


$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

---

# Подвійні інтеграли

Методичні вказівки до виконання  
індивідуального завдання

---

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

## **МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

до виконання індивідуального завдання  
з навчальної дисципліни «Вища математика»  
з теми: «Подвійні інтеграли»  
для студентів денної форми навчання  
за спеціальностями ННІ ЕЕЕ

Затверджено  
редакційно-видавничою  
радою університету,  
протокол № 1 від 13.02.2025 р.

Харків  
НТУ «ХПІ»  
2025

Методичні вказівки до виконання індивідуального завдання з навчальної дисципліни «Вища математика» з теми: «Подвійні інтеграли» для студентів денної форми навчання за спеціальностями ННІ ЕЕЕ / уклад.: Г.Я. Тулученко, Т. А. Немченко. Харків: НТУ «ХПІ», 2025. 40 с.

Укладачі: Г. Я. Тулученко, Т. А. Немченко

Рецензент: Ю. І. Першина

Кафедра вищої математики

## З М І С Т

ВСТУП .....	4
Тематика та зміст індивідуального завдання .....	5
Короткі теоретичні відомості .....	5
Варіанти індивідуального завдання .....	6
Методика виконання ІДЗ .....	36
Порядок оформлення ІДЗ .....	36
Захист ІДЗ .....	37
Перелік контрольних питань .....	37
Шкала оцінювання виконання і захисту ІДЗ .....	38
Література .....	39
ДОДАТОК А .....	40

## ВСТУП

Індивідуальне завдання (ІДЗ) є невід'ємною складовою навчального процесу, що спрямована на розвиток у студентів глибоких теоретичних знань, практичних умінь та навичок самостійної науково-дослідницької роботи. Воно передбачає самостійне опрацювання студентом певної теми з курсу вищої математики, поглиблене дослідження окремих питань та застосування отриманих знань для розв'язання конкретних задач.

**Мета індивідуального завдання** полягає в:

- систематизації та узагальненні теоретичного матеріалу;
- розвитку аналітичного мислення та творчих здібностей;
- формуванні навичок самостійної роботи з навчальною та науковою літературою;
- закріпленні знань через практичне застосування;
- підготовці до використання математичного апарату при розв'язанні інженерних задач.

**Структура та зміст індивідуального завдання** визначаються викладачем з урахуванням специфіки навчальної дисципліни, рівня підготовки студентів та їхніх індивідуальних особливостей. Завдання може включати теоретичний огляд літератури, розв'язання задач підвищеної складності, проведення невеликих досліджень або моделювання математичних процесів.

**Виконання індивідуального завдання** передбачає:

- ретельне вивчення теоретичного матеріалу;
- складання детального плану роботи;
- пошук необхідної інформації в навчальній або науковій літературі та інших джерелах;
- проведення аналізу отриманих даних;
- оформлення роботи відповідно до вимог.

**Виконання індивідуального завдання** здійснюється студентом самостійно під керівництвом викладача, який надає методичну допомогу, консультує та контролює хід роботи.

**Переваги індивідуального завдання:**

- стимулювання активної пізнавальної діяльності студентів;
- розвиток навичок самоорганізації та самоконтролю;
- підвищення мотивації до навчання;
- підготовка студентів до майбутньої професійної діяльності.

## Тематика та зміст індивідуального завдання

**Тематика ІДЗ:** застосування методів інтегрального числення функцій двох змінних.

**Зміст завдання:** змінити порядок інтегрування, обчислити задані подвійні інтеграли в декартовій або полярній системах координат.

### Короткі теоретичні відомості

Теоретичні відомості, які є основою для виконання ІДЗ, стосуються методів інтегрального числення функцій двох змінних та викладені в літературних джерелах, наведених у відповідному списку до цих методичних вказівок:

- [1] – Стор. 72-88;
- [2] – Стор. 123-129;
- [3] – Стор. 5-25, 38-74;
- [4] – Стор. 4-52.

