

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**Ю.І. Першина, О.П. Пріщенко,
Н.В Черемська, Т.Т. Черногор**

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ТА ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛИ

Навчально-методичний посібник
з курсу вищої математики

для студентів та викладачів усіх спеціальностей

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 28.01.2022

Харків
НТУ «ХПІ»
2022

УДК 517.3(075)
Н 40

Рецензенти:

О. П. Нечуйвітер, д-р фіз.-мат. наук, проф. УІПА
Н. О. Чікіна, канд. техн. наук, проф. НТУ «ХПІ»

Невизначений та визначений інтеграли : навч.-метод. посіб. /
Н 40 Першина Ю.І., Пріщенко О.П., Черемська Н.В., Черногор Т.Т. –
Харків : Видавництво «Друкарня Мадрид», 2022. – 188 с.
ISBN 978-617-7988-89-1

Навчально-методичний посібник складається з двох частин «Невизначений інтеграл» та «Визначений інтеграл», до складу яких входять необхідний теоретичний матеріал, детальний розбір типових задач, а також приклади для аудиторної та самостійної роботи, до яких додаються відповіді, крім того, містить завдання для контрольної роботи.

Призначено для студентів та викладачів усіх спеціальностей.

Лл. 49. Бібліогр.: 11 назв.

ISBN 978-617-7988-89-1

УДК 517.3(075)

© Першина Ю.І.,
Пріщенко О.П.,
Черемська Н.В.,
Черногор Т.Т., 2022
© Видавництво «Друкарня
Мадрид», 2022

ВСТУП

Інтегральне числення функції однієї змінної широко використовується в різноманітних галузях сучасної науки і техніки, тому інтегральне числення функції однієї змінної в курсі вищої математики має важливе значення в математичній освіті інженерів усіх спеціальностей.

Навчально-методичний посібник з курсу вищої математики «Інтегральне числення функції однієї змінної» має за мету допомогти студентам у формуванні їх математичного мислення, а також набутти практичних навичок у інтегруванні функцій однієї змінної. В даному посібнику приділено достатню увагу детальному роз'ясненню методів розв'язання типових завдань за темами «Невизначений інтеграл» та «Визначений інтеграл», його зміст повністю відповідає робочій програмі курсу вищої математики 141 спеціальності (електроенергетика, електроніка та електромеханіка).

Навчально-методичний посібник складається з двох частин «Невизначений інтеграл» та «Визначений інтеграл», до складу яких входять необхідний теоретичний матеріал, детальний розбір типових задач, а також приклади для аудиторної та самостійної роботи, до яких додаються відповіді, крім того, містить завдання для контрольних робіт. Для полегшення самостійної роботи подано список рекомендованої літератури, в якій читачі можуть знайти відповіді на свої запитання. До цього списку увійшли як традиційні класичні підручники, так і навчально-методичні видання кафедри.

Головне призначення посібника – допомогти студентам в самостійному вивченні даних розділів курсу вищої математики в умовах скороченої кількості аудиторних занять. Посібник може стати в нагоді також студентам заочного відділення та студентам, які навчаються дистанційно за особистим навчальним планом та для молодих викладачів без достатнього досвіду роботи.

Автори

РОЗДІЛ І
ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА
НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Лекція 1

ПОНЯТТЯ ПЕРВІСНОЇ. ОЗНАЧЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНОГО
ІНТЕГРАЛА. ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА.
ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Основною задачею інтегрального числення є знаходження функції за її похідною.

Означення. Первісною функції $f(x)$ в інтервалі (a, b) називається така функція $F(x)$, для якої

$$F'(x) = f(x)$$

в кожній точці цього інтервалу.

Теорема 1.1. Будь-яка неперервна функція має нескінченну множину первісних, до того ж, будь-які дві з них відрізняються одна від одної тільки постійним доданком.

Доведення. Прийmemo без доведення, що будь-яка неперервна функція $f(x)$ має первісну $F(x)$. Тоді функція $F(x) + C$ є також первісною, оскільки $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$. Отже, функція $f(x)$ має нескінченну множину первісних. Покажемо, що будь-які дві первісні $f(x)$ відрізняються одна від одної лише постійним доданком. Нехай $F(x)$ та $\Phi(x)$ дві первісні $f(x)$, до того ж $F(x) \neq \Phi(x)$. Маємо $F'(x) = f(x)$ та $\Phi'(x) = f(x)$. Віднімаючи від першого виразу другий, отримуємо $F'(x) - \Phi'(x) = 0$, а отже, $(F(x) - \Phi(x))' = 0$. Але якщо похідна від деякої функції тотожно дорівнює нулю, то сама ця функція є постійною. В нашому випадку $F(x) - \Phi(x) = const$.

Теорема доведена.

Знаходження первісних називається невизначеним інтегруванням, а вираз, який охоплює множину усіх первісних даної функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом та позначається $\int f(x)dx$. Функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією, вираз $f(x)dx$ підінтегральним виразом, а змінна x – змінною інтегрування. Таким чином, $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x)$ будь-яка первісна функції $f(x)$, а C – довільна стала.

Графік первісної $F(x)$ називається інтегральною кривою функції $y = f(x)$. Геометричний зміст невизначеного інтегралу є множина інтегральних кривих, які отримані при паралельному переносі однієї з них вздовж осі ординат (рисунок 1.1).

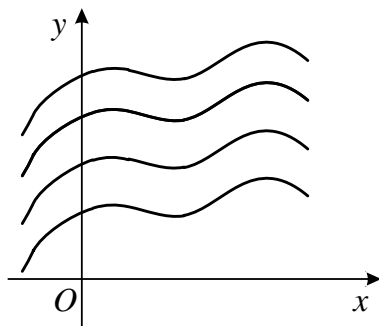


Рисунок 1.1

За означенням невизначеного інтеграла маємо

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \text{ або } d\left(\int f(x)dx\right) = f(x) \cdot dx.$$

Аналогічно

$$\int f'(x)dx = f(x) + C, \text{ або } \int df(x) = f(x) + C.$$

Перш ніж почати викладання методів інтегрування, наведемо таблицю інтегралів від деяких функцій. Ця таблиця витікає

безпосередньо з таблиці похідних. Справедливість цих рівностей легко перевірити за допомогою диференціювання. Формули 14 – 19 надалі ми отримаємо за допомогою тих чи інших методів інтегрування.

Таблиця інтегралів

1. $\int dx = x + C,$
2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1),$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1),$
5. $\int e^x dx = e^x + C,$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C,$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C,$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, |x| < a, a > 0,$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C,$
13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C,$
14. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C,$
15. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C,$
16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C,$
17. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C,$
18. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C_1, |x| < a, a > 0,$
19. $\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{a}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + C_1.$

Властивості невизначеного інтеграла

Теорема 1.2 (властивість адитивності).

Невизначений інтеграл від суми скінченного числа функцій дорівнює сумі інтегралів від функцій-доданків:

$$\int (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx,$$

де $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ – функції незалежної змінної x .

Доведення.

Розглянемо похідну правої частини рівності.

$$\begin{aligned} & \left(\int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx \right)' = \\ & = \left(\int f_1(x) dx \right)' + \left(\int f_2(x) dx \right)' + \dots + \left(\int f_n(x) dx \right)' = \\ & = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x). \end{aligned}$$

Отриманий вираз збігається з підінтегральною функцією інтеграла $\int (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) dx$.

Теорема доведена.

Теорема 1.3 (властивість однорідності).

Постійний множник підінтегральної функції можна виносити за символ інтеграла:

$$\int C \cdot f(x) dx = C \int f(x) dx, \text{ де } C = const.$$

Доведення.

Розглянемо похідну правої частини рівності.

$\left(C \int f(x) dx \right)' = C \left(\int f(x) dx \right)' = C \cdot f(x)$. Отриманий вираз збігається з похідною підінтегральної функції $\left(\int C \cdot f(x) dx \right)'$.

Теорема доведена.

Приклад 1.1. $\int (7x^4 - 8x^2 + 12) dx = \frac{7x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 12x + C.$

Теорема 1.4 (про інваріантність формул інтегрування).

Нехай $\int f(x)dx = F(x) + C$ та $u = \varphi(x)$ – будь-яка диференційовна функція аргументу x . Тоді $\int f(u)du = F(u) + C$.

Доведення.

З того, що $\int f(x)dx = F(x) + C$ витікає, що $F'(x) = f(x)$.

Розглянемо складну функцію $F(u) = F(\varphi(x))$. Тоді через інваріантність форми першого диференціала маємо $dF(u) = F'(u)du = f(u)du$.

Звідси $\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C$.

Теорема доведена.

Через цю теорему основна таблиця інтегралів є справедливою незалежно від того, є змінна інтегрування незалежною змінною чи будь-якою функцією від неї. Таким чином, основна таблиця інтегралів значно розширюється.

При розв'язанні прикладів часто доводиться використовувати теорему 1.4. для перетворень, які називають «підведенням під знак диференціала». В багатьох випадках це дозволяє спростити підінтегральний вираз.

Приклад 1.2. $\int e^{6x-7} d(6x-7) = e^{6x-7} + C$.

Приклад 1.3. $\int \arctg^3 x d(\arctg x) = \frac{\arctg^4 x}{4} + C$.

Приклад 1.4. $\int \cos^3 x \sin x dx = -\int \cos^3 x d(\cos x) = -\frac{\cos^4 x}{4} + C$.

Приклад 1.5.

$\int \sqrt{\arctg x} \frac{dx}{1+x^2} = \int \sqrt{\arctg x} d(\arctg x) = \frac{2}{3} \arctg x \sqrt{\arctg x} + C$.

Окремий випадок підведення під знак диференціала зручно сформулювати у вигляді наступної теореми.

Теорема 1.5.

Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Приклад 1.6. $\int \sin(7x-3)dx = -\frac{1}{7}\cos(7x-3) + C$.

Приклад 1.7. $\int \frac{dx}{8-5x} = -\frac{1}{5}\ln|8-5x| + C$.

Основні методи інтегрування**Заміна змінної у невизначеному інтегралі**

Теорема 1.6 (заміна змінної у невизначеному інтегралі).

Нехай функція $f(x)$ має первісну, а $\varphi(t)$ монотонна функція, яка має неперервну похідну, тоді

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доведення. Покажемо, похідні за змінною x лівої та правої частин рівні.

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x).$$

Праву частину продиференцюємо за змінною x як складену функцію. При цьому $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$, а за правилом диференціювання оберненої функції $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}$. Отримуємо:

$$\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_x \frac{dt}{dx} = f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).$$

Теорема доведена.

Метод заміни змінної (підстановки) у невизначеному інтегралі полягає у введенні нової змінної інтегрування. При цьому заданий інтеграл зводиться до нового інтегралу, який є табличним або таким, що не викликає труднощів (у випадку вдалої заміни змінної). Загальних

рекомендацій щодо вибору підстановки не існує. Вміння правильно визначити, що саме обрати як нову змінну інтегрування досягається практикою.

Приклад 1.8.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \left\| \begin{array}{l} t = x^2 + 1, \\ dt = 2xdx \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2+1} + C.$$

Приклад 1.9.

$$\int \frac{xdx}{x^4+1} = \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{(x^2)^2+1} = \left\| \begin{array}{l} t = x^2, \\ dt = 2xdx \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2} \arctg t + C = \\ = \frac{1}{2} \arctg x^2 + C.$$

Зауваження. Якщо інтеграл можна записати таким чином, що в чисельнику підінтегральної функції – похідна знаменника, то інтеграл дорівнює натуральному логарифму абсолютної величини знаменника.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln |f(x)| + C.$$

Приклад 1.10. $\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x} dx}{\ln x} = \ln |\ln x| + C.$

Приклад 1.11. $\int \frac{dx}{(x^2+1) \arctg x} = \int \frac{\frac{1}{x^2+1} dx}{\arctg x} = \ln |\arctg x| + C.$

Приклад 1.12.

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = -\int \frac{(-\cos x) dx}{\sin x} = \ln |\sin x| + C.$$

Інтегрування частинами

Теорема 1.7 (інтегрування частинами).

Нехай функції $u(x)$ та $v(x)$ мають неперервні похідні, тоді має місце формула

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Ця формула має назву «формула інтегрування частинами».

Доведення.

Як відомо з курсу диференціального числення $d(uv) = udv + vdu$.

Проведемо перетворення та проінтегруємо обидві частини рівності:

$$udv = d(uv) - vdu; \int udv = \int d(uv) - \int vdu.$$

Отримуємо:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Теорема доведена.

Ця формула надає можливість замість $\int udv$ розглядати $\int vdu$, який при раціональному розподілу множників u та dv може виявитися істотно простішим. Вкажемо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами.

1. Інтеграли вигляду $\int P_n(x)e^{\alpha x} dx$, $\int P_n(x)a^{\alpha x} dx$, $\int P_n(x)\cos \alpha x dx$, $\int P_n(x)\sin \alpha x dx$, де $P_n(x)$ – многочлен степеню n , а α – певне число. У цьому випадку беруть $u = P_n(x)$. Слід зазначити, що у випадку $n > 1$ інтегрувати за частинами доведеться n разів.

2. Інтеграли вигляду $\int P_n(x)\arcsin x dx$, $\int P_n(x)\arccos x dx$, $\int P_n(x)\arctg x dx$, $\int P_n(x)\text{arcctg } x dx$, $\int P_n(x)\ln x dx$, де $P_n(x)$ – многочлен степеню n . У цьому випадку беруть $dv = P_n(x)dx$, а u позначають решту множників.

3. Інтеграли вигляду $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$, $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$ (α, β – певні числа). Такі інтеграли називають зворотними. У цьому випадку як u беруть будь-яку з двох функцій.

Цими трьома типами інтегралів не обмежуються всі інтеграли, які можна інтегрувати в цій спосіб. Деякі з них будуть розглянуті на практичних заняттях.

Приклад 1.13.

$$\int (3+7x)\cos 3x dx = \left\| \begin{array}{l} u = 3+7x, \quad dv = \cos 3x dx, \\ du = 7 dx, \quad v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right\| =$$
$$= \frac{1}{3}(3+7x)\sin 3x - \int \frac{1}{3} \sin 3x \cdot 7 dx = \frac{1}{3}(3+7x)\sin 3x + \frac{7}{9} \cos 3x + C.$$

Приклад 1.14.

$$\int x^{10} \ln x dx = \left\| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = x^{10} dx, \\ du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^{11}}{11} \end{array} \right\| = \frac{x^{11}}{11} \cdot \ln x - \frac{1}{11} \int \frac{x^{11} dx}{x} =$$
$$= \frac{x^{11}}{11} \cdot \ln x - \frac{1}{11} \int x^{10} dx = \frac{x^{11}}{11} \cdot \ln x - \frac{x^{11}}{121} + C.$$

Приклад 1.15.

$$\int e^{5x} \sin 8x dx = \left\| \begin{array}{l} u = e^{5x}, \quad dv = \sin 8x dx, \\ du = 5e^{5x} dx, \quad v = -\frac{1}{8} \cos 8x \end{array} \right\| = -\frac{1}{8} e^{5x} \cos 8x +$$
$$+ \frac{5}{8} \int \cos 8x \cdot e^{5x} dx = \left\| \begin{array}{l} u = e^{5x}, \quad dv = \cos 8x dx, \\ du = 5e^{5x} dx, \quad v = \frac{1}{8} \sin 8x \end{array} \right\| =$$
$$= -\frac{1}{8} e^{5x} \cos 8x + \frac{5}{64} e^{5x} \sin 8x - \frac{25}{64} \int e^{5x} \sin 8x dx + C.$$

Таким чином, можна записати:

$$\int e^{5x} \sin 8x dx = -\frac{1}{8} e^{5x} \cos 8x + \frac{5}{64} e^{5x} \sin 8x - \frac{25}{64} \int e^{5x} \sin 8x dx + C.$$

Позначимо: $\int e^{5x} \sin 8x dx = I$, тоді

$$I + \frac{25}{64} I = -\frac{1}{8} e^{5x} \cos 8x + \frac{5}{64} e^{5x} \sin 8x + C.$$

$$\frac{89}{64} I = \frac{e^{5x}}{8} \left(-\cos 8x + \frac{5}{8} \sin 8x \right) + C \Rightarrow I = \frac{8e^{5x}}{89} \left(-\cos 8x + \frac{5}{8} \sin 8x \right) + C_1.$$

Лекція 2

ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙ, ЩО МІСТЯТЬ КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

Розглянемо інтеграли вигляду:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx,$$
$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx, \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

При інтегруванні функцій, що містять квадратний тричлен спочатку коефіцієнт a ($a \neq 0$) слід винести за дужки:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a(x^2 + px + q).$$

Далі слід виділити повний квадрат з квадратного тричлена:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 - \frac{p^2}{4} + q, \text{ та зробити підстановку } t = x + \frac{p}{2}.$$

У такому разі інтеграл стає табличним, або таким, спосіб інтегрування якого є відомим.

Приклад 2.1.

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} = \left\| \begin{aligned} x^2 + 6x + 13 &= (x+3)^2 - 9 + 13 \\ &= (x+3)^2 + 4 \end{aligned} \right\| =$$
$$= \left\| \begin{aligned} x+3 &= t, \\ dx &= dt \end{aligned} \right\| = \int \frac{dt}{t^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C.$$

Приклад 2.2.

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 5} = \left\| \begin{aligned} x^2 + 4x - 5 &= (x+2)^2 - 4 - 5 \\ &= (x+2)^2 - 9 \end{aligned} \right\| = \left\| \begin{aligned} x+2 &= t, \\ dx &= dt \end{aligned} \right\| =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 - 9} = \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-1}{x+5} \right| + C.$$

Приклад 2.3.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} &= \left\| \begin{aligned} 3-2x-x^2 &= -(x^2+2x-3) = -((x+1)^2-1-3) \\ &= -((x+1)^2-4) = 4-(x+1)^2 \end{aligned} \right\| = \\ &= \left\| \begin{aligned} x+1=t, \\ dx=dt \end{aligned} \right\| = \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \arcsin \frac{t}{2} + C = \arcsin \frac{x+1}{2} + C. \end{aligned}$$

Приклад 2.4.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2+4x+8} dx &= \left\| \begin{aligned} x^2+4x+8 &= (x+2)^2-4+8 \\ &= (x+2)^2+4 \end{aligned} \right\| = \\ &= \left\| \begin{aligned} x+2=t, \\ dx=dt \end{aligned} \right\| = \int \sqrt{t^2+4} dt = \frac{4}{2} \ln |t + \sqrt{t^2+4}| + \frac{t}{2} \sqrt{t^2+4} + C = \\ &= 2 \ln |x+2 + \sqrt{x^2+4x+8}| + \frac{x+2}{2} \sqrt{x^2+4x+8} + C. \end{aligned}$$

Приклад 2.5.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{x^2-14x+13} dx &= \\ &= \left\| \begin{aligned} x^2-14x+13 &= (x-7)^2-49+13 \\ &= (x-7)^2-36 \end{aligned} \right\| = \left\| \begin{aligned} x-7=t, dx=dt, x=t+7, \\ 3x-1=3(t+7)-1=3t+20 \end{aligned} \right\| = \\ &= \int \frac{3t+20}{t^2-36} dt = \int \left(\frac{3t}{t^2-36} + \frac{20}{t^2-36} \right) dt = \\ &= \frac{3}{2} \ln |t^2-36| + 20 \cdot \frac{1}{2 \cdot 6} \ln \left| \frac{t-6}{t+6} \right| + C = \frac{3}{2} \ln |x^2-14x+13| + \frac{5}{3} \ln \left| \frac{x-13}{x-1} \right| + C. \end{aligned}$$

Приклад 2.6.

$$\begin{aligned} \int \frac{3-4x}{\sqrt{12-4x-x^2}} dx &= \left\| \begin{array}{l} 12-4x-x^2 = -(x^2+4x-12) = \\ = -((x+2)^2-4-12) = 16-(x+2)^2 \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{l} x+2=t, \\ dx=dt, x=t-2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{l} 3-4x = 3-4(t-2) = \\ = 3-4t+8 = 11-4t \end{array} \right\| = \int \frac{11-4t}{\sqrt{16-t^2}} dt = \\ &= 11 \int \frac{dt}{\sqrt{16-t^2}} - 4 \int \frac{tdt}{\sqrt{16-t^2}} = 11 \arcsin \frac{t}{4} - 4 \left(-\frac{1}{2} \right) \int \frac{-2tdt}{\sqrt{16-t^2}} = \\ &= 11 \arcsin \frac{x+2}{4} + 2\sqrt{12-4x-x^2} + C. \end{aligned}$$

Лекція 3

ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Означення 1. Функція $R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, де $Q_m(x)$ та $P_n(x)$ – многочлени відносно x степеню m та n відповідно, називається раціональним дробом.

Означення 2. Раціональний дріб називається правильним, якщо $m < n$, і неправильним, якщо $m \geq n$.

Будь-який неправильний нескоротний дріб можна записати як суму многочлена та правильного раціонального дробу, поділивши чисельник на знаменник.

Означення 3. Число x_1 є коренем многочлена $P_n(x)$, якщо при $x = x_1$ многочлен обертається на нуль, тобто $P_n(x_1) = 0$.

Многочлен $P_n(x)$ може бути розкладеним на множники $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$, де x_1, x_2, \dots, x_n – корені многочлена. Корінь многочлена x_i називається простим, якщо множник $(x - x_i)$ входить до розкладеного многочлена на множники один раз. Якщо множник $(x - x_i)$ входить до розкладеного многочлена на множники λ разів, то кажуть, що корінь x_i кратності λ .

Найпростіші дроби:

$$\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^n}, \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, (n \geq 2, n \in \mathbb{N}), p^2 - 4q < 0.$$

Інтегрування раціональних функцій зводиться до інтегрування найпростіших дроби.

Дроби $\frac{A}{x+a}, \frac{A}{(x+a)^n}$ можна проінтегрувати безпосередньо,

користуючись таблицею інтегрування основних функцій:

$$\int \frac{A}{x+a} dx = A \ln|x+a| + C, \int \frac{A}{(x+a)^n} dx = \frac{A}{(1-n)(x+a)^{n-1}} + C.$$

У випадку $\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx$ та $\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx$ слід виділити

повний квадрат у знаменнику (див. лекцію 2), та скористатися рекурентною формулою для другого інтеграла:

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1}.$$

Теорема 3.1. Будь-який правильний нескоротний дріб можна зобразити у вигляді суми найпростіших дробів з невизначеними коефіцієнтами.

Зауважимо, якщо знаменник правильного дробу має вигляд

$(x-a)^n (x^2 + px + q)^m$, то правильний дріб зображується у вигляді суми найпростіших дробів за формулою

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_mx + N_m}{(x^2 + px + q)^m},$$

де $A_1, A_2, \dots, A_n, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_m, N_m$ –

невизначені (невідомі) коефіцієнти, деякі з них можуть дорівнювати нулю.

Алгоритм інтегрування раціональних дробів:

- 1) якщо дріб неправильний, то слід подати його як суму многочлена та правильного раціонального дробу;
- 2) знаменник правильного дробу розкласти на множники;
- 3) записати правильний дріб у вигляді суми найпростіших дробів (вигляд найпростіших дробів визначається коренями знаменника);
- 4) проінтегрувати цілу частину многочлена та найпростіші дроби.

Приклад 3.1. Розкласти дріб на суму найпростіших дробів:

$$\frac{2x^2 + 2x - 3}{x(x-1)(x+3)}.$$

Розв'язання.
$$\frac{2x^2 + 2x - 3}{x(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3}.$$

Зведемо праву частину рівності до спільного знаменника і прирівняємо чисельники початкового і останнього дробів.

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3} = \frac{A(x-1)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+3)}.$$

$$2x^2 + 2x - 3 = A(x-1)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-1).$$

Для визначення коефіцієнтів використовують спосіб окремих значень, який полягає в тому, що аргументу задають значення коренів знаменника або інші зручні значення.

$$x = 1: 1 = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{4},$$

$$x = -3: 9 = 12C \Rightarrow C = \frac{3}{4},$$

$$x = 0: -3 = -3A \Rightarrow A = 1.$$

Отже,
$$\frac{2x^2 + 2x - 3}{x(x-1)(x+3)} = \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{3}{4}}{x+3}.$$

Розглянемо випадок кратних коренів.

Приклад 3.2. Розкласти дріб на суму найпростіших дробів:

$$\frac{2x^2 + 3}{x^3(x^2 + 1)}.$$

Розв'язання. В даному разі корінь знаменника $x = 0$ кратності 3, тому множнику x^3 відповідають три найпростіших дробу вигляду:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3},$$
 а множнику $(x^2 + 1)$ – найпростіший дріб вигляду

$$\frac{Dx + E}{x^2 + 1}. \text{ Отже, отримуємо: } \frac{2x^2 + 3}{x^3(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1}.$$

Зведемо до спільного знаменника усі найпростіші дроби та порівняємо чисельники початкового і останнього дробів:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1} = \frac{Ax^2(x^2 + 1) + Bx(x^2 + 1) + C(x^2 + 1) + x^3(Dx + E)}{x^3(x^2 + 1)},$$

$$2x^2 + 3 = Ax^2(x^2 + 1) + Bx(x^2 + 1) + C(x^2 + 1) + x^3(Dx + E).$$

Для обчислення коефіцієнтів A, B, C, D, E скористаємося способом порівняння коефіцієнтів, який базується на тому, що два многочлени рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні коефіцієнти при однакових степенях x :

$$\begin{cases} x^4 & \left\{ \begin{array}{l} 0 = D + A, \\ 0 = E + B, \\ 2 = A + C, \\ 0 = B, \\ 3 = C. \end{array} \right. \end{cases}$$

З цієї системи отримуємо:

$$B = 0 \Rightarrow E = 0, C = 3 \Rightarrow A + 3 = 2 \Rightarrow A = -1, D + A = 0 \Rightarrow D = 1.$$

$$\text{Остаточно отримуємо: } \frac{2x^2 + 3}{x^3(x^2 + 1)} = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} + \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Приклад 3.3. $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx.$

Розв'язання. У даному випадку підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб. Розділимо чисельник на знаменник, виділивши при цьому цілу та дробову частини:

$$\begin{array}{r}
-x^5 + x^4 - 8 \quad \Big| \quad x^3 - 4x \\
\underline{x^5 - 4x^3} \\
-x^4 + 4x^3 - 8 \\
\underline{x^4 - 4x^2} \\
-4x^3 + 4x^2 - 8 \\
\underline{4x^3 - 16x} \\
4x^2 + 16x - 8.
\end{array}$$

Таким чином,

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + 4 \cdot \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x}.$$

Розглянемо тепер правильний дріб і розкладемо його знаменник на прості множники, а потім запишемо цей дріб у вигляді суми найпростіших дроби з невизначеними коефіцієнтами та знайдемо ці коефіцієнти:

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} = \frac{x^2 + 4x - 2}{x(x^2 - 4)} = \frac{x^2 + 4x - 2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Далі усі найпростіші дроби зводять до спільного знаменника та прирівнюють один до одного чисельники обох частин рівності:

$$x^2 + 4x - 2 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2).$$

Для визначення коефіцієнтів використаємо спосіб окремих значень:

$$x = 2: 10 = 8B, \quad B = \frac{5}{4},$$

$$x = -2: -6 = 8C, \quad C = -\frac{3}{4},$$

$$x = 0: -2 = -4A, \quad A = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Отже, } \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+2}.$$

Остаточню отримаємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx &= \int \left(x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4 \int \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \int \frac{dx}{x} + 5 \int \frac{dx}{x-2} - 3 \int \frac{dx}{x+2} = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \ln|x| + 5 \ln|x-2| - 3 \ln|x+2| + C = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} \right| + C. \end{aligned}$$

Наприкінці слід зауважити, що існують приклади раціональних дробів, які легше проінтегрувати в інший спосіб, а саме: додати та відняти один і той самий вираз до чисельника.

Приклад 3.4. $\int \frac{dx}{x^4(x^2+1)}$.

Розв'язання.

Напишемо по-іншому підінтегральний вираз:

$$\int \frac{dx}{x^4(x^2+1)} = \int \frac{1}{x^4(x^2+1)} dx$$

Додаємо та віднімаємо до чисельника x^2 . Рівність не порушилась, але в нас з'явилась можливість перетворити підінтегральний вираз в такий, що можна інтегрувати.

Отриманий дріб розкладемо на суму двох дробів, в кожному з яких можна скоротити множник.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4(x^2+1)} dx &= \int \frac{x^2+1-x^2}{x^4(x^2+1)} dx = \int \frac{\cancel{x^2+1}}{x^4(\cancel{x^2+1})} dx - \int \frac{\cancel{x^2}}{x^4(x^2+1)} dx = \\ &= \int \frac{dx}{x^4} - \int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Перший інтеграл є табличним, а в другому знову додаємо та віднімаємо до чисельника x^2 :

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)} = \int \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx = \int \frac{x^2+1-x^2}{x^2(x^2+1)} dx = \int \frac{\cancel{x^2+1}}{x^2(\cancel{x^2+1})} dx -$$
$$- \int \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(x^2+1)} dx = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2+1}.$$

Остаточо отримуємо:

$$\int \frac{1}{x^4(x^2+1)} dx = \int \frac{dx}{x^4} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C.$$

Лекція 4

ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Слід зазначити, підінтегральні вирази, що містять тригонометричні функції різноманітні. Тому такі вирази поділяють на групи, об'єднуючи тим чи іншим способом інтегрування.

