення телеглядачів до телепередачі залежно від їх статі. Результати обстеження характеризуються наступними даними (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Вихідні дані

Стать	Відношення до передачі	
	позитивне	незадовільне
Чоловіки	25	10
Жінки	9	16

Варіант 2

Визначити залежність між успішністю студентів-заочників одного з вузів і роботою їх за фахом. Результати обстеження характеризуються наступними даними (табл. 1.2).

Таблиця 1.2 – Вихідні дані

Студенти-заочники	З них	
	одержали позитивні оцінки	одержали незадовільні оцінки
Працюють за фахом	180	120
Не працюють за фахом	100	200

Варіант 3

Визначити відношення водіїв автотранспорту до правил дорожнього руху залежно від їх статі. Результати обстеження характеризуються наступними даними (табл. 1.3).

Таблиця 1.3 – Вихідні дані

Стать	Відношення до правил дорожнього руху	
	порушення	виконання
Чоловіки	20	30
Жінки	5	45

Варіант 4

Визначити залежність між успішністю здачі іспитів абітурієнтами і їх середнім балом у школі. Результати обстеження характеризуються наступними даними (табл. 1.4).

Таблиця 1.4 – Вихідні дані

Абітурієнти	З них	
	одержали позитивні оцінки	одержали незадовільні оцінки
Відмінники	80	20
Середній бал	60	40

Варіант 5

Визначити залежність між наявністю дальтонізма залежно від статі людини. Результати обстеження характеризуються наступними даними (табл. 1.5).

Таблиця 1.5 – Вихідні дані

Стать	З них	
	дальтоніки	не дальтоніки
Чоловіки	38	442
Жінки	6	514

Варіант 6

Визначити відношення телеглядачів до телепередачі залежно від їх віку. Результати обстеження характеризуються наступними даними (табл. 1.6).

Таблиця 1.6 – Вихідні дані

Стать	Відношення до передачі	
	позитивне	незадовільне
Діти	11	15
Підлітки	25	4

Варіант 7

Визначити залежність між успішністю навчання студентів одного з вузів та їх кар'єрним зростання. Результати обстеження характеризуються наступними даними (табл. 1.7).

Таблиця 1.7 – Вихідні дані

Студенти	З них	
	одержали відмінні оцінки	одержали задовільні оцінки
Швидке кар'єрне зростання	180	75
Не має кар'єрного зростання	90	200

Варіант 8

Визначити відношення службовців до правил корпоративної етики залежно від їх статі. Результати обстеження характеризуються наступними даними (табл. 1.8).

Таблиця 1.8 – Вихідні дані

Стать	Відношення до правил дорожнього руху	
	порушення	виконання
Чоловіки	10	40
Жінки	25	25

Варіант 9

Визначити залежність між успішністю здачі іспитів абітурієнтами і їх середнім балом у школі. Результати обстеження характеризуються наступними даними (табл. 1.9).

Таблиця 1.9 – Вихідні дані

Абітурієнти	З них	
	одержали позитивні оцінки	одержали незадовільні оцінки
Відмінники	85	15
Середній бал	60	40

Варіант 10

Визначити залежність між фахом роботи залежно від статі людини. Результати обстеження характеризуються наступними даними (табл. 1.10).

Таблиця 1.10 – Вихідні дані

Стать	З них	
	працюють за фахом	не працюють за фахом
Чоловіки	338	112
Жінки	126	304

Методичні рекомендації до виконання завдання 1

Умови завдання:

Дослідити зв'язок між успішністю студентів-заочників одного з вузів і роботою їх за фахом. Результати обстеження характеризуються наступними даними (табл. 1.11).

Таблиця 1.11 – Вихідні дані

Студенти-заочники	Число студентів	З них	
		одержали позитивні оцінки	одержали незадовільні оцінки
Працюють за фахом	200	180	20
Не працюють за фахом	200	140	60
Разом	400	320	80

Необхідно:

Дослідити вибірку даних та ступінь зв’язку двох ознак за допомогою коефіцієнта асоціації (коефіцієнт Юла) та контингенції (Ф).

Рішення завдання:

Для визначення тісноти зв'язку двох якісних ознак, кожний з яких складається тільки з двох груп, застосовуються коефіцієнти асоціації і контингенції. При дослідженні зв'язку числовий матеріал розташовують у виді таблиць спряженості (табл. 1.12):

Таблиця 1.12 – Таблиця для обчислення коефіцієнтів асоціації і контингенції

a	b	a+b
c	d	c+d
a+c	b+d	a+b+c+d

Для обчислення будується таблиця, що показує зв'язок між двома явищами, кожне з яких повинно бути альтернативним, тобто складається з двох якісно незалежних один від одного значень ознаки (наприклад, гарний, поганий).

Коефіцієнти визначаються за формулами:

асоціації (коефіцієнт Юла):

$$K_a(Q) = \frac{ad-bc}{ad+bc}, \quad (1.1)$$

і є мірою однобічного зв’язку.

$K_a = 0$, якщо ознаки незалежні;

$K_a = 1$, у випадку повної зв’язаності;

$K_a = -1$, у випадку повної негативної зв’язаності;

контингенції:

$$K_k(\Phi) = \frac{ad-bc}{\sqrt{(a+b)\times(b+d)\times(a+c)\times(c+d)}} \quad (1.2)$$

застосовується для виявлення міри взаємозалежності.

Коефіцієнт контингенції завжди менше коефіцієнта асоціації, змінюється також від +1 до –1. Значення коефіцієнтів збігаються лише не наявності повного двостороннього взаємозв’язку. Значущість даного коефіцієнта перевіряється за допомогою критерія χ^2 з 1-м ступенем волі: $\chi^2 = n\Phi^2$.

Зв'язок вважається підтвердженим, якщо $K_a \geq 0{,}5$ або $K_к \geq 0{,}3$.

$$K_a = \frac{180 \times 60 - 140 \times 20}{180 \times 60 + 140 \times 20} = \frac{10800 - 2800}{10800 + 2800} = \frac{8000}{13600} = 0{,}6.$$

$$K_к = \frac{180 \times 60 - 140 \times 20}{\sqrt{(180+20) \times (20+60) \times (60+140) \times (140+180)}} = \frac{10800 - 2800}{\sqrt{200 \times 80 \times 200 \times 320}} = 0{,}3.$$

Таким чином, зв'язок між успішністю студентів-заочників і роботою їх за фахом істотний.

Практичне заняття 2

Мета практичного заняття: опанування особливостей розрахунку коефіцієнтів рангової кореляції Спірмена і Кендала

У сучасних умовах інформаційної неоднорідності, неповноти статистичних даних та складності соціально-економічних явищ методи прогнозування, що ґрунтуються на рангових оцінках, набувають особливої актуальності. Зокрема, коефіцієнти рангової кореляції Спірмена та Кендала є ефективними інструментами для виявлення непараметричних зв’язків між змінними, що не потребують нормального розподілу даних або лінійної залежності.

Ці коефіцієнти широко використовуються в умовах, коли величини, що аналізуються, мають порядкову шкалу або є результатами експертних оцінок, що часто зустрічається в економіці. Вони дозволяють виявити стійкі кореляційні залежності між змінними, які виражаються не в абсолютних значеннях, а у відносному порядку (рангах).

У контексті прогнозування це дає можливість:

- передбачити тенденції розвитку явищ без потреби в точних числових значеннях;
- оцінити узгодженість експертних суджень або поведінкових моделей;
- використовувати методи в умовах обмеженої або нечіткої інформації, зокрема на початкових етапах аналізу.

Крім того, коефіцієнти Спірмена і Кендала є надійними засобами валідації моделей прогнозування, оскільки дозволяють перевірити стабільність та узгодженість зв’язків між змінними в динаміці.

Таким чином, використання коефіцієнтів рангової кореляції є обґрунтованим, доцільним і надзвичайно цінним у ситуаціях, де кількісна оцінка є

неможливою або економічно недоцільною. Це розширює методологічний інструментарій прогнозування та сприяє формуванню більш гнучких і адаптивних аналітичних моделей.

Завдання 2. Для приведених варіантів завдань необхідно:

1) обчислити коефіцієнти рангової кореляції Спірмена і Кендала для даних показників;

2) перевірити статистичну значущість рангової кореляції за відповідними критеріями;

3) зробити висновки щодо тісноти зв'язку.

Варіанти завдання

Варіант 1

На основі дослідження об'єму виробництва (х) і прибутку підприємства (у) за 10 кварталів були одержані наступні дані (табл. 2.1).

Таблиця 2.1 – Вихідні дані

x	69.9	83.3	95.5	87.2	71.3	92.8	76.5	83.5	69.9	76.5
y	177	113.2	159.9	163.6	150.8	171.2	173.1	115.4	125.6	113.2

Варіант 2

Досліджується обсяг продажу (тис. грн) у двох магазинах побутової техніки за 10 днів. Результати обстеження характеризуються наступними даними (табл. 2.2).

Таблиця 2.2 – Вихідні дані

x	29	25	27	28	28	28	31	32	15	32
y	39	27	28	26	29	19	20	29	27	21

Варіант 3

На основі дослідження об'єму врожаю на сусідніх полях пшениці (х) і картоплі (у) за десять років були одержані наступні дані (табл. 2.3).

Таблиця 2.3 – Вихідні дані

x	26,3	19,9	16,7	23,2	31,4	33,5	28,2	35,3	29,3	30,5
y	7,4	6,1	6,0	7,3	9,4	9,2	8,8	10,4	8,0	9,7

Варіант 4

Досліджується обсяг продажу (тис. грн) у супермаркетах міста за 10 днів. Результати обстеження характеризуються наступними даними (табл. 2.4).

Таблиця 2.4 – Вихідні дані

x	121	256	204	136	302	166	233	169	204	247
y	342	258	369	124	264	245	283	241	155	174

Варіант 5

На основі дослідження двох магазинів однієї фірми зроблений звіт про число покупців, які були в магазинах протягом десяти днів і зробили покупки. Одержані наступні дані (табл. 2.5).

Таблиця 2.5 – Вихідні дані

x	99	64	101	85	79	88	97	95	90	100
y	83	102	125	85	91	96	94	89	90	75

Варіант 6

Досліджується обсяг продажу (тис. грн.) у супермаркетах міста за 10 днів. Результати обстеження характеризуються наступними даними (табл. 2.6).

Таблиця 2.6 – Вихідні дані

x	121	256	204	136	302	166	233	169	204	247
z	257	213	188	124	179	166	215	204	155	187

Варіант 7

На основі дослідження двох магазинів однієї фірми зроблений звіт про число покупців, які були в магазинах протягом десяти днів і зробили покупки. Одержані наступні дані (табл. 2.7).

Таблиця 2.7– Вихідні дані

y	83	102	125	85	91	96	94	89	90	75
z	89	64	56	105	79	87	90	87	101	89

Варіант 8

На основі дослідження, що відображають результати соціологічної анкети, 10 працівників банку (бальні оцінки якостей працівників) за успішністю кар'єри та моральним кліматом у колективі. Кожна оцінка представлена натуральним числом, 1 – привласнюється максимальній оцінці, *n* – мінімальній. Одержані наступні оцінки (табл. 2.8).

Таблиця 2.8– Вихідні дані

Якості	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Успішність кар'єри	2	2	5	3	4	6	1	7	7	1
Моральний клімат у колективі	5	7	2	3	1	2	4	2	3	6

Варіант 9

На основі дослідження, що відображають результати соціологічної анкети, 10 працівників банку (бальні оцінки якостей працівників) за успішністю кар'єри та рівнем лідерських якостей. Кожна оцінка представлена натуральним числом, 1 – привласнюється максимальній оцінці, *n* – мінімальній. Одержані наступні оцінки (табл. 2.9).

Таблиця 2.9– Вихідні дані

Якості	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Успішність кар'єри	2	2	5	3	4	6	1	7	7	1
Рівень лідерських якостей	1	1	3	2	3	5	3	6	5	2

Варіант 10

На основі дослідження, що відображають результати соціологічної анкети, 10 працівників банку (бальні оцінки якостей працівників) за рівнем лідерських якостей та моральним кліматом у колективі. Кожна оцінка представлена натуральним числом, 1 – привласнюється максимальній оцінці, *n* – мінімальній. Одержані наступні оцінки (табл. 2.10).

Таблиця 2.10– Вихідні дані

Якості	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Рівень лідерських якостей	1	1	3	2	3	5	3	6	5	2
Моральний клімат у колективі	5	7	2	3	1	2	4	2	3	6

Методичні рекомендації до виконання завдання 2

Умови завдання:

На основі дослідження об'єму виробництва (x) і прибутку підприємства (y) за десять кварталів були одержані наступні дані (табл. 2.11).

Таблиця 2.11– Вихідні дані

x	68.8	63.3	75.5	67.2	71.3	72.8	76.5	63.5	69.9	71.4
y	167	113.3	159.9	153.6	150.8	181.2	173.1	115.4	125.6	166.2

Необхідно:

Обчислити коефіцієнти рангової кореляції Спірмена і Кендала для даних показників. Перевірити значимість рангової кореляції при α=0,10.

Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена (r_S)

Нехай (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ – вибірка спостережень двох змінних X і Y, обмірюваних у порядковій або кількісній шкалах. Припустимо, що серед елементів вибірки x_i і y_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ немає співпадаючих елементів. Упорядкуємо елементи x_i по зростанню (тобто запишемо варіаційний ряд $(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$ і кожному x_i поставимо у відповідність ранг x_i' – номер елемента x_i у варіаційному ряді. Очевидно, найменший елемент вибірки $x^{(1)}$ буде мати ранг 1, а найбільший елемент $x^{(n)}$ – ранг n. Аналогічно визначимо ранги y_i' елементів y_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Кожній парі (x_i,y_i) відповідають пари рангів (x_i', y_i'). Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена обчислюється за формулою:

$$r_S = 1 - \frac{6\sum(x_i' - y_i')^2}{n(n^2-1)}. \qquad (2.1)$$

Отримане значення r_S називають вибірковим коефіцієнтом рангової кореляції Спірмена r_S.

Коефіцієнт r_S по модулю не перевищує одиницю: $| r_S | \leq 1$. Більші значення вибіркового коефіцієнта r_S показують, що між випадковими величинами X і Y є залежність (у цьому випадку говорять, що коефіцієнт рангової кореляції Спірмена r_S є значимим).

Знаючи вибіркове значення коефіцієнта рангової кореляції r_S, можна перевірити гіпотезу про незначимість r_S H_0: $r_S = 0$, спостерігаємі випадкові величини X і Y некорельовані. Для цього використовуються таблиці критичних значень r_S: r (α, n), де α – заданий рівень значимості, n – обсяг вибірки.

Якщо $|r_S| < r$ (α, n), то гіпотеза H_0: $r_S = 0$ приймається на рівні значимості 2α при альтернативній гіпотезі H_1: $r_S \neq 0$.