## Варіанти індивідуального завдання

№	ВАРІАНТ 1
<b>1</b>	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x, y) dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x, y) dy.$
<b>2</b>	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (54x^2 y^2 + 150x^4 y^4) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = x^3, \\ y = -\sqrt{x}. \end{cases}$
<b>3</b>	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D y^2 \cos \frac{xy}{2} dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 0, \\ y = \sqrt{2\pi}, \\ y = 2x. \end{cases}$
<b>4</b>	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 4}, \quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ y \geq 0, \\ y \leq \sqrt{3}x. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 2
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (12x^2 y^2 + 16x^3 y^3) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = x^2, \\ y = -\sqrt{x}. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D 3y \sin xy \, dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, & x = 3, \\ y = \frac{\pi}{2}, & y = 3\pi. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \frac{dx dy}{\cos^2(x^2 + y^2)}, \quad D: \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{3}, \\ y \geq 0, \\ y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 3
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^{\pi/4} dy \int_0^{\sin y} f(x, y) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int_0^{\cos y} f(x, y) dx..$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (9x^2 y^2 + 48x^3 y^3) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = \sqrt{x}, \\ y = -x^2. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D y \cos 2xy dx dy, \quad D: \begin{cases} x = \frac{1}{2}, & x = 2, \\ y = \frac{\pi}{2}, & y = \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 - 25)}, \quad D: \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16, \\ y \geq x, \\ x \geq 0. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 4
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^0 f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^0 f(x, y) dy.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (18x^2 y^2 + 32x^3 y^3) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = x^3, \\ y = -\sqrt[3]{x}. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 0, \\ y = \sqrt{\pi}, \\ y = \frac{x}{2}. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy, \quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ y \geq x, \\ y \geq -x. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 5
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x, y) dx.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (27x^2 y^2 + 48x^3 y^3) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = x^2, \\ y = -\sqrt[3]{x}. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D y^2 \cos xy dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 0, \\ y = \sqrt{\pi}, \\ y = 2x. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \quad D: \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \\ y \geq -x, \\ y \leq \sqrt{3}x. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 6
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f(x, y) dx.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (18x^2 y^2 + 32x^3 y^3) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = \sqrt[3]{x}, \\ y = -x^2. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D ye^{xy/2} dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 2, & x = 4, \\ y = \ln 2, & y = \ln 3. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy, \quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{3}, \\ y \geq 0, \\ y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 7
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^1 dy \int_{-y}^0 f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x, y) dx.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (18x^2 y^2 + 32x^3 y^3) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = x^3, \\ y = -\sqrt{x}. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 0, \\ y = \sqrt{\pi}, \\ y = x. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + 9)}, \quad D: \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \\ y \geq -\sqrt{3}x, \\ y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 8
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (27x^2 y^2 + 48x^3 y^3) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = \sqrt{x}, \\ y = -x^3. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D 6ye^{xy/3} dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 3, & x = 6, \\ y = \ln 2, & y = \ln 3. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \frac{dx dy}{\sin^2(x^2 + y^2)}, \quad D: \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{4}, \\ y \geq -x, \\ y \leq x. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 9
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f(x, y) dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dy.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (4xy + 3x^2 y^2) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = x^2, \\ y = -\sqrt{x}. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D y \sin 2xy dx dy, \quad D: \begin{cases} x = \frac{1}{2}, & x = 2, \\ y = \frac{\pi}{2}, & y = \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2 + 9}}, \quad D: \begin{cases} 16 \leq x^2 + y^2 \leq 40, \\ y \leq \sqrt{3}x, \\ y \geq x. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 10
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^0 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^0 f(x, y) dx.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (12xy + 9x^2 y^2) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = \sqrt{x}, \\ y = -x^2. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D y^2 e^{-xy/2} dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \\ y = \frac{x}{2}. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy, \quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{3}, \\ y \geq -x, \\ y \leq 0. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 11
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x, y) dx.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (8xy + 9x^2 y^2) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = \sqrt[3]{x}, \\ y = -x^3. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D y \cos xy dx dy, \quad D: \begin{cases} x = \frac{1}{2}, & x = 1, \\ y = \pi, & y = 3\pi. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D 2^{x^2+y^2} dx dy, \quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ y \leq 0, \\ y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 12
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (24xy + 18x^2 y^2) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = x^3, \\ y = -\sqrt[3]{x}. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D 3y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 0, \\ y = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}, \\ y = \frac{2}{3}x. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 9}, \quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9, \\ y \leq x, \\ x \geq 0. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 13
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} f(x, y) dy.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (12xy + 27x^2y^2) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = x^2, \\ y = -\sqrt[3]{x}. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D 8ye^{4xy} dx dy, \quad D: \begin{cases} x = \frac{1}{4}, & x = \frac{1}{2}, \\ y = \ln 3, & y = \ln 4. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \frac{dx dy}{\cos^2(x^2 + y^2)}, \quad D: \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{3}, \\ y \leq \sqrt{3}x, \\ x \geq 0. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 14
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_y^0 f(x, y) dx.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (8xy + 18x^2 y^2) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = \sqrt[3]{x}, \\ y = -x^2. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D y^2 \cos 2xy dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 0, \\ y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\ y = \frac{x}{2}. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 - 16)}, \quad D: \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \\ y \geq -x, \\ y \leq x. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 15