1. Інтегрування функцій, які можна привести до табличних, використовуючи відомі тригонометричні формули.

Приклад 4.1.

$$\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

Приклад 4.2.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} \, dx &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x - \cos x} \, dx = -\int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} \, dx = \\ &= -\int (\cos x + \sin x) \, dx = -\sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

Приклад 4.3. $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + C.$

Приклад 4.4.

$$\int \frac{4 + 5\sin^2 x}{1 - \cos 2x} \, dx = \int \frac{4 + 5\sin^2 x}{2\sin^2 x} \, dx = 2 \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \frac{5}{2} \int dx = -2 \operatorname{ctg} x + \frac{5}{2} x + C.$$

2. Інтегрування функцій $\sin^n x \cdot \cos^m x$.

Розрізняють два випадки: а) n, m – парні невід'ємні числа; б) n та (або) m – непарні невід'ємні числа.

Розглянемо випадок а).

У цьому випадку використовують тригонометричні формули

$$\text{зниження степеню: } \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Приклад 4.5.

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left(\int dx + \int \cos 2x \, dx \right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Якщо $n > 2$, то формули зниження степеню використовують декілька разів.

Приклад 4.6.

$$\begin{aligned} \int \cos^4 3x \, dx &= \int (\cos^2 3x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 6x}{2} \right)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 6x + \cos^2 6x) \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(\int dx + 2 \int \cos 6x \, dx + \int \cos^2 6x \, dx \right). \end{aligned}$$

Для третього інтегралу використаємо формулу зниження степеню. Остаточо отримуємо:

$$\begin{aligned} \int \cos^4 3x \, dx &= \frac{1}{4} \left(\int dx + 2 \int \cos 6x \, dx + \int \frac{1 + \cos 12x}{2} \, dx \right) = \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 6x \, dx + \\ &+ \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 12x \, dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{96}\sin 12x + C = \\ &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x + C. \end{aligned}$$

Приклад 4.7.

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \, dx &= \int \sin^2 x (\sin x \cdot \cos x)^2 \, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)^2 \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (\sin^2 2x - \cos 2x \cdot \sin^2 2x) \, dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx - \frac{1}{8} \int \cos 2x \cdot \sin^2 2x \, dx. \end{aligned}$$

Для першого інтегралу використаємо формулу зниження степеню. Для другого – заміну змінної: $t = \cos 2x$, $dt = -2 \sin 2x \, dx$. Отже, отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx - \frac{1}{8} \int \cos 2x \cdot \sin^2 2x \, dx &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) \, dx + \frac{1}{16} \int t^2 \, dt = \\ &= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{t^3}{48} + C = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{\sin^3 2x}{48} + C. \end{aligned}$$

Розглянемо випадок б).

При інтегруванні функцій $\sin^n x \cdot \cos^m x$, де n та (або) m – непарні невід’ємні числа, відокремлюємо один множник та підводимо його під знак диференціала або робимо заміну змінних. Це дозволяє зводити інтеграл, що розглядається, до табличного. Слід нагадати основну тригонометричну тотожність: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Зауважимо, що обирають $t = \sin x$, коли m непарне, або $t = \cos x$, коли n непарне. У тому випадку, коли n та m обидва непарні, за t можна обирати будь-яку функцію.

Приклад 4.8.

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cdot d(\sin x) = \\ &= \int d(\sin x) - \int (\sin x)^2 d(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

Приклад 4.9.

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cdot \cos^2 x dx &= \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x dx = \left\| \begin{array}{l} t = \cos x, dt = -\sin x dx, \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right\| = \\ &= -\int (1 - t^2)^2 t^2 dt = -\int (1 - 2t^2 + t^4) t^2 dt = -\int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt = \\ &= -\left(\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} \right) + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + 2\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C. \end{aligned}$$

3. При інтегруванні $\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x dx$, $\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x dx$ використовують тригонометричні формули:

$$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x],$$

$$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x],$$

$$\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x],$$

які дозволяють зобразити добуток синусів та косинусів у вигляді лінійних комбінацій цих же функцій (з іншими аргументами).

Приклад 4.10.

$$\int \sin 3x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 4x + \sin 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + C = \\ = -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

4. При інтегруванні функцій $\operatorname{tg}^n x$, $\operatorname{ctg}^n x$ використовують підстановку $t = \operatorname{tg} x$ або $t = \operatorname{ctg} x$.

Приклад 4.11.

$$\int \operatorname{tg}^6 x \, dx = \left\| \operatorname{tg} x = t, x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2} \right\| = \int \frac{t^6}{1+t^2} dt.$$

Отримуємо неправильний раціональний дріб. Запишемо його у вигляді суми многочлена та правильного дробу, поділивши чисельник на знаменник:

$$\frac{-t^6}{t^6+t^4} \Bigg| \frac{t^2+1}{t^4-t^2+1} \\ \frac{-t^4}{-t^4-t^2} \\ \frac{-t^2}{t^2+1} \\ -1.$$

Отже, отримуємо:

$$\int \frac{t^6}{1+t^2} dt = \int \left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t - \operatorname{arctg} t + C = \\ = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x - x + C.$$

5. Розглянемо інтегрування функцій $R(\sin x, \cos x)$ – раціональних відносно функцій $\sin x$ та $\cos x$. У цьому випадку використовують універсальну тригонометричну підстановку

$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, (-\pi < x < \pi)$, яка зводить інтеграл, що розглядається, до інтегралу від раціональної функції $R_1(t)$.

Дійсно, $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, тоді $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\sin x = \frac{\sin x}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}.$$

Поділимо чисельник та знаменник на $\cos^2 \frac{x}{2}$ та отримаємо:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Аналогічно, $\cos x = \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}$.

Поділимо чисельник та знаменник на $\cos^2 \frac{x}{2}$ та отримаємо:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Як приклад розглянемо інтеграли, що наведені в таблиці інтегралів та які можна проінтегрувати за допомогою універсальної підстановки.

Приклад 4.12.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left\| t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right\| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Приклад 4.13.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \left\| t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right\| = \int \frac{2dt}{1-t^2} = 2 \int \frac{dt}{1-t^2} = -2 \int \frac{dt}{t^2-1} = -2 \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C =$$
$$= \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + C = \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right| + C = \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

В даному прикладі окрім універсальної підстановки використовується властивість логарифмів, тригонометрична формула тангенсу суми та властивість абсолютної величини $|a-b|=|b-a|$.

Цей приклад можна розв'язати в іншій спосіб, використовуючи тригонометричні формули зведення до гострого кута та результат попереднього прикладу, а саме:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\frac{\pi}{2} + x}{2} \right) \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

Слід відзначити, що універсальна підстановка не завжди є найкращим способом інтегрування функцій $R(\sin x, \cos x)$, зокрема, коли універсальна підстановка приводить до інтеграла від раціонального дробу, корені знаменника якого важко знайти.

В деяких випадках зручно використовувати інші підстановки, які приводять до більш простого способу розв'язання.

а) Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ є парною відносно

$\sin x, \cos x$, доцільно використати підстановку $\operatorname{tg} x = t, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Детальніше:

$$\operatorname{tg} x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$
$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \sqrt{1 - \frac{1}{1+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Приклад 4.14.

$$\int \frac{dx}{(\cos x + \sin x)^2} = \int \frac{dt}{(1+t^2) \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right)^2} = \int \frac{dt}{(1+t^2) \frac{(1+t)^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{1}{1+t} + C = -\frac{1}{1+\operatorname{tg} x} + C.$$

В даному прикладі використано підстановку $\operatorname{tg} x = t, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

б) Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ є непарною відносно $\cos x$, доцільно використати підстановку $\sin x = t, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Детальніше: $\sin x = t \Rightarrow x = \arcsin t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \cos x = \sqrt{1-t^2}$.

Приклад 4.15.

$$\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^2 x} = \left\| \begin{array}{l} \sin x = t, \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} x = \arcsin t \\ \cos x = \sqrt{1-t^2} \end{array} \right\| = \int \frac{(\sqrt{1-t^2})^7 dt}{t^2 \sqrt{1-t^2}} = \int \frac{(\sqrt{1-t^2})^6}{t^2} dt =$$

$$= \int \frac{(1-t^2)^3}{t^2} dt = \int \frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^2} dt = \int \frac{dt}{t^2} - 3 \int dt + 3 \int t^2 dt - \int t^4 dt =$$

$$= -\frac{1}{t} - 3t + 3 \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = -\frac{1}{\sin x} - 3 \sin x + \sin^3 x - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

В даному прикладі використано підстановку: $\sin x = t, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

в) Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ є непарною відносно $\sin x$, доцільно використати підстановку $\cos x = t, 0 < x < \pi$.

Детальніше: $\cos x = t \Rightarrow x = \arccos t \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \sin x = \sqrt{1-t^2}$.

Приклад 4.16.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x \, dx}{1 + \cos^2 x} &= \left\| \begin{array}{l} \cos x = t, \quad x = \arccos t \\ dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \sin x = \sqrt{1-t^2} \end{array} \right\| = -\int \frac{(\sqrt{1-t^2})^3 \, dt}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{1-t^2}{1+t^2} \, dt = \\ &= \int \frac{t^2-1}{1+t^2} \, dt = \int \frac{t^2+1-1-1}{1+t^2} \, dt = \int dt - 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = t - 2 \operatorname{arctg} t + C = \\ &= \cos x - 2 \operatorname{arctg}(\cos x) + C. \end{aligned}$$

В даному прикладі використано підстановку $\cos x = t$, $0 < x < \pi$.

Слід відзначити, що розглянуті підстановки, зазвичай приводять до більш простих обчислень, ніж універсальна підстановка. Поряд з цим є приклади, коли універсальна підстановка забезпечує найкоротший шлях. На практиці не завжди легко визначити, яку саме підстановку обрати. Під час вибору підстановки необхідний певний досвід та навички. Вміння обрати зручну підстановку досягається великою кількістю вправ.

Лекція 5

ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ПІДСТАНОВКИ. БІНОМІАЛЬНІ ІНТЕГРАЛИ. ПОНЯТТЯ ПРО ІНТЕГРАЛИ, ЯКІ НЕ ВИРАЖАЮТЬСЯ ЧЕРЕЗ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ

При інтегруванні ірраціональних функцій застосовують методи, які дозволяють позбутися ірраціональності. Розглянемо ці методи.

1. $\int R(x, x^{m_1/n_1}, \dots, x^{m_k/n_k}) dx$, де $R(x, x^{m_1/n_1}, \dots, x^{m_k/n_k})$ – раціональна функція відносно своїх аргументів, а $\frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$ – нескоротні дробки. Для того, щоб позбутися ірраціональності, необхідно скористатися заміною $x = t^s$, де s – спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$. Внаслідок заміни підінтегральна функція перетворюється на раціональний дріб. Методи інтегрування раціональних дробів розглядалися раніше.

Приклад 5.1. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}} dx$.

Розв'язання. При розв'язанні таких прикладів зручно переписати корені у вигляді степенів з дробовими показниками. В даному випадку

підінтегральна функція матиме вигляд: $\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{6}}}$. Спільний

знаменник дробів $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \in 12$. Отже, $s=12 \Rightarrow x=t^{12}$. Надалі ці міркування можна робити усно, а записувати таким чином:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}} dx &= \left\| \begin{array}{l} x=t^{12}, \quad \sqrt[3]{x}=t^4, \sqrt[4]{x}=t^3, \\ dx=12t^{11} dt, \quad \sqrt[6]{x}=t^2 \end{array} \right\| = \int \frac{(t^4-1) \cdot 12t^{11} dt}{t^3+t^2} = \\ &= 12 \int \frac{(t^4-1) \cdot t^{11} dt}{t^2(t+1)} = 12 \int t^9 \frac{(t^2+1)(t-1)(t+1)}{t+1} dt = 12 \int t^9 (t^2+1)(t-1) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 12 \int t^9 (t^3 - t^2 + t - 1) dt = 12 \int (t^{12} - t^{11} + t^{10} - t^9) dt = \\
 &= 12 \left(\frac{t^{13}}{13} - \frac{t^{12}}{12} + \frac{t^{11}}{11} - \frac{t^{10}}{10} \right) + C, \quad \text{де } t = \sqrt[3]{x}.
 \end{aligned}$$

$$2. \int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m_1/n_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m_k/n_k} \right) dx,$$

де $R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m_1/n_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m_k/n_k} \right)$ – раціональна функція відносно своїх аргументів, а $\frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$ – нескоротні дробі, то аналогічно з

попереднім випадком необхідно позначити $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, s – спільний

знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$.

Приклад 5.2. $\int \frac{x}{\sqrt{3x+1}(3x+1)} dx.$

Розв'язання. В даному прикладі дробовий показник $\frac{1}{2}$. Отже, $s = 2$.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{\sqrt{3x+1}(3x+1)} dx &= \left\| \begin{array}{l} 3x+1 = t^2, t = \sqrt{3x+1}, \\ x = \frac{1}{3}(t^2 - 1), dx = \frac{2}{3}t dt \end{array} \right\| = \int \frac{\frac{1}{3}(t^2 - 1) \cdot \frac{2}{3}t dt}{t \cdot t^2} = \\
 &= \frac{2}{9} \int \frac{(t^2 - 1) dt}{t^2} = \frac{2}{9} \int \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) dt = \frac{2}{9} \left(t + \frac{1}{t} \right) + C = \frac{2}{9} \left(\sqrt{3x+1} + \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \right) + C.
 \end{aligned}$$

Приклад 5.3.

$$\int \frac{1}{x^3} \sqrt{\frac{3+x}{x}} dx = \left\| \begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{3+x}{x}}, \\ \frac{3}{x} = t^2 - 1, \quad x = \frac{3}{t^2 - 1}, dx = -\frac{6t dt}{(t^2 - 1)^2} \end{array} \right\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{(t^2-1)^3}{27} \cdot t \cdot \left(-\frac{6t dt}{(t^2-1)^2} \right) = -\frac{2}{9} \int (t^2-1)t^2 dt = -\frac{2}{9} \int (t^4-t^2) dt = \\
&= -\frac{2}{9} \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) + C = -\frac{2}{45} \left(\sqrt{\frac{3+x}{x}} \right)^5 + \frac{2}{27} \left(\sqrt{\frac{3+x}{x}} \right)^3 + C.
\end{aligned}$$

$$3. \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx.$$

Після виділення повного квадрату підкореневого виразу цей інтеграл зводиться до одного з трьох інтегралів:

$R(x, \sqrt{a^2-x^2})$, $R(x, \sqrt{x^2-a^2})$, $R(x, \sqrt{a^2+x^2})$, де R – раціональна функція своїх аргументів. Для обчислення цих інтегралів рекомендуються наступні тригонометричні підстановки:

$$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx = \left\| \begin{array}{l} x = a \sin t, \\ dx = a \cos t dt \end{array} \right\| = \int R_1(\sin t, \cos t) dt, \text{ або}$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx = \left\| \begin{array}{l} x = a \cos t, \\ dx = -a \sin t dt \end{array} \right\| = \int R_2(\sin t, \cos t) dt,$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2}) dx = \left\| \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t}, \\ dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt \end{array} \right\|, \text{ або } \left\| \begin{array}{l} x = \frac{a}{\sin t}, \\ dx = -\frac{a \cos t}{\sin^2 t} dt \end{array} \right\| =$$

$$= \int R_3(\sin t, \cos t) dt$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2+x^2}) dx = \left\| \begin{array}{l} x = a \operatorname{tg} t, \\ dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt \end{array} \right\| \text{ або } \left\| \begin{array}{l} x = a \operatorname{ctg} t, \\ dx = -\frac{a}{\sin^2 t} dt \end{array} \right\| =$$

$$= \int R_5(\sin t, \cos t) dt.$$

Приклад 5.4.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \left\| \begin{array}{l} x = 3 \sin t, dx = 3 \cos t dt, \\ \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9 \sin^2 t} = 3 \cos t \end{array} \right\| = \int \frac{9 \sin^2 t \cdot \cancel{3 \cos t} dt}{\cancel{3 \cos t}} =$$

$$= 9 \int \sin^2 t \, dt = \frac{9}{2} \int (1 - \cos 2t) \, dt = \frac{9}{2} t - \frac{9}{4} \sin 2t + C.$$

Для того, щоб повернутися до початкової змінної, необхідно змінну t виразити через x : $\sin t = \frac{x}{3} \Rightarrow t = \arcsin \frac{x}{3}$.

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2 \frac{x}{3} \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} =$$

$$= \frac{2x}{3} \sqrt{\frac{9-x^2}{9}} = \frac{2x\sqrt{9-x^2}}{9}. \text{ Тоді}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} \, dx = \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} - \frac{9}{4} \cdot \frac{2x\sqrt{9-x^2}}{9} + C = \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} - \frac{x}{2} \sqrt{9-x^2} + C.$$

4. Поняття про інтеграли, які не виражаються через елементарні функції.

Як відомо, будь-яка неперервна функція має первісну. В тому випадку, коли первісна певної елементарної функції $f(x)$ є також елементарною функцією, то кажуть, що $\int f(x) dx$ «береться», тобто інтеграл виражається через елементарні функції. Наведемо приклади інтегралів, які «не беруться». Наприклад,

$$\int \frac{e^x}{x} \, dx, \int \frac{\sin x}{x} \, dx, \int \frac{\cos x}{x} \, dx, \int e^{-x^2} \, dx, \int \cos x^2 \, dx, \int \sin x^2 \, dx, \int \frac{dx}{\ln x}$$

не виражаються через елементарні функції.

В усіх подібних випадках первісна являє собою, очевидно, певну нову функцію, яка не є комбінацією скінченного числа елементарних функцій. Ці інтеграли мають велике значення при розв'язанні прикладних задач з теорії ймовірності, фізики, теорії чисел та інших, та мають певні назви.

Наприклад, первісна $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} \, dx + C$, яка перетворюється на нуль при $x = 0$ називається функцією Лапласа та позначається $\Phi(x)$.

Таким чином, $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx + C$, якщо $\Phi(0) = 0$.

Первісна $\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx$ ($k < 1$), яка перетворюється на нуль при $x = 0$ називається еліптичним інтегралом та позначається $E(x)$.

Отже, $E(x) = \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx + C$, якщо $E(0) = 0$.

Інтеграли вигляду $\int x^m (a + bx^n)^p dx$, де m, n, p – раціональні числа, називаються біноміальними інтегралами. Біноміальні інтеграли беруться, як показав Чебишев, лише в трьох випадках:

1) якщо p – ціле число, тоді $x = t^N$, де N – спільний знаменник дробів m та n ;

2) якщо $\frac{m+1}{n}$ – ціле число, тоді $a + bx^n = t^N$, де N – знаменник дробу p ;

3) якщо $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле число, тоді $ax^{-n} + b = t^N$, де N – знаменник дробу p .

В інших випадках біноміальні інтеграли не виражаються через елементарні функції.

Слід зазначити, що список інтегралів, які «не беруться» доволі великий. Ці функції добре досліджені. Складені детальні таблиці значень цих функцій при різних значеннях x .

Наприкінці лекцій за темою «Невизначений інтеграл» слід зауважити, що операція інтегрування функцій значно складніша операції диференціювання функцій. Не завжди обраний шлях інтегрування є найкращим, найкоротшим, простим. Інтегрування може бути виконано не єдиним способом. Багато залежить від володіння рекомендованими штучними засобами інтегрування, від кмітливості, від навичок інтегрування.

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Лекція 6

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ОЗНАЧЕННЯ. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ

До поняття визначеного інтегралу приводять різноманітні задачі: обчислення площі плоскої фігури, роботи змінної сили, шляху за заданою змінною швидкістю та інші.

Розглянемо одну з цих задач, а саме, обчислення площі криволінійної трапеції.

Означення 1. Криволінійна трапеція – фігура, яка обмежена віссю Ox , графіком неперервної функції $y = f(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$ (рисунок 1.2).

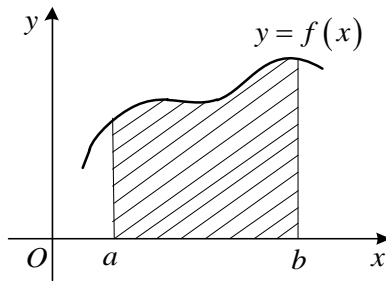


Рисунок 1.2

Нехай в замкненому інтервалі $[a, b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$. Інтервал $[a, b]$ розіб'ємо довільним чином на n часткових інтервалів за допомогою точок:

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b \quad (a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b).$$

В кожному інтервалі (x_{i-1}, x_i) довільним чином виберемо точку $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ та обчислимо значення функції $f(\xi_i)$. Помножимо $f(\xi_i)$ на довжину відповідного часткового інтервалу $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Добуток $S_i = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ дорівнює площі прямокутника з основою Δx_i та

висотою $f(\xi_i)$. Сума всіх добутків $I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$. (I_n – інтегральна сума) дорівнює площі ступінчастої фігури та приблизно дорівнює площі криволінійної трапеції.

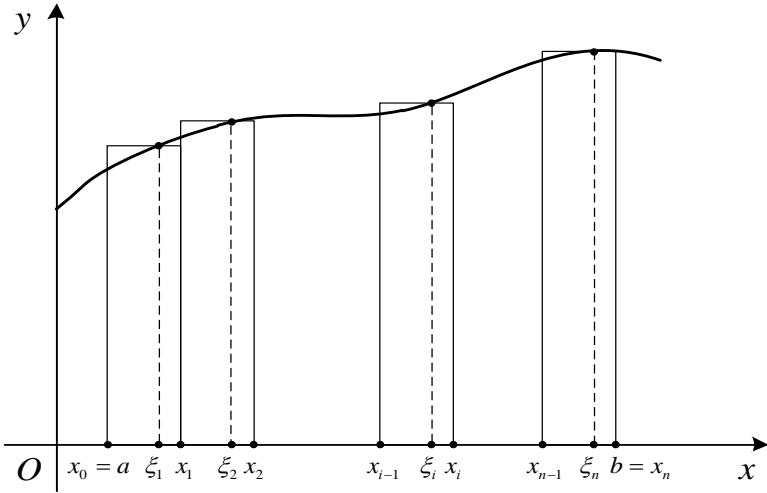


Рисунок 1.3

Якщо кількість інтервалів необмежено зростає, тобто $n \rightarrow \infty$, водночас довжина найбільшого часткового інтервалу прямує до нуля $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$. Разом зі зменшуванням Δx_i точність наближення площі ступінчастої фігури до криволінійної трапеції, а разом з цим і точність отриманої формули зростають. Отже, точним значенням площі криволінійної трапеції приймається границя

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i,$$

до якої прямує площа ступінчастої фігури.

Ця границя, якщо вона існує, називається визначеним інтегралом функції $y = f(x)$ на інтервалі $[a, b]$ та позначається

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Інтегральні суми, які побудовані для одного і того самого числа розбиття n можуть бути різними. Адже ми не тільки довільним чином розбиваємо інтервал $[a, b]$ на часткові інтервали, але й обираємо довільну точку в кожному інтервалі. Тому інтегральна сума не є функцією від n , через те, що одному і тому самому значенню n може відповідати незчисленна кількість інтегральних сум. Що ж ми розуміємо як границю інтегральних сум?

Означення 2. Число I називається границею інтегральної суми

$I = \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: при будь-якому розбитті інтервалу $[a, b]$ на часткові інтервали, довжини яких менше, ніж δ , тобто при $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$ та при будь-якому виборі проміжних точок $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, є вірна нерівність:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \varepsilon.$$

Означення 3. Визначеним інтегралом називається скінченна границя інтегральної суми при прямуванні до нуля довжини найбільшого часткового інтервалу

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

де a – нижня межа інтегрування, b – верхня межа інтегрування.

У випадку існування наведеної вище границі, функція $y = f(x)$ називається інтегрованою на $[a, b]$.

Символ \int є витягнутою буквою S (summa). Зовнішня спільність запису визначеного та невизначеного інтегралів підкреслює тісний

зв'язок між ними, хоча визначений інтеграл є числом, а невизначений – сукупність первісних функцій.

Очевидно, що $\int_a^b dx = b - a$, через те, що $f(x) = 1$:

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 \dots + x_n - x_{n-1} = x_n - x_0 = b - a.$$

Безпосередньо із означення визначеного інтеграла випливає, що

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Теорема 6.1 (існування визначеного інтеграла).

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то вона є інтегрованою на $[a, b]$.

Надалі всюди припускається, що функції, що розглядаються є неперервними.

Властивості визначеного інтегралу

Теорема 6.2 (про інтеграл суми).

Якщо $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ інтегровані на $[a, b]$, то

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx.$$

Іншими словами, інтеграл від суми скінченного числа функцій дорівнює сумі інтегралів від функцій-доданків:

Доведення. Позначимо інтеграл у лівій частині рівності через I . Користуючись означенням визначеного інтегралу та теоремою про границю суми, отримуємо:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f_{1i}(\xi_{1i}) + f_{2i}(\xi_{2i}) + \dots + f_{ni}(\xi_{ni})) \Delta x_i = \\ &= \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f_{1i}(\xi_{1i}) \Delta x_i + f_{2i}(\xi_{2i}) \Delta x_i + \dots + f_{ni}(\xi_{ni}) \Delta x_i) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_{1i}(\xi_{1i}) \Delta x_i + \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_{2i}(\xi_{2i}) \Delta x_i + \dots + \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_{ni}(\xi_{ni}) \Delta x_i = \\
&= \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx.
\end{aligned}$$

Теорема доведена.

Теорема 6.3 (про винесення постійного множника).

Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a, b]$, а $C = const$, то

$$\int_a^b C \cdot f(x) dx = C \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

Іншими словами, постійний множник підінтегральної функції можна виносити за символ інтегралу.

Доведення. Позначимо інтеграл у лівій частині рівності через I . Користуючись означенням визначеного інтегралу та теоремою про винесення постійного множника за знак границі, отримуємо:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n C \cdot f_i(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} C \cdot \sum_{i=1}^n f_i(\xi_i) \Delta x_i = \\
&= C \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_i(\xi_i) \Delta x_i = C \cdot \int_a^b f(x) dx.
\end{aligned}$$

Теорема доведена.

Теорема 6.4.

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Доведення. Досі ми припускали, що нижня межа інтеграла менша за верхню, або, як кажуть, інтервал інтегрування спрямований праворуч. Але в загальному випадку ніщо не заважає вважати, що $a > b$, тобто інтервал інтегрування спрямований ліворуч. Отже, всі різниці $x_i - x_{i-1} < 0$. Це означає, що при побудові інтегральної суми Δx_i не є довжиною часткового інтервалу, а відрізняється від неї знаком. Теорема доведена.

Теорема 6.5 (властивість адитивності).

Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a, b]$ та $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Доведення. Через те, що границя інтегральної суми не залежить від способу розбиття інтервалу $[a, b]$ на часткові інтервали, розіб'ємо інтервал $[a, b]$ так, щоб точка c завжди була точкою розбиття. При цьому інтегральну суму можна зобразити так:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_1 f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_2 f(\xi_i) \Delta x_i,$$

де в першій сумі зібрано усі елементи, які відповідають точкам розбиття інтервалу $[a, c]$, а в другій сумі – інтервалу $[c, b]$. \sum_1 та \sum_2 є інтегральними сумами для функції $f(x)$. Якщо кількість точок розбиття необмежено зростає, то довжина найбільшого часткового інтервалу прямує до нуля $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ для $[a, b]$, а також для $[a, c]$ та $[c, b]$. Отже, отримуємо:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Теорема доведена.

Теорема 6.6 (про знак інтегралу).

Якщо підінтегральна функція в інтервалі інтегрування не змінює знак, то інтеграл є числом того ж знаку, що і функція.

Доведення. Нехай $f(x) \geq 0$ на відрізку $[a, b]$, $a < b$, тоді в

інтегральній сумі $I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ усі доданки невід'ємні, та, отже $I_n \geq 0$, а границя невід'ємної величини не може бути від'ємною, тобто $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. Покажемо, що цей інтеграл дорівнює нулю тільки у

випадку, коли $f(x) \equiv 0$. Нехай $\exists c \in [a, b]: f(c) > 0$. Тоді через неперервність функції $y = f(x) \exists [\alpha, \beta]$, де функція залишається додатною. Позначимо через m її найменше значення на $[\alpha, \beta]$, тоді $f(x) \geq m \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$. Будь-яка інтегральна сума на $[\alpha, \beta]$ задовольняє нерівності: $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq \sum_{i=1}^n m \Delta x_i = m \sum_{i=1}^n \Delta x_i = m(\beta - \alpha)$. Але тоді її

границя $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq m(\beta - \alpha) > 0$.

За теоремою 6.5 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^b f(x) dx > 0$

через те, що $\int_a^{\alpha} f(x) dx \geq 0, \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0, \int_{\beta}^b f(x) dx \geq 0$. Остаточно

отримуємо $\int_a^b f(x) dx > 0$. Теорема доведена.

Теорема 6.7.

Якщо $\forall x \in [a, b], a < b: \psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x)$, тоді

$$\int_a^b \psi(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Теорема 6.8 (щодо оцінки визначеного інтегралу).