Якщо $r_S > 0$ і $r_S < r$ (α, n), то гіпотеза H_0: $r_S = 0$ приймається на рівні значимості α при альтернативній гіпотезі H_1: $r_S > 0$.

Визначимо ранги елементів даної вибірки. Попередньо перепишемо вихідну вибірку, упорядкувавши її елементи по верхньому рядку (x_i), і у результаті одержимо дані, наведені в табл. 2.12.

Таблиця 2.12 – Упорядкована вибірка

x	63.3	63.5	67.2	68.8	69.9	71.3	71.4	72.8	75.5	76.5
y	113.3	115.4	153.6	167	125.6	150.8	166.2	181.2	159.9	173.1

Визначимо ранги для значення (y_i). Варіаційний ряд має вид (табл. 2.13).

Таблиця 2.13 – Ранжовані дані

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y^{(i)}$	113.3	115.4	125.6	150.8	153.6	159.9	166.2	167	173.1	181.2

Таким чином, упорядкованій по елементах x_i вибірці відповідає наступна послідовність пар рангів та їх різниць (табл. 2.14).

Таблиця 2.14 – Ранги коефіцієнтів

x_i'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i'	1	2	5	8	3	4	7	10	6	9
$x_i' - y_i'$	0	0	-2	-4	2	2	0	-2	3	1

Вибіркове значення коефіцієнта рангової кореляції Спірмена r_S дорівнює: $r_S \approx 0{,}745$. Для даного прикладу $n = 10$, $\alpha = 0{,}10$. Щоб перевірити гіпотезу H_0: $r_S = 0$ при альтернативній гіпотезі H_1: $r_S \neq 0$, по таблиці знайдемо $r(0{,}05; 10) = 0{,}564$. Оскільки $r_S > 0{,}564$, то коефіцієнт рангової кореляції є значимим.

Коефіцієнт рангової кореляції Кендала (τ)

Коефіцієнт рангової кореляції τ Кендала обчислюється за формулою:

$$\tau = 1 - \frac{4k}{n(n-1)}, \qquad (2.2)$$

де k – число інверсій у ряді рангів другої змінної (y_i') (за умови, що ранги першої змінної (x_i') упорядковані).

Для даного прикладу маємо наступні послідовності рангів (табл. 2.15).

Таблиця 2.15 – Послідовності рангів

x_i'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i'	1	2	5	8	3	4	7	10	6	9

Знайдемо число інверсій (порушень порядку) у послідовності y_i' $(i = 1, 2, \ldots, 10)$.

Числа 1 і 2 інверсій не утворюють; число 5 утворює дві інверсії, оскільки стоїть перед числами 3 і 4; 8 – утворює чотири інверсії з числами 3, 4, 7 і 6; 7 – утворює одну інверсію; 10 – дві. Таким чином, число інверсій k = 9.

$$\tau = 1 - \frac{4 \times 9}{10(10-1)} = 0{,}6$$

Для перевірки значимості коефіцієнта рангової кореляції Кендала необхідно скористатися таблицею критичних значень τ (α, n).

Для двосторонньої альтернативи H_1: $\tau \neq 0$, критичне значення τ (0,05;10)=0,422. Так, вибіркове значення τ = 0,6, то на рівні значимості $\alpha=0,10$, гіпотезу H_0: $\tau = 0$ варто відхилити – рангова кореляція значима.

Для перевірки значимості τ при великих обсягах вибірки використовується така статистика:

$$Z = \sqrt{\frac{9n(n-1)}{2(2n+5}} \cdot \tau \qquad (2.3)$$

При великих значеннях n статистика Z має (приблизно) стандартний нормальний розподіл $N(0,1)$.

Для даного приклада вибіркове значення Z дорівнює:

$$z_в = \sqrt{\frac{9 \cdot 10 \cdot 9}{2(2 \cdot 10 + 5)}} \cdot 0,6 \approx 2,4149$$

Оскільки квантиль розподілу $N(0,1)$: $u_{0.95}$=1,645, що менше $Z_в$, то коефіцієнт рангової кореляції τ значимо відрізняється від нуля.

Рівень значимості p для коефіцієнта рангової кореляції Кендала τ обчислюється за допомогою статистики

$$p = P[|Z|>Z_в] \qquad (2.4)$$

У прикладі вибіркове значення статистики Z, $Z_в$≈2,4149, і, отже, обчислений рівень значимості p дорівнює:

$p=P[|Z|>2,4149] \approx 0,01574.$

Оскільки це значення перевищує заданий рівень значимості $\alpha=0,10$, то коефіцієнт рангової кореляції τ значимо відмінний від нуля. Як і коефіцієнт рангової кореляції Спірмена r_S, коефіцієнт τ по модулю не перевершує одиницю: $|\tau| \leq 1$. Значення ±1 ці коефіцієнти рангової кореляції приймають у ви-

падку, коли послідовності рангів x_i', y_i', $(i = 1, 2, ..., n)$ збігаються, або розташовані у взаємно зворотному порядку.

Якщо два або більш елементи варіаційного ряду збігаються, то цим елементам привласнюється той самий ранг, рівний середньому арифметичному їхніх номерів.

У випадку співпадаючих рангів для розрахунку рангових коефіцієнтів кореляції r_S і τ використовуються скоректовані формули. Вибіркове значення коефіцієнта рангової кореляції Спірмена r_S обчислюється за формулою:

$$r_S = \frac{\frac{1}{6}(n^3-n)-\sum(x_i'-y_i')^2-T_x-T_y}{\sqrt{\left[\frac{1}{6}(n^3-n)-2T_x\right]\left[\frac{1}{6}(n^3-n)-2T_y\right]}}, \quad (2.5)$$

де $T_x = \frac{1}{12}\sum_{t=1}^{m_x}\left[(n_t)^3 - n_t\right];$

$$T_y = \frac{1}{12}\sum_{l=1}^{m_y}\left[(n_l)^3 - n_l\right],$$

m_x – число груп співпадаючих рангів у послідовності рангів x_i';

n_t – число співпадаючих рангів у групі з номером t, $(t = 1, 2, ..., m_x)$;

m_y – число груп співпадаючих рангів у послідовності y_i';

n_l – число співпадаючих рангів у групі з номером l, $(l = 1, 2, ..., m_y)$.

Скоректована формула для обчислення коефіцієнта рангової кореляції Кендала має вид:

$$\tau' = \frac{\tau - \frac{2(U_x+U_y)}{n(n-1)}}{\sqrt{\left(1-\frac{2U_x}{n(n-1)}\right)\left(1-\frac{2U_y}{n(n-1)}\right)}}, \quad (2.6)$$

де τ – значення коефіцієнта рангової кореляції Кендала, обчислене без виправлення;

$$U_x = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{m_x} n_t(n_t - 1);$$

$$U_y = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m_y} `n_l(n_l - 1),$$

де значення n_t і n_l були визначені вище.

Приклад

Досліджується обсяг продажу (у тис. грн) у двох магазинах побутової техніки за 10 днів. Результати обстеження характеризуються наступними даними (табл. 2.16).

Таблиця 2.16 – Вихідні дані

x	19	15	17	18	17	18	21	21	15	13
y	19	17	17	17	17	19	20	19	15	14

Необхідно:

Визначити коефіцієнти рангової кореляції.

Рішення:

Визначимо ранги вихідної вибірки по елементах першого рядка (x_i) (табл. 2.17).

Таблиця 2.17 – Ранги вихідної вибірки

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	13	15	15	17	17	18	18	19	21	21
y	14	15	17	17	17	17	19	19	19	20

Другий рядок (y_i) також записаний у порядку зростання. Тому можна відразу записати послідовність пар рангів, привласнюючи повторюваним елементам рівні ранги за правилом середнього арифметичного (табл. 2.18).

Таблиця 2.18 – Послідовність пар рангів

x'	1	2.5	2.5	4.5	4.5	6.5	6.5	8	9.5	9.5
y'	1	2	4.5	4.5	4.5	4.5	8	8	8	10
x'-y'	0	0.5	-2	0	0	2	-1.5	0	1.5	-0.5

$$\sum(x' - y')^2 = 0.25 + 4 + 4 + 2.25 + 2.25 + 0.25 = 13, \qquad n = 10;$$

$$T_x = \frac{1}{12}\left[(2^3 - 2) + (2^3 - 2) + (2^3 - 2) + (2^3 - 2)\right] = \frac{24}{12} = 2;$$

$$T_y = \frac{1}{12}\left[(4^3 - 4) + (3^3 - 3)\right] = \frac{84}{12} = 7;$$

$$r_S = \frac{\frac{1}{6}(10^3 - 10) - 13 - 2 - 7}{\sqrt{\left[\frac{1}{6}(10^3 - 10) - 2 \times 2\right]\left[\frac{1}{6}(10^3 - 10) - 2 \times 7\right]}} \approx 0{,}917.$$

Далі обчислимо коефіцієнт τ. Оскільки в упорядкованій по x' послідовності пар у другому рядку (y') інверсій немає, то $k=0$, і коефіцієнт рангової кореляції Кендела дорівнює:

$$\tau = 1 - \frac{4k}{n(n-1)} = 1. \qquad (2.7)$$

Щоб визначити скоректоване значення τ', попередньо обчислимо:

$$U_x = \frac{1}{2}\left[2 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 1\right] = 4;$$

$$U_y = \frac{1}{2}\left[4 \times 3 + 3 \times 2\right] = 9.$$

Таким чином, τ' буде дорівнювати:

$$\tau' = \frac{1 - \frac{2(4+9)}{10 \times 9}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2 \times 4}{10 \times 9}\right)\left(1 - \frac{2 \times 9}{10 \times 9}\right)}} \approx 0{,}833.$$

Обидва коефіцієнти рангової кореляції r_S і τ є значущими на рівні значимості $\alpha=0{,}10$, тому що їх вибіркові значення перевищують критичні значення 0,564 і 0,422.

Практичне заняття 3

Мета практичного заняття: опанування особливостей двофакторного аналізу Фрідмана і розрахунку коефіцієнту конкордації Кендала.

У контексті зростаючої складності економічних систем, багатофакторності впливів та обмеженості доступних статистичних даних, значної актуальності набувають непараметричні методи прогнозування, зокрема двофакторний дисперсійний аналіз Фрідмана та коефіцієнт конкордації Кендала.

Двофакторний аналіз Фрідмана дозволяє виявити значущість впливу двох незалежних чинників на рангову змінну без вимог до нормальності розподілу чи рівності дисперсій. Це робить метод особливо цінним у прогнозуванні соціально-економічних процесів, де дані часто представлені в порядковій шкалі або зібрані за результатами експертного оцінювання. У галузях, де важко сформувати повноцінну вибірку або спостерігаються високі варіації — наприклад, в інвестиційному аналізі — цей метод дозволяє встановити стійкі залежності між факторами та сформувати прогнозні висновки щодо їхнього майбутнього впливу.

Коефіцієнт конкордації Кендала, у свою чергу, є важливим інструментом оцінки узгодженості групових експертних оцінок. У прогнозуванні економічних трендів, рівня ризику, споживчих уподобань або розвитку регіонів, коли прогноз ґрунтується на думці групи аналітиків чи експертів, саме коефіцієнт конкордації дозволяє встановити рівень погодженості між експертами, що є критичним для надійності прогнозів.

Використання цих методів у прогнозуванні:

- підвищує обґрунтованість управлінських рішень;
- сприяє формуванню якісних прогнозних моделей за умов недостатньої кількісної інформації;
- дозволяє враховувати суб’єктивні оцінки у формалізованому вигляді;
- підтримує прийняття рішень у багатофакторному середовищі з високою варіативністю.

Таким чином, двофакторний аналіз Фрідмана та коефіцієнт конкордації Кендала є цінними складовими методологічного інструментарію сучасної економіки, що забезпечують надійне прогнозування в умовах невизначеності та інформаційної асиметрії.

Завдання 3. Для приведених варіантів завдань необхідно:

1) розрахувати статистику Фрідмана F;

2) розрахувати коефіцієнт конкордації Кендала (W), його значущість за критерієм χ^2;

3) зробити висновки щодо оцінок експертів і їх погодженості.

Варіанти завдання

Варіант 1

Морозиво чотирьох видів було представлено п'яти експертам для визначення кращого з них. Бали (ранги), виставлені експертами, наведені в табл. 3.1. Найбільший бал відповідає найкращої якості.

Таблиця 3.1 – Вихідні дані

Експерти, k	Вид морозива, n			
	1	2	3	4
1	3	2	1	4
2	3	1	4	2
3	2	4	1	3
4	4	4	2	4
5	1	2	1	2

Варіант 2

Чотири марки пилососів було представлено п'яти експертам для визначення кращого з них. Бали (ранги), поставлені експертами, наведені в табл. 3.2. Найбільший бал відповідає найкращій якості.

Таблиця 3.2 – Вихідні дані

Експерти, k	Марки пилососів, n			
	1	2	3	4
1	1	1	2	4
2	2	3	1	4
3	3	2	1	1

4	2	1	2	3
5	1	2	4	3

Варіант 3

Чотири показники ефективності діяльності підприємства було представлено шести експертам для визначення найвагомішого з них. Бали (ранги), поставлені експертами, наведені в табл. 3.3. Найбільший бал відповідає найвагомішому показнику.

Таблиця 3.3 – Вихідні дані

Експерти, k	Показники, n			
	x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	2	2	3
2	2	1	1	3
3	1	2	3	4
4	2	1	3	3
5	2	2	3	1
6	1	2	2	1

Варіант 4

Три магазини побутової техніки було представлено семи експертам для визначення кращого з них по рівню обслуговування. Бали (ранги), поставлені експертами, приведені в табл. 3.4. Найбільший бал відповідає найкращій якості.

Таблиця 3.4 – Вихідні дані

Експерти, k	Магазини, n		
	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	2	1	3
4	1	3	2
5	2	1	3
6	3	1	2
7	1	2	3

Варіант 5

П’ять марок цифрових фотоапаратів було представлено семи експертам для визначення кращого з них. Бали (ранги), поставлені експертами, наведені в табл. 3.5. Найбільший бал відповідає найкращій якості.

Таблиця 3.5 – Вихідні дані

Експерти, k	Марки фотоапаратів, n				
	1	2	3	4	5
1	4	5	2	3	1
2	5	3	2	4	1
3	4	2	1	5	3
4	3	4	1	5	2
5	5	3	1	4	2
6	4	5	1	2	3
7	5	3	2	1	4

Варіант 6

Презентацію чотирьох видів рекламного ролику нової продукції було представлено п’яти експертам для визначення кращої. Бали (ранги), виставлені експертами, наведені в табл. 3.6. Найбільший бал відповідає найкращій якості.