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \left( \frac{4}{5} xy + \frac{9}{11} x^2 y^2 \right) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = x^3, \\ y = -\sqrt{x}. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D y \sin xy \, dx dy, \quad D: \begin{cases} x = \frac{1}{2}, & x = 1, \\ y = \pi, & y = 2\pi. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy, \quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2, \\ y \leq \sqrt{3}x, \\ y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 16
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \left( \frac{4}{5} xy + 9x^2 y^2 \right) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = \sqrt{x}, \\ y = -x^3. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D 2y \cos 2xy \, dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, & x = 2, \\ y = \frac{\pi}{4}, & y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{16 - x^2 - y^2}}, \quad D: \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \\ x \geq 0, \\ y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 17
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^0 f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^0 f(x, y) dy.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (24xy - 48x^3y^3) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = x^2, \\ y = -\sqrt{x}. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D y^2 e^{-xy/2} dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 0, \\ y = \sqrt{2}, \\ y = x. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy, \quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}, \\ y \geq -x, \\ y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 18
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (6xy + 24x^3 y^3) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = \sqrt{x}, \\ y = -x^2. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D y^2 \sin 2xy dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 0, \\ y = \sqrt{2\pi}, \\ y = 2x. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + 25)}, \quad D: \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 25, \\ y \geq x, \\ y \leq \sqrt{3}x. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 19
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (4xy + 16x^3 y^3) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = \sqrt[3]{x}, \\ y = -x^3. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D ye^{xy/4} dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 4, & x = 8, \\ y = \ln 2, & y = \ln 3. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \frac{dx dy}{\sin^2(x^2 + y^2)}, \quad D: \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{3}, \\ y \geq -\sqrt{3}x, \\ y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 20
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (4xy + 16x^3 y^3) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = x^3, \\ y = -\sqrt[3]{x}. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D y^2 \cos xy dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 0, \\ y = \sqrt{\pi}, \\ y = x. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2 + 5}}, \quad D: \begin{cases} 15 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{144}{5}, \\ y \geq -\sqrt{3}x, \\ y \geq 0. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 21
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f(x, y) dx.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (44xy + 16x^3 y^3) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = x^2, \\ y = -\sqrt[3]{x}. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D y^2 e^{-xy/8} dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 0, \\ y = 2, \\ y = \frac{x}{2}. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy, \quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{6}, \\ y \leq \sqrt{3}x, \\ y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 22
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x, y) dx.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (4xy + 176x^3 y^3) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = \sqrt[3]{x}, \\ y = -x^3. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D 12y \sin 2xy dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 2, & x = 3, \\ y = \frac{\pi}{4}, & y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D 3^{x^2+y^2} dx dy, \quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ y \geq -\sqrt{3}x, \\ y \geq 0. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 23
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (xy - 4x^3 y^3) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = x^3, \\ y = -\sqrt{x}. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D y \cos 2xy dx dy, \quad D: \begin{cases} x = \frac{1}{2}, & x = 1, \\ y = \frac{\pi}{2}, & y = \pi. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 25}, \quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25, \\ y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, \\ y \leq x. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 24
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (4xy + 176x^3 y^3) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = y = \sqrt{x}, \\ y = -x^3. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D 4ye^{2xy} dx dy, \quad D: \begin{cases} x = \frac{1}{2}, & x = 1, \\ y = \ln 3, & y = \ln 4. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \frac{dx dy}{\cos^2(x^2 + y^2)}, \quad D: \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{3}, \\ y \leq \sqrt{3}x, \\ y \geq -\sqrt{3}x. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 25
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_x^0 f(x, y) dy.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \left( 6x^2 y^2 + \frac{25}{3} x^4 y^4 \right) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = x^2, \\ y = -\sqrt{x}. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D 4y^2 \sin xy \, dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 0, \\ y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\ y = x. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 - 36)}, \quad D: \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16, \\ y \leq x, \\ y \geq -\sqrt{3}x. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 26
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^{1/\sqrt{2}} dy \int_0^{\arcsin y} f(x, y) dx + \int_{1/\sqrt{2}}^1 dy \int_0^{\arccos y} f(x, y) dx.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (9x^2 y^2 + 25x^4 y^4) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = \sqrt{x}, \\ y = -x^2. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D y^2 \cos \frac{xy}{2} dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 0, \\ y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\ y = \frac{x}{2}. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy, \quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ y \leq \sqrt{3}x, \\ y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 27
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y}} f(x, y) dx.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \left( 3x^2 y^2 + \frac{50}{3} x^4 y^4 \right) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = \sqrt[3]{x}, \\ y = -x^3. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D y \sin xy \, dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, & x = 2, \\ y = \frac{\pi}{2}, & y = \pi. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{25 - x^2 - y^2}}, \quad D: \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16, \\ y \geq x, \\ x \geq 0. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 28
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x, y) dx.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (54x^2 y^2 + 150x^4 y^4) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = x^2, \\ y = -\sqrt[3]{x}. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D y^2 e^{-xy/4} dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 0, \\ y = 2, \\ y = x. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy, \quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}, \\ y \leq 0, \\ y \geq -\sqrt{3}x. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 29
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (xy - 9x^5 y^5) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = \sqrt[3]{x}, \\ y = -x^2. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D y \cos xy \, dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, & x = 2, \\ y = \frac{\pi}{2}, & y = \pi. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + 16)}, \quad D: \begin{cases} 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16, \\ y \geq -x, \\ y \leq x. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