Якщо M та m відповідно найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b], a < b$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Доведення. За умовою теореми $m \leq f(x) \leq M$. Проінтегруємо усі частини нерівності

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx,$$

$$m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx.$$

Остаточню отримуємо $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

Теорема доведена.

Теорема 6.9 (про середнє значення).

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, тоді існує хоча б одна точка $\xi \in (a, b)$ така, що: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi)$.

Доведення. Якщо $f(x) \equiv const$, то теорема є очевидною.

Нехай $f(x) \not\equiv const$. Неперервна на інтервалі $[a, b]$ функція $f(x)$ набуває на ньому свої найменше m та найбільше M значення.

Тоді за теоремою 6.7 маємо: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$, звідки

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \text{ та } \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \mu,$$

де μ – певне число, яке $m \leq \mu \leq M$.

Функція $f(x)$, яка неперервна на інтервалі $[a, b]$ набуває усіх значень між m та M . Отже, існує точка $\xi \in (a, b)$, де $f(\xi) = \mu$.

Теорема доведена.

Лекція 7

ФОРМУЛА НЬЮТОНА – ЛЕЙБНИЦА. ЗАМІНА ЗМІННИХ ТА ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ У ВИЗНАЧЕНОМУ ІНТЕГРАЛІ. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ПЛОСКОЇ ФІГУРИ ЗА ДОПОМОГОЮ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Будемо вважати верхню межу інтеграла змінною, а нижню постійною. Надаючи верхній границі різні значення, отримуємо відповідні значення інтеграла, отже, при розглянутій умові, інтеграл є функцією своєї верхньої межі:

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt .$$

Теорема 7.1 (про похідну інтеграла за його верхньою межею).

Похідна від інтеграла за його верхньою межею дорівнює підінтегральній функції в точці верхньої межі:

$$I'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) .$$

Доведення.

Надамо аргументу x приріст Δx . Тоді нарошене значення функції $I(x)$ набуває вигляду $I(x + \Delta x) = \int_a^{x + \Delta x} f(t) dt$.

Таким чином,

$$\Delta I = I(x + \Delta x) - I(x) = \int_a^{x + \Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt .$$

Застосовуючи властивість адитивності до першого інтегралу, отримуємо:

$$\Delta I = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt .$$

За теоремою про середнє значення:

$$\Delta I = \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt = f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi)\Delta x ,$$

де $\xi \in (x, x + \Delta x)$. За означенням похідної маємо:

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi).$$

Але, якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то $x + \Delta x \rightarrow x$ тому і $\xi \rightarrow x$, а через неперервність функції $f(x)$ отримуємо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x).$$

Теорема доведена.

Цю теорему можна сформулювати іншими словами: інтеграл зі змінною верхньою межею є первісною для підінтегральної функції.

Теорема 7.2 (формула Ньютона – Лейбніца).

Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Доведення. Розглянемо функцію $I(x) = \int_a^x f(t) dt$. Оскільки вона є первісною функції $f(x)$, то її треба шукати серед функцій $F(x) + C$, де $F(x)$ – будь-яка з первісних функції $f(x)$. Отже, $I(x) = F(x) + C_1$, де C_1 – певна const. Для знаходження C_1 скористаємось властивістю функції $I(x)$, а саме: $I(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$. Звідси $F(a) + C_1 = 0$, тобто $C_1 = -F(a)$.

Отже, $I(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$. При $x = b$ отримуємо

$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$. Теорема доведена.

Формула Ньютона – Лейбніца дає нам основний спосіб обчислення визначених інтегралів за допомогою первісних, тобто за допомогою невизначеного інтегрування, минаючи складну процедуру складання інтегральних сум та обчислення їх границь.

Приклад 7.1.

$$\int_1^5 \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3} \ln|3x-2| \Big|_1^5 = \frac{1}{3} \ln|15-2| - \frac{1}{3} \ln|3-2| = \frac{1}{3} \ln 13.$$

Теорема 7.3 (заміна змінних у визначеному інтегралі).

Нехай $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a, b]$, $x = \varphi(t)$ монотонна та має неперервну похідну $\varphi'(t)$ на інтервалі $[t_1, t_2]$, до того ж $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$, тоді $\int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$.

Доведення.

Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на інтервалі $[a, b]$, тоді за формулою Ньютона – Лейбніца $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Через те, що $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$, то $F(\varphi(t))$ є первісною для функції $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ при $t \in [t_1, t_2]$.

Тоді за формулою Ньютона – Лейбніца маємо:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Теорема доведена.

Приклад 7.2.

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+4x}} dx = \left\| \begin{array}{l} t = \sqrt{1+4x}, x = \frac{1}{4}(t^2 - 1), \quad x_n = 0, 1 = t^2, t = 1, \\ t > 0, \quad dx = \frac{1}{2} t dt, \quad x_e = 2, 9 = t^2, t = 3 \end{array} \right\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{1}{4} (t^2 - 1) \cdot t dt = \frac{1}{8} \int_1^3 (t^2 - 1) dt = \\
&= \frac{1}{8} \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^3 = \frac{1}{8} \left(\frac{27}{3} - 3 - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{26}{3} - 2 \right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{20}{3} = \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

Теорема 7.4 (інтегрування частинами у визначеному інтегралі).

Якщо функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ мають неперервні похідні на інтервалі $[a, b]$, то має місце формула:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Доведення. На інтервалі $[a, b]$ має місце рівність $(uv)' = u'v + uv'$. Отже, функція uv є первісною для неперервної функції $u'v + uv'$. Тоді за формулою Ньютона – Лейбніца: $\int_a^b (u'v + uv') dx = uv \Big|_a^b$. З

цієї рівності отримуємо: $\int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b \Rightarrow \int_a^b v du + \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b$.

Остаточнo маємо $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$. Теорема доведена.

Застосування цієї формули мало чим відрізняється від застосування відповідної формули для невизначеного інтеграла.

Приклад 7.3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \sin 2x dx = \left\| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \sin 2x dx, \\ du = dx, \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right\| = x \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= x \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx = x \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} + 0 + \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin 0 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Теорема 7.5 (інтегрування парних та непарних функцій на симетричному інтервалі).

Нехай функція $f(x)$ інтегрована на інтервалі $[-a, a]$, тоді

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{якщо } f(x) \text{ парна функція,} \\ 0, & \text{якщо } f(x) \text{ непарна функція.} \end{cases}$$

Доведення. За властивістю адитивності:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

До першого інтегралу застосуємо підстановку $x = -t$, тоді $dx = -dt$. Маємо:

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx$$

(згідно з означенням інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування). Отже, отримуємо:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(-x) dx = \int_0^a (f(x) + f(-x)) dx.$$

Якщо функція $f(x)$ парна, тобто $f(-x) = f(x)$ та $f(x) + f(-x) = 2f(x)$. Якщо функція $f(x)$ непарна, тобто $f(-x) = -f(x)$ та $f(x) + f(-x) = 0$. Теорема доведена.

Приклад 7.4. $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^6 \cdot \sin^3 x \, dx.$

Розв'язання. Межі інтегрування симетричні. Перевіримо функцію на парність:

$$f(-x) = (-x)^6 \cdot \sin^3(-x) = x^6 \cdot (-\sin x)^3 = -x^6 \cdot \sin^3 x = -f(x).$$

Отже, функція непарна і $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^6 \cdot \sin^3 x dx = 0$.

Приклад 7.5. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(x^2 \cdot \sin 5x + \cos \frac{x}{3} + \operatorname{tg}^3 x \right) dx$.

Розв'язання. Межі інтегрування симетричні. Зазначимо, що інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів. Дослідимо кожен доданок підінтегральної функції на парність.

$$f(-x) = (-x)^2 \cdot \sin 5(-x) = x^2 (-\sin 5x) = -f(x).$$

Отже, функція непарна і $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \cdot \sin 5x dx = 0$.

$$f(-x) = \cos \frac{-x}{3} = \cos \frac{x}{3} = f(x).$$

Отже, функція парна і

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos \frac{x}{3} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos \frac{x}{3} dx = 6 \sin \frac{x}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 6 \sin \frac{\pi}{9}.$$

$$f(-x) = \operatorname{tg}^3(-x) = -\operatorname{tg}^3 x = -f(x).$$

Отже, функція непарна і $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^3 x dx = 0$.

Відповідь: $6 \sin \frac{\pi}{9}$.

Застосування визначеного інтеграла Обчислення площі плоских фігур

Існує велика кількість прикладних задач, для розв'язання яких використовують визначені інтеграли. В чому полягає ідея застосування визначених інтегралів до розв'язання прикладних задач?

Властивості (геометричні або фізичні) об'єкту, що досліджуються в загальному випадку змінюються при переході від точки до точки. Застосування інтегрального підходу до дослідження кількісних характеристик таких об'єктів полягає у наступному:

- роздрібнення об'єкта на довільні складові частини;
- визначення наближеного значення шуканої характеристики кожної частини в припущенні, що її властивості визначаються властивостями в певній вибірковій точці;
- визначення наближеного значення шуканої характеристики усього об'єкта через складання інтегральної суми, тобто підсумовування значень характеристики окремих частин об'єкта;
- через граничний перехід в інтегральній сумі за умовою, що найбільший з лінійних розмірів складових частин прямує до нуля, а кількість складових частин необмежено зростає, отримати точну кількісну характеристику об'єкта;
- заміна границі інтегральної суми інтегралом та визначення шуканої числової характеристики об'єкта через обчислення інтеграла.

Обчислення площі плоских фігур в декартовій системі координат

Як було зазначено вище, площа криволінійної трапеції обчислюється за допомогою визначеного інтегралу. Розглянемо різні випадки.

1. Якщо неперервна крива в декартовій системі координат задана рівнянням $y = f(x)$, де $f(x) \geq 0$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої цією кривою, двома вертикальними прямими $x = a$ та $x = b$ та відрізком осі Ox ($a \leq x \leq b$) (рисунк 1.4) обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

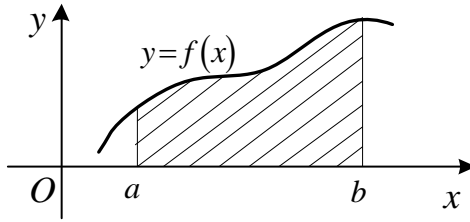


Рисунок 1.4

2. Якщо необхідно обчислити площу фігури, що обмежена лініями

$y = f(x)$, $(f(x) \leq 0)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, (рисунок 1.5) то користуємось

формулою: $S = -\int_a^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx$.

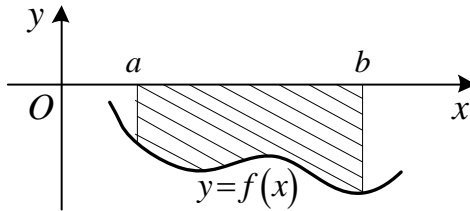


Рисунок 1.5

3. У тому випадку, якщо $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$ неперервні функції, визначені на інтервалі $[a, b]$ і $f(x) \geq \varphi(x)$ (рисунок 1.6), то

площа даної фігури обчислюється за формулою: $S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx$.

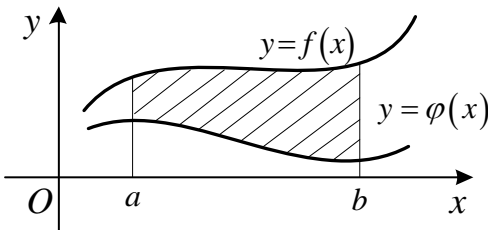


Рисунок 1.6

4. У випадку, якщо $x = \psi(y)$ та $x = \varphi(y)$ неперервні функції, визначені на інтервалі $y \in [c, d]$ і $\psi(y) \leq \varphi(y)$ (рисунок 1.7), то площа даної фігури обчислюється за формулою: $S = \int_c^d (\varphi(y) - \psi(y)) dy$.

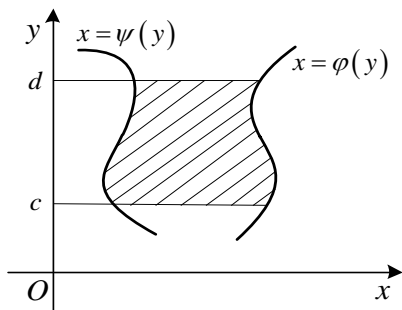


Рисунок 1.7

Якщо плоска фігура має «складну» форму (рисунок 1.8), то прямими, які є паралельними осі Oy її слід розбити на частини так, щоб можна було застосувати відомі формули.

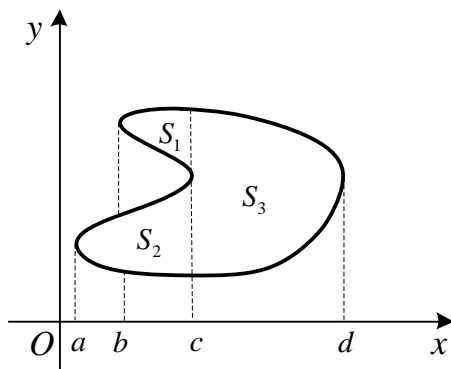


Рисунок 1.8

Слід зазначити, що при розв'язанні прикладів перш за все необхідно зробити рисунок фігури і визначитися з формулою, за допомогою якої зручно обчислити площу цієї фігури.

Приклад 7.6. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y = x + 1$, $y = \cos x$, $y = 0$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рисунок 1.9).

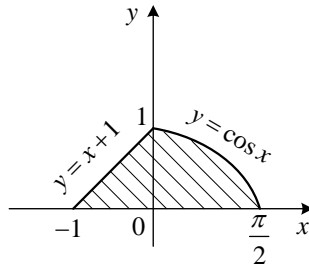


Рисунок 1.9

Очевидно, що функція $y = f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0, \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$

неперервна для $x \in \left[-1, \frac{\pi}{2}\right]$. Площа цієї криволінійної трапеції складається з двох площ, які поєднуються в одну.

$$S = \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-1}^0 (x+1) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{3}{2}.$$

Відповідь: $\frac{3}{2}$.

Приклад 7.7. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y^2 = x + 3$, $y^2 = 5 - x$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рисунок 1.10).

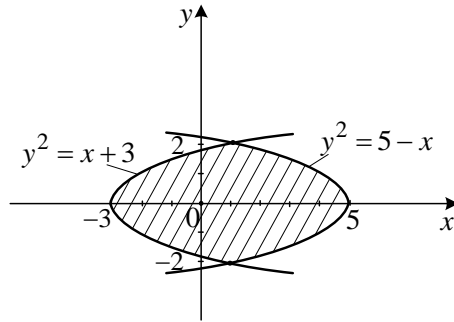


Рисунок 1.10

Обчислимо координати точок перетину кривих. Розглянемо систему

$$\begin{cases} y^2 = x + 3, \\ y^2 = 5 - x. \end{cases} \quad x + 3 = 5 - x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = \pm 2.$$

Ці числа є межами інтегрування. Таким чином,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 \left(5 - y^2 - (y^2 - 3) \right) dy = 2 \int_0^2 (8 - 2y^2) dy = 4 \left(4y - \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^2 = \\ &= 4 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = 4 \cdot \frac{16}{3} = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{64}{3}$.

Обчислення площі плоских фігур, якщо крива задана параметрично

Площа криволінійної трапеції, що обмежена кривою, яка задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ двома прямими $x = a$, $x = b$ та відрізком осі Ox ($a \leq x \leq b$) обчислюється за формулою:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t) dt,$$

при цьому межі інтегрування t_1, t_2 визначаються з рівностей $x(t_1) = a, x(t_2) = b$.

Приклад 7.8. Обчислити площу фігури, яка обмежена першою аркою циклоїди

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

та відрізком осі Ox .

Розв'язання. Зробимо рисунок циклоїди (рисунок 1.11).

Точкам O та A відповідають значення параметра $t = 0, t = 2\pi$, тому за наведеною вище формулою:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot [a(t - \sin t)]' dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = a^2 \left(\frac{3t}{2} - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

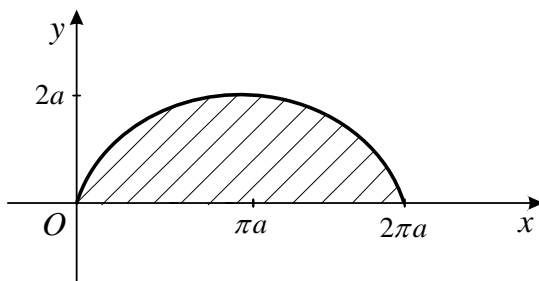


Рисунок 1.11

Відповідь: $3\pi a^2$.

Лекція 8

ПОЛЯРНА СИСТЕМА КООРДИНАТ. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ПЛОСКОЇ ФІГУРИ В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ ТА ОБЧИСЛЕННЯ ДОВЖИНИ ДУГИ ПЛОСКОЇ КРИВОЇ

Задамо на площині точку O та промінь OM , який виходить з цієї точки. Точка O називається полюсом, а промінь OM – полярною віссю. Розташування довільної точки P на площині визначається координатами ρ, φ , де $\rho = |\overline{OP}|$, а φ – кут, утворений \overline{OP} та полярною віссю. Кут φ змінюється $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ або $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Кут φ вважається додатним, якщо відраховується від полярної осі проти годинникової стрілки, та від'ємним у протилежному випадку. Тоді кожній точці P відповідає пара чисел (ρ, φ) . Винятком є полюс, для якого $\rho = 0$, а φ довільне.

Обернене є вірним: кожній парі чисел (ρ, φ) відповідає єдина точка P площини. Числа (ρ, φ) називають полярними координатами точки P .

Зв'язок між декартовими та полярними координатами

Нехай задана декартова система координат та полярна вісь з полюсом у початку координат та полярною віссю, яка збігається з віссю абсцис. Розташування довільної точки P на площині визначається декартовими координатами $P(x, y)$.

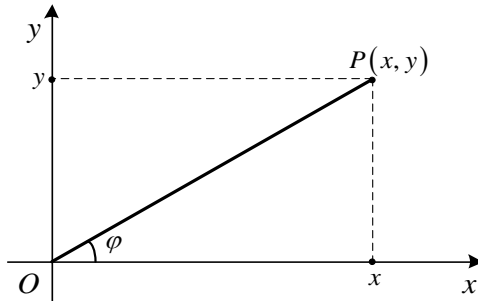


Рисунок 1.12

З іншого боку:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

$$\text{де } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Обчислення площі плоскої фігури в полярній системі координат

Означення 1. Фігура, яка обмежена неперервною лінією $\rho = \rho(\varphi)$ та двома променями $\varphi = \alpha$ та $\varphi = \beta$ називається криволінійним сектором (рисунок 1.13).

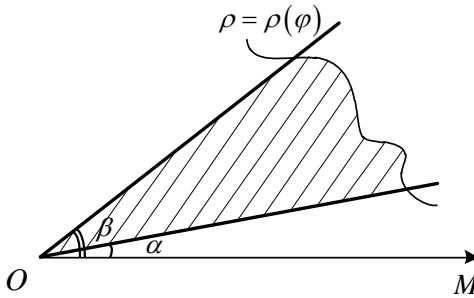


Рисунок 1.13

Теорема 8.1. Площа криволінійного сектора обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Доведення. Розділимо криволінійний сектор радіус-векторами на n довільних елементарних секторів (рисунок 1.14).

Розглянемо площу ΔS_k елементарного криволінійного сектора, який обмежено променями $\varphi = \varphi_k$ та $\varphi = \varphi_{k-1}$.

Позначимо $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, а також m_k та M_k – найменше та найбільше значення функції $\rho = \rho(\varphi)$ в проміжку $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$ відповідно.

Очевидно, що ΔS_k міститься між площами двох кругових секторів розхилу $\Delta\varphi_k$ з радіусами m_k та M_k . Тобто

$$\frac{1}{2}m_k^2\Delta\varphi_k \leq \Delta S_k \leq \frac{1}{2}M_k^2\Delta\varphi_k.$$

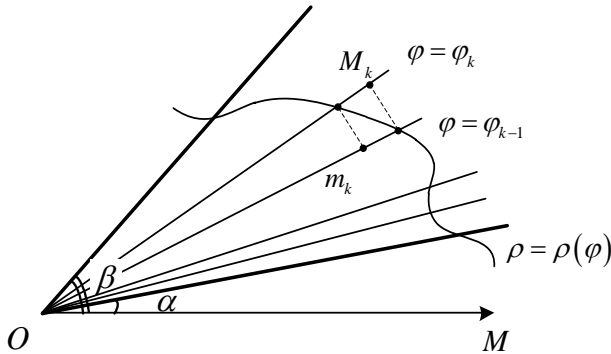


Рисунок 1.14

Позначимо C_k певне число ($m_k \leq C_k \leq M_k$) таке, що $\Delta S_k = \frac{1}{2}C_k^2\Delta\varphi_k$. Через неперервність в проміжку $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$ функція $\rho = \rho(\varphi)$ приймає усі значення між m_k та M_k , отже $\exists \xi_k \in (\varphi_{k-1}, \varphi_k) : \rho(\xi_k) = C_k$. Таким чином, $\Delta S_k = \frac{1}{2}\rho^2(\xi_k)\Delta\varphi_k$.

В результаті отримано:

$$S = \lim_{\max \Delta\varphi_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}\rho^2(\xi_k)\Delta\varphi_k = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \text{ Теорема доведена.}$$

Приклад 8.1. Обчислити площу фігури, яка обмежена лемніскою Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)^2$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури (рисунок 1.15).

До рівняння лемніскати x та y входять у парному степені, а це означає, що фігура є симетричною відносно координатних осей. Отже, достатньо побудувати фігуру в I чверті, а потім, враховуючи симетрію, зобразити всю фігуру.

В даному випадку доцільно перейти до полярної системи координат. Враховуючи зв'язок між декартовими і полярними

координатами $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$ рівняння кривої набуває вигляду:

$$(\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)^2 = a^2 (\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi),$$

$$(\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi))^2 = a^2 (\rho^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)),$$

$$\rho^4 = a^2 \rho^2 \cos 2\varphi \Rightarrow \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

При переході від декартових координат до полярних були використані відомі тригонометричні формули. Слід зауважити, що при здобутті кореня парного степеню враховано, що $\rho > 0, a > 0$.

Допустимими значеннями для φ є ті, при яких $\cos 2\varphi \geq 0$:

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow -\frac{\pi}{4} + \pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Побудуємо таблицю, в якій φ будемо надавати довільні значення і обчислювати відповідні значення ρ :

φ	ρ
0	$\rho = a\sqrt{\cos 0} = a$
$\frac{\pi}{12}$	$\rho = a\sqrt{\cos \pi/6} = a\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 0,93a$
$\frac{\pi}{6}$	$\rho = a\sqrt{\cos \pi/3} = a\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,71a$
$\frac{\pi}{4}$	$\rho = a\sqrt{\cos \pi/2} = 0$

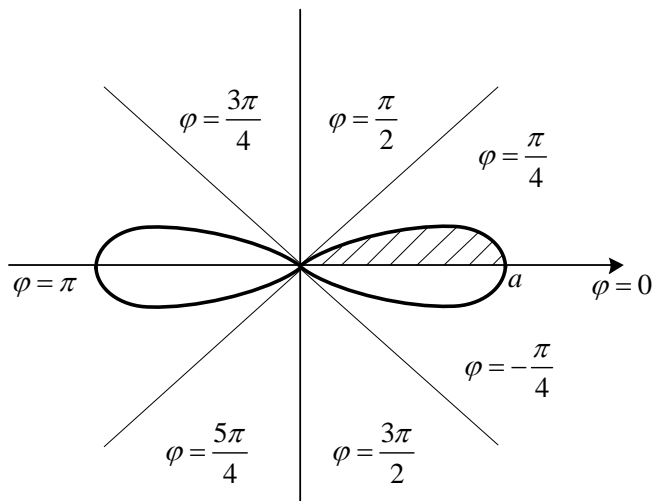


Рисунок 1.15

Остаточно маємо:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = 2a^2 \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = a^2.$$

Відповідь: a^2 .

Обчислення довжини дуги плоскої кривої

1. Обчислення довжини дуги плоскої кривої в декартовій системі координат.

Означення 2. Границя, до якої прямує довжина ламаної лінії, що вписана в дугу певної кривої, за умови, що кількість ланок ламаної необмежено зростає, а довжина найбільшої ланки прямує до нуля, називається довжиною дуги кривої.

Розглянемо дугу AB певної кривої $y = f(x)$. Впишемо в неї ламану лінію (рисунок 1.16).

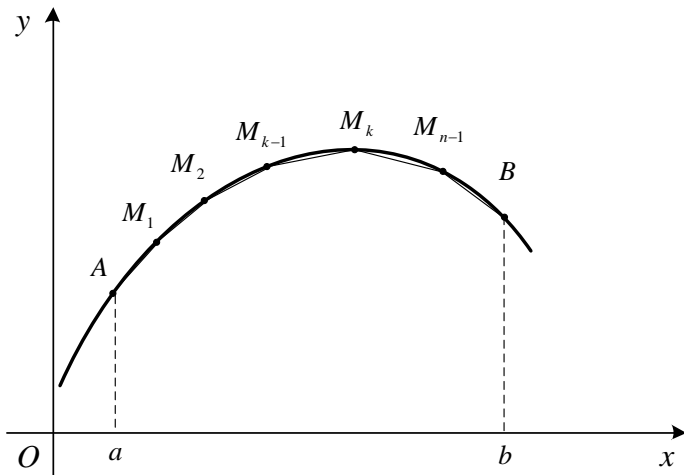


Рисунок 1.16

Позначимо l_n периметр ламаної, а Δl_k ($k=1, \dots, n$) – довжини елементарних відрізків ламаної. Отримуємо $l_n = \sum_{k=1}^n \Delta l_k$. За означенням,

довжина l дуги AB обчислюється так: $l = \lim_{\max \Delta l_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta l_k$.

Теорема 8.2. Нехай крива AB задана рівнянням $y = f(x)$ до того ж $y = f(x)$ має неперервну похідну на інтервалі $[a, b]$, тоді довжина l дуги AB обчислюється за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Доведення.

Розділимо інтервал $[a, b]$ довільним чином на n частин:

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b \quad (a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b) \quad (\text{рисунок 1.17}).$$

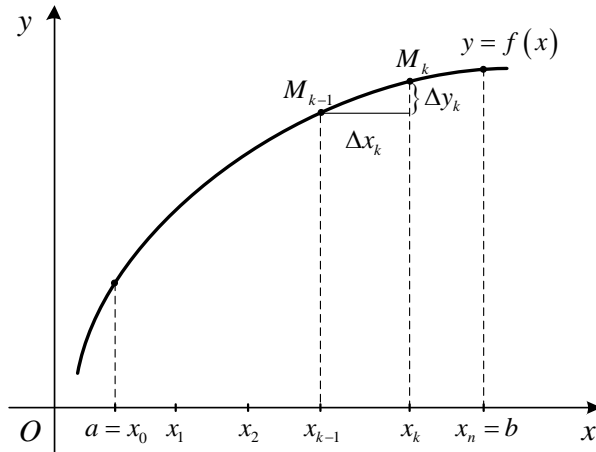


Рисунок 1.17

Позначимо $y_k = f(x_k)$ ($k = 1, \dots, n$). Довжина відрізка $M_{k-1}M_k$

$$\Delta l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}.$$

За теоремою Лагранжа:

$$y_k - y_{k-1} = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \text{ де } \xi_k \in (x_{k-1}, x_k).$$

Звідси

$$\Delta l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f'(\xi_k))^2 (x_k - x_{k-1})^2} = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k.$$

Таким чином,

$$l = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta l_k = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Теорема доведена.

Слід зазначити, що аналогічна формула справедлива для кривої $x = x(y)$, де $x'(y)$ неперервна, а c, d – ординати кінців дуги:

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy.$$

Приклад 8.2. Обчислити довжину дуги лінії:

$$y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin \sqrt{x}, \quad \frac{1}{4} \leq x \leq 1.$$

Розв'язання. Знайдемо

$$y'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1-2x+1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x)}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{1-x}{x}};$$
$$\sqrt{1+(y'(x))^2} = \sqrt{1+\frac{1-x}{x}} = \sqrt{\frac{x+1-x}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Таким чином, $l = \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_{\frac{1}{4}}^1 = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1.$

Відповідь: 1.

2. Обчислення довжини дуги плоскої кривої, яка задана параметрично.

Нехай незамкнена, несамоперетинна крива задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

до того ж точкам A і B відповідають значення параметрів $t = \alpha$ та $t = \beta$ ($\alpha < \beta$). Припускаємо, що значенням параметру t з проміжку $[\alpha, \beta]$ взаємно однозначно відповідають точки кривої.

Теорема 8.3. Нехай функції $x = x(t)$ та $y = y(t)$ мають на проміжку $[\alpha, \beta]$ неперервні похідні, тоді довжина дуги AB обчислюється за формулою:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

Доведення.

Припустимо, що $x'_t \neq 0$. Скористаємось формулою для обчислення довжини дуги в декартових координатах та зробимо заміну

змінних: $x = x(t)$ $dx = x'_t dt$. За правилом $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. Отже, отримуємо

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2} x'_t dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

Теорема доведена.

Приклад 8.3. Обчислити довжину дуги першої арки циклоїди

$$\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Розв'язання.