Таблиця 3.6 – Вихідні дані

Експерти, k	Рекламний ролик, n			
	1	2	3	4
1	1	2	1	3
2	3	1	4	2
3	2	4	1	3
4	2	1	2	1
5	1	2	1	2

Варіант 7

Чотири різних марки чаю було представлено п’яти експертам для визначення кращого з них. Бали (ранги), поставлені експертами, приведені в табл. 3.7. Найбільший бал відповідає найкращій якості.

Таблиця 3.7 – Вихідні дані

Експерти, k	Марки чаю, n			
	1	2	3	4
1	3	1	2	1
2	2	3	1	1
3	3	2	1	1
4	2	1	2	1
5	4	2	1	2

Варіант 8

Чотири показники, які визначають ступінь впливу на продуктивність праці робітників, було представлено шести експертам для визначення найвагомішого з них. Бали (ранги), поставлені експертами, наведені в табл. 3.8. Найбільший бал відповідає найвагомішому показнику.

Таблиця 3.8 – Вихідні дані

Експерти, k	Показники, n			
	x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	2	2	3
2	2	1	1	3
3	1	2	1	3
4	2	1	2	3
5	2	2	1	1
6	1	1	2	1

Варіант 9

Чотири магазини побутової техніки було представлено семи експертам для визначення кращого з них по асортиментному наповненню. Бали (ранги), поставлені експертами, наведені в табл. 3.9. Найбільший бал відповідає найкращій якості.

Таблиця 3.9 – Вихідні дані

Експерти, k	Магазини, n			
	1	2	3	4
1	1	1	3	2
2	1	2	4	3
3	2	2	3	3
4	1	3	3	2
5	1	2	3	2
6	1	1	2	2
7	2	1	4	3

Варіант 10

П’ять марок пральних машин було представлено семи експертам для визначення кращої з них. Бали (ранги), поставлені експертами, наведені в табл. 3.10. Найбільший бал відповідає найкращій якості.

Таблиця 3.10 – Вихідні дані

Експерти, k	Марки фотоапаратів, n				
	1	2	3	4	5
1	4	5	2	3	1
2	5	3	2	4	1
3	4	2	1	3	2
4	3	4	1	5	2
5	4	3	1	4	2
6	4	5	1	2	3

Методичні рекомендації до виконання завдання 3

Умови завдання:

Розглянемо наступну задачу. Кіноплівка чотирьох видів *(n)* була представлена трьом експертам *(k)* для визначення кращої з них. Кожному експерту запропонували упорядкувати плівки за ступенем переваги. Бали (ранги), поставлені експертами, наведені в табл. 3.11. Найбільший бал відповідає плівці найкращої якості.

Таблиця 3.11 – Вихідні дані

Експерти, k	Вид плівки, n			
	1	2	3	4
1	2	1	3	4
2	2	1	4	3
3	2	1	4	3
$\sum$	6	3	11	10

Необхідно:

Потрібно визначити, чи розрізняються види плівок і чи погоджені оцінки експертів (Обчислити статистику Фрідмана F і коефіцієнт конкордації W). Якщо оцінки експертів не погоджені, тобто є незалежними, то їм, очевидно, не можна довіряти, тому що їхньої оцінки носять випадковий характер, на який не роблять впливу представлені плівки.

Рішення:

У даній задачі на результат оцінки якості плівки роблять вплив два фактори: вид плівки (спосіб виготовлення, обробки) та індивідуальні особливості експертів при оцінці плівок одного й того ж виду. У прикладі це приводить до трьох зв'язаних вибірок (рядкам) обсягу 4.

Цю задачу можна узагальнити.

Нехай таблиця результатів оцінки або спостережень *n* об'єктів складається з *k* рядків і *n* стовпців. У рядках записуються *k* ранжованих змінних, причому довжина ранжировок (обсяги вибірок) рівні *n*. Рядки таблиці можна розглядати як *k* зв'язаних вибірок обсягу *n*. Зв'язаність вибірок випливає з того, що суть вибірки – повторні спостереження на тих самих *n* об'єктах. Якщо об'єкти не розрізняються між собою, суми рангів по стовпцях також не будуть розрізнятися. Нульова гіпотеза H_0: між стовпцями немає розходження – перевіряється за допомогою статистики Фрідмана F.

Вибіркове значення статистики F, F_B обчислюється за формулою:

$$F_B = \frac{12}{kn(n+1)} \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{k} R_{ij} - \frac{1}{2} k(n+1) \right]^2 = \frac{12}{kn(n+1)} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} R_{ij} \right)^2 - 3k(n+1) \qquad (3.1)$$

де R_{ij} – ранг *j*-го об'єкта, що привласнюється *i*-м експертом.

Якщо гіпотеза H_0 правильна, то при $k \to \infty$ статистика F має розподіл x_i-квадрат з *(n-1)* ступенями волі. Гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значимості α, якщо $F_B > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$, де $\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ – квантиль розподілу $\chi^2(n-1)$ порядку $1-\alpha$.

Мірою згоди різних ранжировок *n* об'єктів є коефіцієнт конкордації (згоди) Кендала W:

$$W = \frac{F}{k(n-1)}. \tag{3.2}$$

Коефіцієнт конкордації W лежить у межах $0 \le W \le 1$. W=1, коли всі *k* ранжировок збігаються. Статистична значимість W перевіряється на основі того, що статистика *k(n-1)W* при $k \to \infty$ має (приблизно) розподіл x_i-квадрат з *(n-1)* ступенями волі. Якщо $n \le 7$, то для перевірки статистичної значимості W використовують таблиці критичних значень.

У випадку, коли в ранжировках (у рядках таблиці) є співпадаючі ранги, обчислюється скоректована статистика F':

$$F' = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{k} R_{ij} - \frac{1}{2}k(n+1)\right]^2}{\frac{1}{12}kn(n+1) - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} T_i} \tag{3.3}$$

де $T_i = \frac{1}{12}\sum_{t=1}^{m}\left[(n_t)^3 - n_t\right]$, *(i=1,2,...,k)*

m – число груп повторюваних рангів в *i-й* ранжировці

n_t – число співпадаючих рангів у групі з номером *t, (t=1,2,...,m)*

У цьому прикладі число ранжировок *k=3*, обсяг вибірки *n=4*. Суми рангів по стовпцях дорівнюють: 6, 3, 11, 10. Значення вибіркової статистики критерію F_B дорівнює:

$$F_B = \frac{12}{3\times 4\times(4+1)}(6^2+3^2+11^2+10^2) - 3\times 3(4+1) = 8,2$$

при $\alpha = 0,05$, $\chi^2_{0.95}(3) = 7,81$.

Отже, на рівні значимості $\alpha = 0,05$ гіпотеза H_0 відхиляються: робимо висновок, що види плівок, на основі думок експертів, різні.

Коефіцієнт конкордації дорівнює:

$$W = \frac{8,2}{3\times(4-1)} = \frac{8,2}{9} = 0,91.$$

Значення коефіцієнта W свідчить про погодженість оцінок експертів.

Практичне заняття 4

Мета практичного заняття: опанування особливостей прогнозування за методами двох крайніх, середніх групових точок та на основі темпів зростання.

У сучасних умовах високої динамічності економічного середовища, актуальною задачею для підприємств є оперативне й надійне прогнозування майбутніх значень соціально-економічних показників. З цією метою широко застосовуються прості детерміновані методи прогнозування, серед яких вагоме значення мають методи за двома крайніми точками, середніми значеннями, груповими оцінками, а також метод прогнозування на основі темпів зростання.

Метод двох крайніх точок забезпечує швидкий прогноз на основі мінімального обсягу даних. Він особливо актуальний для оперативних оцінок у ситуаціях, коли спостереження є обмеженими в часі або наявна лише інформація про початковий та останній періоди. Такий підхід доцільний у стратегічному плануванні та первинному аналізі тренду.

Метод середніх значень дозволяє усереднити вплив випадкових коливань і виявити узагальнену тенденцію розвитку явища. Він є ефективним у

короткостроковому прогнозуванні стабільних процесів — зокрема, виробничих, збутових чи фінансових показників.

Прогнозування за груповими точками дає змогу локалізувати вплив аномальних або нестандартних значень, розбиваючи часовий ряд на підінтервали. Це важливо для виявлення структурних змін у процесах і створення більш точних прогнозів, що враховують різні фази економічного циклу або сезонні коливання.

Метод темпів зростання є ключовим у визначенні динаміки розвитку економічних явищ, дозволяє розраховувати прогнозні показники з урахуванням сталого або змінного приросту. Він активно застосовується у макроекономічному аналізі, фінансовому прогнозуванні, демографії та інвестиційному плануванні.

Узагальнено, ці методи мають низку переваг:

- доступність у використанні та обчисленні;
- наочність результатів і зручність графічної інтерпретації;
- можливість застосування при обмеженій кількості статистичних даних;
- гнучкість у поєднанні з іншими методами для підвищення точності прогнозу.

Таким чином, застосування простих методів прогнозування на основі крайніх, середніх, групових точок та темпів зростання забезпечує ефективне підґрунтя для прийняття управлінських рішень у сферах економіки, бізнесу та публічного управління, особливо у випадках, коли важливе швидке отримання результату з мінімальними аналітичними ресурсами.

Завдання 4. На основі наведених даних динаміки зміни макроекономічних показників необхідно розрахувати прогнозні значення на три роки уперед, використовуючи:

1) лінійні тренди з оцінками параметрів за методом двох крайніх і середніх групових точок;

2) показники середнього темпу зростання та середнього абсолютного приросту;

3) оцінити якість моделей прогнозування за критерієм середньої абсолютної відсоткової помилки.

Варіанти завдання

Варіант 1

Таблиця 4.1 – Вихідні дані (млн грн)

Показник	ВВП	Показник	ВВП
1	471756	5	681851
2	548628	6	1178591
3	609400	7	1315148
4	765559	8	1517677

Варіант 2

Таблиця 4.2 – Вихідні дані (млн грн)

Показник	Обсяг промислової продукції	Показник	Обсяг промислової продукції
1	520943	5	757860
2	465460	6	834234
3	504449	7	1053035
4	659422	8	1128972

Варіант 3

Таблиця 4.3 – Вихідні дані (млн грн)

Показник	Виробництво товарів народного споживання	Показник	Виробництво товарів народного споживання
1	128225,0	5	47041,0
2	121767,0	6	172754,0
3	89595,0	7	230921,9
4	109812,0	8	266122,0

Варіант 4

Таблиця 4.4 – Вихідні ані (млн грн)

Показник	Роздрібний товарообіг	Показник	Роздрібний товарообіг
1	100131,0	5	48300,0
2	115592,0	6	176885,0
3	118245,0	7	238499,7
4	132056,0	8	292820,0

Варіант 5

Таблиця 4.5 – Вихідні дані (грн)

Показник	Середньомісячна заробітна плата	Показник	Середньомісячна заробітна плата
1	137,812	5	86,810
2	156,202	6	236,147
3	167,450	7	375,977
4	177,392	8	462,582

Варіант 6

Таблиця 4.6 – Вихідні дані (%)

Показник	Індекс реальної заробітної плати	Показник	Індекс реальної заробітної плати
1	99,067	5	40,580
2	100,025	6	85,808
3	98,966	7	101,442
4	100,675	8	101,242

Варіант 7

Таблиця 4.7 – Вихідні дані (млн $)

Показник	Експорт товарів і послуг	Показник	Експорт товарів і послуг
1	35407	5	46703
2	49597	6	51874
3	43760	7	55613
4	39499	8	68891

Варіант 8

Таблиця 4.8 – Вихідні дані (млн $)

Показник	Імпорт товарів і послуг	Показник	Імпорт товарів і послуг
1	37081	5	22584
2	53660	6	49918
3	47544	7	51580
4	37032	8	64461

Варіант 9

Таблиця 4.9 – Вихідні дані (%)

Показник	Індекс цін виробників промислової продукції	Показник	Індекс цін виробників промислової продукції
1	101,3420	5	101,5750
2	100,4080	6	83,4420
3	102,6167	7	100,4750
4	101,2250	8	100,8900

Варіант 10

Таблиця 4.10 – Вихідні дані (%)

Показник	Індекс цін споживчого ринку	Показник	Індекс цін споживчого ринку
1	102,867	5	93,475
2	100,808	6	67,175
3	101,550	7	83,330
4	101,483	8	100,660

Методичні рекомендації до виконання завдання 4

Умови завдання:

Побудувати прогнозну модель валового доходу підприємства. Часовий ряд, що характеризує динаміку зміни валового доходу підприємства за 1999 – 2006 рр., наведений у табл. 4.11.

Таблиця 4.11 – Динаміка валового доходу підприємства (тис. грн)

Роки	y_j
2017	6103,6
2018	5532,4
2019	4173,5
2020	6340,6
2021	7045,9
2022	8004,3
2023	12062,5
2024	15036,0

Необхідно:

На основі даних 2017 – 2024 рр. розрахувати прогнозні значення валового доходу підприємства на 2025 – 2027 рр., використовуючи:

1) лінійні тренди з оцінками параметрів за методом двох крайніх і середніх групових точок;

2) показники середнього темпу зростання та середнього абсолютного приросту;

3) оцінити якість моделей прогнозування за критерієм середньої абсолютної відсоткової помилки.

Рішення завдання:

Сутність методу прогнозування на основі прямої, проведеної через дві крайні точки полягає в наступному. З упорядкованої вибірки беруть дві крайні точки (x_1, y_1) і (x_n, y_n) і через них проводять пряму вигляду $y = a_0 + a_1 x$.

Оцінки параметрів обчислюються за формулами:

$$a_1 = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1} \tag{4.1}$$

$$a_0 = y_1 - a_1 x_1 \tag{4.2}$$

Отримані таким чином оцінки є незміщеними, але вони не будуть обґрунтовані і тим більш ефективними.

Розглянемо сутність методу прогнозування по прямій, проведеній по координатах двох середніх групових точок. Метод полягає в тому, що дану сукупність розбивають на дві або три приблизно рівні частини, а потім знаходять координати середніх точок для крайніх груп.

Нехай $(\bar{x}_I, \bar{y}_I)$, $(\bar{x}_{II}, \bar{y}_{II})$ – координати середніх точок для крайніх груп. Тоді оцінки лінійної моделі a_0, a_1 обчислюються за формулами:

$$a_1 = \frac{\bar{y}_{II} - \bar{y}_I}{\bar{x}_{II} - \bar{x}_I}$$

$$a_0 = \bar{y}_I - a_1 \bar{x}_I$$

Оцінки, отримані цим методом, є незміщеними і обґрунтованими, але неефективними.