№	ВАРІАНТ 30
1	<p>Змінити порядок інтегрування:</p> $\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f(x, y) dy.$
2	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D (9x^2 y^2 + 25x^4 y^4) dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 1, \\ y = x^3, \\ y = -\sqrt[3]{x}. \end{cases}$
3	<p>Обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D y^2 e^{-xy/8} dx dy, \quad D: \begin{cases} x = 0, \\ y = 4, \\ y = 2x. \end{cases}$
4	<p>Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл:</p> $\iint_D \frac{dx dy}{\sin^2(x^2 + y^2)}, \quad D: \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}, \\ y \leq x, \\ y \leq \sqrt{3}x. \end{cases}$

\* В усіх завданнях зробити креслення області інтегрування.

## Методика виконання ІДЗ

1. Номер варіанту ІДЗ призначається викладачем.
2. Студент систематизує свої знання з вказаної теми за допомогою літературних джерел, вказаних в даних методичних рекомендаціях, або із залученням інших літературних джерел.
3. Студент розв'язує задачі свого варіанту.
4. У разі виникнення питань при виконанні ІДЗ студент консультується з викладачем.
5. Студент оформлює виконання ІДЗ в рукописному або друкованому форматі та надає його викладачу для попереднього ознайомлення.
6. Передача звіту з виконання ІДЗ здійснюється особисто при проведенні навчання в очному форматі або звіт надсилається викладачу на корпоративну пошту в разі дистанційного формату навчання.
7. Після попереднього перегляду звіту з виконання ІДЗ викладачем студент вносить до нього за потреби корективи.
8. Після підготовки остаточного тексту звіту з виконання ІДЗ узгоджується час проведення захисту ІДЗ і здійснюється сам захист.

## Порядок оформлення ІДЗ

1. Виконання ІДЗ може здійснюватися як у рукописному, так і в друкованому форматі. У разі використання рукописного формату ІДЗ виконується в окремому зошиті. У разі використання друкованого формату використовуються листи паперу формату А4, які брошуруються.
2. Рекомендовані параметри оформлення ІДЗ у друкованому форматі:  
шрифт – Times New Roman;  
розмір шрифту – 14 кегель;  
інтервал між рядками – 1,5;  
абзац – 12,5 мм,  
поля: верхнє і нижнє – 20 мм, лівє – 25 мм, правє – 15 мм;  
нумерація сторінок – по центру нижнього поля;  
налаштування параметрів редактора формул – за замовчуванням.
3. Зразок оформлення титульної сторінки наведено у додатку А.
4. У разі здійснення дистанційної або змішаної форми навчання файл з виконаним ІДЗ надсилається викладачу на корпоративну пошту одним файлом у форматі doc, docx, pdf, djvu. При рукописному виконанні ІДЗ всі сторінки фотографуються (скануються) і об'єднуються в один файл з логічним слідуванням сторінок.
5. Побудова графіків може здійснюватися як ручним способом, так і з використанням спеціалізованих застосунків. Графічна ілюстрація

плоских областей інтегрування є обов'язковою. Зображення графіків поверхонь заохочується і їх наявність буде врахована при виставленні підсумкової оцінки за ІДЗ.