Оскільки $x'_t = 5(1 - \cos t)$, $y'_t = 5 \sin t$,

$$\begin{aligned} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} &= \sqrt{25(1 - \cos t)^2 + 25 \sin^2 t} = 5\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = \\ &= 5\sqrt{2 - 2\cos t} = 5\sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}} = 10 \left| \sin \frac{t}{2} \right| = 10 \sin \frac{t}{2} \quad (\text{за умовою } 0 \leq t \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq \frac{t}{2} \leq \pi). \\ l &= \int_0^{2\pi} 10 \sin \frac{t}{2} dt = 10 \cdot 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = -20 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -20(\cos \pi - \cos 0) = \\ &= -20(-1 - 1) = 40. \end{aligned}$$

Відповідь: 40.

3. Обчислення довжини дуги плоскої кривої, яка задана в полярних координатах.

Випадок задання кривої в полярній системі координат $\rho = \rho(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$) зводиться до попереднього випадку за

допомогою формул
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi = \rho(\varphi) \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi = \rho(\varphi) \sin \varphi. \end{cases}$$

Роль параметра тут відіграє φ . Припустимо, що $\rho(\varphi)$ та $\rho'(\varphi)$ неперервні на $[\alpha, \beta]$. Обчислимо похідні x'_φ та y'_φ :

$$\begin{cases} x'_\varphi = \rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi, \\ y'_\varphi = \rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{aligned} (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 &= (\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi)^2 + (\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi)^2 = \\ &= (\rho' \cos \varphi)^2 - 2\rho' \cos \varphi \rho \sin \varphi + (\rho \sin \varphi)^2 + (\rho' \sin \varphi)^2 + \\ &+ 2\rho' \sin \varphi \rho \cos \varphi + (\rho \cos \varphi)^2 = \\ &= (\rho')^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = (\rho')^2 + \rho^2. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} d\varphi.$$

Приклад 8.4. Обчислити довжину дуги лінії

$$\rho = 3(1 + \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Розв'язання. Для обчислення довжини заданої дуги лінії скористаємось наведеною вище формулою. Для цього обчислимо

$$\rho'(\varphi) = 3 \cos \varphi,$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} &= \sqrt{9(1 + \sin \varphi)^2 + 9 \cos^2 \varphi} = 3\sqrt{1 + 2 \sin \varphi + \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = \\ &= 3\sqrt{2} \sqrt{1 + \sin \varphi} = 3\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = 3\sqrt{2} \sqrt{2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = 6 \left| \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| = \\ &= \left\| \text{за умовою } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\| = 6 \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Остаточно отримуємо:

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6 \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) d\varphi = -12 \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -12 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{4} \right) = 6\sqrt{2}.$$

Відповідь: $6\sqrt{2}$.

Лекція 9

ОБЧИСЛЕННЯ ОБ'ЄМІВ ТІЛ ЗА ДОПОМОГОЮ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Обчислення об'ємів тіл за їх поперечними перерізами

Позначимо через V об'єм даного тіла та припустимо, що нам відомі площі усіх перерізів тіла площинами, які є перпендикулярними осі Ox .

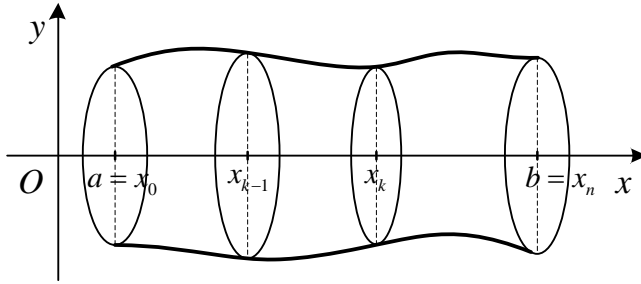


Рисунок 1.18

Очевидно, площа перерізів є певною функцією від x , яку ми позначимо $S(x)$. Позначимо через a та b абсциси крайніх перерізів тіла.

Теорема 9.1. Нехай $S(x)$ неперервна на $[a, b]$, тоді

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

Доведення.

Поділимо інтервал $[a, b]$ довільним чином на n частин: $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ ($a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$). Через точки поділу проведемо площини, які перпендикулярні осі Ox . Ці площини розрізають тіло на n шарів з об'ємами $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$. Розглянемо один з таких шарів, що утворився між площинами, які проходять через точки з

абсцисами x_{k-1} та x_k . Позначимо m_k та M_k найменше та найбільше значення функції $S(x)$ на елементарному проміжку $[x_{k-1}, x_k]$. Очевидно, ΔV_k міститься між об'ємами двох прямих циліндрів висотою Δx_k та площами основ m_k та M_k відповідно, тобто $m_k \Delta x_k \leq \Delta V_k \leq M_k \Delta x_k$. Очевидно, що $\Delta V_k = S(\xi_k) \Delta x_k$, де $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$.

$$\text{Таким чином, } V = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n S(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b S(x) dx.$$

Теорема доведена.

Приклад 9.1. Обчислити об'єм тіла, обмеженого еліпсоїдом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (рисунок 1.19).}$$

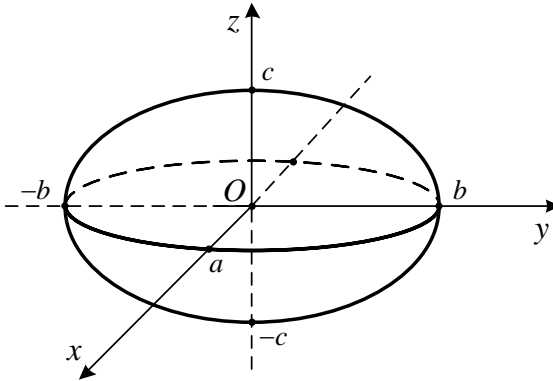


Рисунок 1.19

Розв'язання. При розтині еліпсоїда площиною, яка паралельна площині xOy та віддалена на відстань z від неї, отримуємо еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2} \text{ або } \frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} = 1.$$

Піввісі еліпса $a_1 = a \sqrt{\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)}$, $b_1 = b \sqrt{\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)}$.

Площа еліпса обчислюється за формулою $S(z) = \pi a_1 b_1 = \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$. Через симетрію еліпсоїда $V = 2V_1$.

Обчислимо V_1 :

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^c \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \pi ab \left(\int_0^c dz - \frac{1}{c^2} \int_0^c z^2 dz \right) = \pi ab \left(z \Big|_0^c - \frac{1}{c^2} \frac{z^3}{3} \Big|_0^c \right) = \\ &= \pi ab \left(c - \frac{1}{c^2} \frac{c^3}{3} \right) = \pi ab \left(c - \frac{c}{3} \right) = \frac{2\pi abc}{3}. \end{aligned}$$

Остаточно отримуємо $V = \frac{4\pi abc}{3}$.

Обчислення об'ємів тіл обертання

Розглянемо криволінійну трапецію з основою $[a, b]$, яка обмежена кривою $y = f(x)$ та прямими $x = a, x = b, y = 0$. У випадку, коли крива $y = f(x)$ обертається навколо осі Ox , отримуємо тіло обертання (рисунок 1.20).

Поперечні перерізи цього тіла є круги з радіусом $R = f(x)$, тому площа поперечного перерізу $S(x) = \pi R^2 = \pi (f(x))^2$, а об'єм тіла обертання

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

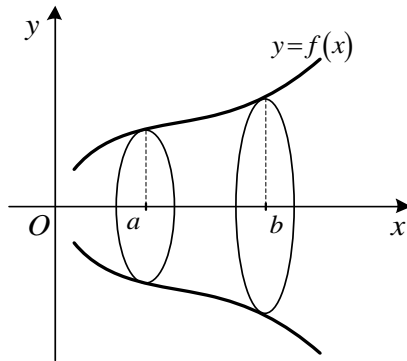


Рисунок 1.20

Аналогічно отримуємо формулу для обчислення об'єму тіла, коли криволінійна трапеція, яка обмежена лініями $x = x(y)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$ (рисунок 1.21), обертається навколо осі Oy :

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d (x(y))^2 dy .$$

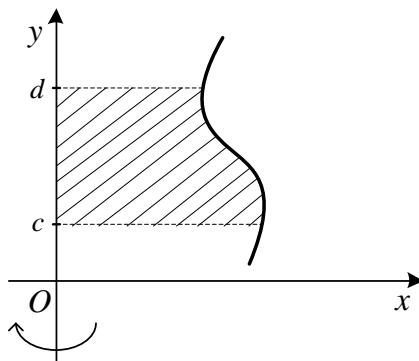


Рисунок 1.21

Приклад 9.2. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Ox фігури, що обмежена лініями $2y = x^2$, $2x + 2y - 3 = 0$.

Розв'язання. Зробимо креслення фігури, яка обмежена заданими лініями (рисунок 1.22).

Об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі Ox фігури, яка обмежена заданими лініями можна розглядати як різницю об'ємів V_1 і V_2 , де V_1 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Ox криволінійної трапеції, що обмежена прямою $y = -x + \frac{3}{2}$, а V_2 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Ox криволінійної трапеції, що обмежена параболою $y = \frac{1}{2}x^2$.

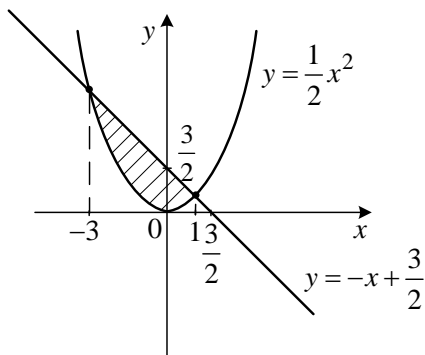


Рисунок 1.22

Знайдемо границі інтегрування – абсиси точок перетину прямої і параболи. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2, \\ y = -x + \frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Маємо: } \frac{1}{2}x^2 = -x + \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -3.$$

Використовуючи відповідну формулу, можна записати:

$$V_{ox} = V_1 - V_2 = \pi \int_{-3}^1 \left(-x + \frac{3}{2}\right)^2 dx - \pi \int_{-3}^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 dx = -\pi \left[\frac{\left(-x + \frac{3}{2}\right)^3}{3} \right]_{-3}^1 - \pi \frac{x^5}{4 \cdot 5} \Big|_{-3}^1 =$$

$$= -\frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{8} - \frac{729}{8} \right) - \frac{\pi}{20} (1 + 243) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{728}{8} - \frac{244\pi}{20} = \pi \left(\frac{91}{3} - \frac{61}{5} \right) = \frac{272}{15} \pi.$$

Відповідь: $\frac{272}{15} \pi$.

Приклад 9.3. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Oy фігури, що обмежена лініями $x = 1 - y^2$, $x = 9 - 9y^2$.

Розв'язання. Зробимо креслення фігури, яка обмежена заданими параболою (рисунок 1.23).

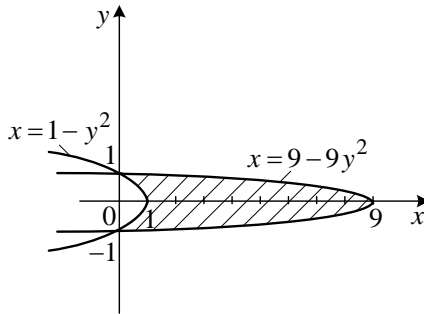


Рисунок 1.23

Об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі Oy фігури, що обмежена заданими лініями, можна розглядати як різницю об'ємів V_1 і V_2 , де V_1 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Oy криволінійної трапеції, що обмежена параболою $x = 9 - 9y^2$, а V_2 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Oy криволінійної трапеції, що обмежена параболою $x = 1 - y^2$.

Використовуючи відповідну формулу, можна записати:

$$\begin{aligned} V_{OY} &= V_1 - V_2 = \pi \int_{-1}^1 9^2 (1 - y^2)^2 dy - \pi \int_{-1}^1 (1 - y^2)^2 dy = 80\pi \int_{-1}^1 (1 - 2y^2 + y^4) dy = \\ &= 160\pi \left(y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^1 = 160\pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = 160\pi \frac{15 - 10 + 3}{15} = \frac{256}{3} \pi. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{256}{3} \pi$.

Лекція 10

НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де проміжок інтегрування $[a, b]$ є скінченним, а функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$ називається власним інтегралом. Розглянемо так звані невластні інтеграли.

1. Невласні інтеграли I роду.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a, +\infty)$. Розглянемо визначений інтеграл з неперервною верхньою границею T :

$\int_a^T f(x)dx$, де $T > a$. Очевидно, цей інтеграл є функцією від T . За

означенням $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T f(x)dx$.

Якщо ця границя існує, то кажуть, що невластний інтеграл збігається, в протилежному випадку кажуть, що інтеграл розбігається. Аналогічно вводяться невластні інтеграли вигляду:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{T_1 \rightarrow -\infty} \int_{T_1}^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{T_1 \rightarrow -\infty} \int_{T_1}^a f(x)dx + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{T_1}^T f(x)dx.$$

Геометричний зміст невластного інтеграла

Якщо графік функції $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$) обмежує криволінійну трапецію з нескінченною основою та якщо невластний інтеграл збігається, то площа криволінійної трапеції обчислюється за допомогою невластного інтегралу I роду: $S = \int_a^\infty f(x)dx$ (рисунок 1.24).

Теорема 10.1. Нехай $F(x)$ первісна неперервної функції $f(x)$ на інтервалі $[a, +\infty)$. Тоді невластний інтеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ збігається тоді та тільки тоді, коли існує скінченна границя $\lim_{T \rightarrow \infty} F(T)$.

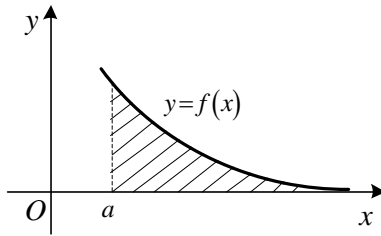


Рисунок 1.24

Доведення. За означенням:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} (F(T) - F(a)) = \lim_{T \rightarrow \infty} F(T) - F(a). \quad 3 \quad \text{цієї}$$

рівності витікає умова теореми.

Теорема доведена.

Приклад 10.1. Дослідити на збіжність $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$.

$$\text{Розв'язання. } F(x) = \begin{cases} \ln|x|, & \text{при } p = 1, \\ \frac{x^{1-p}}{1-p}, & \text{при } p \neq 1. \end{cases}$$

$$\text{Розглянемо } \lim_{x \rightarrow \infty} F(x): \lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x| = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} 0, & p > 1, \\ \infty, & p < 1. \end{cases}$$

Остаточно маємо: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ збігається при $p > 1$ та розбігається при $p \leq 1$.

Приклад 10.2. Дослідити на збіжність невластний інтеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}.$$

Розв'язання. Користуючись означенням, можна записати

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T \frac{dx}{(x+2)^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \lim_{T \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} \Big|_1^T =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{T+2}{3} - \operatorname{arctg} 1 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{12}.$$

Отже, інтеграл збігається і дорівнює $\frac{\pi}{12}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{12}$.

2. Невласні інтеграли II роду.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a, b)$, а в точці $x = b$ має нескінченний розрив. Очевидно, визначений інтеграл

$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ ($\varepsilon > 0$) є функцією від ε . Якщо існує скінченна границя

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$, то інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ називають невластним інтегралом II

роду. Таким чином, за означенням $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$. Якщо

границя в правій частині даної рівності існує, то невластний інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ називають збіжним, в протилежному випадку – розбіжним.

Аналогічним чином вводяться невластні інтеграли II роду для випадків, коли $x = a$ – точка нескінченного розриву, або $x = c \in (a, b)$ є точкою нескінченного розриву:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \quad \text{або} \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx.$$

Теорема 10.6. Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a, b)$, а в точці $x = b$ має нескінченний розрив, а функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на інтервалі $[a, b)$. Тоді невластний інтеграл

$\int_a^b f(x)dx$ збігається в тому та тільки в тому випадку, якщо існує скінченна границя $\lim_{x \rightarrow b-0} F(x)$.

Теорема доведена.

Приклад 10.4. Дослідити на збіжність $\int_1^e \frac{dx}{x \ln^3 x}$

Розв'язання. Підінтегральна функція необмежена в околі точки $x=1$ та є інтегрованою на будь-якому відрізку $[1+\varepsilon; e]$ ($\varepsilon > 0$) тому, що вона неперервна.

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{dx}{x \ln^3 x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2 \ln^2 x} \right) \Big|_{1+\varepsilon}^e = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2 \ln^2 e} + \frac{1}{2 \ln^2 (1+\varepsilon)} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} + \infty = \infty. \end{aligned}$$

Відповідь: інтеграл розбігається.

Наслідок. Якщо $F(x)$ неперервна на інтервалі $[a, b]$, то має місце формула Ньютона – Лейбніца: $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Приклад 10.5. Дослідити на збіжність $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання. При $x=1$ підінтегральна функція має нескінченний розрив. Однак, первісна $\arcsin x$ є неперервною функцією на $[0, 1]$. Застосовуючи формулу Ньютона – Лейбніца маємо:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: інтеграл збігається і дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

РОЗДІЛ II

ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Практичне заняття 1

ТАБЛИЧНІ ІНТЕГРАЛИ.

ІНВАРІАНТНІСТЬ ФОРМУЛ ІНТЕГРУВАННЯ

Контрольні питання

1. Поняття первісної, означення невизначеного інтеграла. Властивості невизначеного інтеграла. Табличні інтеграли.
2. Теорема про інваріантність формул інтегрування.
3. Теорема про заміну змінної у невизначеному інтегралі.

Як відомо, основною задачею диференціального числення є знаходження похідної заданої функції. Основним завданням інтегрального числення є задача обернена – за відомою заданою похідною знайти саму функцію.

Згідно з теоретичним матеріалом

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ де } F'(x) = f(x).$$

Методичні рекомендації до практичного заняття

Розглянемо табличний інтеграл $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1,$

та знайдемо:

$$\mathbf{1.1.} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C; \mathbf{1.2.} \int x^8 dx = \frac{x^9}{9} + C; \mathbf{1.3.} \int \frac{dx}{x^5} = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C;$$

$$\mathbf{1.4.} \int \frac{dx}{x^9} = \int x^{-9} dx = \frac{x^{-8}}{-8} + C; \mathbf{1.5.} \int \sqrt[7]{x^8} dx = \int x^{8/7} dx = \frac{7x^{15/7}}{15} + C;$$

$$1.6. \int \sqrt[5]{x^2} dx = \int x^{2/5} dx = \frac{5x^{7/5}}{7} + C; \quad 1.7. \int \frac{dx}{\sqrt{x^9}} = \int x^{-9/2} dx = -\frac{2x^{-7/2}}{7} + C;$$

$$1.8. \int \frac{dx}{\sqrt[11]{x^8}} = \int x^{-8/11} dx = \frac{11x^{3/11}}{3} + C.$$

Враховуючи теореми 1.2 та 1.3 властивість лінійності невизначеного інтеграла набуває вигляду

$$\int [\alpha f(x) \pm \beta \varphi(x)] dx = \alpha \int f(x) dx \pm \beta \int \varphi(x) dx.$$

Знайдемо:

$$1.9. \int (3x^4 - 7x^2 + 5) dx = \frac{3x^5}{5} - \frac{7x^3}{3} + 5x + C;$$

$$1.10. \int \left(\frac{13}{x^7} + 4x^3 - \frac{5}{\sqrt{x}} \right) dx = \int (13x^{-7} + 4x^3 - 5x^{-1/2}) dx = \\ = \frac{13x^{-6}}{-6} + x^4 - 10x^{1/2} + C;$$

$$1.11. \int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}} dx = \int \frac{2}{\sqrt{x^3}} dx + \int \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}} dx + \int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}} dx = \\ = 2 \int x^{-3/2} dx + 3 \int x^{2/3 - 3/2} dx + \int x^{1/4 - 3/2} dx = 2 \int x^{-3/2} dx + 3 \int x^{-5/2} dx + \\ + \int x^{-5/4} dx = 2 \left(-2 \frac{1}{\sqrt{x}} \right) + 3 \left(-10 \frac{1}{10\sqrt{x}} \right) - 4 \frac{1}{4\sqrt{x}} + C;$$

$$1.12. \int \frac{(1 + \sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[4]{x}} dx = \int \frac{1 + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + 2 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}} \right) dx = \\ = \int x^{-1/4} dx + 2 \int x^{1/2} dx + \int x^{5/2} dx = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + \frac{24}{13} \sqrt[12]{x^{13}} + \frac{12}{17} \sqrt[12]{x^{17}} + C.$$

Використовуючи теорему 1.5 знайдемо:

$$1.13. \int e^{7x-2} dx = \frac{1}{7} e^{7x-2} + C; \quad 1.14. \int 3^{7-8x} dx = -\frac{1}{8 \ln 3} 3^{7-8x} + C;$$

$$\mathbf{1.15.} \int \cos(4x+7) dx = \frac{1}{4} \sin(4x+7) + C; \quad \mathbf{1.16.} \int \frac{dx}{3+2x} = \frac{1}{2} \ln|3+2x| + C;$$

$$\mathbf{1.17.} \int \frac{dx}{4x^2+7} = \int \frac{dx}{(2x)^2 + (\sqrt{7})^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{7}} + C;$$

$$\mathbf{1.18.} \int \frac{dx}{9x^2-16} = \int \frac{dx}{(3x)^2 - 4^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} \ln \left| \frac{3x-4}{3x+4} \right| + C;$$

$$\mathbf{1.19.} \int \frac{dx}{\cos^2(5-3x)} = -\frac{1}{3} \operatorname{tg}(5-3x) + C.$$

З курсу диференціального числення відомо, що для функції $y = y(x)$ диференціал має вигляд $dy = y'(x)dx$. Говорять, що множник $y'(x)$ підведено під знак диференціала, якщо $y'(x)dx = dy$. Наприклад:

$$\cos x dx = d(\sin x), \quad -\sin x dx = d(\cos x), \quad \frac{1}{\cos^2 x} dx = d(\operatorname{tg} x),$$

$$-\frac{1}{\sin^2 x} dx = d(\operatorname{ctg} x), \quad e^x dx = d(e^x + 7), \quad \frac{1}{1+x^2} dx = d(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x),$$

$$12x^2 dx = d(4x^3 + 1), \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = d(\sqrt{x}), \quad -\frac{dx}{x^2} = d\left(\frac{1}{x}\right) \text{ і т.д.}$$

Якщо інтеграл не можна обчислити безпосередньо, то підведенням під знак диференціала в багатьох випадках можна спростити підінтегральний вираз. Використовується інваріантність формул інтегрування $\int f(u)du = F(u) + C$, де u – незалежна змінна або будь-яка функція, яка диференційована за незалежною змінною x .

Розглянемо приклади.

$$\mathbf{1.20.} \int (3x+7)^5 d(3x+7) = \frac{(3x+7)^6}{6} + C;$$

$$\mathbf{1.21.} \int (5x+8)^2 dx = \frac{1}{5} \int (5x+8)^2 5dx = \frac{1}{5} \int (5x+8)^2 d(5x+8) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x+8)^3}{3} + C = \frac{(5x+8)^3}{15} + C;$$

$$1.22. \int \sin^5 x \cos x dx = \int (\sin x)^5 d(\sin x) = \frac{(\sin x)^6}{6} + C;$$

$$1.23. \int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} (-2x) dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C;$$

$$1.24. \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}} d(x^3) = \frac{1}{3} \arcsin(x^3) + C.$$

Підведення під знак диференціала вимагає певних навичок. На практиці не завжди легко визначити, яку саме функцію вносити під знак диференціала, особливо, якщо підінтегральний вираз доволі складний або студенту недостатньо досвіду, який накопичується поступово.

Ефективним методом інтегрування є метод заміни змінної інтегрування (теорема 1.6 лекції 1). Цей метод є рівноправним з підведенням під знак диференціала. Якщо підінтегральний вираз доволі складний, значно підвищується ризик заплутатися в рішенні. В таких випадках звертаються до заміни змінної.

Для знаходження інтеграла $\int f(x)dx$ можна замінити змінну x новою змінною t , яка зв'язана з x відповідною формулою $x = \varphi(t)$. Визначивши з цієї формули диференціал $dx = \varphi'(t)dt$, та підставляючи його до інтеграла, отримуємо $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int \Phi(t)dt$.

Мета цього методу полягає в отриманні більш простого інтеграла, тобто табличного або такого, спосіб обчислення якого є відомим. Вибір вдалої формули для заміни змінної має велике значення. Але порадити одне загальне правило для вибору вдалої підстановки неможливо. Вміння обрати функцію $x = \varphi(t)$ так, щоб обчислення інтеграла спростилося, досягається великою кількістю вправ.

Розглянемо декілька прикладів, які призначаються для набуття навичок у застосуванні методу заміни змінної.

$$1.25. \int \frac{\arcsin^7 x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\| \begin{array}{l} t = \arcsin x, \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right\| = \int t^7 dt = \frac{t^8}{8} + C = \frac{\arcsin^8 x}{8} + C;$$

$$1.26. \int \frac{\sqrt[3]{\ln^5 x}}{x} dx = \left\| \begin{array}{l} t = \ln x, \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right\| = \int \sqrt[3]{t^5} dt = \int t^{\frac{5}{3}} dt = \frac{3}{8} t^{\frac{8}{3}} + C = \frac{3}{8} \sqrt[3]{\ln^8 x} + C;$$

$$1.27. \int \frac{xdx}{9x^2+2} = \left\| \begin{array}{l} t = 9x^2+2, \\ dt = 18xdx \end{array} \right\| = \frac{1}{18} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{18} \ln|t| + C = \frac{1}{18} \ln(9x^2+2) + C;$$

$$1.28. \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{5-\cos^2 x}} = \left\| \begin{array}{l} t = 5 - \cos^2 x, \\ dt = -2\cos x(-\sin x) dx = \sin 2x dx \end{array} \right\| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \\ = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{5-\cos^2 x} + C;$$

$$1.29. \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}} = \left\| \begin{array}{l} t = \operatorname{ctg} x, \\ dt = -\frac{dx}{\sin^2 x} \end{array} \right\| = -\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = -\frac{3}{2} t^{2/3} + C = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + C;$$

$$1.30. \int \operatorname{tg}(3x+5) dx = \int \frac{\sin(3x+5)}{\cos(3x+5)} dx = \left\| \begin{array}{l} t = \cos(3x+5), \\ dt = -3\sin(3x+5) dx \end{array} \right\| = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \\ = -\frac{1}{3} \ln|t| + C = -\frac{1}{3} \ln|\cos(3x+5)| + C;$$

$$1.31. \int x e^{5-3x^2} dx = \left\| \begin{array}{l} t = 5 - 3x^2, \\ dt = -6xdx \end{array} \right\| = -\frac{1}{6} \int e^t dt = -\frac{1}{6} e^{5-3x^2} + C;$$

$$1.32. \int \sin 2x \cdot e^{5\cos 2x-4} dx = \left\| \begin{array}{l} t = 5\cos 2x-4, \\ dt = -10\sin 2x dx \end{array} \right\| = -\frac{1}{10} \int e^t dt = -\frac{1}{10} e^{5\cos 2x-4} + C;$$

$$1.33. \int \frac{7^{\operatorname{arctg} 2x+5} dx}{1+4x^2} = \left\| \begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} 2x+5, \\ dt = \frac{2dx}{1+4x^2} \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \int 7^t dt = \frac{7^t}{2\ln 7} + C = \frac{7^{\operatorname{arctg} 2x+5}}{2\ln 7} + C;$$

1.34.

$$\int x^3 2^{9-5x^4} dx = \left\| \begin{array}{l} t = 9-5x^4, \\ dt = -20x^3 dx \end{array} \right\| = -\frac{1}{20} \int 2^t dt = -\frac{1}{20} \cdot \frac{2^t}{\ln 2} + C = -\frac{1}{20} \cdot \frac{2^{9-5x^4}}{\ln 2} + C;$$

1.35.

$$\int \frac{\sin \sqrt{7x+4} dx}{\sqrt{7x+4}} = \left\| \begin{array}{l} t = \sqrt{7x+4}, \\ dt = \frac{7dx}{2\sqrt{7x+4}} \end{array} \right\| = \frac{2}{7} \int \sin t dt = -\frac{2}{7} \cos t + C = -\frac{2}{7} \cos \sqrt{7x+4} + C;$$

1.36.

$$\int x \sin(3x^2 - 1) dx = \left\| \begin{array}{l} t = 3x^2 - 1, \\ dt = 6xdx \end{array} \right\| = \frac{1}{6} \int \sin t dt = -\frac{1}{6} \cos t + C = -\frac{1}{6} \cos(3x^2 - 1) + C;$$

$$1.37. \int e^x \cos(5e^x - 4) dx = \left\| \begin{array}{l} t = 5e^x - 4, \\ dt = 5e^x dx \end{array} \right\| = \frac{1}{5} \int \cos t dt = \frac{1}{5} \sin t + C = \frac{1}{5} \sin(5e^x - 4) + C;$$

$$1.38. \int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)} = \left\| \begin{array}{l} t = \ln x, \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right\| = \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\operatorname{ctg} t + C = -\operatorname{ctg}(\ln x) + C;$$

1.39.