Знайдемо оцінки параметрів моделі за методом двох крайніх точок:

$$a_1 = \frac{15036 - 6103,6}{7 - 0} = \frac{8932,4}{7} = 1276,0$$

$$a_0 = 6103,6 - 1276,06 \times 0 = 6103,6$$

Таким чином, отримана лінійна модель має вигляд:

$$\hat{y} = 6103,6 + 1276,06 \cdot x$$

де $\hat{y}$ – теоретичні значення досліджуваного показника

x – період часу

Отримана модель може бути використана для простого прогнозу. Наприклад, прогнозні значення валового доходу підприємства на 2025 – 2027 рр. дорівнюють:

$$\hat{y}_{2025} = 6103,6 + 1276,06 \times 8 = 16312,08 \text{ (тис. грн) (тис. грн)}$$
$$\hat{y}_{2026} = 6103,6 + 1276,06 \times 9 = 17588,14 \text{ (тис. грн)}$$
$$\hat{y}_{2027} = 6103,6 + 1276,06 \times 10 = 18864,2 \text{ (тис. грн)}$$

За методом двох середніх групових точок знайдемо оцінки параметрів моделі a_o і a_1, розбивши попередньо вибірку на дві частини: 1 група – дані з 2017 по 2020 рр., 2 група – дані з 2021 по 2024 рр. Розрахуємо середні значення у кожній групі:

$$\bar{x}_I = \frac{0 + 1 + 2 + 3}{4} = \frac{6}{4} = 1,5$$

$$\bar{y}_I = \frac{6103,6 + 5532,4 + 4173,5 + 6340,6}{4} = \frac{22150,1}{4} = 5537,525$$

$$\bar{x}_{II} = \frac{4 + 5 + 6 + 7}{4} = \frac{22}{4} = 5,5$$

$$\bar{y}_{II} = \frac{7045,9 + 8004,3 + 12062,5 + 15036}{4} = \frac{42148,7}{4} = 10537,18$$

Оцінки параметрів моделі дорівнюють:

$$a_1 = \frac{10537,18 - 5537,525}{5,5 - 1,5} = \frac{4999,65}{4} = 1249,9$$

$$a_0 = 5537,525 - 1249,9 \times 1,5 = 3662,7$$

Таким чином, модель має такий вигляд:

$$\hat{y} = 3662,7 + 1249,9 \cdot x$$

де $\hat{y}$ – теоретичні значення досліджуваного показника

x – період часу

Отримана модель може бути використана для простого прогнозу. Прогнозні значення валового доходу підприємства за отриманою лінійною моделлю на 2025 – 2027 рр. дорівнюють:

$\hat{y}_{2025} = 3662,7 + 1249,9 \times 8 = 13661;9$ (тис. грн);
$\hat{y}_{2026} = 3662,7 + 1249,9 \times 9 = 14911,8$ (тис. грн);
$\hat{y}_{2027} = 3662,7 + 1249,9 \times 10 = 16161,7$ (тис. грн).

Графік динаміки зміни валового доходу підприємства з прогнозними значеннями наведено на рис. 4.1.

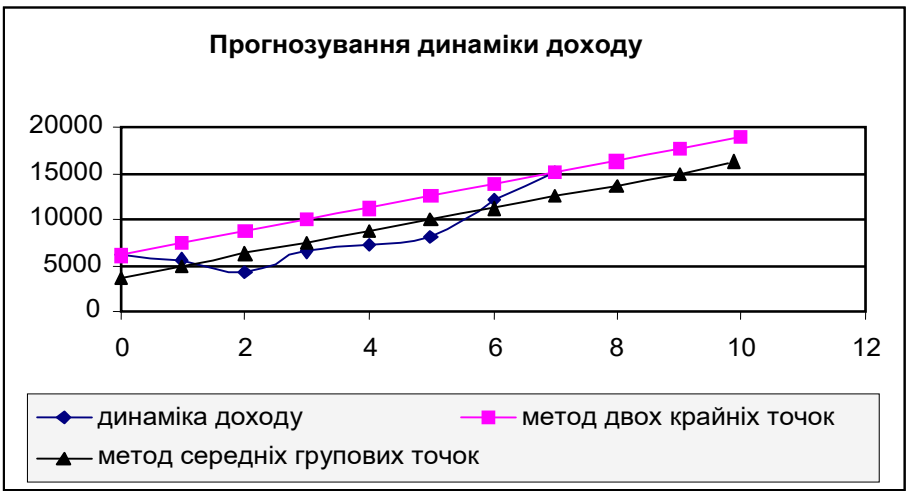

Рис. 4.1. Прогнозування динаміки доходу

Однак, як видно зі значень прогнозу, оцінки за методом двох крайніх точок є досить завищеними, а за методом середніх групових точок – заниженими. Для оцінки адекватності моделі використовується критерій середньої абсолютної процентної помилки (mean absolute percentage error, *m.a.p.e)*:

$$m.a.p.e. = \frac{1}{n} \times \sum_{t=1}^{n} \frac{\left| y_t - y_t \right|}{y_t} \times 100\,\% = \frac{1}{n} \times \sum_{t=1}^{n} \frac{|e_t|}{y_t} \times 100\,\% \qquad (4.3)$$

Так, для моделі двох крайніх точок він становить 46,65 %, а середніх групових точок – 26,79 %.

Подальший аналіз і прогнозування динаміки доходу підприємства проведемо, використовуючи показники середнього темпу зростання та середнього абсолютного приросту.

Середній темп зростання може бути виражено формулою:

$$\overline{\tau} = \sqrt[n-1]{\frac{Y_n}{Y_1}} \qquad (4.4)$$

Рівень ряду на період *t* визначається як рівень попереднього періоду, помножений на відповідний темп зростання:

$$Y_t = Y_{t-1} \cdot \tau^{t-1} \qquad (4.5)$$

де τ – темп зростання.

Метод екстраполяції на основі середнього темпу зростання полягає в наступному: якщо в основу прогностичного розрахунку покладено середній темп зростання, то значення рівня, що екстраполюється, одержують за наступною формулою:

$$Y_{i+L} = Y_i^* \times \bar{\tau}^L \tag{4.6}$$

де $\bar{\tau}$ – середній темп зростання;

Y_i^* – рівень, прийнятий за базу для екстраполяції;

L – період попередження.

Середній абсолютний приріст ($\bar{\Delta}Y$) є узагальнюючим показником швидкості зміни явища в часі. Даний показник дає можливість встановити, наскільки в середньому за одиницю часу повинен збільшуватися рівень ряду (в абсолютному вираженні), щоб, починаючи від початкового рівня, за дану кількість періодів часу, досягнути кінцевого рівня. Для його визначення використовується наступна формула:

$$\bar{\Delta}Y = \frac{Y_n - Y_1}{n-1} \tag{4.7}$$

Прогнозування на основі середнього абсолютного приросту проводиться наступним чином:

$$Y_{i+L} = Y_i^* + \bar{\Delta}Y \cdot L \tag{4.8}$$

де $\bar{\Delta}Y$ – середній абсолютний;

Y_i^* – рівень, прийнятий за базу для екстраполяції;

L – період попередження.

Розрахуємо показники середнього темпу зростання $\bar{\tau}$ і середнього абсолютного приросту $\bar{\Delta}Y$:

$$1)\ \overline{\tau} = \sqrt[n-1]{\frac{Y_n}{Y_1}} = \sqrt[8-1]{\frac{15036}{6103,6}} = \sqrt[7]{2,46} = 1,1375\ (113,75\%)$$

$$2)\ \overline{\Delta Y} = \frac{Y_n - Y_1}{n-1} = \frac{15036 - 6103,6}{8-1} = 1276,057\ \text{(тис. грн)}$$

Розрахуємо прогнозні значення валового доходу підприємства на 2025 – 2027 рр., використовуючи розраховані показники ряду динаміки. За базу екстраполяції візьмемо значення досліджуваного показника за останній рік: $Y^*_{i(8)} = 15036$.

Результати екстраполяції на основі середнього темпу зростання:

$$Y_{8+1(2025)} = 15036 \times 1,1375^1 = 17102,81 \text{ (тис. грн);}$$
$$Y_{8+2(2026)} = 15036 \cdot 1,1375^2 = 19453,72 \text{ (тис. грн);}$$
$$Y_{8+3(2027)} = 15036 \cdot 1,1375^3 = 22127,78 \text{ (тис. грн).}$$

Результати прогнозування на основі середнього абсолютного приросту:

$$Y_{8+1(2025)} = 15036 + 1276,057 \times 1 = 16312,06 \text{ (тис. грн);}$$
$$Y_{8+2(2026)} = 15036 + 1276,057 \times 2 = 17588,11 \text{ (тис. грн);}$$
$$Y_{8+3(2027)} = 15036 + 1276,057 \times 3 = 18864,17 \text{ (тис. грн).}$$

Графік динаміки зміни валового доходу підприємства з прогнозними значеннями за середнім темпом зростання та середнім абсолютним приростом наведено на рис. 4.2.

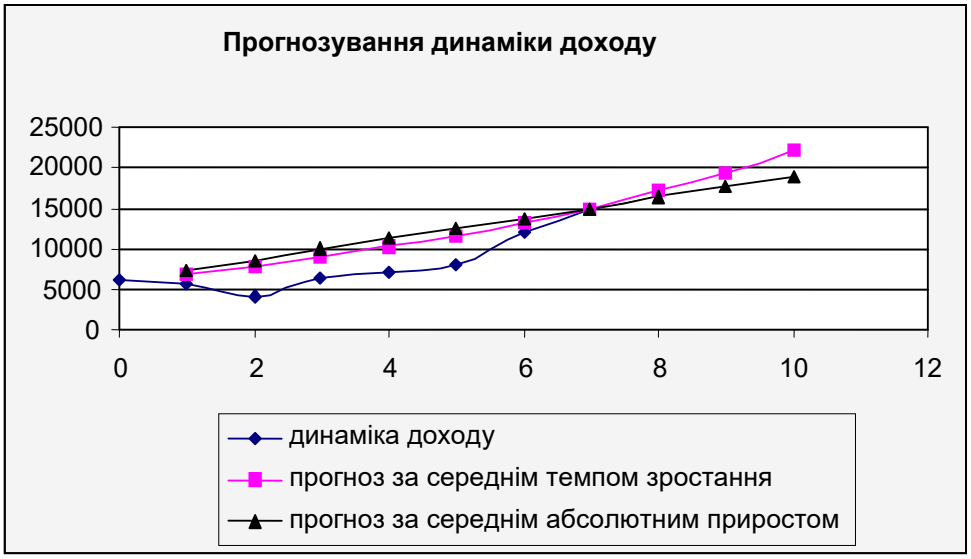

Рис. 4.2. Прогнозування динаміки доходу

Практичне заняття 5

Мета практичного заняття: опанування особливостей прогнозування на основі експоненційного згладжування та моделі Холта.

У сучасних умовах підвищеної турбулентності соціально-економічного середовища важливою складовою ефективного управління стає своєчасне та достовірне прогнозування показників розвитку підприємств і макроекономіки в цілому. У зв'язку з цим методи експоненційного згладжування, зокрема модель простого згладжування та модель Холта, набувають особливої актуальності.

Метод експоненційного згладжування базується на ідеї зменшення ваги давніших спостережень, що дає змогу адаптивно реагувати на зміну динаміки часового ряду. Такий підхід дозволяє:

- зменшити вплив випадкових коливань;
- зберегти трендові характеристики ряду;
- оперативно адаптуватися до незначних змін у структурі показника.

Він є оптимальним для короткострокового прогнозування, коли часовий ряд не має вираженої сезонності чи складної динаміки, але демонструє загальну тенденцію.

У свою чергу, модель Холта, як розширення методу експоненційного згладжування, дозволяє враховувати лінійний тренд, що робить її надзвичайно корисною у прогнозуванні зростаючих або спадних економічних процесів, таких як:

- прогноз обсягів продажу;
- прогноз виробництва;
- аналіз попиту на товари й послуги;
- фінансове планування.

Завдяки простоті реалізації, гнучкості в налаштуванні параметрів та здатності до адаптації до нових даних, ці моделі широко використовуються в економіці, бізнес-аналітиці, логістиці та операційному менеджменті.

Завдання 5. На основі наведених даних динаміки зміни показників, поданих у варіантах, необхідно:

1. Побудувати графік вихідних даних.

2. Провести експоненціальне згладжування при $\alpha = 0{,}9$. В якості початкового значення експонентної середньої взяти середнє арифметичне значення рівнів ряду.

3. Побудувати модель Холта при $\alpha_1 = 0{,}8, \quad \alpha_2 = 0{,}3$. В якості початкових значень коефіцієнтів моделі Холта взяти МНК – оцінки лінійного тренда.

4. Оцінити точність отриманих варіантів прогнозної моделі та обрати найкращий з них за критерієм середньої абсолютної процентної помилки.

5. Зробити прогноз курсу акцій підприємства на 5 днів.

Варіанти завдання

Варіант 1

Таблиця 5.1 – Вихідні дані (грн)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	10,8	11	10,82	10,5	10,35	10,35	10,15	9,77	9,57	9,32
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_t	9,59	9,32	10,5	9,85	9,85	9,85	9,85	9,90	9,85	9,85

Варіант 2

Таблиця 5.2 – Вихідні дані (грн)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	146,0	148,0	149,0	149,1	150,0	150,0	150,1	150,3	150,5	151,0
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_t	151,0	152,5	152,5	152,7	155,0	155,0	157,0	160,0	163,0	160,0

Варіант 3

Таблиця 5.3 – Вихідні дані (грн)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	2,00	2,02	2,05	2,02	2,00	1,85	1,87	1,85	1,90	1,90
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_t	1,85	1,81	1,78	1,75	1,75	1,71	1,71	1,71	1,70	1,66

Варіант 4

Таблиця 5.4 – Вихідні дані (грн)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,06	1,06	1,06	1,06	1,08
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_t	1,08	1,08	1,08	1,09	1,10	1,10	1,17	1,17	1,17	1,08

Варіант 5

Таблиця 5.5 – Вихідні дані (грн)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	120,00	120,00	120,00	119,70	119,00	118,40	118,00	118,00	118,00	118,00
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_t	114,00	112,00	100,00	97,00	98,00	97,00	101,00	99,00	98,50	97,01

Варіант 6

Таблиця 5.6 – Вихідні дані (грн)

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	6,01	5,98	5,98	5,98	5,60	4,55	4,55	4,20	3,90	4,20
T	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_t	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	3,60	2,60	2,61

Варіант 7

Таблиця 5.7 – Вихідні дані (грн)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	21,6	22	21,64	21	20,7	20,7	20,3	19,54	19,14	18,64
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_t	19,18	18,64	21	19,7	19,7	19,7	19,7	19,8	19,7	19,7

Варіант 8

Таблиця 5.8 – Вихідні дані (грн)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	4	4,04	4,1	4,04	4	3,7	3,74	3,7	3,8	3,8
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_t	3,7	3,62	3,56	3,5	3,5	3,42	3,42	3,42	3,4	3,32

Варіант 9

Таблиця 5.9 – Вихідні дані (грн)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,12	2,12	2,12	2,12	2,16
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_t	2,16	2,16	2,16	2,18	2,2	2,2	2,34	2,34	2,34	2,16

Варіант 10

Таблиця 5.10 – Вихідні дані (грн)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	60	60	60	59,85	59,5	59,2	59	59	59	59
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_t	57	56	50	48,5	49	48,5	50,5	49,5	49,25	48,505

Методичні рекомендації до виконання завдання 5

Умови завдання:

Побудувати прогнозну модель середньорічної чисельності промислово-виробничого персоналу, використовуючи адаптивні методи прогнозування. Часовий ряд, що характеризує зміни чисельності виробничо-промислового персоналу за 11 років, наведено в табл. 5.11.