### Захист ІДЗ

1. Захист ІДЗ здійснюється в формі співбесіди викладача і студента після попереднього ознайомлення викладача зі змістом виконаного ІДЗ.
2. У разі потреби після попереднього ознайомлення викладача зі змістом виконаного ІДЗ студент вносить до його тексту необхідні корективи.
3. Захист ІДЗ проводиться в час, відведений для консультацій з дисципліни за попередньо складеним графіком.
4. При проведенні захисту викладач дотримується переліку контрольних питань, наведеного в даних методичних вказівках.
5. Оцінка за ІДЗ виставляється по завершенню захисту, але не пізніше заключного заняття з навчальної дисципліни в поточному семестрі.
6. У разі виникнення спірних питань в оцінюванні результатів ІДЗ до остаточного оцінювання можуть бути залучені інші викладачі кафедри.
7. Оцінка за ІДЗ є обов'язковою складовою підсумкової оцінки за семестр з навчальної дисципліни.

### Перелік контрольних питань

1. Як формується інтегральна сума для функції  $f(x, y)$  по області  $D$ ?
2. Дайте означення подвійного інтеграла від функції  $f(x, y)$  по плоскій області  $D$ .
3. Перерахуйте властивості подвійних інтегралів.
4. Наведіть приклади геометричного та фізичного характеру, які приводять до поняття подвійного інтеграла.
5. Як обчислюються подвійні інтеграли в декартових координатах?
6. Запишіть формулу обчислення площі плоскої фігури за допомогою подвійного інтеграла в декартовій системі координат.
7. В яких випадках доцільно переходити до полярної системи координат при обчисленні подвійного інтеграла?
8. Запишіть формулу якобіана переходу від декартової до полярної системи координат.
9. Опишіть загальний алгоритм обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах.
10. Запишіть формулу обчислення площі плоскої фігури за допомогою подвійного інтеграла в полярній системі координат.

### Шкала оцінювання виконання і захисту індивідуального завдання

Критерії	Кількість балів	% від max оцінки
Студент правильно виконав ІДЗ та надав повні відповіді на запитання при його захисті	9-10	90-100
Студент правильно виконав ІДЗ, але не надав повних відповідей на поставлені запитання	8-7	69-89
ІДЗ виконане з незначними помилками та/або студент надає помилкові відповіді при його захисті	6-5	49-68
ІДЗ виконане частково, можлива наявність помилок, студент не володіє поданим матеріалом у повному обсязі	4-3	25-48
ІДЗ виконане з грубими помилками та/або студент не орієнтується в матеріалі, викладеному в ІДЗ, при його захисті	0-2	0-24
Максимально можлива оцінка	10	100

## ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посібник : у 2 т. Т. 2 : Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння та ряди / Л. В. Курпа [та ін.] ; Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». – Харків : НТУ «ХПІ», 2009. 432 с. URI: <https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/4623>
2. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики : у 2 ч. Ч. 2 / Н. О. Чікіна [та ін.] ; ред. Н. О. Чікіна ; Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». – Харків : Підручник НТУ «ХПІ», 2013. 216 с. URI: <https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/17448>
3. Подвійний та потрійний інтеграли : навч. посібник / Ю. І. Першина [та ін.] ; Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». Харків : Друкарня Мадрид, 2022. 106 с. URI: <https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/58325>
4. Полянська Т. С. Кратні інтеграли : навч.-метод. посібник / Т. С. Полянська, О. С. Чорна ; Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». – Харків : Панов А. М., 2021. 76 с. URI: <https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/53285>

## ДОДАТОК А

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

### З В І Т

з виконання індивідуального завдання  
з навчальної дисципліни «Вища математика»  
з теми: «Подвійні інтеграли»

Виконав: студент групи (шифр групи) ПШБ  
Перевірив: ПШБ викладача

Харків

НТУ «ХПІ»

2025