$$\int \frac{dx}{1 + \cos 9x} = \int \frac{dt}{2 \cos^2 \frac{9x}{2}} = \left\| \begin{array}{l} t = \frac{9x}{2}, \\ dt = \frac{9}{2} dx \end{array} \right\| = \frac{2}{2 \cdot 9} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{9} \operatorname{tg} t + C = \frac{1}{9} \operatorname{tg} \frac{9x}{2} + C;$$

$$1.40. \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x} \cos^2 \sqrt{1-3x}} = \left\| \begin{array}{l} t = \sqrt{1-3x}, \\ dt = \frac{-3dx}{2\sqrt{1-3x}} \end{array} \right\| = -\frac{2}{3} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = -\frac{2}{3} \operatorname{tg} t + C = \\ = -\frac{2}{3} \operatorname{tg} \sqrt{1-3x} + C;$$

$$1.41. \int \frac{\cos x dx}{16 \sin^2 x + 25} = \int \frac{\cos x dx}{(4 \sin x)^2 + 5^2} = \left\| \begin{array}{l} t = 4 \sin x, \\ dt = 4 \cos x dx \end{array} \right\| = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + 5^2} = \\ = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{t}{5} + C = \frac{1}{20} \operatorname{arctg} \frac{4 \sin x}{5} + C;$$

$$1.42. \int \frac{e^x dx}{5e^{2x} - 4} = \int \frac{e^x dx}{(\sqrt{5}e^x)^2 - 2^2} = \left\| \begin{array}{l} t = \sqrt{5}e^x, \\ dt = \sqrt{5}e^x dx \end{array} \right\| = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dt}{t^2 - 2^2} = \\ = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}e^x - 2}{\sqrt{5}e^x + 2} \right| + C;$$

$$\begin{aligned}
 1.43. \int \frac{dx}{x\sqrt{25-9\ln^2 x}} &= \int \frac{dx}{x\sqrt{5^2-(3\ln x)^2}} = \left\| \begin{array}{l} t = 3\ln x, \\ dt = \frac{3dx}{x} \end{array} \right\| = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{5^2-t^2}} = \\
 &= \frac{1}{3} \arcsin \frac{t}{5} + C = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3\ln x}{5} + C;
 \end{aligned}$$

1.44.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt{25-7\sin^2 2x}} &= \int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt{5^2-(\sqrt{7}\sin 2x)^2}} = \left\| \begin{array}{l} t = \sqrt{7}\sin 2x, \\ dt = 2\sqrt{7}\cos 2x dx \end{array} \right\| = \frac{1}{2\sqrt{7}} \int \frac{dt}{\sqrt{5^2-t^2}} = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{7}} \arcsin \frac{t}{5} + C = \frac{1}{2\sqrt{7}} \arcsin \frac{\sqrt{7}\sin 2x}{5} + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.45. \int \frac{2^x dx}{\sqrt{4^x-3}} &= \int \frac{2^x dx}{\sqrt{(2^x)^2-3}} = \left\| \begin{array}{l} t = 2^x, \\ dt = 2^x \ln 2 dx \end{array} \right\| = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-3}} = \\
 &= \frac{1}{\ln 2} \ln |t + \sqrt{t^2-3}| + C = \frac{1}{\ln 2} \ln |2^x + \sqrt{4^x-3}| + C;
 \end{aligned}$$

1.46.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{4\operatorname{ctg}^2 x - 5}} &= \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{(2\operatorname{ctg} x)^2 - 5}} = \left\| \begin{array}{l} t = 2\operatorname{ctg} x, \\ dt = -\frac{2dx}{\sin^2 x} \end{array} \right\| = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-5}} = \\
 &= -\frac{1}{2} \ln |t + \sqrt{t^2-5}| + C = -\frac{1}{2} \ln |2\operatorname{ctg} x + \sqrt{4\operatorname{ctg}^2 x - 5}| + C.
 \end{aligned}$$

Завдання для аудиторної роботи

1. $\int \frac{3x^4 - 7x + 5\sqrt{x}}{x^2} dx$; 2. $\int \frac{(2-x)^2}{x^2\sqrt{x}} dx$; 3. $\int \frac{4 \cdot 3^x - 3 \cdot 4^x}{3^x} dx$; 4. $\int \frac{dx}{x^2-4}$;

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$; 7. $\int \frac{3+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$; 8. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$;

9. $\int (5x+2)^4 dx$; 10. $\int \frac{dx}{9x^2+16}$; 11. $\int e^{4x+1} dx$; 12. $\int \cos 3x dx$;

13. $\int \sin(5-4x) dx$; 14. $\int \frac{dx}{\cos^2 8x}$; 15. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$; 16. $\int x(4x^2+1)^3 dx$;

$$\begin{aligned}
 17. & \int \frac{\sqrt[9]{\ln^4(2x+7)}}{2x+7} dx; & 18. & \int \frac{\cos x}{4\sin^2 x - 49} dx; & 19. & \int \frac{dx}{x\sqrt{25 - \ln^2 x}}; \\
 20. & \int \frac{9^{\operatorname{arctg} 4x}}{1+16x^2} dx; & 21. & \int \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2} dx; & 22. & \int \frac{dx}{x \cos^2 \ln x}; & 23. & \int \frac{dx}{\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}}; \\
 24. & \int \frac{2+3^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx; & 25. & \int \frac{4 \operatorname{arctg} 7x - 8x}{1+49x^2} dx.
 \end{aligned}$$

Відповіді:

$$\begin{aligned}
 1. & x^3 - 7 \ln|x| - \frac{10}{\sqrt{x}} + C; & 2. & -\frac{8}{3} x^{-3/2} + 8x^{-1/2} + 2x^{1/2} + C; \\
 3. & 4x - \frac{3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x}{\ln \frac{4}{3}} + C; & 4. & \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C; & 5. & \arcsin \frac{x}{3} + C; \\
 6. & \ln|x + \sqrt{x^2 - 3}| + C; & 7. & \frac{3}{2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} x + C; & 8. & -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C; \\
 9. & \frac{(5x+2)^5}{25} + C; & 10. & \frac{1}{12} \operatorname{arctg} \frac{3x}{4} + C; & 11. & \frac{1}{4} e^{4x+1} + C; & 12. & \frac{1}{3} \sin 3x + C; \\
 13. & \frac{1}{4} \cos(5-4x) + C; & 14. & \frac{1}{8} \operatorname{tg} 8x + C; & 15. & -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} 5x + C; \\
 16. & \frac{(4x^2+1)^4}{32} + C; & 17. & \frac{9}{26} (\ln(2x+7))^{13/9} + C; & 18. & \frac{1}{28} \ln \left| \frac{2 \sin x - 7}{2 \sin x + 7} \right| + C; \\
 19. & \arcsin \frac{\ln x}{5} + C; & 20. & \frac{1}{4 \ln 9} 9^{\operatorname{arctg} 4x} + C; & 21. & -\sin \frac{1}{x} + C; & 22. & \operatorname{tg}(\ln x) + C; \\
 23. & -2 \operatorname{ctg} \sqrt{x} + C; & 24. & 2 \operatorname{tg} x + \frac{3^{\operatorname{tg} x}}{\ln 3} + C; & 25. & \frac{2 \operatorname{arctg}^2 7x}{7} - \frac{4}{49} \ln|1+49x^2| + C.
 \end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи

$$1. \int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+8}} dx; \quad 2. \int \frac{4 \operatorname{arctg} 9x - x}{1+81x^2} dx; \quad 3. \int \frac{x^2}{9-x^6} dx; \quad 4. \int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2-9}} dx;$$

5. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{25-x^2}} dx$; 6. $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4} dx$; 7. $\int x \sin(2-3x^2) dx$; 8. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x} dx$;
 9. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x-1)^4}}$; 10. $\int x^3 e^{4-5x^4} dx$; 11. $\int \frac{dx}{x(9\ln^2 x-1)}$; 12. $\int \frac{3^x}{25+9^x} dx$;
 13. $\int \frac{18x-7 \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx$; 14. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$; 15. $\int \frac{\ln x-5}{x\sqrt{\ln x}} dx$;
 16. $\int \frac{(\arcsin x)^3-5}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Відповіді:

1. $\frac{3}{8}\sqrt{(x^4+8)^2} + C$; 2. $\frac{2}{9}(\operatorname{arctg} 9x)^2 - \frac{1}{162}\ln(1+81x^2) + C$;
 3. $-\frac{1}{18}\ln\left|\frac{x^3-3}{x^3+3}\right| + C$; 4. $3\sqrt{x^2-9} + 4\ln|x+\sqrt{x^2-9}| + C$;
 5. $-2\sqrt{25-x^2} - \arcsin \frac{x}{5} + C$; 6. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 - \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C$;
 7. $\frac{1}{6}\cos(2-3x^2) + C$; 8. $x-4\sqrt{x} + \ln x + C$; 9. $-\frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}} + C$;
 10. $-\frac{1}{20}e^{4-5x^4} + C$; 11. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3\ln x-1}{3\ln x+1}\right| + C$; 12. $\frac{1}{5\ln 3}\operatorname{arctg} \frac{3^x}{5} + C$;
 13. $\frac{9}{4}\ln(1+4x^2) - \frac{7}{4}(\operatorname{arctg} 2x)^2 + C$; 14. $\sin(\ln x) + C$;
 15. $\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} - 10\sqrt{\ln x} + C$; 16. $\frac{(\arcsin x)^4}{4} - 5\arcsin x + C$.

Практичне заняття 2

ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Контрольні питання

1. Формула інтегрування частинами.
2. Інтегрування функцій $P_n(x)e^{\alpha x}$, $P_n(x)a^{\alpha x}$, $P_n(x)\cos \alpha x$, $P_n(x)\sin \alpha x$.
3. Інтегрування функцій, що містять арг-функцію або логарифмічну функцію.
4. Інтегрування функцій $e^{\alpha x} \sin \beta x$, $e^{\alpha x} \cos \beta x$.
5. Інтеграл вигляду $\int \frac{xdx}{\cos^2 \alpha x}$, $\int \frac{xdx}{\sin^2 \alpha x}$, $\int \frac{x \cos \alpha x dx}{\sin^3 \alpha x}$, $\int \frac{x \sin \alpha x dx}{\cos^3 \alpha x}$.
6. Інтеграл вигляду $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $\int \sqrt{x^2 + a} dx$.

Методичні рекомендації до практичного заняття

Розглянемо випадки, коли доцільно використовувати метод інтегрування частинами. Використаємо теорему 1.7 лекції 1.

1. В інтегралах $\int P_n(x)e^{\alpha x} dx$, $\int P_n(x)a^{\alpha x} dx$, $\int P_n(x)\cos \alpha x dx$, $\int P_n(x)\sin \alpha x dx$, $u = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ (n – натуральне).

Слід зауважити, що степінь многочлена вказує на те, скільки разів у даному випадку доведеться інтегрувати частинами.

Розглянемо приклади:

$$\begin{aligned} 2.1. \int (2x-9)\sin 5x dx &= \left\| \begin{array}{l} u = 2x-9, \quad \sin 5x dx = dv, \\ du = 2dx, \quad v = -\frac{1}{5}\cos 5x \end{array} \right\| = \\ &= -\frac{2x-9}{5}\cos 5x + \int \frac{1}{5}\cos 5x \cdot 2dx = -\frac{2x-9}{5}\cos 5x + \frac{2}{25}\sin 5x + C; \end{aligned}$$

$$2.2. \int (4+5x) \cos \frac{x}{3} dx = \left\| \begin{array}{l} u = 4+5x, \quad \cos \frac{x}{3} dx = dv, \\ du = 5dx, \quad v = 3 \sin \frac{x}{3} \end{array} \right\| =$$

$$= 3(4+5x) \sin \frac{x}{3} - \int 3 \sin \frac{x}{3} \cdot 5 dx = 3(4+5x) \sin \frac{x}{3} + 45 \cos \frac{x}{3} + C;$$

$$2.3. \int (5-2x) 7^{3x} dx = \left\| \begin{array}{l} u = 5-2x, \quad 7^{3x} dx = dv, \\ du = -2dx, \quad v = \frac{1}{3 \ln 7} 7^{3x} \end{array} \right\| = \frac{(5-2x)}{3} \cdot \frac{7^{3x}}{\ln 7} - \int \frac{7^{3x}}{3 \ln 7} (-2) dx =$$

$$= \frac{5-2x}{3} \cdot \frac{7^{3x}}{\ln 7} + \frac{2}{3 \ln 7} \int 7^{3x} dx = \frac{5-2x}{3} \cdot \frac{7^{3x}}{\ln 7} + \frac{2}{9 \ln^2 7} 7^{3x} + C;$$

$$2.4. \int x^2 e^{7x-2} dx = \left\| \begin{array}{l} u = x^2, \quad e^{7x-2} dx = dv, \\ du = 2x dx, \quad v = \frac{1}{7} e^{7x-2} \end{array} \right\| = \frac{x^2}{7} e^{7x-2} - \int \frac{1}{7} e^{7x-2} \cdot 2x dx =$$

$$= \frac{x^2}{7} e^{7x-2} - \frac{2}{7} \int x e^{7x-2} dx = \left\| \begin{array}{l} x = u, \quad e^{7x-2} dx = dv, \\ dx = du, \quad v = \frac{1}{7} e^{7x-2} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{x^2}{7} e^{7x-2} - \frac{2}{7} \left[\frac{x}{7} e^{7x-2} - \int \frac{1}{7} e^{7x-2} dx \right] = \frac{x^2}{7} e^{7x-2} - \frac{2x}{49} e^{7x-2} + \frac{2}{243} e^{7x-2} + C.$$

2. Інтегрування функцій, що містять під знаком інтеграла аргументу або логарифмічну функцію.

Слід зауважити, що функції, які містять під знаком інтеграла аргументу або логарифмічну функцію, можна інтегрувати або частинами, або заміною змінної. Як визначитися з методом інтегрування? Слід перевірити, чи містить підінтегральний вираз похідну відповідної функції. Якщо містить, то обираємо заміну змінної (приклади 1.26, 1.33,

1.43 практичного заняття 1), якщо ні, то обираємо інтегрування частинами (за u обираємо арг-функцію або логарифмічну функцію).

Зауважимо, що степінь арг-функції або логарифмічної функції вказує на те, скільки разів у даному випадку доведеться інтегрувати частинами.

Розглянемо приклади:

2.5.

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \left\| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = dx, \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x \end{array} \right\| = x \cdot \operatorname{arctg} x + \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C;$$

2.6.

$$\int \ln x dx = \left\| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = dx, \\ du = \frac{dx}{x}, \quad v = x \end{array} \right\| = x \cdot \ln x - \int \frac{xdx}{x} = x \cdot \ln x - x + C;$$

2.7.

$$\int \operatorname{arctg} 2x dx = \left\| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} 2x, \quad dv = dx, \\ du = \frac{2dx}{1+4x^2}, \quad v = x \end{array} \right\| = x \cdot \operatorname{arctg} 2x - \int \frac{2xdx}{1+4x^2} =$$

$$\left\| \int \frac{u'}{u} du = \ln |u| + C \right\| = x \cdot \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) + C;$$

2.8.

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} 4x dx = \left\| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} 4x, \quad dv = x dx, \\ du = \frac{4dx}{1+16x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\| = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} 4x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{4dx}{1+16x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} 4x - \frac{2}{16} \int \frac{16x^2 + 1 - 1}{1+16x^2} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} 4x - \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{1+16x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} 4x - \frac{1}{8}x + \frac{1}{32} \operatorname{arctg} 4x + C;$$

2.9.

$$\int (3x^2 + 1) \operatorname{arctg} x dx = \left\| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = (3x^2 + 1) dx, \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x^3 + x \end{array} \right\| = (x^3 + x) \cdot \operatorname{arctg} x -$$

$$- \int \frac{x^3 + x}{1+x^2} dx = (x^3 + x) \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x(x^2 + 1)}{1+x^2} dx = (x^3 + x) \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{2} + C;$$

$$\mathbf{2.10.} \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx = \left\| \begin{array}{l} u = \arcsin x, \quad dv = \frac{dx}{\sqrt{1-x}}, \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = -2\sqrt{1-x} \end{array} \right\| = -2\sqrt{1-x} \cdot \arcsin x +$$

$$+ \int \frac{2\sqrt{1-x} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -2\sqrt{1-x} \cdot \arcsin x + 2 \int \frac{\sqrt{1-x} dx}{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x}} = -2\sqrt{1-x} \cdot \arcsin x +$$

$$+ 4\sqrt{1+x} + C;$$

$$\mathbf{2.11.} \int \ln(x^2 + 5) dx = \left\| \begin{array}{l} u = \ln(x^2 + 5), \quad dv = dx, \\ du = \frac{2x dx}{x^2 + 5}, \quad v = x \end{array} \right\| = x \cdot \ln(x^2 + 5) - \int \frac{2x^2 dx}{x^2 + 5} =$$

$$= x \cdot \ln(x^2 + 5) - 2 \int \frac{(x^2 + 5 - 5) dx}{x^2 + 5} = x \cdot \ln(x^2 + 5) - 2 \int dx + 10 \int \frac{dx}{x^2 + 5} =$$

$$= x \cdot \ln(x^2 + 5) - 2x + 10 \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C;$$

2.12.

$$\int x^2 \ln(1+x) dx = \left\| \begin{array}{l} u = \ln(1+x), \quad dv = x^2 dx, \\ du = \frac{dx}{1+x}, \quad v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\| = \frac{x^3}{3} \cdot \ln(1+x) - \int \frac{x^3 dx}{3(1+x)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^3}{3} \cdot \ln(1+x) - \frac{1}{3} \int \frac{x^3+1-1}{1+x} dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln(1+x) - \frac{1}{3} \int \frac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{1+x} dx = \\
&= \frac{x^3}{3} \cdot \ln(1+x) - \frac{1}{3} \int \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln(1+x) - \\
&\quad - \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1) \right) + C;
\end{aligned}$$

$$2.13. \int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^3}} dx = \left\| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \quad dv = \frac{dx}{\sqrt{x^3}}, \\ du = \frac{2 \ln x dx}{x}, \quad v = \int \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \int x^{-3/2} dx = -2x^{-1/2} \end{array} \right\| =$$

$$= -2x^{-1/2} \ln^2 x + 4 \int \frac{x^{-1/2} \ln x}{x} dx = -2x^{-1/2} \ln^2 x + 4 \int \frac{\ln x}{x^{3/2}} dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = \frac{dx}{x^{3/2}}, \\ du = \frac{dx}{x}, \quad v = -2x^{-1/2} \end{array} \right\| = -2x^{-1/2} \ln^2 x + 4 \left[-2x^{-1/2} \ln x + 2 \int \frac{x^{-1/2}}{x} dx \right] =$$

$$= -2x^{-1/2} \ln^2 x - 8x^{-1/2} \ln x + 8 \int \frac{dx}{x^{3/2}} = -2x^{-1/2} \ln^2 x - 8x^{-1/2} \ln x - 16x^{-1/2} + C.$$

3. «Зворотні» інтеграли $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$, $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$,

$\alpha, \beta \in R$. У даному випадку за u можна обирати будь-яку з функцій.

2.14.

$$\int e^{2x} \cos 7x dx = \left\| \begin{array}{l} u = e^{2x}, \quad dv = \cos 7x dx, \\ du = 2e^{2x} dx, \quad v = \frac{1}{7} \sin 7x \end{array} \right\| = \frac{1}{7} e^{2x} \sin 7x - \frac{2}{7} \int \sin 7x \cdot e^{2x} dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} u = e^{2x}, \quad dv = \sin 7x dx, \\ du = 2e^{2x} dx, \quad v = -\frac{1}{7} \cos 7x \end{array} \right\| = \frac{1}{7} e^{2x} \sin 7x + \frac{2}{49} e^{2x} \cos 7x - \frac{4}{49} \int e^{2x} \cos 7x dx + C.$$

Таким чином, можна записати:

$$\int e^{2x} \cos 7x dx = \frac{1}{7} e^{2x} \sin 7x + \frac{2}{49} e^{2x} \cos 7x - \frac{4}{49} \int e^{2x} \cos 7x + C.$$

Позначимо: $\int e^{2x} \cos 7x dx = I$, тоді

$$I + \frac{4}{49} I = \frac{1}{7} e^{2x} \sin 7x + \frac{2}{49} e^{2x} \cos 7x + C.$$

$$\frac{53}{49} I = \frac{e^{2x}}{7} \left(\sin 7x + \frac{2}{7} \cos 7x \right) + C \Rightarrow I = \frac{7e^{2x}}{53} \left(\sin 7x + \frac{2}{7} \cos 7x \right) + C_1.$$

4. Метод інтегрування частинами також можна використати при знаходженні інтегралів вигляду:

$$\int \frac{x dx}{\cos^2 \alpha x}, \quad \int \frac{x dx}{\sin^2 \alpha x}, \quad \int \frac{x \cos \alpha x dx}{\sin^3 \alpha x}, \quad \int \frac{x \sin \alpha x dx}{\cos^3 \alpha x}.$$

У всіх цих випадках доцільно обирати $u = x$.

2.15.

$$\begin{aligned} \int \frac{x \cdot \sin x dx}{\cos^3 x} &= \left\| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}, \\ du = dx, v = \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} = -\int (\cos x)^{-3} d(\cos x) = \frac{1}{2 \cos^2 x} \end{array} \right\| = \\ &= \frac{x}{2 \cos^2 x} - \int \frac{dx}{2 \cos^2 x} = \frac{x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + C. \end{aligned}$$

5. Метод інтегрування частинами також можна використати при знаходженні інтегралів вигляду: $\int \sqrt{x^2 + a} dx$ та $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

$$\mathbf{2.16.} \quad \int \sqrt{x^2 + a} dx =$$

$$\begin{aligned} &= \left\| \begin{array}{l} u = \sqrt{x^2 + a}, \quad dv = dx, \\ du = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a}}, \quad v = x \end{array} \right\| = x \sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a}} = x \sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 + a - a}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \\ &= x \sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 + a}{\sqrt{x^2 + a}} dx + \int \frac{a}{\sqrt{x^2 + a}} dx = x \sqrt{x^2 + a} - \\ &- \int \sqrt{x^2 + a} dx + a \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C. \end{aligned}$$

Отримуємо:

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = a \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + x\sqrt{x^2 + a} - \int \sqrt{x^2 + a} dx + C.$$

$$\text{Остаточнo маємо: } \int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{a}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + C_1.$$

$$2.17. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} u = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad dv = dx, \\ du = \frac{-x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad v = x \end{array} \right\| = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} -$$

$$- \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Отримуємо:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$\text{Остаточнo маємо: } \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C_1.$$

Завдання для аудиторної роботи

1. $\int (2x+7)e^{5x} dx$; 2. $\int (3-4x)\sin 5x dx$; 3. $\int (4x^2-3x)\cos 5x dx$;

4. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$; 5. $\int \arctg x dx$; 6. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$; 7. $\int e^x \sin x dx$;

8. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$.

Відповіді:

1. $\frac{1}{5}(2x+7)e^{5x} - \frac{2}{25}e^{5x} + C$; 2. $-\frac{3-4x}{5}\cos 5x - \frac{4}{25}\sin 5x + C$;

3. $\frac{1}{5}(4x^2-3x)\sin 5x + \frac{1}{25}(8x-3)\cos 5x - \frac{8}{125}\sin 5x + C$;

4. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} \ln x - \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^2} + C$; 5. $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C$;
 6. $2\sqrt{x+1} \arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C$; 7. $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$;
 8. $-\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x + C$.

Завдання для самостійної роботи

1. $\int x3^{7x} dx$; 2. $\int (3x+4)e^{-2x} dx$; 3. $\int (5x+2)\sin \frac{x}{3} dx$; 4. $\int x^2 e^{7x-1} dx$;
 5. $\int x \operatorname{arctg} 7x dx$; 6. $\int x \ln(x^2 + 5) dx$; 7. $\int \frac{x}{\cos^2 2x} dx$; 8. $\int \sin(\ln x) dx$.

Відповіді:

1. $\frac{x3^{7x}}{7\ln 3} - \frac{3^{7x}}{49\ln^2 3} + C$; 2. $-\frac{3x+4}{2}e^{-2x} - \frac{3}{4}e^{-2x} + C$;
 3. $-3(5x+2)\cos \frac{x}{3} + 45\sin \frac{x}{3} + C$; 4. $\frac{1}{7}x^2 e^{7x-1} - \frac{2}{49}x e^{7x-1} + \frac{2}{343}e^{7x-1} + C$;
 5. $\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} 7x - \frac{7}{98}x + \frac{1}{98} \operatorname{arctg} 7x + C$;
 6. $\frac{x^2}{2} \ln(x^2 + 5) - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2} \ln(x^2 + 5) + C$; 7. $\frac{x}{2} \operatorname{tg} 2x + \frac{1}{4} \ln|\cos 2x| + C$;
 8. $\frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$.

Практичне заняття 3

ІНТЕГРАЛИ ВІД ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙ, ЩО МІСТЯТЬ КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

Контрольні питання

1. Порядок виділення повного квадрата.
2. Інтегрування функцій $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ та $\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$.
3. Інтегрування функцій $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ та $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$.
4. Інтегрування функції $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$.

Методичні рекомендації до практичного заняття

Розглянемо приклади, використовуючи теоретичний матеріал лекції 2.

$$1. \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \text{ та } \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx .$$

$$3.1. \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 20} = \left\| \begin{aligned} x^2 + 4x + 20 &= (x + 2)^2 - 4 + 20 = \\ &= (x + 2)^2 + 16 \end{aligned} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{aligned} x + 2 &= t, \\ dx &= dt \end{aligned} \right\| = \int \frac{dt}{t^2 + 16} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t}{4} + C = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{4} + C ;$$

$$3.2. \int \frac{9x + 7}{3x^2 - 12x - 13} dx = \frac{1}{3} \int \frac{9x + 7}{x^2 - 4x - \frac{13}{3}} dx =$$

$$= \left\| \begin{aligned} x^2 - 4x - \frac{13}{3} &= (x - 2)^2 - 4 - \frac{13}{3} = \\ &= (x - 2)^2 - \frac{25}{3} = (x - 2)^2 - \left(\frac{5}{\sqrt{3}} \right)^2 \end{aligned} \right\| = \left\| \begin{aligned} x - 2 &= t, dx = dt, x = t + 2, \\ 9x + 7 &= 9(t + 2) + 7 = 9t + 25 \end{aligned} \right\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \int \frac{9t+25}{t^2 - \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2} dt = \frac{1}{3} \int \left(\frac{9t}{t^2 - \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{25}{t^2 - \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2} \right) dt = \\
&= \frac{3}{2} \ln \left| t^2 - \frac{25}{3} \right| + \frac{25}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{5}{\sqrt{3}}} \ln \left| \frac{t - \frac{5}{\sqrt{3}}}{t + \frac{5}{\sqrt{3}}} \right| + C = \frac{3}{2} \ln \left| t^2 - \frac{25}{3} \right| + \frac{5\sqrt{3}}{6} \ln \left| \frac{\sqrt{3}t - 5}{\sqrt{3}t + 5} \right| + C = \\
&= \frac{3}{2} \ln \left| (x-2)^2 - \frac{25}{3} \right| + \frac{5\sqrt{3}}{6} \ln \left| \frac{\sqrt{3}(x-2) - 5}{\sqrt{3}(x-2) + 5} \right| + C.
\end{aligned}$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

$$3.3. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5x - 6}} = \left\| \begin{aligned} x^2 + 5x - 6 &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 6 \\ &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \end{aligned} \right\| = \left\| \begin{aligned} x + \frac{5}{2} &= t, \\ dx &= dt \end{aligned} \right\| =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{49}{4}}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 - \frac{49}{4}} \right| + C = \ln \left| \left(x + \frac{5}{2}\right) + \sqrt{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}} \right| + C.$$

$$3.4. \int \frac{2-5x}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx = \left\| \begin{aligned} 5+4x-x^2 &= -[x^2-4x-5] \\ &= -[(x-2)^2-4-5] \end{aligned} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{aligned} -[(x-2)^2-9] &= 9-(x-2)^2, \\ x-2 &= t, dx = dt, x = t+2 \end{aligned} \right\| = \left\| \begin{aligned} 2-5x &= 2-5(t+2) \\ &= -5t+2-10 = -5t-8 \end{aligned} \right\| =$$

$$= \int \frac{-5t-8}{\sqrt{9-t^2}} = \frac{-5}{-2} \int \frac{-2tdt}{\sqrt{9-t^2}} - 8 \int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \frac{5}{2} 2\sqrt{9-t^2} -$$

$$-8 \arcsin \frac{t}{3} + C = 5\sqrt{9-t^2} - 8 \arcsin \frac{t}{3} + C = 5\sqrt{9-(x-2)^2} - 8 \arcsin \frac{x-2}{3} + C.$$

$$3. \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx.$$

3.5.

$$\int \sqrt{2x^2 + 3x - 2} dx = \sqrt{2} \int \sqrt{x^2 + \frac{3}{2}x - 1} dx = \left\| \begin{aligned} x^2 + \frac{3}{2}x - 1 &= \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - 1, \\ &= \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} \end{aligned} \right\| =$$

$$\left\| \begin{aligned} x + \frac{3}{4} &= t, \\ dx &= dt \end{aligned} \right\| = \sqrt{2} \int \sqrt{t^2 - \frac{25}{16}} dt = \sqrt{2} \left(\frac{t}{2} \sqrt{t^2 - \frac{25}{16}} - \frac{25}{32} \ln \left| t + \sqrt{t^2 - \frac{25}{16}} \right| \right) + C =$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{x + \frac{3}{4}}{2} \sqrt{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}} - \frac{25}{32} \ln \left| x + \frac{3}{4} + \sqrt{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}} \right| \right) + C.$$

Завдання для аудиторної роботи

1. $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 20}$; 2. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x - 24}$; 3. $\int \frac{2x + 7}{40 - x^2 - 6x} dx$;
4. $\int \frac{3x + 7}{x^2 + 2x + 82} dx$; 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{-6x - x^2}}$; 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 14x + 13}}$;
7. $\int \frac{4x + 5}{\sqrt{10x - x^2 - 21}} dx$; 8. $\int \frac{5x + 3}{\sqrt{x^2 + 8x + 9}} dx$; 9. $\int \sqrt{x^2 + 10x + 6} dx$.