Таблиця 5.11 – **Вихідні дані (тис. осіб)**

Рік	Чисельність	Рік	Чисельність

1	2288	7	1133
2	2145	8	1006
3	1845	9	888
4	1699	10	863
5	1600	11	849
6	1332		

Необхідно:

Побудувати графік вихідних даних.

Провести експоненціальне згладжування при $\alpha = 0{,}9$. В якості початкового значення експонентної середньої взяти середнє арифметичне значення рівнів ряду.

Побудувати модель Хольта при $\alpha_1 = 0{,}6, \alpha_2 = 0{,}5$. Як початкові значення коефіцієнтів моделі Хольта візьміть МНК-оцінки лінійного тренда.

Оцінити точність отриманих варіантів моделі і вибрати кращий з них за критерієм середньої абсолютної процентної помилки.

Зробити прогноз чисельності виробничо-промислового персоналу в легкій промисловості на один рік.

Рішення завдання:

Експоненціальне згладжування використовується з метою вирівнювання часових рядів. Сутність методу полягає в тому, що в процедурі пошуку згладженого рівня використовуються значення тільки попередніх рівнів ряду, що взяті з визначеною вагою, причому вага спостереження зменшується з віддаленням його від моменту часу, для якого визначається згладжене значення рівня ряду. Якщо для вихідного часового ряду $y_1, y_2, ..., y_n$ відповідні згладжені значення рівнів позначити як S_t, де $t = \overline{1,n}$, то експоненціальне згладжування проводиться за рекурентним співвідношенням:

$$S_t = \alpha \times Y_t + (1 - \alpha) \times S_{t-1} \qquad (5.1)$$

де α – параметр згладжування ($0 \le \alpha \le 1, \alpha - \text{const}$).

Величина $(1-\alpha)$ називається коефіцієнтом дисконтування.

При використанні методу експоненціального згладжування виникають дві проблеми:

1) вибір параметра α. Якщо необхідно збільшити внесок попереднього значення, то α обирають близьким до одиниці, якщо переслідується мета усунути вплив окремих попередніх значень часового ряду, то використовують досить малі значення параметра α;

2) вибір початкового значення S_0. Звичайно його приймають рівним або першому значенню часового ряду, або середній арифметичній кількох початкових рівнів ряду.

Експонентна середня частіше використовується для короткострокового прогнозування. Її перевагою є адаптація моделі до розвитку економічного процесу при різних значеннях α.

Розвитком моделей адаптивного згладжування є моделі, які поєднують у собі елементи експоненціального згладжування та дозволяють виділити впливи лінійних трендів. Однією з таких моделей є модель Хольта, яка має наступний вигляд:

$$\hat{y}_{t+L} = a_0(t) + a_1(t) \times L \qquad (5.2)$$

де $a_0(t)$ – параметр, що характеризує зміну середнього рівня процесу;

$a_1(t)$ – параметр, що визначає мінливість (приріст) процесу в одиницю часу.

У моделі Хольта коефіцієнт $a_0(t)$ є експонентна середня рівнів ряду, обчислена з урахуванням виправлення на попередній приріст $a_1(t-1)$:

$$a_0(t) = \alpha_1 y_t + (1-\alpha_1)a_0(t-1) + (1-\alpha_1)a_1(t-1) \qquad (5.3)$$

де $0 \le \alpha_1 \le 1$ – перший параметр згладжування.

Коефіцієнт $a_1(t)$ визначається як експонентна середня приростів параметру $a_0(t)$:

$$a_1(t) = \alpha_2(a_0(t) - a_0(t-1)) + (1-\alpha_2)\, a_1(t-1) \qquad (5.4)$$

де $0 \le \alpha_2 \le 1$ – другий параметр згладжування.

Критерієм для вибору різних процедур дослідження часового ряду є якість моделі прогнозування, яка може бути оцінена за критеріями мінімізації помилок.

Графік динаміки чисельності виробничо-промислового персоналу наведено на рис. 5.1.

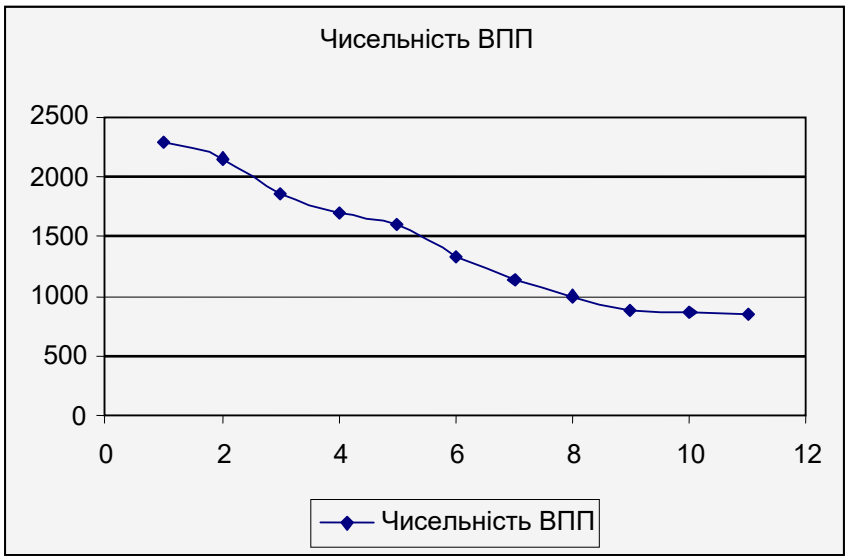

Рис. 5.1. Динаміка чисельності персоналу

Проведемо експоненціальне згладжування при $\alpha = 0{,}9$. В якості початкового значення експонентної середньої візьмемо середнє арифметичне значення рівнів ряду. Результати моделі згладжування, похибки та прогнозні значення наведені в табл. 3.12.

Таблиця 5.12 – Результати моделі згладжування

Рік	Чисельність	Результати зладжування, $\alpha = 0{,}9$	Похибки
1	2288,000	1422,545	865,455
2	2145,000	2201,455	-56,455
3	1845,000	2150,645	-305,645
4	1699,000	1875,565	-176,565
5	1600,000	1716,656	-116,656
6	1332,000	1611,666	-279,666
7	1133,000	1359,967	-226,967
8	1006,000	1155,697	-149,697
9	888,000	1020,970	-132,970
10	863,000	901,297	-38,297
11	849,000	866,830	-17,830
12		850,783	
13		850,783	

Графік моделі експоненційного згладжування наведено на рис. 5.2.

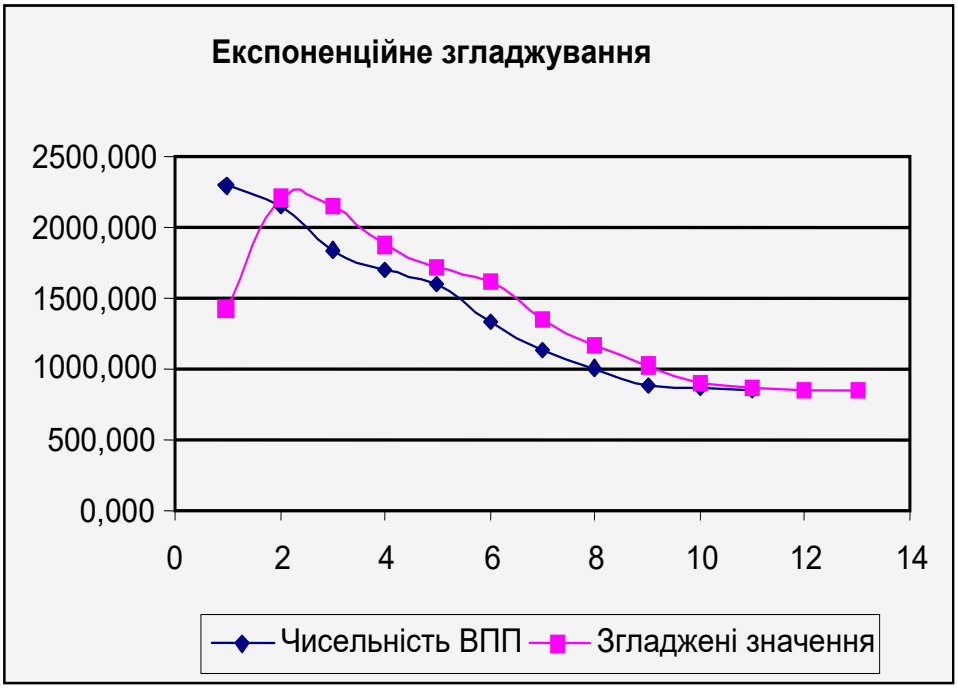

Рис. 5.2. Модель експоненційного згладжування

Побудуємо модель Хольта при $\alpha_1 = 0{,}6, \alpha_2 = 0{,}5$. Початковими значеннями коефіцієнтів моделі Хольта візьмемо МНК-оцінки лінійного тренда.

Знайдемо оцінки параметрів лінійної трендової моделі $y_t = a_0 + a_1 t + e_t$. Відповідно до МНК оцінки параметрів визначаються за формулою:

$$a_0 = \frac{\sum y_t \sum t^2 - \sum t \sum t y_t}{n \sum t^2 - (\sum t)^2} \tag{5.5}$$

$$a_1 = \frac{n \sum t y_t - \sum t \sum y_t}{n \sum t^2 - (\sum t)^2} \tag{5.6}$$

Розрахуємо

$$\sum y_t = 15\,648; \quad \sum t = 66; \quad \sum t y_t = 76\,841; \quad \sum t^2 = 506.$$

З урахуванням цього

$$a_0 = \frac{15648 \times 506 - 66 \times 76841}{11 \times 506 - 66^2} = 2352{,}3818$$

$$a_1 = \frac{11 \times 76841 - 66 \times 15648}{11 \times 506 - 66^2} = -154{,}97273$$

Знайдені значення використовуються як початкові значення коефіцієнтів моделі Хольта.

У табл. 5.13 наведені результати розрахунків при заданих наборах параметрів згладжування: $\alpha_1 = 0{,}6, \alpha_2 = 0{,}5$.

Таблиця 5.13 – Результати прогнозу за моделлю Хольта

T	y_t	$a_0(t)$	$a_1(t)$	Прогноз на крок уперед
1	2288	2251,764	-127,795	2197,41
2	2145	2136,587	-121,486	2123,97
3	1845	1913,041	-172,516	2015,10
4	1699	1715,61	-184,974	1740,52
5	1600	1572,254	-164,164	1530,64
6	1332	1362,436	-186,991	1408,09
7	1133	1149,978	-199,725	1175,44
8	1006	983,7012	-183,001	950,25
9	888	853,0802	-156,811	800,70
10	863	796,3077	-106,792	696,27
11	849	785,2064	-58,9465	689,52
12				726,33

Графік значень за моделлю Хольта наведено на рис. 5.3.

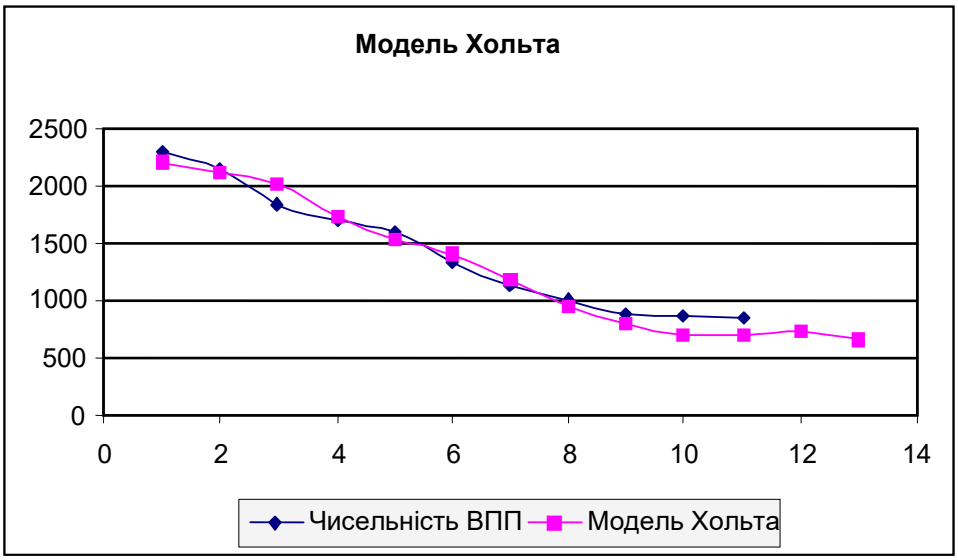

Рис. 5.3. Результати за моделлю Хольта

Для вибору кращого варіанта моделі використовується критерій середньої абсолютної процентної помилки (mean absolute percentage error, *m.a.p.e.)*:

$$m.a.p.e. = \frac{1}{n} \times \sum_{t=1}^{n} \frac{\left| y_t - \hat{y}_t \right|}{y_t} \times 100\ \% = \frac{1}{n} \times \sum_{t=1}^{n} \frac{\left| e_t \right|}{y_t} \times 100\ \% \qquad (5.7)$$

Чим менше значення цього показника, тим краще якість моделі, що підбирається, тобто теоретичні значення y_t ближче до реальних значень y_t. Вважається, що модель забезпечує досить високу точність прогнозу, якщо середня абсолютна процентна помилка (m.a.p.e.) не перевищує 10 %. Якщо (m.a.p.e.) знаходиться в межах від 10 % до 20 %, то можна говорити про задовільну точність прогнозу.

Порівняльний аналіз якості отриманих моделей наведений у табл. 5.14.

Таблиця 5.14 – Порівняльний аналізу варіантів прогнозу на основі *m.a.p.e.*

Похибка	Модель експоненційного згладжування $\alpha = 0{,}9$	Модель Хольта $\alpha_1 = 0{,}6, \alpha_2 = 0{,}5$
Середнє значення (*m.a.p.e)*	13,83 %	7,54%

Середня абсолютна процентна помилка для моделі експоненційного згладжування складає 13,83 %, для моделі Хольта дорівнює 7,54 %. Таким чином, більш високу точність прогнозу забезпечує модель Хольта.