Відповіді:

1. $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{4} + C$; 2. $\frac{1}{10} \ln \left| \frac{x-6}{x+4} \right| + C$; 3. $-\ln |40 - x^2 - 6x| - \frac{1}{14} \ln \left| \frac{x-4}{x+10} \right| + C$;
4. $\frac{3}{2} \ln |x^2 + 2x + 82| + \frac{4}{9} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{9} + C$; 5. $\arcsin \frac{x+3}{3} + C$;
6. $\ln |x - 7 + \sqrt{x^2 - 14x + 13}| + C$; 7. $-4\sqrt{10x - x^2 - 21} + 25 \arcsin \frac{x-5}{2} + C$;

$$8. 5\sqrt{x^2+8x+9} - 17\ln|x+4+\sqrt{x^2+8x+9}| + C;$$

$$9. \frac{x+5}{2}\sqrt{x^2+10x+6} - \frac{19}{2}\ln|x+5+\sqrt{x^2+10x+6}| + C.$$

Завдання для самостійної роботи

$$1. \int \frac{3x+2}{2x^2-3x+1} dx; 2. \int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-3x^2}}; 3. \int \sqrt{5x^2-2x+1} dx;$$

$$4. \int \frac{dx}{3x^2+6x+5} dx; 5. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+12x+4}}; 6. \int \frac{dx}{\sqrt{7-16x-2x^2}};$$

$$7. \int \frac{3x+1}{2x^2+5x+2} dx; 8. \int \frac{7x-2}{\sqrt{9-4x-5x^2}} dx; 9. \int \sqrt{x^2+2x+5} dx.$$

Відповіді:

$$1. \frac{3}{4}\ln\left|x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right| + \frac{17}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x-\frac{1}{2}}\right| + C; 2. \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+1}{4} + C;$$

$$3. \sqrt{5}\left[\frac{5x-1}{10}\sqrt{x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}} + \frac{2}{25}\ln\left|x - \frac{1}{5} + \sqrt{x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}}\right|\right] + C;$$

$$4. \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}} + C; \quad 5. \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{4}{3}}\right| + C;$$

$$6. \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}(x+4)}{\sqrt{39}} + C; 7. \frac{3}{4}\ln\left|x^2 + \frac{5}{2}x + 1\right| - \frac{11}{12}\ln\left|\frac{2x+1}{2x+4}\right| + C;$$

$$8. -\frac{7}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{9}{5} - \frac{4}{5}x - x^2} - \frac{24}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{5x+2}{7} + C;$$

$$9. \frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5} + 2\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}| + C.$$

Практичне заняття 4

ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ. НАЙПРОСТІШІ РАЦІОНАЛЬНІ ДРОБИ ТА ЇХ ІНТЕГРУВАННЯ

Контрольні питання

1. Раціональні дроби, поняття правильного та неправильного дроби. Найпростіші раціональні дроби. Розкладання раціонального дроби на найпростіші.
2. Інтегрування раціональних дробів.

Методичні рекомендації до практичного заняття

При інтегруванні раціональних дробів перш за все слід з'ясувати, правильним чи неправильним дробом є підінтегральна функція. Якщо дріб неправильний, то слід подати його як суму многочлена та правильного раціонального дроби. Записати правильний дріб у вигляді суми найпростіших дробів (вигляд найпростіших дробів визначається коренями знаменника). Проінтегрувати цілу частину многочлена та найпростіші дроби (лекція 3).

$$4.1. \int \frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{x^3 - 4x} dx.$$

Розв'язання. У даному випадку підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб. Розділимо чисельник на знаменник, виділивши при цьому цілу та дробову частини:

$$\begin{array}{r} \underline{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8} \quad \left| \frac{x^3 - 4x}{5} \right. \\ 5x^3 \qquad - 20x \\ \hline 9x^2 - 2x - 8. \end{array}$$

Розклавши знаменник на множники, отримуємо:

$$\int \frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{x^3 - 4x} dx = \int \left(5 + \frac{9x^2 - 2x - 8}{x(x-2)(x+2)} \right) dx.$$

Правильний дріб $\frac{9x^2 - 2x - 8}{x(x-2)(x+2)}$ розкладаємо на суму

найпростіших дробів: $\frac{9x^2 - 2x - 8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$.

Приводячи до спільного знаменника, отримуємо:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}.$$

Прирівнюючи один одному чисельники початкового та останнього дробів отримуємо рівняння:

$$9x^2 - 2x - 8 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2).$$

Визначимо коефіцієнти A , B , C методом частинних значень. Цей метод полягає в тому, що змінній x надають різні значення. Зазвичай беруть корені знаменника.

$$x = 0: \quad -8 = -4A \Rightarrow A = 2,$$

$$x = 2: \quad 24 = 8B \Rightarrow B = 3,$$

$$x = -2: \quad 32 = 8C \Rightarrow C = 4.$$

Отже, інтеграл розкладається на суму інтегралів, кожен з яких легко проінтегрувати:

$$\begin{aligned} \int \left(5 + \frac{9x^2 - 2x - 8}{x(x-2)(x+2)} \right) dx &= 5 \int dx + 2 \int \frac{dx}{x} + 3 \int \frac{dx}{x-2} + 4 \int \frac{dx}{x+2} = \\ &= 5x + 2 \ln|x| + 3 \ln|x-2| + 4 \ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

4.2. $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція – правильний раціональний дріб, знаменник якого – добуток простих множників, тому в даному випадку необхідно цей дріб записати у вигляді суми найпростіших дробів з невизначеними коефіцієнтами та обчислити їх:

$$\frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-4}.$$

Зводячи до спільного знаменника усі найпростіші дроби та прирівнюючи один до одного чисельники обох частин рівності, отримуємо:

$$2x^2 + 41x - 91 = A(x+3)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x+3),$$

Для визначення коефіцієнтів скористаємось способом частинних значень:

$$x=1: -48 = -12A, A=4,$$

$$x=-3: -196 = 28B, B=-7,$$

$$x=4: 105 = 21C, C=5.$$

Отже, даний дріб можна записати:

$$\frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} = \frac{4}{x-1} - \frac{7}{x+3} + \frac{5}{x-4}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx &= 4 \int \frac{dx}{x-1} - 7 \int \frac{dx}{x+3} + 5 \int \frac{dx}{x-4} = \\ &= 4 \ln|x-1| - 7 \ln|x+3| + 5 \ln|x-4| + C = \ln \left| \frac{(x-1)^4 (x-4)^5}{(x+3)^7} \right| + C. \end{aligned}$$

4.3. $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)^2} dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція – правильний дріб, знаменник якого перетворюється в 0 при $x=0$ та $x=-1$.

При цьому $x=0$ – корінь простий (кратності 1), а $x=-1$ – корінь кратності 2. Тоді

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Зведемо до спільного знаменника усі найпростіші дроби та прирівняємо один до одного чисельники обох частин рівності.

Отримуємо:

$$x^2 - 3x + 2 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx.$$

Для обчислення коефіцієнтів скористаємось способом частинних значень:

$$x = 0: 2 = A,$$

$$x = -1: 6 = -C, C = -6,$$

$$x = 2: 0 = 9A + 6B + 2C.$$

З останньої рівності отримуємо:

$$0 = 18 + 6B - 12; 6B + 6 = 0, B = -1.$$

Згідно з цими обчисленнями, можна записати:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)^2} dx &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2} \right) dx = 2 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} - 6 \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \\ &= 2 \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + C = \ln \left| \frac{x^2}{x+1} \right| + \frac{6}{x+1} + C. \end{aligned}$$

$$4.4. \int \frac{x^5 dx}{(x-1)^2 (x^2-1)}.$$

Розв'язання. У даному випадку підінтегральна функція – неправильний дріб, а тому необхідно виділити цілу та дробову частину цього дробу, попередньо розкривши дужки в знаменнику.

$$\begin{aligned} (x-1)^2 (x^2-1) &= (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 1) = x^4 - x^2 - 2x^3 + 2x + x^2 - 1 = \\ &= x^4 - 2x^3 + 2x - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \frac{x^5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x} \left| \frac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x + 2} \right. \\ \underline{- 2x^4 - 2x^2 + x} \\ 2x^4 - 4x^3 + 4x - 2 \\ \underline{- 4x^3 - 2x^2 - 3x + 2} \end{array}$$

Таким чином,

$$\frac{x^5}{(x-1)^2(x^2-1)} = x+2 + \frac{4x^3-2x^2-3x+2}{(x-1)^2(x^2-1)} = x+2 + \frac{4x^3-2x^2-3x+2}{(x-1)^3(x+1)}.$$

Слід наголосити, що знаменник правильного дробу перетворюється в 0 при $x=1$ та $x=-1$, при цьому $x=-1$ – простий корінь, а $x=1$ – корінь кратності 3.

Враховуючи сказане вище, маємо:

$$\frac{4x^3-2x^2-3x+2}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+1}.$$

Зведемо до спільного знаменника усі найпростіші дробу та прирівняємо один одному чисельники обох частин рівності.

Отримуємо:

$$4x^3-2x^2-3x+2 = A(x-1)^2(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x+1) + D(x-1)^3.$$

Для обчислення коефіцієнтів скористаємось способом частинних значень:

$$x=1: 1=2C, C=\frac{1}{2},$$

$$x=-1: -1=-8D, D=\frac{1}{8},$$

$$x=2: 20=3A+3B+3C+D, 20=3A+3B+\frac{3}{2}+\frac{1}{8},$$

$$3A+3B=\frac{147}{8}, A+B=\frac{147}{24},$$

$$x=0: 2=A-B+C-D; 2=A-B+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}; A-B=\frac{13}{8}.$$

Розглянемо систему рівнянь:

$$+\begin{cases} A+B=\frac{147}{24}, \\ A-B=\frac{13}{8}. \end{cases}$$

$$2A = \frac{147}{24} + \frac{13}{8} = \frac{147+39}{24} = \frac{186}{24} = \frac{31}{4}, A = \frac{31}{8}.$$

$$B = A - \frac{13}{8} = \frac{31}{8} - \frac{13}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 dx}{(x-1)^2(x^2-1)} &= \int \frac{x^5 dx}{(x-1)^3(x+1)} = \\ &= \int \left(x+2 + \frac{31}{8} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{31}{8} \ln|x-1| - \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{8} \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

$$4.5. \int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} dx.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція – неправильний дріб, а тому необхідно шляхом ділення чисельника на знаменник виділити цілу та дробову частину:

$$\frac{-x^4+1}{x^4-x^3+x^2-x} \left| \frac{x^3-x^2+x-1}{x+1} \right.$$

$$\frac{-x^3-x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}$$

$$2.$$

Таким чином, отримали суму многочлена і правильного дробу

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} = x+1 + \frac{2}{x^3-x^2+x-1}.$$

Розкладемо знаменник правильного дробу на множники:

$x^3-x^2+x-1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$. Множник (x^2+1) не має дійсних коренів.

Таким чином,

$$\frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Зведемо до спільного знаменника усі найпростіші дробу та порівнюємо один одному чисельники обох частин рівності.

Отримуємо:

$$1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1),$$

$$1 = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C.$$

Для обчислення коефіцієнтів A , B , C скористаємося тим, що два многочлени рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні коефіцієнти при однакових степенях x (спосіб порівняння коефіцієнтів):

$$\left. \begin{array}{l} x^2 | 0 = A + B, \\ x^1 | 0 = -B + C, \\ x^0 | 1 = A - C. \end{array} \right\}$$

Для того щоб знайти розв'язок цієї системи, можна додати ліві та праві частини рівнянь.

Тоді $1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$, а далі, враховуючи рівняння системи,

одержимо $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$.

Отже,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx &= \int (x+1) dx + 2 \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{x^2+1} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{xdx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \\ &- \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \arctg x + C = \frac{x^2}{2} + x + \ln \left| \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} \right| - \arctg x + C. \end{aligned}$$

4.6. $\int \frac{dx}{x^3+1}.$

Розв'язання. У даному випадку $\frac{1}{x^3+1}$ – правильний дріб.

Розкладемо (x^3+1) на множники, використовуючи формулу скороченого множення: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$. Тоді дріб можна розкласти на суму найпростіших дробів:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Зведемо до спільного знаменника усі найпростіші дроби та прирівняємо один до одного чисельники обох частин рівності.

Отримуємо:

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1),$$

$$1 = Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C.$$

Для визначення A , B , C скористаємось способом порівняння коефіцієнтів.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \left| \begin{array}{l} 0 = A+B, \\ \Rightarrow B = -A, \end{array} \right. \\ x^1 \left| \begin{array}{l} 0 = -A+B+C, \\ \Rightarrow 0 = -A-A+1-A; \\ x^0 \left| \begin{array}{l} 1 = A+C, \\ \Rightarrow C = 1-A, \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

$$3A = 1; \quad A = \frac{1}{3}; \quad B = -\frac{1}{3}; \quad C = \frac{2}{3}.$$

Отримуємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3+1} &= \int \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-x+2}{x^2-x+1} \right) dx = \frac{1}{3} \ln|x+3| - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx = \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \int \frac{x - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3 \cdot 2} \int \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx - \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\
&= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \\
&= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

Завдання для аудиторної роботи

1. Розкласти многочлен на множники:

а) $3x^2 + 7x - 10$; б) $x^3 + x - 2$; в) $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$.

2. Записати неправильний дріб у вигляді суми многочлена та правильного дробу:

а) $\frac{x^5 + 9x^3 + 4}{x^2 + 3x}$; б) $\frac{2x^4 - 5x^2 - 8x - 8}{x(x^2 + 4)}$.

3. Записати правильний дріб у вигляді суми найпростіших дробів:

а) $\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)(x+2)}$; б) $\frac{10x^2 - 5x + 8}{x^3 + 2x^2}$; в) $\frac{x^2 + 28x + 4}{(x+2)^2(x^2 + 4)}$.

4. Знайти:

а) $\int \frac{4x^2 + 11x - 8}{x^3 - 3x^2 - 4x} dx$; б) $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx$.

Відповіді:

1. а) $(x-1)(3x+10)$; б) $(x-1)(x^2+x+2)$; в) $(x+1)^2(x+3)$.

2. а) $x^3 - 3x^2 + 18x - 54 + \frac{162x + 4}{x^2 + 3x}$; б) $2x - \frac{13x^2 + 8x + 8}{x^3 + 4x}$.

$$3. \text{ а) } \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{(x+1)} + \frac{5}{3(x+2)}; \text{ б) } -\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{29}{2} \cdot \frac{1}{x+2};$$

$$\text{в) } -\frac{6}{(x+2)^2} + \frac{7}{x^2+4}; \text{ 4. а) } \ln \left| \frac{x^2(x-4)^5}{(x+1)^3} \right| + C;$$

$$\text{б) } x - \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{7}{2} \ln|x-2| + \frac{26}{3} \ln|x-3| + C.$$

Завдання для самостійної роботи

$$1. \text{ Знайти: а) } \int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx; \text{ б) } \int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx; \text{ в) } \int \frac{dx}{x^4-1};$$

$$\text{г) } \int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} dx.$$

Відповіді:

$$1. \text{ а) } 5x + \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{161}{6} \ln|x-4| - \frac{7}{3} \ln|x-1| + C; \text{ б) } \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C;$$

$$\text{в) } \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\text{г) } -\frac{1}{5(x-1)} + \frac{1}{50} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2} - \frac{7}{25} \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

Практичне заняття 5

ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Контрольні питання

1. Інтегрування функцій, які можна привести до табличних, використовуючи відомі тригонометричні формули.

2. Інтегрування функцій $\sin^n x \cdot \cos^m x$:

а) $n + m$ – парне невід'ємне число;

б) $n + m$ – непарне невід'ємне число.

3. Інтегрування виразів $\sin \alpha x \cdot \cos \beta x$, $\sin \alpha x \cdot \sin \beta x$,
 $\cos \alpha x \cdot \cos \beta x$.

4. Інтегрування функцій $\operatorname{tg}^n x$, $\operatorname{ctg}^n x$.

5. Універсальна тригонометрична підстановка.

6. Частинні підстановки:

а) інтегрування функцій $R(\sin x, \cos x)$, парних відносно $\sin x, \cos x$:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x);$$

б) інтегрування функцій $R(\sin x, \cos x)$, непарних відносно $\cos x$:

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x);$$

в) інтегрування функцій $R(\sin x, \cos x)$, непарних відносно $\sin x$:

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

Методичні рекомендації до практичного заняття

1. Перш ніж почати розглядати будь-які методи інтегрування тригонометричних функцій, необхідно з'ясувати, чи можна такі інтеграли звести до табличних, використовуючи відомі тригонометричні формули.

$$5.1. \int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C;$$

$$5.2. \int \frac{dx}{\sin^4 3x} = \int \frac{dx}{\sin^2 3x \cdot \sin^2 3x} = \\ = -\frac{1}{3} \int (1 + \operatorname{ctg}^2 3x) d(\operatorname{ctg} 3x) = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg} 3x - \frac{1}{9} \operatorname{ctg}^3 3x + C;$$

$$5.3. \int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$5.4. \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = 2 \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \\ = 4 \int \frac{dx}{\sin 2x} = 2 \ln |\operatorname{tg} x| + C;$$

$$5.5. \int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2} dx = \int \frac{d(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2} = -\frac{1}{1-\cos x} + C = \frac{1}{\cos x - 1} + C.$$

2. а) При інтегруванні функцій $\sin^n x \cdot \cos^m x$, де n та m – парні невід'ємні числа використовуємо формули зниження степеню:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

$$5.6. \int \cos^2 7x dx = \int \frac{1 + \cos 14x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 14x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{28} \sin 14x + C;$$

$$5.7. \int \sin^4 3x dx = \int (\sin^2 3x)^2 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 6x}{2} \right)^2 dx = \\ = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 6x + \cos^2 6x) dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \sin 6x + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 12x}{2} dx = \\ = \frac{1}{4} x - \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{8 \cdot 12} \sin 12x + C = \frac{3}{8} x - \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{96} \sin 12x + C.$$

5.8.

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 3x \cdot \cos^2 3x dx &= \int \sin^2 3x (\sin 3x \cdot \cos 3x)^2 dx = \int \sin^2 3x \left(\frac{1}{2} \sin 6x \right)^2 dx = \\
&= \frac{1}{4} \int \sin^2 3x \cdot \sin^2 6x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 6x) \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 12x) dx = \\
&= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 12x - \cos 6x + \cos 6x \cdot \cos 12x) dx = \\
&= \frac{1}{16} \int \left(1 - \cos 12x - \cos 6x + \frac{1}{2} (\cos 18x + \cos 6x) \right) dx = \\
&= \frac{1}{16} \int \left(1 - \cos 12x - \frac{1}{2} \cos 6x + \frac{1}{2} \cos 18x \right) dx = \\
&= \frac{1}{16} \left(x - \frac{1}{12} \sin 12x - \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{36} \sin 18x \right) + C.
\end{aligned}$$

б) При інтегруванні функцій $\sin^n x \cdot \cos^m x$, де $n+m$ – непарне невід’ємне число, відокремлюємо один множник та підводимо його під знак диференціала або робимо заміну змінних. Зауважимо, що обирають $t = \sin x$, коли m непарне, або $t = \cos x$, коли n непарне. У тому випадку, коли n та m обидва непарні, за t можна обирати будь-яку функцію.

$$\begin{aligned}
\mathbf{5.9.} \quad \int \sin^3 4x dx &= \int \sin^2 4x \cdot \sin 4x dx = -\frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 4x) \cdot d(\cos 4x) = \\
&= -\frac{1}{4} \int d(\cos 4x) + \frac{1}{4} \int (\cos 4x)^2 d(\cos 4x) = -\frac{1}{4} \cos 4x + \frac{\cos^3 4x}{12} + C;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{5.10.} \quad \int \cos^5 8x dx &= \int \cos^4 8x \cdot \cos 8x dx = \frac{1}{8} \int (1 - \sin^2 8x)^2 \cdot d(\sin 8x) = \\
&= \frac{1}{8} \int (1 - 2\sin^2 8x + \sin^4 8x) d(\sin 8x) = \\
&= \frac{1}{8} \left(\sin 8x - 2 \cdot \frac{(\sin 8x)^3}{3} + \frac{(\sin 8x)^5}{5} \right) + C = \frac{1}{8} \sin 8x - \frac{1}{12} (\sin 8x)^3 +
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{40}(\sin 8x)^5 + C.$$

5.11.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cdot \cos^7 x dx &= \int \sin^2 x \cdot \cos^6 x \cdot \cos x dx = \left\| \begin{array}{l} t = \sin x, \quad dt = \cos x dx, \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right\| = \\ &= \int t^2 (1 - t^2)^3 dt = \int t^2 (1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6) dt = \int (t^2 - 3t^4 + 3t^6 - t^8) dt = \\ &= \frac{t^3}{3} - 3\frac{t^5}{5} + 3\frac{t^7}{7} - \frac{t^9}{9} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - 3\frac{\sin^5 x}{5} + 3\frac{\sin^7 x}{7} - \frac{\sin^9 x}{9} + C; \end{aligned}$$

5.12.

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cdot \cos^7 x dx &= \int \sin^2 x \cdot \cos^7 x \cdot \sin x dx = \left\| \begin{array}{l} t = \cos x, \quad dt = -\sin x dx, \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right\| = \\ &= -\int t^7 (1 - t^2) dt = -\int (t^7 - t^9) dt = -\frac{t^8}{8} + \frac{t^{10}}{10} + C = -\frac{\cos^8 x}{8} + \frac{\cos^{10} x}{10} + C. \end{aligned}$$

3. При інтегруванні $\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x dx$, $\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x dx$ використовують тригонометричні формули:

$$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x],$$

$$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x],$$

$$\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x],$$

які дозволяють зобразити добуток синусів та косинусів у вигляді лінійних комбінацій цих же функцій (з іншими аргументами).

5.13. $\int \cos 9x \cdot \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int (\cos(9x - 5x) + \cos(9x + 5x)) dx =$

$$= \frac{1}{2} \int \cos 4x dx + \frac{1}{2} \int \cos 14x dx = \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{28} \sin 14x + C.$$

5. При інтегруванні функцій $\operatorname{tg}^n x$, $\operatorname{ctg}^n x$ використовують підстановку $t = \operatorname{tg} x$ або $t = \operatorname{ctg} x$.

$$5.14. \int \operatorname{tg}^5 x dx = \left\| \operatorname{tg} x = t, dx = \frac{dt}{1+t^2} \right\| = \int \frac{t^5}{1+t^2} dt.$$

У даному випадку підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб. Розділимо чисельник на знаменник, виділивши при цьому цілу та дробову частини:

$$\begin{array}{r} -t^5 \quad \left| \frac{t^2+1}{t^3-t} \right. \\ \underline{t^5+t^3} \\ -t^3 \\ \underline{-t^3-t} \\ t. \end{array}$$

Отже, отримуємо:

$$\int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2+1} \right) dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + C = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) + C;$$

$$5.15. \int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^8 x} = \int (\operatorname{tg} x)^8 dx = \left\| \operatorname{tg} x = t, dx = \frac{dt}{1+t^2} \right\| = \int \frac{t^8}{1+t^2} dt.$$

Аналогічно попередньому прикладу розділимо чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{r} -t^8 \quad \left| \frac{t^2+1}{t^6-t^4+t^2-1} \right. \\ \underline{t^8+t^6} \\ -t^6 \\ \underline{-t^6-t^4} \\ -t^4 \\ \underline{t^4+t^2} \\ -t^2 \\ \underline{-t^2-1} \\ 1. \end{array}$$

Отже, отримуємо:

$$\int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \arctg t + C =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} - \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

5. Розглянемо інтегрування функцій $R(\sin x, \cos x)$ – раціональних функцій від змінних $\sin x$ та $\cos x$. У цьому випадку використовують універсальну тригонометричну підстановку, яка приводить інтеграл, що розглядається, до інтеграла від раціонального дробу нового аргументу t . Універсальна підстановка:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\mathbf{5.16.} \quad \int \frac{dx}{4\cos x + 5} = \left\| t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \right\| = \int \frac{1}{4 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{4-4t^2+5t^2+5t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2 \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{2}{3} \arctg \frac{t}{3} + C = \frac{2}{3} \arctg \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{3} + C;$$

$$\mathbf{5.17.} \quad \int \frac{dx}{4\sin x + 5} = \left\| t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \right\| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{8t}{1+t^2} + 5} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{(1+t^2) \left(\frac{8t+5t^2+5}{1+t^2} \right)} = 2 \int \frac{dt}{5t^2+8t+5} = \frac{2}{5} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{8}{5}t + 1} =$$

$$= \frac{2}{5} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{4}{5} \right)^2 - \frac{16}{25} + 1} = \frac{2}{5} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{4}{5} \right)^2 + \frac{9}{25}} = \frac{2}{5} \int \frac{d \left(t + \frac{4}{5} \right)}{\left(t + \frac{4}{5} \right)^2 + \left(\frac{3}{5} \right)^2} =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\frac{3}{5}} \arctg \frac{t + \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} + C = \frac{2}{3} \arctg \frac{5t+4}{3} + C = \frac{2}{3} \arctg \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} + C;$$

$$\begin{aligned}
5.18. \int \frac{dx}{5 \sin x - \cos x + 4} &= \left\| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right\| = \\
&= 2 \int \frac{dt}{(1+t^2) \left(\frac{10t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 4 \right)} = 2 \int \frac{dt}{(1+t^2) \left(\frac{10t - 1 + t^2 + 4 + 4t^2}{1+t^2} \right)} = \\
&= 2 \int \frac{dt}{5t^2 + 10t + 3} = \frac{2}{5} \int \frac{dt}{t^2 + 2t + \frac{3}{5}} = \frac{2}{5} \int \frac{dt}{(t+1)^2 - 1 + \frac{3}{5}} = \\
&= \frac{2}{5} \int \frac{dt}{(t+1)^2 - \frac{2}{5}} = \frac{2}{5} \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{5}} \right)^2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{5}}} \ln \left| \frac{t+1 - \sqrt{\frac{2}{5}}}{t+1 + \sqrt{\frac{2}{5}}} \right| + C = \\
&= \frac{1}{\sqrt{10}} \ln \left| \frac{t+1 - \sqrt{\frac{2}{5}}}{t+1 + \sqrt{\frac{2}{5}}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{10}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 - \sqrt{\frac{2}{5}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 + \sqrt{\frac{2}{5}}} \right| + C.
\end{aligned}$$

6. Слід відзначити, що універсальна підстановка може приводити до інтеграла від раціонального дробу, корені знаменника якого важко знайти. Розглянемо випадки, коли можна використовувати інші підстановки.

а) Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ є парною відносно $\sin x, \cos x$, доцільно використати підстановку $\operatorname{tg} x = t$.

$$\begin{aligned}
5.19. \int \frac{dx}{7 \cos^2 x + 5} &= \left\| t = \operatorname{tg} x, dx = \frac{dt}{1+t^2}, \cos x = \frac{1}{1+t^2} \right\| = \int \frac{1}{\frac{7}{1+t^2} + 5} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \\
&= \int \frac{dt}{(1+t^2) \left(\frac{7+5+5t^2}{1+t^2} \right)} = \int \frac{dt}{5t^2 + 12} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{12}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{12}{5}}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{\frac{12}{5}}} + C =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{5}{12}} \cdot t \right) + C = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{5} \operatorname{tg} x}{2\sqrt{3}} \right) + C;$$

$$5.20. \int \frac{dx}{4\sin^2 x + 5} = \left\| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2}, \end{array} \right\| = \int \frac{dt}{(1+t^2) \left(\frac{4t^2}{1+t^2} + 5 \right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{(1+t^2) \left(\frac{4t^2 + 5 + 5t^2}{1+t^2} \right)} = \int \frac{dt}{9t^2 + 5} =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{d(3t)}{(3t)^2 + (\sqrt{5})^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3t}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{3\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C;$$

$$5.21. \int \frac{dx}{5\sin^2 x - \cos^2 x + 4} = \left\| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{array} \right\| =$$

$$= \int \frac{dt}{(1+t^2) \left(\frac{5t^2}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} + 4 \right)} = \int \frac{dt}{(1+t^2) \left(\frac{5t^2 - 1 + 4 + 4t^2}{1+t^2} \right)} = \int \frac{dt}{9t^2 + 3} =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{d(3t)}{(3t)^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{3t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} (\sqrt{3}t) + C =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} (\sqrt{3} \operatorname{tg} x) + C.$$

б) Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ є непарною відносно $\cos x$, доцільно використати підстановку $\sin x = t$.

$$5.22. \int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^6 x} = \left\| \begin{array}{l} t = \sin x, \quad x = \arcsin t, \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \cos x = \sqrt{1-t^2} \end{array} \right\| = \int \frac{(\sqrt{1-t^2})^5}{t^6} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{(\sqrt{1-t^2})^4}{t^6} dt = \int \frac{(1-t^2)^2}{t^6} dt = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^6} dt = \int \frac{1}{t^6} dt - 2 \int \frac{1}{t^4} dt + \int \frac{1}{t^2} dt = \\
&= -\frac{1}{5t^5} - \frac{2}{-3t^3} - \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{2}{3\sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} + C.
\end{aligned}$$

в) Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ є непарною відносно $\sin x$, доцільно використати підстановку $\cos x = t$.

5.23.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x - 3} &= \left\| \begin{array}{l} \cos x = t, \quad x = \arccos t \\ dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \sin x = \sqrt{1-t^2} \end{array} \right\| = -\int \frac{(\sqrt{1-t^2})^3 dt}{(t-3)\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{t^2-1}{t-3} dt = \\
\int \frac{t^2-9+8}{t-3} dt &= \int (t+3) dt + 8 \int \frac{dt}{t-3} = \frac{t^2}{2} + 3t + 8 \ln |t-3| + C = \\
&= \frac{\cos^2 x}{2} + 3 \cos x + 8 \ln |\cos x - 3| + C.
\end{aligned}$$

Відзначимо, що розглянуті підстановки, коли їх можна застосовувати, зазвичай приводять до більш простих обчислень, ніж універсальна підстанова, проте є випадки, коли універсальна підстанова забезпечує найкоротший шлях. Під час вибору підстановки необхідна певна обачність.

Завдання для аудиторної роботи

1. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$; 2. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$; 3. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$;
4. $\int \cos^2 6x dx$; 5. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$; 6. $\int \sin^3 4x dx$; 7. $\int \frac{\sin^5 x dx}{1+\cos^2 x}$;
8. $\int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cdot \cos^3 x dx$; 9. $\int \sin 5x \cdot \sin 3x dx$; 10. $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$.

Відповіді:

1. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C$; 2. $\frac{1}{2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C$; 3. $\frac{1}{3} \operatorname{arctg}(3 \operatorname{tg} x) + C$;
4. $\frac{x}{2} + \frac{1}{24} \sin 12x + C$; 5. $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg}^2 x + 1| + C$;
6. $-\frac{1}{4} \cos 4x + \frac{1}{12} \cos^3 4x + C$; 7. $-\frac{1}{3} \cos^3 x + 3 \cos x - 4 \operatorname{arctg}(\cos x) + C$;
8. $\frac{3}{5} (\sin x)^{5/3} - \frac{3}{11} (\sin x)^{11/3} + C$; 9. $\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C$; 10. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) + C$.

Завдання для самостійної роботи

1. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$; 2. $\int \sin^2 7x dx$; 3. $\int \cos^3 2x dx$; 4. $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^8 x}$; 5. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$;
6. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}$; 7. $\int \cos^4 x dx$; 8. $\int \sin 3x \cdot \cos 7x dx$;
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 6 \sin x \cdot \cos x + 15 \cos^2 x}$.

Відповіді:

1. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C$; 2. $\frac{x}{2} - \frac{1}{28} \sin 14x + C$;
3. $\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin^3 2x + C$; 4. $x - \frac{1}{7} \operatorname{ctg}^7 x + \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + C$;
5. $\frac{3}{5} (\cos x)^{5/3} + 3 (\cos x)^{-1/3} + C$; 6. $-\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C$;
7. $\frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$; 8. $-\frac{1}{20} \cos 10x + \frac{1}{8} \cos 4x + C$;
9. $\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x - 3}{\sqrt{6}} + C$.

Практичне заняття 6

ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ПІДСТАНОВКИ

Контрольні питання

1. Інтегрування функцій $R(x, x^{m_1/n_1}, \dots, x^{m_k/n_k})$.

2. Інтегрування функцій $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k/n_k}\right)$.

3. Інтегрування ірраціональних функцій вигляду:

$$R(x, \sqrt{a^2 - x^2}), R(x, \sqrt{x^2 - a^2}), R(x, \sqrt{a^2 + x^2}).$$

4. Біноміальні інтеграли $\int x^m (a + bx^n)^p dx$, де m, n, p –

раціональні числа.

Методичні рекомендації до практичного заняття

1. Розглянемо раціональну функцію відносно своїх аргументів

$R(x, x^{m_1/n_1}, \dots, x^{m_k/n_k})$, де $\frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$ – нескоротні дробі.

Для того, щоб позбутися ірраціональності, необхідно скористатися заміною $x = t^s$, де s – спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$

(п.1 лекція 5).

$$\begin{aligned} 6.1. \int \frac{dx}{\sqrt{x+4}} &= \left\| \begin{array}{l} x = t^2, \\ dx = 2t dt \end{array} \right\| = \int \frac{2t dt}{t+4} = 2 \int \frac{t+4-4}{t+4} dt = 2t - 8 \ln|t+4| + C = \\ &= 2\sqrt{x} - 8 \ln|\sqrt{x}+4| + C; \end{aligned}$$

6.2.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+5}} = \left\| \begin{array}{l} x = t^3, \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right\| = \int \frac{3t^2 dt}{t+5} = 3 \int \frac{t^2 dt}{t+5} = 3 \int \left(t - 5 + \frac{25}{t+5} \right) dt = \frac{3t^2}{2} - 15t +$$

$$+75\ln|t+5|+C = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} - 15\sqrt[3]{x} + 75\ln|\sqrt[3]{x}+5| + C;$$

$$\begin{aligned} 6.3. \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} dx &= \left\| \begin{array}{l} x = t^{12}, \quad \sqrt{x} = t^6, \quad \sqrt[3]{x^2} = t^8, \\ dx = 12t^{11} dt, \quad \sqrt[4]{x} = t^3 \end{array} \right\| = \int \frac{t^6 \cdot 12t^{11} dt}{t^8 - t^3} = \\ &= 12 \int \frac{t^{17} dt}{t^3(t^5 - 1)} = 12 \int \frac{t^{14}}{t^5 - 1} dt = 12 \int \left(t^9 + t^4 + \frac{t^4}{t^5 - 1} \right) dt = \\ &= 12 \left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5} \ln|t^5 - 1| \right) + C = 12 \left(\frac{\sqrt[6]{x^5}}{10} + \frac{\sqrt[12]{x^5}}{5} + \frac{1}{5} \ln|\sqrt[12]{x^5} - 1| \right) + C. \end{aligned}$$

2. Якщо раціональна відносно своїх аргументів функція матиме вигляд

$$R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m_1/n_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m_k/n_k} \right), \text{ де } \frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_k}{n_k} - \text{ нескоротні дроби, то}$$

аналогічно з попереднім випадком необхідно позначити $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, s -

спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$ (п.2 лекція 5).

$$\begin{aligned} 6.4. \int \frac{\sqrt{5x+7}}{2+\sqrt[3]{5x+7}} dx &= \left\| \begin{array}{l} 5x+7 = t^6, \quad t = \sqrt[6]{5x+7}, \\ dx = \frac{6}{5} t^5 dt \end{array} \right\| = \frac{6}{5} \int \frac{t^3 \cdot t^5 dt}{t^2 + 2} = \frac{6}{5} \int \frac{t^8 dt}{t^2 + 2}. \\ & \frac{-t^8}{t^8 + 2t^6} \left| \frac{t^2 + 1}{t^6 - 2t^4 + 4t^2 - 8} \right. \\ & \frac{-2t^6}{-2t^6 - 4t^4} \\ & \frac{-4t^4}{4t^4 + 8t^2} \\ & \frac{-8t^2}{-8t^2 - 16} \end{aligned}$$

16.

Розділивши чисельник на знаменник, остаточно отримуємо:

$$\begin{aligned} & \frac{6}{5} \int \left(t^6 - 2t^4 + 4t^2 - 8 + \frac{16}{t^2 + 2} \right) dt = \frac{6}{5} \left(\frac{t^7}{7} - 2\frac{t^5}{5} + 4\frac{t^3}{3} - 8t + \frac{16}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \right) + C = \\ & = \frac{6}{5} \left(\frac{(5x+7)\sqrt[5]{5x+7}}{7} - 2\frac{\sqrt[5]{(5x+7)^5}}{5} + 4\frac{\sqrt{5x+7}}{3} - 8\sqrt[5]{5x+7} \right) + \\ & + \frac{6}{5} \cdot \frac{16}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[5]{5x+7}}{\sqrt{2}} + C; \end{aligned}$$

6.5.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}} dx &= \left\| \begin{aligned} \frac{3-2x}{2x-7} = t^2 \Rightarrow 3-2x = t^2(2x-7) \Rightarrow x = \frac{7t^2+3}{2(t^2+1)}, \\ dx = \frac{14t(t^2+1) - (7t^2+3)2t}{2(t^2+1)^2} dt = \frac{4t}{(t^2+1)^2} dt \end{aligned} \right\| = \\ &= \int \frac{4t^2}{(t^2+1)^2} dt = \\ &= \left\| \begin{aligned} u = t, \quad du = dt, \quad dv = \frac{tdt}{(t^2+1)^2}, \\ v = \int \frac{tdt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2} \int (t^2+1)^{-2} d(t^2+1) = -\frac{1}{2(t^2+1)} \end{aligned} \right\| = \\ &= -\frac{4t}{2(t^2+1)} + 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{2t}{(t^2+1)} + 2 \operatorname{arctg} t + C = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-4x^2 + 20x - 21} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}} + C. \end{aligned}$$

3. Окремо слід розглянути інтегрування деяких ірраціональних виразів, а саме

$$R(x, \sqrt{a^2 - x^2}), \quad R(x, \sqrt{x^2 - a^2}), \quad R(x, \sqrt{a^2 + x^2}),$$

за допомогою тригонометричних підстановок (п.3 лекція 5).

$$6.6. \int \sqrt{49-x^2} dx$$

$$\int \sqrt{49-x^2} dx = \left\| \begin{array}{l} x = 7 \sin t, dx = 7 \cos t dt, \\ \sqrt{49-x^2} = \sqrt{49-49 \sin^2 t} = 7 \cos t \end{array} \right\| = \int 7 \cos t \cdot 7 \cos t dt =$$

$$= 49 \int \cos^2 t dt = \frac{49}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{49}{2} t + \frac{49}{4} \sin 2t + C.$$

Для того, щоб повернутися до початкової змінної, необхідно змінну t виразити через x : $\sin t = \frac{x}{7} \Rightarrow t = \arcsin \frac{x}{7}$.

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2 \frac{x}{7} \sqrt{1 - \frac{x^2}{49}} =$$

$$= \frac{2x}{7} \sqrt{\frac{49-x^2}{49}} = \frac{2x\sqrt{49-x^2}}{49}.$$

Тоді

$$\int \sqrt{49-x^2} dx = \frac{49}{2} \arcsin \frac{x}{7} + \frac{49}{4} \cdot \frac{2x}{49} \cdot \sqrt{49-x^2} + C =$$

$$= \frac{49}{2} \arcsin \frac{x}{7} + \frac{x}{2} \sqrt{49-x^2} + C;$$

$$6.7. \int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^2} dx = \left\| \begin{array}{l} x = \frac{5}{\cos t}, dx = \frac{5 \sin t}{\cos^2 t} dt, \\ \sqrt{x^2-25} = \sqrt{\frac{25}{\cos^2 t} - 25} = \\ = \sqrt{\frac{25(1-\cos^2 t)}{\cos^2 t}} = \frac{5 \sin t}{\cos t} \end{array} \right\| =$$

$$= \int \frac{5 \sin t \cdot \cos^2 t \cdot 5 \sin t}{\cos t \cdot 25 \cdot \cos^2 t} dt = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos t} dt =$$

$$= \int \frac{dt}{\cos t} - \int \cos t dt = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \sin t + C.$$

Відповідь необхідно записати, повернувшись до початкової змінної. Для цього виконаємо перетворення.

Через те, що $x = \frac{5}{\cos t} \Rightarrow t = \arccos \frac{5}{x}$. Тоді

$$\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2} + 1}{1 - \operatorname{tg} \frac{t}{2}}, \operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{\sin t}{1 + \cos t} = \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x\left(1 + \frac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x + 5}.$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x + 5} + 1}{1 - \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x + 5}} = \frac{\sqrt{x^2 - 25} + x + 5}{x + 5 - \sqrt{x^2 - 25}} = \frac{x + 5 + \sqrt{x^2 - 25}}{x + 5 - \sqrt{x^2 - 25}}.$$

Остаточно отримуємо:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x^2} dx = \ln \left(\frac{x + 5 + \sqrt{x^2 - 25}}{x + 5 - \sqrt{x^2 - 25}} \right) - \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} + C.$$

$$6.8. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(4+x^2)^5}} = \left\| \begin{aligned} x = 2 \operatorname{tg} t, dx = \frac{2dt}{\cos^2 t}, (4+x^2)^{5/2} &= (4+4 \operatorname{tg}^2 t)^{5/2} = \\ &= 4^{5/2} (1 + \operatorname{tg}^2 t)^{5/2} = 2^5 \left(\frac{1}{\cos^2 t} \right)^{5/2} = \frac{2^5}{\cos^5 t} \end{aligned} \right\| =$$

$$= \int \frac{4 \operatorname{tg}^2 t \cdot \cos^5 t \cdot 2 dt}{2^5 \cos^2 t} = \frac{1}{4} \int \frac{\sin^2 t \cdot \cos^5 t dt}{\cos^4 t} = \frac{1}{4} \int \sin^2 t \cos t dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin^2 t d(\sin t) = \frac{1}{4} \frac{(\sin t)^3}{3} + C.$$

Повернемося до початкової змінної. Отримуємо:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(4+x^2)^5}} = \frac{1}{12} \left(\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} \right)^3 + C = \frac{x^3}{12(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} + C.$$

4. Біноміальні інтеграли $\int x^m (a+bx^n)^p dx$, де m, n, p – раціональні числа (п.4 лекції 5).

$$6.9. \int x^{-1} \left(1 + x^{\frac{1}{3}} \right)^{-3} dx = I.$$

В даному випадку $m = -1, n = \frac{1}{3}, p = -3$, тобто p – ціле. Таким

чином ми маємо справу з першим випадком; отже $x = t^3; dx = 3t^2 dt$.

$$I = \int \frac{3t^2 dt}{t^3(1+t)^3} = 3 \int \frac{dt}{t(t+1)^3}.$$

Отримали правильний дріб, який розкладаємо на суму найпростіших дробів:

$$\frac{1}{t(t+1)^3} = \frac{A}{t} + \frac{B}{(t+1)} + \frac{C}{(t+1)^2} + \frac{D}{(t+1)^3},$$

$$1 = A(t+1)^3 + Bt(t+1)^2 + Ct(t+1) + Dt.$$

Для визначення A, B, C, D скористаємось способом порівняння коефіцієнтів.

$$\begin{cases} t^3 & 0 = A + B, & A = 1, \\ t^2 & 0 = 3A + 2B + C, & B = -1, \\ t^1 & 0 = 3A + B + C + D, & C = -1, \\ t^0 & 1 = A, & D = -1. \end{cases}$$

Остаточно отримуємо:

$$3 \int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t+1)^3} \right] dt = 3 \left[\ln|t| - \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2(t+1)^2} \right] + C =$$

$$= 3 \left[\ln \left| \frac{t}{t+1} \right| + \frac{2t+3}{2(t+1)^2} \right] + C = 3 \left[\ln \left| \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} \right| + \frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(\sqrt[3]{x}+1)^2} \right] + C.$$

6.10. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}} dx = I.$

В даному прикладі $m = -\frac{1}{2}; p = \frac{1}{3}; n = \frac{1}{4}; \frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2,$

тобто має місце другий випадок. Згідно вищевказаного, позначимо $1+x^{\frac{1}{4}}=t^3$, тоді $x=(t^3-1)^4$; $dx=12t^2(t^3-1)^3 dt$.

Таким чином,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx = 12 \int \frac{t^3(t^3-1)^3}{(t^3-1)^2} dt = 12 \int (t^6-t^3) dt \\ &= 12 \frac{t^7}{7} - 12 \frac{t^4}{4} + C = \frac{12}{7} t^7 - 3t^4 + C = \frac{12}{7} \left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^7 - 3 \left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^4 + C. \end{aligned}$$

$$6.11. \int \frac{dx}{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}} = \int x^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{3}} dx = I.$$

В даному прикладі $m = -\frac{3}{2}$; $n = \frac{3}{4}$; $p = -\frac{1}{3}$. Обчислимо:

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{-\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{4}} - \frac{1}{3} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} - \frac{1}{3} = -\frac{4}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = -1, \text{ тобто маємо}$$

випадок 3.

Згідно з формулами, позначимо

$$1+x^{\frac{3}{4}}=t^3, \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}+1=t^3 \Rightarrow \frac{1+x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}}=t^3;$$

$$x = \frac{1}{(t^3-1)^{\frac{4}{3}}}; dx = -\frac{4}{3}(t^3-1)^{-\frac{7}{3}} \cdot 3t^2 dt = -\frac{4t^2 dt}{(t^3-1)^{\frac{7}{3}}};$$

$$1+x^{\frac{3}{4}}=t^3 \cdot x^{\frac{3}{4}}=t^3 \cdot (t^3-1)^{\frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 4}}=t^3(t^3-1)^{-1};$$

$$\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left[t^3(t^3-1)^{-1}\right]^{-\frac{1}{3}} = t^{-1} \cdot (t^3-1)^{\frac{1}{3}}.$$

$$I = -4 \int \frac{(t^3 - 1)^{-\frac{4}{3}} \left(\frac{3}{2}\right) \cdot t^{-1} \cdot (t^3 - 1)^{\frac{1}{3}} \cdot t^2 dt}{(t^3 - 1)^{\frac{7}{3}}} = -4 \int \frac{(t^3 - 1)^2 \cdot (t^3 - 1)^{\frac{1}{3}} \cdot t^2}{t(t^3 - 1)^{\frac{7}{3}}} dt =$$

$$= -4 \int t dt = -\frac{4t^2}{2} + C = -2t^2 + C = -2\sqrt[3]{\left(1 + x^{\frac{3}{4}}\right)^2} + C.$$

Завдання для аудиторної роботи

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - 7}\sqrt[3]{x}}$; 2. $\int \sqrt{\frac{x+2}{3-x}} dx$; 3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}+3}$; 4. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt[4]{x}}$; 5. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3} dx$;
 6. $\int \frac{\sqrt{36-x^2}}{x^2} dx$; 7. $\int \frac{dx}{(9+x^2)^3}$.

Відповіді:

1. $3\sqrt[3]{x} + 21 \ln|\sqrt[3]{x} - 7| + C$; 2. $-\sqrt{6+x-x^2} + 5 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+2}{3-x}} + C$;
 3. $\frac{3}{2}t^2 - 9t + 27 \ln|t+3| + C$, де $t = \sqrt[3]{x-2}$;
 4. $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} - x + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} - 4 \ln|\sqrt[4]{x} + 1| + C$;
 5. $\frac{1}{6} \operatorname{arccos} \frac{3}{x} - \frac{\sqrt{x^2-9}}{2x^2} + C$; 6. $-\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsin} \frac{x}{6}\right)} - \operatorname{arcsin} \frac{x}{6} + C$;
 7. $\frac{1}{972} \left(\frac{3}{2}t + \sin 2t + \frac{1}{8} \sin 4t \right) + C$, де $t = \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$.

Завдання для самостійної роботи

1. $\int \frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} dx$; 2. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$; 3. $\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}} dx$;
4. $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx$; 5. $\int \frac{x^2}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}} dx$; 6. $\int \frac{dx}{(x^2+25)^2}$;
7. $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4 dx$; 8. $\int x^3(1+2x^2)^{-3/2} dx$; 9. $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{5/3}}$.

Відповіді:

1. $x - 6\sqrt{x} + 18 \ln|3 + \sqrt{x}| + C$; 2. $6\sqrt[6]{x} - 6 \arctg \sqrt[6]{x} + C$;
3. $\frac{1}{3}(3x+4) - \frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+4)^2} + \sqrt[3]{3x+4} - \ln|\sqrt[3]{3x+4} + 1| + C$;
4. $2t - \frac{1}{2} \sin 4t + C$, де $t = \arcsin \frac{x}{2}$; 5. $\ln|x + \sqrt{x^2+5}| - \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} + C$;
6. $\frac{1}{250} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C$, де $t = \arctg \frac{x}{5}$;
7. $\frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{24}{11} x \sqrt[6]{x^5} + \frac{36}{13} x^2 \sqrt[6]{x} + \frac{8}{5} x^2 \sqrt{x} + \frac{6}{17} x^2 \sqrt[6]{x^5} + C$;
8. $\frac{1}{2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}} + C$; 9. $-\frac{1}{8} \cdot \frac{4+3x^3}{x(2+x^3)^{2/3}} + C$.

Контрольна робота №1
(прикладі варіантів контрольної роботи)

Варіант 1

1. $\int \frac{dx}{x(2 \ln x + 5)}$;
2. $\int (3x + 4) \sin \frac{x}{2} dx$;
3. $\int \frac{3x - 1}{2x^2 - 4x + 5} dx$;
4. $\int \frac{\sqrt{2x - 3} dx}{\sqrt[3]{2x - 3} + 1}$;
5. $\int \cos^2 4x dx$;
6. $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}$;
7. $\int \frac{5x - 1}{x(x + 1)^2} dx$.

Варіант 2

1. $\int x \sin(3x^2 - 1) dx$;
2. $\int (5 - 2x) e^{-4x} dx$;
3. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$;
4. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x + 7}}$;
5. $\int \sin^2 3x dx$;
6. $\int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 7 \cos^2 x}$;
7. $\int \frac{13x + 6}{x^3 + x} dx$.

Варіант 3

1. $\int x5^{x^2-4} dx$;
2. $\int (2x-1)e^x dx$;
3. $\int \frac{x+2}{x^2-2x+10} dx$;
4. $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$;
5. $\int \cos^3 2x dx$;
6. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$;
7. $\int \frac{3x+2}{x^2(x-3)} dx$.

Варіант 4

1. $\int x \cos(3-5x^2) dx$;
2. $\int (1-x) \cos 5x dx$;
3. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$;
4. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}+1}$;
5. $\int \sin^3 7x dx$;
6. $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$;
7. $\int \frac{x+3}{x^3-4x} dx$.

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Практичне заняття 7

ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ФОРМУЛИ НЬЮТОНА–ЛЕЙБНІЦА. МЕТОД ЗАМІНИ ЗМІННОЇ ІНТЕГРУВАННЯ. МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Контрольні питання

1. Означення інтегральної суми функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.
2. Означення визначеного інтеграла.
3. Властивості визначеного інтеграла:
 - 3.1. Властивість збереження знаку підінтегральної функції визначеним інтегралом.
 - 3.2. Властивість лінійності визначеного інтеграла відносно підінтегральної функції.
 - 3.3. Властивість адитивності визначеного інтеграла щодо проміжку інтегрування.
 - 3.4. Теорема про оцінку визначеного інтеграла.
 - 3.5. Теорема про середнє значення.
 - 3.6. Теореми про інтегрування нерівностей.
4. Визначений інтеграл як функція верхньої змінної межі інтегрування. Теорема про її похідну.
5. Формула Ньютона–Лейбніца.
6. Формула заміни змінної у визначеному інтегралі.
7. Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Методичні рекомендації до практичного заняття

Розглянемо приклади на безпосереднє застосування формули Ньютона–Лейбніца (теорема 7.2 лекції 7):

$$7.1. \int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx = \int_0^1 (e^x - 1)^4 d(e^x - 1) = \frac{(e^x - 1)^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{(e - 1)^5}{5}.$$

7.2.

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int_1^e \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin \ln x \Big|_1^e = \arcsin \ln e - \arcsin \ln 1 = \\ = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$7.3. \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = -\int_0^1 e^{1/x} d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{1/x} \Big|_1^2 = -e^{\frac{1}{2}} + e.$$

$$7.4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \cdot \sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x dx = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x d(\cos x) = \\ = -2 \frac{\cos^7 x}{7} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{7} \left(\cos^7 \frac{\pi}{2} - \cos^7 0 \right) = -\frac{2}{7} (0 - 1) = \frac{2}{7}.$$

Якщо підінтегральний вираз доволі складний, для обчислення інтеграла $\int_a^b f(x) dx$ корисно замінити змінну інтегрування x новою змінною t , яка зв'язана з x відповідною формулою $x = \varphi(t)$ або $t = \psi(x)$ (теорема 7.3 лекції 7).

Розглянемо приклади на використання заміни змінної у визначеному інтегралі.

7.5.

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx = \left\| \begin{array}{l} t = \sqrt{x}, x = t^2, t > 0, \\ dx = 2t dt, \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} x_u = 4, 4 = t^2, t = 2, \\ x_g = 9, 9 = t^2, t = 3 \end{array} \right\| = \int_2^3 \frac{t \cdot 2t dt}{t-1} = 2 \int_2^3 \frac{t^2 dt}{t-1} = \\ = 2 \int_2^3 \frac{t^2 - 1 + 1}{t-1} dt = 2 \int_2^3 (t+1) dt + 2 \int_2^3 \frac{1}{t-1} dt = 2 \left(\frac{t^2}{2} + t \right) \Big|_2^3 + 2 \ln |t-1| \Big|_2^3 = \\ = 2 \left(\frac{9}{2} + 3 - 2 - 2 \right) + 2 \ln 2 - 2 \ln 1 = 2 \left(\frac{9}{2} - 1 \right) + 2 \ln 2 = 7 + 2 \ln 2.$$

$$\begin{aligned}
 7.6. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \cos x + 3} &= \left\| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x_u = 0, t = \operatorname{tg} 0 = 0, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad x_e = \frac{\pi}{2}, t = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \end{array} \right\| = \\
 &= 2 \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2) \left(2 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3 \right)} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{\cancel{(1+t^2)} \left(\frac{2-2t^2+3+3t^2}{\cancel{(1+t^2)}} \right)} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2+5} = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} \Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.7. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx &= \left\| \begin{array}{l} t = \sqrt{e^x - 1}, e^x - 1 = t^2, \quad x_u = 0, t = \sqrt{e^0 - 1} = 0, \\ e^x dx = 2t dt, \quad x_e = \ln 5, t = \sqrt{e^{\ln 5} - 1} = 2 \end{array} \right\| = \\
 &= \int_0^2 \frac{t \cdot 2t dt}{t^2 + 4} = 2 \int_0^2 \frac{t^2 + 4 - 4}{t^2 + 4} dt = 2 \int_0^2 dt - 8 \int_0^2 \frac{dt}{t^2 + 4} = 2t \Big|_0^2 - 8 \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \Big|_0^2 = \\
 &= 4 - 4 \operatorname{arctg} 1 = 4 - 4 \frac{\pi}{4} = 4 - \pi.
 \end{aligned}$$

7.8.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x^2 \sqrt{4-x^2} dx &= \left\| \begin{array}{l} x = 2 \sin t, \quad x = 1 \Rightarrow 1 = 2 \sin t, \sin t = \frac{1}{2} \Rightarrow t_e = \frac{\pi}{6}, \\ dx = 2 \cos t dt, \quad x = 0 \Rightarrow 0 = 2 \sin t, \sin t = 0 \Rightarrow t_u = 0 \end{array} \right\| = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \sin^2 t \sqrt{4-4 \sin^2 t} 2 \cos t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 2t dt = \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = 2 \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\
 &= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.
 \end{aligned}$$

Також слід розглянути, формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі (теорема 7.4 лекції 7):

При використанні цієї формули є справедливими усі рекомендації, які були наведені під час застосування відповідної формули для невизначеного інтеграла.

Розглянемо приклади.

7.9.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \, dx = \left\| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \cos x \, dx, \\ du = dx, \quad v = \sin x \end{array} \right\| = x \cdot \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

7.10.

$$\int_0^3 x \cdot \arctg x \, dx = \left\| \begin{array}{l} u = \arctg x, \quad dv = x \, dx, \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\| = \frac{x^2}{2} \cdot \arctg x \Big|_0^3 - \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{x^2 \, dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{9}{2} \arctg 3 - \frac{1}{2} x^3 \Big|_0^3 + \frac{1}{2} \arctg x \Big|_0^3 = \frac{9}{2} \arctg 3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \arctg 3 = 5 \arctg 3 - \frac{3}{2}.$$

7.11.

$$\int_1^2 x \cdot \log_2 x \, dx = \left\| \begin{array}{l} u = \log_2 x, \quad dv = x \, dx, \\ du = \frac{dx}{x \ln 2}, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\| = \frac{x^2}{2} \log_2 x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x \ln 2} =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} \log_2 1 - \frac{1}{2 \ln 2} \int_1^2 x \, dx = 2 - \frac{1}{2 \ln 2} \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = 2 - \frac{1}{2 \ln 2} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 2 - \frac{1}{2 \ln 2} \cdot \frac{3}{2} =$$

$$= 2 - \frac{3}{4 \ln 2}.$$

Далі необхідно розглянути таке поняття, як середнє значення функції $y = f(x)$ на відрізьку $[a, b]$ (теорема 6.9 лекції 6).