МОДУЛЬ 2. МЕТОДИ СЕРЕДНЬОСТРОКОВОГО ТА ДОВГОСТРОКОВОГО ПРОГНОЗУВАННЯ

Практичне заняття 6

Мета практичного заняття: опанування особливостей побудови нелінійної моделі тренда.

У сучасних умовах динамічного розвитку економіки та високої варіативності зовнішнього середовища дедалі частіше спостерігаються складні, нерівномірні тенденції змін соціально-економічних показників, що не можуть бути адекватно описані за допомогою лінійних моделей. У таких випадках нелінійні моделі тренда стають ефективним інструментом дослідження та прогнозування, оскільки вони дають змогу враховувати нелінійний характер динаміки показників у часі.

Нелінійні моделі дають змогу:

- виявити ускладнені закономірності росту або спаду, зокрема в умовах прискореного економічного розвитку або рецесії;
- точніше адаптувати модель до емпіричних даних, що демонструють зміни з прискоренням, уповільненням або коливаннями;
- формувати прогнози з вищим рівнем точності, особливо при середньо- та довгостроковому плануванні;
- використовувати моделі у випадках, коли лінійні залежності не дають статистично значущих результатів.

Актуальність використання нелінійної моделі тренда також зумовлена можливістю її використання для прогнозування складних соціально-економічних процесів, таких як:

- зростання інфляції у нестабільній економіці;
- прогнозування інвестиційної активності;
- оцінка динаміки цін на ресурси;
- моделювання поведінки споживачів;
- аналіз демографічних змін тощо.

Таким чином, нелінійні моделі тренда є важливою складовою методичного арсеналу прогнозування, що дозволяє адаптуватися до реальних викли-

ків часу та забезпечити науково обґрунтовану основу для прийняття стратегічних рішень в економіці.

Завдання 6. На основі даних, що відбивають динаміку економічного процесу, необхідно:

1. Здійснити вибір кривих зростання, що найкраще описують тренд за допомогою методу характеристик.

2. Оцінити параметри нелінійної моделі тренда (провести процедуру лінеаризації моделі, визначити параметри лінеаризованої моделі за допомогою методу найменших квадратів і здійснити зворотний перехід до параметрів нелінійної моделі).

3. Розрахувати прогнозні значення показника на два періоди часу вперед.

Варіанти завдання наведено в табл. 6.1.

Таблиця 6.1 - Вихідні дані за варіантами

t (проміжкі часу)	y (t) – значення показника за варіантами									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,25	3	1,5	2,75	1,00	7,7	-0,5	1,2	2,5	1,7
2	0,90	6	2,0	3,31	0,60	4,5	-1,0	2,0	5,0	1,5
3	0,80	15	2,5	4,00	0,50	4,0	-1,2	2,3	8,0	1,3
4	0,70	30	2,7	5,75	0,45	3,5	-1,5	2,6	12,0	1,1
5	0,50	50	3,0	6,81	0,40	3,0	-2,0	2,8	15,0	0,9
6	0,25	150	3,5	8,00	0,35	3,0	-3,0	3,0	17,0	0,9
7	0,30	300	3,8	9,31	0,34	2,7	-4,0	3,2	20,0	0,8
8	0,22	750	4,0	10,75	0,33	2,5	-5,0	3,3	23,0	0,7
9	0,20	1600	4,2	12,31	0,32	2,7	-7,0	3,4	25,0	0,6
10	0,15	3500	4,5	15,00	0,30	2,5	-9,0	3,5	30,0	0,5

Методичні рекомендації до виконання завдання 6

Розглянемо типи функцій, які найбільш часто використовуються для моделювання економічних процесів:

1) Лінійна функція:

$$y_t = a_0 + a_1 t \tag{6.1}$$

2) Поліном m-го ступеня:

$$y_t = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m \tag{6.2}$$

3) Показникова функція:

$$y_t = a_0 a_1^{\,t} \tag{6.3}$$

4) Степенева (мультиплікативна) функція:

$$y_t = a_0 t^{a_1} \tag{6.4}$$

5) Модифікована експонента:

$$y_t = k + a_0 e^{a_1 t} \tag{6.5}$$

6) Зворотна залежність:

$$y_t = \frac{1}{a_0 + a_1 t} \tag{6.6}$$

7) Логістична крива:

$$y_t = \frac{k}{a_0 + a_1 a_2^{\,t}} \tag{6.7}$$

8) Крива Гомперця:

$$y = a_0 a_1^{\,a_2^t} \tag{6.8}$$

Для підбору виду функції, яка може розглядатися в якості моделі тренда часового ряду, слід використовувати *метод характеристик.* Цей метод ґрунтується на тому, що найбільш типові нелінійні функції можна розпізнати

за окремими розрахунковими характеристиками ряду вихідних даних. Якщо деяка характеристика для ряду вихідних даних постійна (наприклад, постійні прирости, або темпи зростання), то найбільш прийнятною для моделювання цього ряду буде відповідна їй функція. Лінійна функція, наприклад, має постійні перші прирости ($u_t^{(1)} = y_{t+1} - y_t = const$), експоненті відповідають постійні темпи зростання ($\tau_t = \frac{\bar{y}_{t+1}}{\bar{y}_t}$) та т. ін.

Алгоритм методу характеристик включає наступні кроки:

Крок 1. Вихідний ряд рівнів згладжується за допомогою ковзної середньої $\overline{y_t}$.

Крок 2. Для згладженого ряду розраховуються наступні характеристики:

- перші прирости:

$$u_t^{(1)} = \bar{y}_{t+1} - \bar{y}_t \tag{6.9}$$

- другі прирости (прирости приростів):

$$u_t^{(2)} = u_{t+1}^{(1)} - u_t^{(1)} \tag{6.10}$$

- треті прирости:

$$u_t^{(3)} = u_{t+1}^{(2)} - u_t^{(2)} \tag{6.11}$$

і т. ін.

Якщо будь-які з цих приростів постійні, то тренд можна описати за допомогою полінома відповідного ступеня.

- темпи зростання:

$$\tau_t = \frac{\bar{y}_{t+1}}{\bar{y}_t} \tag{6.12}$$

Якщо τ_t=const, то тренд ряду описується показниковою функцією.

- темпи зростання приростів:

$$v_t = \frac{u_{t+1}^{(1)}}{u_t^{(1)}} \tag{6.13}$$

Якщо v_t=const, то за криву зростання в моделі можна взяти модифіковану експоненту.

- зворотні значення рівнів $z_t = \frac{1}{y_t}$ й перші різниці для них:

$$w_t^{(1)} = z_{t+1} - z_t \tag{6.14}$$

Якщо $w_i^{(1)}$=const, то тренд можна представити зворотною функцією:

$$y_t = \frac{1}{a_0 + a_1 t} \tag{6.15}$$

- логарифми рівнів:

$$S_t = \ln \bar{y}_t \tag{6.16}$$

й перші різниці для них:

$$q_t^{(1)} = S_{t+1} - S_t \tag{6.17}$$

Якщо $q_t^{(1)}$ буде наближатися до нуля при зростанні t, можна розглянути у якості кривої степеневу (мультиплікативну) функцію.

- темпи зростання приростів логарифмів рівнів:

$$p_t = \frac{q_{t+1}^{(l)}}{q_t^{(l)}} \qquad (6.18)$$

Якщо величини p_t=const, то за криву зростання можна взяти функцію Гомперца.

- темпи зростання перших приростів зворотних величин:

$$\mu_t = \frac{w_{t+1}^{(l)}}{w_t^{(l)}} \qquad (6.19)$$

Якщо величини μ=const, то за криву зростання можна взяти логістичну криву.

Крок 3. Після розрахунку всіх характеристик оцінюємо за допомогою коефіцієнтів варіації однорідність кожного ряду характеристик. Найменші значення коефіцієнта варіації відповідають тим нелінійним функціям, які є найбільш імовірними для опису нелінійного тренда.

Розглянемо метод характеристик на прикладі.

Умови завдання:

Необхідно підібрати криву зростання для опису тренда за рядом спостережень величини прибутку виробничого об'єднання (табл. 6.2). Оцінити параметри нелінійної трендової моделі та розрахувати прогнозні значення прибутку виробничого об'єднання на два періоди вперед.

Таблиця 6.2 – Вихідні дані (млн грн)

№	Y	№	Y	№	Y	№	Y
1	4,01	5	5,93	9	8,29	13	8,61
2	4,34	6	6,64	10	8,49	14	9,24
3	5,12	7	7,30	11	8,29	15	9,27
4	5,52	8	7,94	12	8,50	16	9,58

Рішення завдання:

Спочатку за вихідним даними обчислимо ковзну середню з лагом m=5 за формулою:

$$\overline{y_t} = \frac{y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2}}{5} \qquad (6.20)$$

Результати розрахунків наведені в табл. 6.3.

Таблиця 6.3 – Вихідні дані часового ряду й розраховані характеристики

№	y_t	$\overline{y}_t$	$u_t^{(1)}$	$u_t^{(2)}$	$u_t^{(3)}$	τ_t	v_t	z_t	$w_t^{(1)}$	S_t	$q_t^{(1)}$	p_t	μ_t
1	4,01												
2	4,34												
3	5,12	4,984	0,526	0,066	-0,094	1,106	1,125	0,210	-0,029	1,606	0,100	1,017	0,586
4	5,52	5,510	0,592	-0,028	0,018	1,107	0,953	0,181	-0,017	1,707	0,102	0,866	0,824
5	5,93	6,102	0,564	-0,010	-0,032	1,092	0,982	0,164	-0,014	1,809	0,088	0,903	0,786
6	6,64	6,666	0,554	-0,042	-0,140	1,083	0,924	0,150	-0,011	1,897	0,080	0,858	0,909
7	7,30	7,220	0,512	-0,182	0,092	1,071	0,645	0,139	-0,01	1,977	0,069	0,610	0,500
8	7,94	7,732	0,330	-0,090	-0,016	1,043	0,727	0,129	-0,005	2,045	0,042	0,702	0,800
9	8,29	8,062	0,240	-0,106	0,162	1,030	0,558	0,124	-0,004	2,087	0,029	0,546	0,250
10	8,49	8,302	0,134	0,056	-0,090	1,016	1,418	0,120	-0,001	2,116	0,016	1,391	3,000
11	8,29	8,436	0,190	-0,034	0,136	1,023	0,821	0,119	-0,003	2,133	0,022	0,805	1,000
12	8,50	8,626	0,156	0,102		1,018	1,654	0,116	-0,003	2,155	0,018	0,615	0,667
13	8,61	8,782	0,258			1,029		0,113	-0,002	2,173	0,029		
14	9,24	9,040						0,111		2,202			
15	9,27												
16	9,58												
$\overline{V}$			0,493	-3,219	26,693	0,034	0,348		-0,943	0,098		0,361	0,813

Потім обчислимо всі вищеназвані характеристики ряду: $u_t^{(1)}$, $u_t^{(2)}$, $u_t^{(3)}$, τ_t, v_t, z_t, $w_t^{(1)}$, S_t, $q_t^{(1)}$, p_t, μ_t (табл. 6.3).

Оскільки ознакою наявності певного тренда є сталість значень відповідної йому характеристики, слід оцінити сталість за допомогою коефіцієнтів варіації. Коефіцієнт варіації розраховуються за формулою:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \qquad (6.21)$$

де σ – середньоквадратичне значення характеристики;

$\bar{x}$ – середньоарифметичне значення характеристики.

Розрахунок коефіцієнтів варіації для всіх характеристик наведено в останньому рядку табл. 6.3.

За результатами розрахунків за коефіцієнтом варіації можна зробити висновок, що такі характеристики, як τ_t, v_t, S_t, приблизно постійні, тобто тренд цього процесу можна описати такими нелінійними функціями:

- показниковою функцією:

$$y = a_0 a_1^{\,t} \tag{6.22}$$

- модіфікованою експоненційною функцією:

$$y_t = k + a_0 e^{a_1 t} \tag{6.23}$$

- степеневою (мультиплікативною) залежністю

$$y = a_0 t^{a_1} \tag{6.24}$$

Для вибору остаточного варіанта кривої зростання необхідно зробити розрахунки за обраними кривими і вибрати ту, яка приводить до мінімальних похибок.

Для оцінки параметрів нелінійних моделей використовується процедура лінеаризації, тобто нелінійні моделі приводять шляхом деяких перетворень до лінійного виду, та вже для модифікованих моделей використовується МНК. У табл. 6.4 наведені процедури лінеаризації для найбільш типових нелінійних моделей.

Таблиця 6.4 – Характеристики, види залежності та процедури лінеаризації

Характеристика	Вид залежності	Процедура лінеаризації
1	2	3

перші, другі, …, m-ті різниці: $u_t^{(1)} = \bar{y}_{t+1} - \bar{y}_t$; $u_t^{(2)} = u_{t+1}^{(1)} - u_t^{(1)}$; … $u_t^{(m)} = u_{t+1}^{(m)} - u_t^{(m)}$.	поліноми відповідно першого, другого, …, m-го ступеня: $y = a_0 + a_1 t \ + a_2 t^2 ... + a_n t^m$	заміна $x_1 = t$, $x_2 = t^2$, … , $x_n = t^n$ дозволить представити модель у виді: $y = a_0 + a_1 x_1 \ + a_2 x_2 ... + a_n x_n$
темпи зростання: $\tau_t = \frac{\bar{y}_{t+1}}{\bar{y}_t}$	показникова функція: $y = a_0 a_1^{\ t}$	логарифмування обох частин рівняння і заміна $y^* = \ln y$, $a_0^* = \ln a_0$, $a_1^* = \ln a_1$ дозволить представити модель у виді: $y^* = a_0^* + a_1 t$
перші різниці зворотних значень рівнів: $w_t^{(1)} = z_{t+1} - z_t$	зворотна функція: $y_t = \frac{1}{a_0 + a_1 t}$	заміна $z_t = \frac{1}{y_t}$ дозволить представити модель у виді: $z_t = a_0 + a_1 t$
перші прирости логарифмів рівнів: $q_t^{(1)} = S_{t+1} - S_t$	степенева (мультиплікативна) функція: $y = a_0 t^{a_1}$	логарифмування обох частин рівняння та заміна $y^* = \ln y$, $t^* = \ln t$, $a_0^* = \ln a_0$ дозволить представити модель у виді: $y^* = a_0^* + a_1 t^*$

Розглянемо процедуру лінеаризації для досліджуваного ряду вихідних даних. Оскільки найбільш сталою опинилася така характеристика ряду як τ_t (темп зростання), процедуру лінеаризації розглянемо саме на прикладі відповідної їй показникової функції:

$$y = a_0 a_1^{\ t} \tag{6.25}$$

Для лінеаризації застосовуємо процедуру логарифмування:

$$\ln y = \ln a_0 + t \ln a_1 \tag{6.26}$$

Робимо заміни:

$$y^* = \ln y, \ a_0^* = \ln a_0, \ a_1^* = \ln a_1$$

Отримаємо лінійну форму моделі:

$$y^* = a_0^* + a_1^* t \tag{6.27}$$

Оскільки перетворена залежність є лінійною, її параметри можуть бути знайдені за допомогою МНК:

$$\bar{a} = (X^T X)^{-1} \overline{YX} \qquad (6.28)$$

Послідовність розрахунку параметрів моделі $y^* = a_0 * + a_1 * t$ наведена на рис. 6.1.

I.

y*=lny
1,39
1,47
1,63
1,71
1,78
1,89
1,99
2,07
2,12
2,14
2,12
2,14
2,15
2,22
2,23
2,26

II. X

1	1
1	2
1	3
1	4
1	5
1	6
1	7
1	8
1	9
1	10
1	11
1	12
1	13
1	14
1	15
1	16

IV. $X^T X$

16	136
136	1496

V. $(X^T X)^{-1}$

0,28	-0,03
-0,03	0,00

VI. $\overline{YX}$

31,30
284,85

VII. $\bar{a}^*$

1,49
0,06

III. X^T

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Рис. 6.1. Процедура розрахунку параметрів моделі

Розрахунки проводяться в пакеті Excel за допомогою вбудованих функцій:

- МУМНОЖ(_,_) – функція добутку двох масивів;
- МОБР(_) – функція, що розраховує обернену матрицю;
- ТРАНСП(_) – функція, що надає транспоновану матрицю.

Виходячи з наведених на рис. 1 розрахунків, параметри моделі $y^* = a_0 * + a_1 t$ дорівнюють $a^*_0 = 1{,}49$, $a^*_1 = 0{,}06$. Тобто модифікована модель має вигляд: $y^* = 1{,}49 + 0{,}06t$. Далі виконується зворотний перехід до нелінійної форми моделі:

$$a_0^* = \ln a_0 \;\rightarrow\; a_0 = e^{a_0^*} = e^{1,49} = 4,44$$
$$a_1^* = \ln a_1 \;\rightarrow\; a_1 = e^{a_1^*} = e^{0,06} = 1,06$$

Таким чином, показникові модель тренда досліджуваного часового ряду має вигляд:

$$y = 4,44 \cdot 1,06^t .$$

Аналогічно здійснюється побудова усіх найбільш імовірних за методом характеристик моделей тренду. Остаточний вибір між ними слід ґрунтувати на критерію мінімуму похибок моделі. Середня абсолютна відносна помилка (*m.a.p.e.*) показникової моделі тренда складає 8,48 %. Прогнозні значення прибутку виробничого об'єднання дорівнюють:

$$y_{17} = 4,44 \cdot 1,06^{17} = 11,96$$
$$y_{18} = 4,44 \cdot 1,06^{18} = 12,67$$

Практичне заняття 7

Мета практичного заняття: опанування особливостей побудови тренд-сезонної моделі.

У сучасній економіці багато показників піддаються не лише довгостроковим змінам (трендам), а й регулярним коливанням у межах календарного року, що зумовлено сезонними чинниками. До таких показників належать обсяги продажів, виробництва, попиту на продукцію, витрати домогосподарств тощо. Ігнорування сезонних коливань призводить до спотворення прогнозу та прийняття неефективних управлінських рішень.

У зв'язку з цим побудова тренд-сезонної моделі набуває особливої актуальності, оскільки вона дає змогу:

- виокремити довгострокову тенденцію (тренд) розвитку економічного явища;
- врахувати періодичні сезонні коливання, що впливають на поведінку споживачів, обсяги виробництва або доходи;

- поліпшити точність коротко- та середньострокових прогнозів, що є критично важливим для планування в торгівлі, логістиці, сільському господарстві, туризмі, енергетиці тощо;
- розробити адаптивні стратегії реагування на сезонні ризики та коливання попиту.

Особливої ваги сезонно-трендові моделі набувають в умовах нестабільного ринку, коли управлінські рішення мають бути обґрунтовані точними прогнозами як загальної динаміки, так і циклічних змін. Моделі типу мультиплікативної або адитивної сезонної компоненти дозволяють деталізувати вплив сезонів на трендову складову та побудувати реалістичну прогнозну траєкторію.

Крім того, сучасні статистичні та програмні засоби (SPSS, Excel, R, Python тощо) забезпечують зручну побудову, перевірку та візуалізацію таких моделей, що сприяє їх широкому впровадженню як у бізнесі, так і в державному секторі.

Таким чином, тренд-сезонні моделі є невід'ємним елементом сучасного економічного прогнозування, що забезпечує комплексний підхід до аналізу динамічних рядів та формує аналітичну основу для стратегічного планування в умовах ринкової нестабільності.

Завдання 7. На основі наведених даних динаміки зміни обсягу продажів підприємства, поданих у варіантах, необхідно:

на підставі графічного аналізу провести дослідження компонентного складу часового ряду обсягу продажів;

розрахувати прогнозну оцінку обсягів продажів у першому півріччі наступного року.

Варіанти завдання

Варіант 1

Таблиця 7.1 – Вихідні дані

№ року	№ кварталу	t	Обсяг продажів	№ року	№ кварталу	t	Обсяг продажів	№ року	№ кварталу	t	Обсяг продажів
1	I	1	23,4	4	I	13	60,5	7	I	25	114

	II	2	33,7		II	14	85,5		II	26	177
	III	3	44,1		III	15	108		III	27	223
	IV	4	20,4		IV	16	50,8		IV	28	102
2	I	5	34,4	5	I	17	76	8	I	29	147
	II	6	44,2		II	18	116		II	30	218
	III	7	61,5		III	19	143		III	31	273
	IV	8	33,5		IV	20	65,8		IV	32	120
3	I	9	44,9	6	I	21	93,1	9	I	33	170
	II	10	64,4		II	22	147		II	34	264
	III	11	82,1		III	23	177		III	35	332
	IV	12	38,4		IV	24	84,6		IV	36	153

Варіант 2

Таблиця 7.2 – Вихідні дані

№ року	№ кварталу	t	Обсяг продажів	№ року	№ кварталу	t	Обсяг продажів	№ року	№ кварталу	t	Обсяг продажів
1	I	1	73,526	4	I	13	100,06	7	I	25	141,76
	II	2	114,67		II	14	152,32		II	26	217,69
	III	3	134,91		III	15	181,3		III	27	262,63
	IV	4	61,359		IV	16	80,128		IV	28	118,72
2	I	5	80,079	5	I	17	109,93	8	I	29	161,66
	II	6	123,19		II	18	171,01		II	30	250,64
	III	7	146,81		III	19	203,29		III	31	301,54
	IV	8	64,89		IV	20	89,795		IV	32	132,98
3	I	9	88,115	6	I	21	125,09	9	I	33	185,78
	II	10	136,37		II	22	193,76		II	34	283,73
	III	11	162,15		III	23	230,67		III	35	342,69
	IV	12	74,031		IV	24	103,22		IV	36	152,68

Варіант 3

Таблиця 7.3 – Вихідні дані

№ року	№ кварталу	t	Обсяг продажів	№ року	№ кварталу	t	Обсяг продажів	№ року	№ кварталу	t	Обсяг продажів
1	I	1	40,69	4	I	13	168,8	7	I	25	468
	II	2	68,76		II	14	279,6		II	26	754,8
	III	3	91,76		III	15	359,6		III	27	943
	IV	4	45,03		IV	16	171		IV	28	433,4
2	I	5	67,69	5	I	17	248,7	8	I	29	615,8
	II	6	115,9		II	18	405,3		II	30	983,2
	III	7	152,7		III	19	514,9		III	31	1221
	IV	8	73,84		IV	20	240,6		IV	32	556,9
3	I	9	110,4	6	I	21	347,9	9	I	33	787,5
	II	10	184,2		II	22	562		II	34	1253
	III	11	240,1		III	23	708,2		III	35	1548
	IV	12	114,2		IV	24	327,3		IV	36	702,5

Варіант 4

Таблиця 7.4 – Вихідні дані

№ року	№ кварталу	t	Обсяг продажів	№ року	№ кварталу	t	Обсяг продажів	№ року	№ кварталу	t	Обсяг продажів
1	I	1	101,5	4	I	13	348,3	7	I	25	433,1
	II	2	92,14		II	14	269,5		II	26	314,6
	III	3	89,74		III	15	229,1		III	27	252,7
	IV	4	79,43		IV	16	186,6		IV	28	189,2
2	I	5	191,5	5	I	17	404,8	8	I	29	395,2
	II	6	154,8		II	18	304,7		II	30	275,1
	III	7	144		III	19	254,5		III	31	217,1
	IV	8	119,3		IV	20	201		IV	32	157,5
3	I	9	275	6	I	21	434,3	9	I	33	307,5
	II	10	216,4		II	22	321,6		II	34	202,2
	III	11	189,5		III	23	264,4		III	35	148,5
	IV	12	155,2		IV	24	203,5		IV	36	99,44

Варіант 5

Таблиця 7.5 – Вихідні дані

№ року	№ кварталу	t	Обсяг продажів	№ року	№ кварталу	t	Обсяг продажів	№ року	№ кварталу	t	Обсяг продажів
1	I	1	30,42	4	I	13	78,65	7	I	25	148,2
	II	2	43,81		II	14	111,15		II	26	230,1
	III	3	57,33		III	15	140,4		III	27	289,9
	IV	4	26,52		IV	16	66,04		IV	28	132,6
2	I	5	44,72	5	I	17	98,8	8	I	29	191,1
	II	6	57,46		II	18	150,8		II	30	283,4
	III	7	79,95		III	19	185,9		III	31	354,9
	IV	8	43,55		IV	20	85,54		IV	32	156
3	I	9	58,37	6	I	21	121,03	9	I	33	221
	II	10	83,72		II	22	191,1		II	34	343,2
	III	11	106,73		III	23	230,1		III	35	431,6
	IV	12	49,92		IV	24	109,98		IV	36	198,9

Варіант 6

Таблиця 7.6 – Вихідні дані

№ року	№ квар-	t	Обсяг продажів	№ року	№ квар-	t	Обсяг продажів	№ року	№ квар-	t	Обсяг продажів

	талу				талу				алу		
1	I	1	88,23	4	I	13	120,07	7	I	25	170,11
	II	2	137,60		II	14	182,78		II	26	261,23
	III	3	161,89		III	15	217,56		III	27	315,16
	IV	4	73,63		IV	16	96,15		IV	28	142,46
2	I	5	96,09	5	I	17	131,92	8	I	29	193,99
	II	6	147,83		II	18	205,21		II	30	300,77
	III	7	176,17		III	19	243,95		III	31	361,85
	IV	8	77,87		IV	20	107,75		IV	32	159,58
3	I	9	105,74	6	I	21	150,11	9	I	33	222,94
	II	10	163,64		II	22	232,51		II	34	340,48
	III	11	194,58		III	23	276,80		III	35	411,23
	IV	12	88,84		IV	24	123,86		IV	36	183,22

Варіант 7

Таблиця 7.7 – Вихідні дані

№ року	№ квар-талу	t	Обсяг продажів	№ року	№ квар-талу	t	Обсяг продажів	№ року	№ квар-алу	t	Обсяг продажів
1	I	1	36,62	4	I	13	151,92	7	I	25	421,20
	II	2	61,88		II	14	251,64		II	26	679,32
	III	3	82,58		III	15	323,64		III	27	848,70
	IV	4	40,53		IV	16	153,90		IV	28	390,06
2	I	5	60,92	5	I	17	223,83	8	I	29	554,22
	II	6	104,31		II	18	364,77		II	30	884,88
	III	7	137,43		III	19	463,41		III	31	1098,9
	IV	8	66,46		IV	20	216,54		IV	32	501,21
3	I	9	99,36	6	I	21	313,11	9	I	33	708,75
	II	10	165,78		II	22	505,80		II	34	1127,7
	III	11	216,09		III	23	637,38		III	35	1393,2
	IV	12	102,78		IV	24	294,57		IV	36	632,25

Варіант 8

Таблиця 4.12 – Вихідні дані

№ року	№ квар-талу	t	Обсяг продажів	№ року	№ квар-талу	t	Обсяг продажів	№ року	№ квар-алу	t	Обсяг продажів

1	I	1	71,05	4	I	13	243,81	7	I	25	303,17
	II	2	64,50		II	14	188,65		II	26	220,22
	III	3	62,82		III	15	160,37		III	27	176,89
	IV	4	55,60		IV	16	130,62		IV	28	132,44
2	I	5	134,05	5	I	17	283,36	8	I	29	276,64
	II	6	108,36		II	18	213,29		II	30	192,57
	III	7	100,80		III	19	178,15		III	31	151,97
	IV	8	83,51		IV	20	140,70		IV	32	110,25
3	I	9	192,50	6	I	21	304,01	9	I	33	215,25
	II	10	151,48		II	22	225,12		II	34	141,54
	III	11	132,65		III	23	185,08		III	35	103,95
	IV	12	108,64		IV	24	142,45		IV	36	69,61

Варіант 9

Таблиця 4.13 – Вихідні дані

№ року	№ квар-талу	t	Обсяг продажів	№ року	№ квар-талу	t	Обсяг продажів	№ року	№ квар-алу	t	Обсяг продажів
1	I	1	121,80	4	I	13	417,96	7	I	25	519,72
	II	2	110,57		II	14	323,40		II	26	377,52
	III	3	107,69		III	15	274,92		III	27	303,24
	IV	4	95,32		IV	16	223,92		IV	28	227,04
2	I	5	229,80	5	I	17	485,76	8	I	29	474,24
	II	6	185,76		II	18	365,64		II	30	330,12
	III	7	172,80		III	19	305,40		III	31	260,52
	IV	8	143,16		IV	20	241,20		IV	32	189,00
3	I	9	330,00	6	I	21	521,16	9	I	33	369,00
	II	10	259,68		II	22	385,92		II	34	242,64
	III	11	227,40		III	23	317,28		III	35	178,20
	IV	12	186,24		IV	24	244,20		IV	36	119,33

Варіант 10

Таблиця 4.14 – Вихідні дані

№ року	№ квар-талу	t	Обсяг продажів	№ року	№ квар-талу	t	Обсяг продажів	№ року	№ квар-алу	t	Обсяг продажів
1	I	1	111,65	4	I	13	383,13	7	I	25	476,41
	II	2	101,35		II	14	296,45		II	26	346,06

	III	3	98,71		III	15	252,01		III	27	277,97
	IV	4	87,37		IV	16	205,26		IV	28	208,12
2	I	5	210,65	5	I	17	445,28	8	I	29	434,72
	II	6	170,28		II	18	335,17		II	30	302,61
	III	7	158,40		III	19	279,95		III	31	238,81
	IV	8	131,23		IV	20	221,10		IV	32	173,25
3	I	9	302,50	6	I	21	477,73	9	I	33	338,25
	II	10	238,04		II	22	353,76		II	34	222,42
	III	11	208,45		III	23	290,84		III	35	163,35
	IV	12	170,72		IV	24	223,85		IV	36	109,38

Методичні рекомендації до виконання завдання 7

Процедура побудови тренд-сезонної моделі включає наступні основні кроки:

Крок 1. Оцінювання сезонної складової з урахуванням характеру сезонності (адитивного або мультиплікативного).

Крок 2. Сезонне коректування вихідних даних.

Крок 3. Розрахунок параметрів тренду на підставі ряду, отриманого на другому шагу.

Крок 4. Моделювання динаміки ряду з урахуванням трендової та сезонної компонент.

Крок 5. Оцінка точності та адекватності отриманої моделі.

Крок 6. Використання побудованої моделі для прогнозування.

Розглянемо більш докладно наведений вище алгоритм на прикладі.

Умови завдання:

У табл. 4.15 наведені дані про обсяги продажів продукції фірми за останні чотири роки.

Необхідно:

На підставі графічного аналізу провести дослідження компонентного складу часового ряду обсягу продажів.

Розрахувати прогнозну оцінку обсягів продажів в першому півріччі наступного року.

Таблиця 4.15 – Вихідні дані

№ року	№ квар-талу	t	Обсяг продажів y_t, тис. шт.	№ року	№ квар-талу	t	Обсяг продажів y_t, тис. шт
1	2	3	4	5	6	7	8
1	I	1	100,80	2	I	5	102,96
	II	2	98,10		II	6	100,08
	III	3	99,36		III	7	101,16
	IV	4	106,74		IV	8	108,72
3	I	9	105,12	4	I	13	106,74
	II	10	102,42		II	14	104,76
	III	11	102,78		III	15	104,94
	IV	12	110,70		IV	16	112,68

Рішення завдання:

1. Графічний аналіз початкового часового ряду (рис. 4.2) свідчить про наявність трендової компоненти: є стійка, яскраво виражена тенденція зростання обсягів продажів протягом останніх чотирьох років. Рис. 4.2 показує, що характер тенденції близький до лінійного розвитку, також виразно видно сезонні коливання (період коливань дорівнює одному року). Спостерігається стійке збільшення обсягів продажів, що повторюється, в 4-му і в 1-му кварталах у порівнянні з 3-м і 2-м кварталами, причому найістотніші "сплески" в динаміці показника є чітко видимими в 4-му кварталі. У зв'язку з тим, що амплітуда коливань залишається приблизно постійною, незмінною з часом, то для опису і прогнозування динаміки часового ряду можна запропонувати адитивну модель.

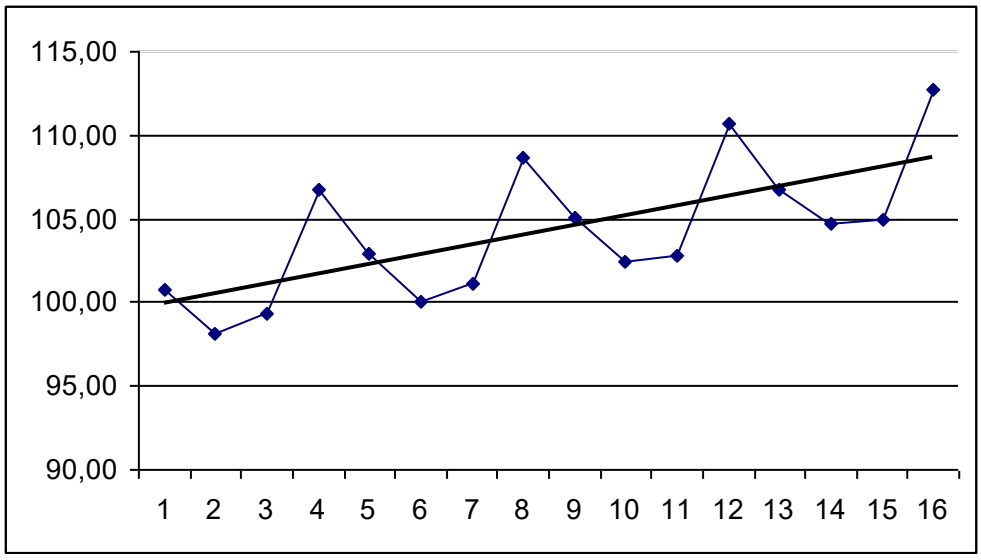

Рис. 4.2. Квартальна динаміка обсягів продажів товару

2. Далі проведемо вирівнювання та згладжування початкового часового ряду за допомогою простої ковзної середньої:

$$y_t' = \frac{\frac{1}{2}y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \frac{1}{2}y_{t+2}}{4} \qquad (7.1)$$

Результати розрахунків наведені в табл. 4.16. Віднімаючи з фактичних рівнів значення згладженого ряду, одержимо часовий ряд, рівні якого відбивають вплив випадкових факторів і сезонності (табл. 4.16).

Таблиця 4.16 – Згладжування часового ряду за допомогою ковзної середньої

№ року	№ кварталу	t	Обсяг продажів y_t, тис. шт.	Ковзна середня, y_t'	$x_t = y_t - y_t'$
1	I	1	100,80	-	-
	II	2	98,10	-	-
	III	3	99,36	101,52	-2,16
	IV	4	106,74	102,04	4,70
2	I	5	102,96	102,51	0,45
	II	6	100,08	102,98	-2,90
	III	7	101,16	103,50	-2,34
	IV	8	108,72	104,06	4,66
3	I	9	105,12	104,56	0,56

	II	10	102,42	105,01	-2,59
	III	11	102,78	105,46	-2,68
	IV	12	110,70	105,95	4,75
4	I	13	106,74	106,52	0,22
	II	14	104,76	107,03	-2,27
	III	15	104,94	-	-
	IV	16	112,68	-	-

Попередню оцінку сезонної компоненти одержимо усереднюванням рівнів часового ряду x_t для однойменних кварталів:

- значення сезонної складової для 1-го кварталу:

$$\bar{x}_1 = \frac{0,45 + 0,56 + 0,22}{3} = 0,413$$

- значення сезонної складової для 2-го кварталу:

$$\bar{x}_2 = \frac{-2,9 - 2,59 - 2,27}{3} = -2,588$$

- значення сезонної складової для 3-го кварталу:

$$\bar{x}_3 = \frac{-2,16 - 2,34 - 2,68}{3} = -2,393$$

- значення сезонної складової для 4-го кварталу:

$$\bar{x}_4 = \frac{4,7 + 4,66 + 4,75}{3} = 4,703$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{4} \bar{x}_i = 0,135$ (відмінна від нуля), то проведемо коректування значень сезонної складової. Знайдемо поправку, на яку необхідно змінити попередні оцінки сезонності:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bar{x}_i = \frac{0,413 - 2,588 - 2,393 + 4,703}{4} = 0,03375$$

Скоректовані оцінки сезонності наведені в табл. 4.17.

Таблиця 4.17 – Оцінювання сезонної компоненти в адитивній моделі

№ кварталу	i	Попередня оцінка сезонної компоненти $\bar{x}_i$	Скоректовані значення сезонної компоненти $S_i = \bar{x}_i - \bar{x}$
I	1	0,413	0,379
II	2	-2,588	-2,621
III	3	-2,393	-2,426
IV	4	4,703	4,669
$\sum$		0,135	0,000

У табл. 4.18 показані основні етапи процесу прогнозування по адитивній моделі. Спочатку з вихідного часового ряду вилучається сезонна складова, тобто здійснюється сезонне коректування обсягу продажів. Для опису тенденції скористаємося моделлю лінійного тренда, оскільки це узгоджується з результатами аналізу динаміки показника. Модель лінійного тренда має такий вигляд:

$$\hat{y}_t^1 = 99,977 + 0,5031 \times t$$

Розрахункові рівні, одержані підстановкою послідовних значень часу t = 1, 2, …, 16 в наведене вище рівняння, представлені в табл. 4.18.

Таблиця 4.18 – Прогнозування обсягу продажів за допомогою адитивної тренд-сезонної моделі

t	Обсяг продажів y_t, тис. шт.	Сезонна компонента, S_t	Сезонне коректування обсягу продажів $y_t^1 = y_t - S_t$	Розрахункові значення (лінійний тренд) $\hat{y}_t^1$	Розрахункові значення обсягу продажів $\hat{y}_t = \hat{y}_t^1 + S_t$
1	2	3	4	5	6
1	100,80	0,379	100,42	100,480	100,859
2	98,10	-2,621	100,72	100,983	98,362

3	99,36	-2,426	101,79	101,486	99,060
4	106,74	4,669	102,07	101,989	106,658
5	102,96	0,379	102,58	102,493	102,872
6	100,08	-2,621	102,70	102,996	100,375
7	101,16	-2,426	103,59	103,499	101,073
8	108,72	4,669	104,05	104,002	108,671
9	105,12	0,379	104,74	104,505	104,884
10	102,42	-2,621	105,04	105,008	102,387
11	102,78	-2,426	105,21	105,511	103,085
12	110,70	4,669	106,03	106,014	110,683
13	106,74	0,379	106,36	106,517	106,896
14	104,76	-2,621	107,38	107,020	104,399
15	104,94	-2,426	107,37	107,524	105,098
16	112,68	4,669	108,01	108,027	112,696
17		0,379		108,530	108,909
18		-2,621		109,033	106,412

На завершальному етапі визначимо розрахункові рівні обсягу продажів по адитивній моделі, підсумовуючи значення одержаних оцінок трендової і сезонної складової (табл. 4.18).

Для прогнозування обсягу продажів у першому півріччі наступного року оцінимо значення тренда при t=17 і t=18:

$$y_{17}^{1} = 99,977 + 0,5031 \times 17 = 108,53 \text{ тис. шт.}$$

$$y_{18}^{1} = 99,977 + 0,5031 \times 18 = 109,033 \text{ тис. шт.}$$

а потім додамо до набутих значень відповідні оцінки сезонної складової (для 1 і 2-го кварталів). Таким чином, очікуваний обсяг продажів у першому півріччі складатиме 215,35 тис. шт. Характеристики точності моделі представлені в табл. 4.19. Розраховані абсолютні і відносні помилки свідчать про високу точність моделі (максимальна відносна помилка за модулем не перевищує 0,3 %, середня відносна помилка по модулю склала 0,15 %).

Таблиця 4.19 – Характеристика точності адитивної тренд-сезонної моделі

t	Обсяг продажів y_t, тис. шт.	Розрахункові значення обсягу продажів, $\hat{y}_t$	Абсолютна похибка	Відносна похибка, %

1	100,80	100,859	-0,059	-0,059
2	98,10	98,362	-0,262	-0,267
3	99,36	99,060	0,300	0,302
4	106,74	106,658	0,082	0,077
5	102,96	102,872	0,088	0,085
6	100,08	100,375	-0,295	-0,295
7	101,16	101,073	0,087	0,086
8	108,72	108,671	0,049	0,045
9	105,12	104,884	0,236	0,225
10	102,42	102,387	0,033	0,032
11	102,78	103,085	-0,305	-0,297
12	110,70	110,683	0,017	0,015
13	106,74	106,896	-0,156	-0,146
14	104,76	104,399	0,361	0,345
15	104,94	105,098	-0,158	-0,151
16	112,68	112,696	-0,016	-0,014

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна література

1. Олійник Я. Б. *Методи прогнозування соціально-економічних процесів* : навч. посіб. / Я. Б. Олійник. – Київ : Центр учбової літератури, 2020. – 312 с.
2. Савлук М. І., Єпіфанова І. Ю. *Економічне прогнозування* : навч. посіб. / М. І. Савлук, І. Ю. Єпіфанова. – Київ : КНЕУ, 2021. – 276 с.
3. Шевчук В. Я. *Економічне прогнозування* : навч. посіб. / В. Я. Шевчук. – Львів : Магнолія 2006, 2022. – 248 с.
4. Мельник Л. Г. *Соціально-економічне прогнозування* : навч. посіб. / Л. Г. Мельник. – Суми : Університетська книга, 2021. – 284 с.
5. Грицаєнко М. І., Кізіма Т. О. *Методи прогнозування та планування в економіці* : навч. посіб. / М. І. Грицаєнко, Т. О. Кізіма. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2020. – 225 с.

Додаткова література

6. 6. Makridakis S., Wheelwright S. C., Hyndman R. J. *Forecasting: Methods and Applications* / S. Makridakis, S. C. Wheelwright, R. J. Hyndman. – 4th ed. – Hoboken : Wiley, 2019. – 576 p.
7. Armstrong J. S. *Principles of Forecasting: A Handbook for Researchers and Practitioners* / J. S. Armstrong. – Springer, 2020. – 849 p.
8. Pindyck R. S., Rubinfeld D. L. *Microeconomics* / R. S. Pindyck, D. L. Rubinfeld. – 9th ed. – Harlow : Pearson Education, 2018. – 768 p.
9. Гусєв В. В. *Моделювання і прогнозування економічних процесів* : навч. посіб. / В. В. Гусєв. – Одеса : ОНЕУ, 2020. – 198 с.
10. Гойчук В. В., Коваль О. О. *Основи прогнозування економічних явищ* : навч. посіб. / В. В. Гойчук, О. О. Коваль. – Тернопіль : Економічна думка, 2022. – 214 с.
11. OECD Economic Outlook. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.oecd.org/economic-outlook/
12. Eurostat Statistics Database. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://ec.europa.eu/eurostat
13. World Bank Open Data. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://data.worldbank.org/

ЗМІСТ

Вступ……4
Практичне заняття 1…….....6
Практичне заняття 2…….....12
Практичне заняття 3……..……..….....23
Практичне заняття 4.…….....32
Практичне заняття 5……..……....43
Практичне заняття 6……..…….....…….53
Практичне заняття 7…….....64
Список рекомендованої літератури…….....78

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять

з дисципліни «Методи прогнозування»

для здобувачів спеціальності 076 «Підприємництво та торгівля»

першого (бакалаврського) рівня вищої освіти усіх форм навчання

Укладачі: СЕРГІЄНКО Олена Андріанівна

МАЩЕНКО Роман Васильович

САВЧЕНКО Роман Олегович

Відповідальний за випуск проф. Мащенко М. А.

Роботу до видання рекомендувала доц. Лінькова О. Ю

В авторській редакції

План 2025 р., поз. 128

Підп. до друку Гарнітура Times New Roman.

Видавничий центр НТУ «ХПІ»,

вул. Кирпичова, 2, м. Харків, 61002

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

Електронна версія