Розглянемо приклади.

7.12. Знайти середнє значення функції $f(x) = \frac{2}{e^x + 1}$ на відрізьку

$[0, 2]$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{2-0} \int_0^2 \frac{2}{e^x+1} dx = \int_0^2 \frac{1}{e^x+1} dx = \int_0^2 \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} dx = \int_0^2 \frac{e^x+1}{e^x+1} dx - \int_0^2 \frac{e^x}{e^x+1} dx = \\ &= x \Big|_0^2 - \ln|e^x+1| \Big|_0^2 = 2 - \ln|e^2+1| + \ln 2 = 2 - \ln \frac{e^2+1}{2}.\end{aligned}$$

Відповідь: $2 - \ln \frac{e^2+1}{2}$.

7.13. Знайти середнє значення функції $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ на відріжку $[1, e]$.

Розв'язання.

$$\mu = \frac{1}{e-1} \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{1}{e-1} \int_1^e \ln^2 x d(\ln x) = \frac{1}{e-1} \left. \frac{\ln^3 x}{3} \right|_1^e = \frac{1}{3(e-1)}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3(e-1)}$.

Надалі необхідно розглянути приклади з використанням теореми 6.8 лекції 6 щодо оцінки визначеного інтеграла.

7.14. Оцінити визначений інтеграл $\int_1^4 \left(4 - x - \frac{4}{x^2}\right) dx$.

Розв'язання. В даному разі $f(x) = 4 - x - \frac{4}{x^2}$; $a = 1$; $b = 4$.

Знайдемо найменше m та найбільше M значення функції на інтервалі $[1, 4]$. Для цього проведемо наступні дії:

$$y' = -1 - 4(-2)x^{-3} = -1 + \frac{8}{x^3}; y' = 0 \Rightarrow \frac{8-x^3}{x^3} = 0 \Rightarrow 8-x^3 = 0 \Rightarrow x = 2 \in (1, 4).$$

Обчислимо значення функції на кінцях інтервалу та в критичній точці $x = 2$:

$$f(1) = 4 - 1 - 4 = -1, f(2) = 4 - 2 - 1 = 1, f(4) = 4 - 4 - \frac{4}{16} = -\frac{1}{4},$$

та порівняємо їх. Маємо $m = -1$, $M = 1$.

Таким чином,

$$-1(4-1) \leq \int_1^4 \left(4-x-\frac{4}{x^2}\right) dx \leq 1(4-1), \quad -3 \leq \int_1^4 \left(4-x-\frac{4}{x^2}\right) dx \leq 3.$$

$$\text{Відповідь: } -3 \leq \int_1^4 \left(4-x-\frac{4}{x^2}\right) dx \leq 3.$$

Зауважимо, що цей інтеграл легко обчислити безпосередньо.

$$\begin{aligned} \int_1^4 \left(4-x-\frac{4}{x^2}\right) dx &= \left(4x - \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x}\right) \Big|_1^4 = \left(4 \cdot 4 - \frac{4^2}{2} + \frac{4}{4}\right) - \left(4 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} + \frac{4}{1}\right) = \\ &= 16 - 8 + 1 - 4 + \frac{1}{2} - 4 = 1,5. \end{aligned}$$

$$\mathbf{7.15.} \text{ Оцінити визначений інтеграл } \int_0^{\pi/2} e^{\sin^2 x} dx.$$

Розв'язання. Цей інтеграл обчислити не можна, проте можна оцінити. В даному разі $f(x) = e^{\sin^2 x}$; $a = 0$; $b = \frac{\pi}{2}$. Знайдемо найменше m та найбільше M значення функції на інтервалі $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Для цього проведемо наступні дії:

$$y' = e^{\sin^2 x} 2 \sin x \cdot \cos x = e^{\sin^2 x} \sin 2x;$$

$$y' = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi k, \quad k \in \mathbf{R} \Rightarrow x = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbf{R}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = 0 \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Обчислимо значення функції на кінцях інтервалу

$$f(0) = e^{\sin^2 0} = e^0 = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\sin^2 \frac{\pi}{2}} = e^1 = e$$

та порівняємо їх. Маємо $m = 1$, $M = e$.

Таким чином, $\frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\pi/2} e^{\sin^2 x} dx \leq \frac{\pi}{2} e$.

Відповідь: $\frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\pi/2} e^{\sin^2 x} dx \leq \frac{\pi}{2} e$

Задачі для аудиторної роботи

1. $\int_1^2 \left(3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$. 2. $\int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} dx$. 3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx$.

4. $\int_0^1 \frac{x^2 + \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$. 5. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. 6. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$. 7. $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$.

8. $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx$. 9. $\int_0^2 x \cdot e^{x+1} dx$. 10. $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx$. 11. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos 2x dx$.

12. $\int_0^1 (3x^2 - 1) \operatorname{arctg} x dx$. 13. Знайти середнє значення функції

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{8+2x-x^2}}$ на відрізку $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$. 14. Знайти середнє значення

функції $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ на відрізку $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. 15. Оцінити визначений

інтеграл $\int_{-2}^2 (x+2)e^{1-x} dx$. 16. Оцінити визначений інтеграл $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

Відповіді:

1. $8 - \sqrt{2}$. 2. 0. 3. $\ln \frac{3}{2}$. 4. $1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{32}$. 5. $\frac{\pi}{2}$. 6. $\frac{\pi}{6}$.

7. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. 8. $\frac{\sqrt{3}}{72}$. 9. $e^3 + e$. 10. $-\frac{\pi}{2}$. 11. $\frac{\pi}{2}$. 12. $\ln 2 - \frac{1}{2}$. 13. $\frac{\pi}{9}$.

14. $\sqrt{3} - \frac{3 \ln 2}{\pi}$. 15. $0 \leq \int_{-2}^2 (x+2)e^{1-x} dx \leq 4e^2$. 16. $0 \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leq 1$.

Задачі для самостійної роботи

1. $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$. 2. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$. 3. $\int_0^1 \frac{4x^5+9x^3+2x-\operatorname{arctg}^4 2x}{1+4x^2} dx$. 4. $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}$.

5. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$. 6. $\int_0^4 x^3 \sqrt{x^2+9} dx$. 7. $\int_0^{\pi/3} \cos^3 x \cdot \sin 2x dx$. 8. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^4 x dx$.

9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4-7 \operatorname{tg} x}{2+3 \operatorname{tg} x} dx$. 10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4+\sqrt{\sin x}} dx$. 11. $\int_0^1 x e^{-x} dx$. 12. $\int_1^3 (x^2-1) \ln x dx$.

13. $\int_0^{\pi} (1-8x^2) \cos 4x dx$. 14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx$. 15. Знайти середнє значення

функції $f(x) = x \log_3 x$ на відрізку $[1, 3]$. 16. Знайти середнє значення

функції $f(x) = \frac{x \cos x}{\sin^3 x}$ на відрізку $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. 17. Оцінити визначений

інтеграл $\int_0^3 \ln(x^2-2x+2) dx$.

Відповіді:

1. $\ln \sqrt{\frac{7}{5}}$. 2. $\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2$. 3. $\frac{5}{4} - \frac{\operatorname{arctg}^5 2}{10}$. 4. $\ln \frac{3}{2}$.

5. $2 - \ln 2$. 6. $282,4$. 7. $\frac{31}{80}$. 8. $\frac{2}{3} + \frac{\pi}{12}$. 9. $\ln \frac{25}{8} - \frac{\pi}{4}$. 10. $2 - 8 \ln \frac{5}{4}$.

11. $-\frac{2}{e} + 1$. 12. $6 \ln 3 - \frac{8}{9}$. 13. $-\pi$. 14. $\frac{e^\pi - 2}{5}$. 15. $\frac{9}{4} - \frac{1}{\ln 3}$. 16. $\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

17. $0 \leq \int_0^3 \ln(x^2-2x+2) dx \leq 3 \ln 5$.

Практичне заняття 8

ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ПЛОСКИХ ФІГУР В ДЕКАРТОВІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Контрольні питання

1. Обчислення площі плоскої фігури, що обмежена лініями $y = f(x)$, $(f(x) \geq 0)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

2. Обчислення площі плоскої фігури, що обмежена лініями $y = f(x)$, $(f(x) \leq 0)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

3. Обчислення площі плоскої фігури, що обмежена лініями $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, $(f(x) \geq \varphi(x))$, $x = a$, $x = b$.

4. Обчислення площі плоскої фігури, що обмежена лініями $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$, $(\varphi(y) \geq \psi(y))$, $y = c$, $y = d$.

5. Обчислення площі плоскої фігури, якщо крива $y = f(x)$ задана параметричними рівняннями
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta. \end{cases}$$

Методичні рекомендації до практичного заняття

При обчислення площі плоских фігур перш за все необхідно зробити креслення фігури, яка задана за умовою задачі. Рисунок допомагає визначити, який саме випадок розглядається.

8.1. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y = x^2 + 2$, $x = -3$, $x = 1$, $y = 0$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рисунок 2.1).

Відповідно до формули п.1 лекції 7 маємо:

$$S = \int_{-3}^1 (x^2 + 2) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-3}^1 + 2x \Big|_{-3}^1 = \frac{1}{3} + 9 + 2 + 6 = \frac{52}{3}.$$

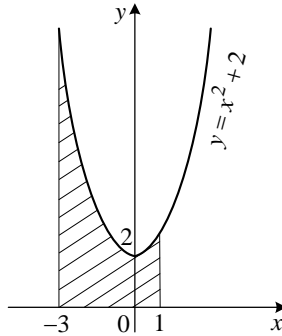


Рисунок 2.1

Відповідь: $\frac{52}{3}$.

8.2. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y = (x+2)^2$, $y = 0$, $y = 4 - x$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рисунок 2.2).

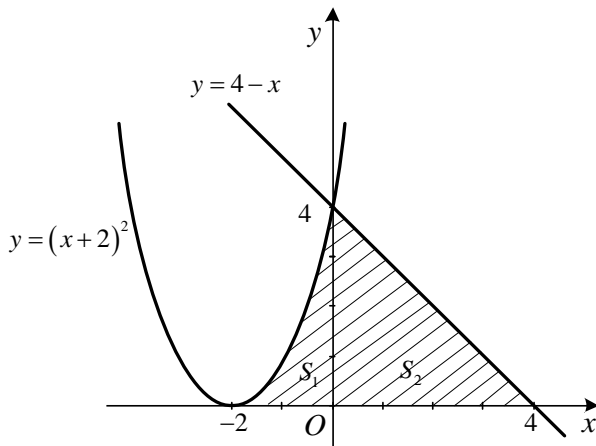


Рисунок 2.2

Дану фігуру слід розбити на дві частини віссю Oy . В такому разі $S = S_1 + S_2$.

Площа кожної частини обчислюється за формулою п. 1 лекції 7. Відповідно до формули маємо:

$$S_1 = \int_{-2}^0 (x+2)^2 dx = \left. \frac{(x+2)^3}{3} \right|_{-2}^0 = \frac{8}{3}; \quad S_2 = \int_0^4 (4-x) dx = \left. \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \right|_0^4 = 16 - 8 = 8.$$

Остаточо отримуємо $S = S_1 + S_2 = \frac{8}{3} + 8 = 10\frac{2}{3}$.

Відповідь: $10\frac{2}{3}$.

8.3. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y = x^2 - 2x - 3$, $x = 2$, $x = 1$, $y = 0$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рисунок 2.3).

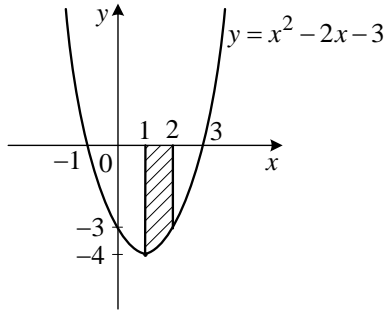


Рисунок 2.3

Згідно з п.2 лекції 7 маємо:

$$S = -\int_1^2 (x^2 - 2x - 3) dx = \frac{11}{3}.$$

Відповідь: $\frac{11}{3}$.

8.4. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y = \ln x$, $y = -2$, $x = 1$, $x = 3$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рисунок 2.4).

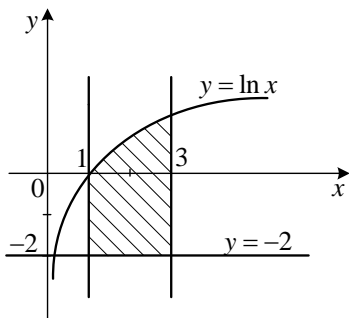


Рисунок 2.4

Згідно з п.3 лекції 7 маємо:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^3 (\ln x + 2) dx = 2x \Big|_1^3 + \int_1^3 \ln x dx = 2(3-1) + (x \ln x - x) \Big|_1^3 = \\
 &= 4 + 3 \ln 3 - 3 + 1 = 3 \ln 3 + 2.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $3 \ln 3 + 2$.

8.5. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рисунок 2.8).

Знайдемо точки перетину двох парабол:

$$4 - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2.$$

Ці точки перетину і є межами інтегрування.

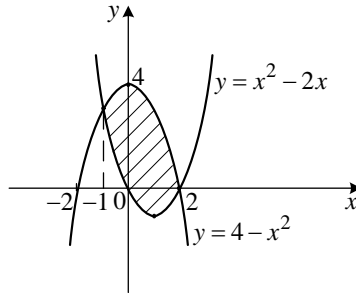


Рисунок 2.8

Згідно з п.3 лекції 7 маємо:

$$S = \int_{-1}^2 (4 - x^2 - x^2 + 2x) dx = \int_{-1}^2 (4 - 2x^2 + 2x) dx = \left(4x - 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^2 =$$

$$= 8 - \frac{16}{3} + 4 + 4 - \frac{2}{3} - 1 = 15 - 6 = 9.$$

Відповідь: 9.

8.6. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y = -x$, $y = 2x - x^2$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рисунок 2.9).

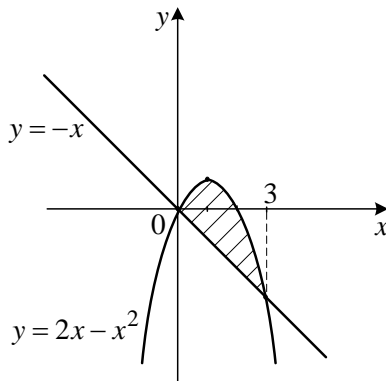


Рисунок 2.9

Знайдемо точки перетину прямої і параболі:

$$-x = -x^2 + 2x \Rightarrow 3x - x^2 = 0 \Rightarrow x(3 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3.$$

Очевидно, межі інтегрування в даному випадку $x = 0, x = 3$.

Таким чином, згідно з п.3 лекції 7:

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x)) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left(3 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{9}{2}.$$

Відповідь: $\frac{9}{2}$.

8.7. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y = 2^x$, $y = -x^2$, $x = 0$, $x = 3$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рисунок 2.10).

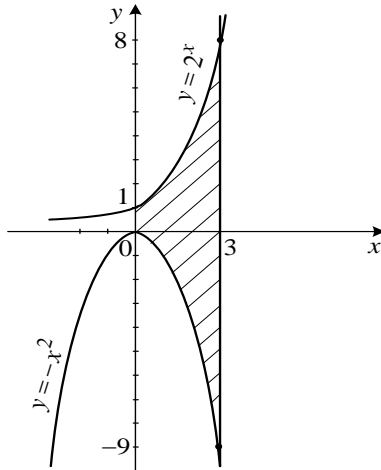


Рисунок 2.10

Очевидно, межі інтегрування в даному випадку $x = 0, x = 3$.

Таким чином, згідно з п. 3 лекції 7, маємо:

$$S = \int_0^3 (2^x + x^2) dx = \left(\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{8}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} + 9 = 9 + \frac{7}{\ln 2}.$$

Відповідь: $9 + \frac{7}{\ln 2}$.

8.8. Обчислити площу фігури, яка обмежена локоном Аньезі

$$y = \frac{8}{x^2 + 4} \text{ та параболою } 4y = x^2.$$

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рисунок 2.11).

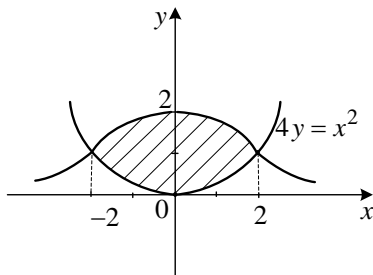


Рисунок 2.11

Обчислимо координати точок перетину кривих. Розглянемо систему

$$\begin{cases} y = \frac{8}{x^2 + 4}, \\ y = \frac{x^2}{4}. \end{cases}$$

Звідки $\frac{8}{x^2 + 4} = \frac{x^2}{4} \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0.$

Дійсними коренями цього рівняння є числа $x = \pm 2$. Ці числа є межами інтегрування. Таким чином,

$$S = \int_{-2}^2 \left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4} \right) dx = 2 \int_0^2 \left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4} \right) dx = 16 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_0^2 - \frac{x^3}{12} \Big|_0^2 =$$

$$= 8 \frac{\pi}{4} - \frac{8}{12} = 2\pi - \frac{2}{3}.$$

Відповідь: $2\pi - \frac{2}{3}$.

8.9. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y^2 = x + 4$, $x = 0$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рисунок 2.13).

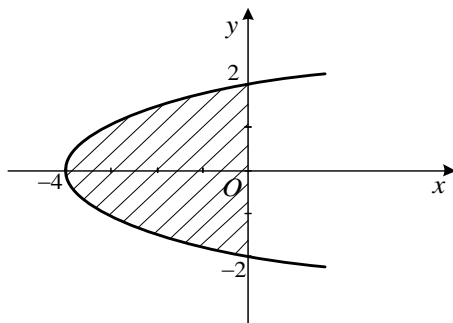


Рисунок 2.13

Обчислимо координати точок перетину кривих. Розглянемо систему

$$\begin{cases} y^2 = x + 4, \\ x = 0. \end{cases} \quad y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2.$$

Ці числа є межами інтегрування.

Відповідно до п.4 лекції 7 маємо:

$$S = - \int_{-2}^2 (y^2 - 4) dy = -2 \int_0^2 (y^2 - 4) dy = -2 \left(\frac{y^3}{3} - 4y \right) \Big|_0^2 = -2 \left(\frac{8}{3} - 8 \right) =$$

$$= 2 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = 2 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3}.$$

При обчисленні інтегралу використано, що підінтегральна функція є парною, а інтервал інтегрування є симетричним.

Відповідь: $10\frac{2}{3}$.

8.10. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $x = 2 - y - y^2$, $x = 0$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рисунок 2.14).

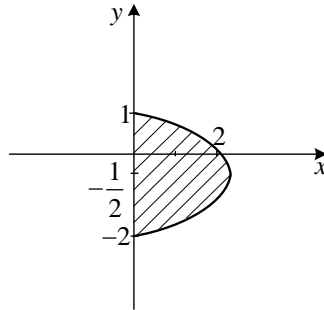


Рисунок 2.14

Очевидно, межами інтегрування є точки перетину параболи і осі ординат. Згідно з п.4 лекції 7:

$$S = \int_{-2}^1 (2 - y - y^2) dy = \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

Відповідь: $\frac{9}{2}$.

8.11. Обчислити площу фігури, яка обмежена першою аркою циклоїди

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$$

та прямою $y = 3$, $y \geq 3$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рисунок 2.15).

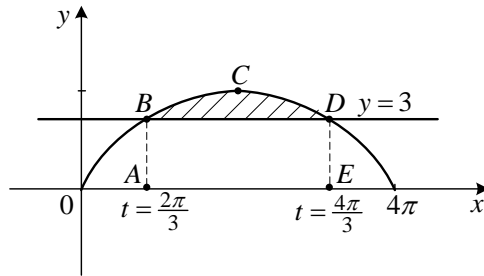


Рисунок 2.15

Обчислимо значення параметра t , які відповідають точкам B і D (точки перетину циклоїди та прямої $y = 3$):

$$3 = 2(1 - \cos t) \Rightarrow \cos t = -\frac{1}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{2\pi}{3}, t_2 = \frac{4\pi}{3}$$

Тоді координати точок B і D :

$$x_B = 2\left(\frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}, B\left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}, 3\right),$$

$$x_D = 2\left(\frac{4\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{3}, D\left(\frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{3}, 3\right).$$

Таким чином, площа криволінійної трапеції $ABCDE$ S_1 буде:

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} 2^2(1 - \cos t)^2 dt = 4 \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = 4 \left(\frac{3t}{2} - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Bigg|_{2\pi/3}^{4\pi/3} = \\ &= 4 \left(\frac{12\pi}{6} - \frac{6\pi}{6} - 2\sin \frac{4\pi}{3} + 2\sin \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{4}\sin \frac{8\pi}{3} - \frac{1}{4}\sin \frac{4\pi}{3} \right) = \\ &= 4 \left(\pi + \sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = 4 \left(\pi + \frac{9\sqrt{3}}{4} \right) = 4\pi + 9\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Позначимо S_2 площу прямокутника $ABDE$.

$$S_2 = AE \cdot AB = \left\| \begin{array}{l} AE = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{3} - \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3} = \frac{4\pi + 6\sqrt{3}}{3}, \\ AB = 3. \end{array} \right\| = 4\pi + 6\sqrt{3}.$$

Остаточно отримуємо: $S = S_1 - S_2 = 4\pi + 9\sqrt{3} - 4\pi - 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

Відповідь: $3\sqrt{3}$.

8.12. Обчислити площу фігури, яка обмежена астроїдою

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Розв'язання. Зробимо рисунок астроїди (рисунок 2.16).

Напишемо рівняння астроїди в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = b \sin^3 t, \end{cases}$$

де $0 \leq t \leq 2\pi$.

Фігура є симетричною відносно координатних осей. Отже, $S = 4S_1$, де S_1 — частина площі, яка розташована в першій координатній чверті.

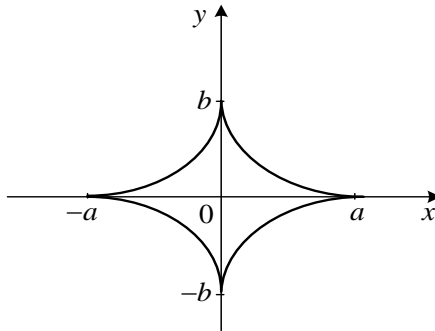


Рисунок 2.16

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_{\pi/2}^0 b \sin^3 t \cdot [a \cos^3 t]' dt = \int_{\pi/2}^0 b \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t) dt = -3ab \int_{\pi/2}^0 \sin^4 t \cdot \cos^2 t dt = \\
&= -3ab \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t \cdot (\sin t \cdot \cos t)^2 dt = -\frac{3ab}{4} \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t \cdot \sin^2 2t dt = -\frac{3ab}{4} \int_{\pi/2}^0 (\sin t \cdot \sin 2t)^2 dt = \\
&= -\frac{3ab}{4} \int_{\pi/2}^0 \frac{1}{4} (\cos(t-2t) - \cos(t+2t))^2 dt = -\frac{3ab}{16} \int_{\pi/2}^0 (\cos^2 t - 2 \cos t \cos 3t + \cos^2 3t) dt = \\
&= -\frac{3ab}{16} \int_{\pi/2}^0 \left(\frac{1}{2} (1 + \cos 2t) - 2 \cdot \frac{1}{2} (\cos(t-3t) + \cos(t+3t)) + \frac{1}{2} (1 + \cos 6t) \right) dt = \\
&= -\frac{3ab}{16} \int_{\pi/2}^0 \left(1 - \frac{1}{2} \cos 2t - \cos 4t + \frac{1}{2} \cos 6t \right) dt = -\frac{3ab}{16} \left(t - \frac{1}{4} \sin 2t - \frac{1}{4} \sin 4t + \frac{1}{12} \sin 6t \right) \Big|_{\pi/2}^0 = \\
&= \frac{3ab}{16} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{2} + \frac{1}{12} \sin \frac{6\pi}{2} \right) = \frac{3ab\pi}{32}.
\end{aligned}$$

Остаточно отримуємо $S = 4 \frac{3ab\pi}{32} = \frac{3ab\pi}{8}$.

Відповідь: $\frac{3ab\pi}{8}$.

Задачі для аудиторної роботи

Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

1. $y = x^2 + 2$, $x = -3$, $x = 1$, $y = 0$. 2. $x = (y-2)^3$, $x = 4y-8$.

3. $y = \ln x$, $y = -2$, $x = 1$, $x = 3$. 4. $y^2 = x+3$, $y^2 = 5-x$.

5. $y = \arcsin x$; $y = -\frac{\pi}{2}$; $x = 0$. 6. $xy = 1$, $y = x$, $x = 5$.

7. $y = e^x$, $x = -2$, $x = 1$, $y = 3$. 8. $x^2 + y^2 = 4$, $y = x$, $x = 0$, $y \geq x$, $x \geq 0$.

9. $y = \frac{25}{x^2}$; $y = 0$, $y = 1$, $-7 \leq x \leq 7$. 10. $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases}$

$$11. \begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \quad x = 3\sqrt{3}, \quad (x \geq 3\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \quad y = 3, \quad (y \geq 3, 0 \leq x \leq 4\pi). \end{cases}$$

Відповіді:

$$1. \frac{52}{3}. \quad 2. 8. \quad 3. 3 \ln 3 + 2. \quad 4. \frac{64}{3}. \quad 5. 1. \quad 6. 12 - \ln 5. \quad 7. 9 - e + e^{-2}. \quad 8. \frac{\pi}{2}. \quad 9. \frac{90}{7}$$

$$10. 6\pi. \quad 11. 4\pi - 6\sqrt{3}. \quad 12. 3\sqrt{3}.$$

Задачі для самостійної роботи

Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

$$1. y = x^2 + 1, \quad x = -4, \quad x = -2, \quad y = 0. \quad 2. y = 2x - x^2 + 3, \quad y = x^2 - 4x + 3.$$

$$3. y = \ln x, \quad y = 2, \quad x = 7. \quad 4. y = -(x-2)^2, \quad y = x-4. \quad 5. xy = 6, \\ x + y - 7 = 0. \quad 6. x = 4 - y^2, \quad x = y^2 - 2y. \quad 7. y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 1.$$

$$8. y = \sqrt{2-x^2}, \quad y = x^2. \quad 9. y = \sqrt{8-x^2}, \quad y = x \quad (y \leq x), \quad y = 0.$$

$$10. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \quad (0 \leq x \leq 8\pi). \end{cases} \quad 11. \begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \quad y = 2, \quad (y \geq 2). \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x = 24 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \quad x \geq 9\sqrt{3}. \end{cases}$$

Відповіді:

$$1. \frac{62}{3}. \quad 2. 9. \quad 3. 7 \ln 7 + e^2 - 21. \quad 4. 4,5. \quad 5. 17,5 - 6 \ln 6.$$

$$6. \frac{31}{3}. \quad 7. e + e^{-1} - 2. \quad 8. \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}. \quad 9. \pi. \quad 10. 48\pi. \quad 11. 12\pi - 9\sqrt{3}. \quad 12. 3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Практичне заняття 9

ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ПЛОСКИХ ФІГУР В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ. ОБЧИСЛЕННЯ ДОВЖИНИ ПЛОСКОЇ КРИВОЇ

Контрольні питання

1. Полярна система координат. Обчислення площі криволінійного сектору, обмеженого кривою, що задана у полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ та променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$).

2. Обчислення довжини плоскої кривої, що задана рівнянням $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.

3. Обчислення довжини плоскої кривої, що задана рівнянням $x = \varphi(y)$, $c \leq y \leq d$.

4. Обчислення довжини плоскої кривої, що задана параметричними рівняннями
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta. \end{cases}$$

5. Обчислення довжини плоскої кривої, що задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$.

Методичні рекомендації до практичного заняття

1. При обчисленні площ плоских фігур, доцільно зробити креслення фігури, яка задана за умовою задачі. Рисунок допомагає визначити межі інтегрування. Якщо фігура складається з кількох симетричних частин, зазвичай обчислюють площу однієї частини, а результат помножують на кількість частин.

Як відомо (теорема 8.1 лекції 8), площа фігури, обмеженої неперервною кривою $\rho = \rho(\varphi)$ та променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$) обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

9.1. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1 - \cos \varphi)$.

Розв'язання. Зробимо рисунок кардіоїди (рисунок 2.17).

З області визначення функції випливає, що $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Зауважимо, що $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ парна функція, отже графік є симетричним відносно полярної осі.

Побудуємо таблицю, в якій φ будемо надавати довільні значення і обчислювати відповідні значення ρ :

φ	ρ
0	$\rho = a(1 - \cos 0) = 0$
$\frac{\pi}{4}$	$\rho = a(1 - \cos \frac{\pi}{4}) \approx 0,3a$
$\frac{\pi}{2}$	$\rho = a(1 - \cos \frac{\pi}{2}) = a$
$\frac{3\pi}{4}$	$\rho = a(1 - \cos \frac{3\pi}{4}) \approx 1,7a$
π	$\rho = a(1 - \cos \pi) = 2a$

Через симетрію фігури можна розглядати половину площі та подвоїти результат.

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2 (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} (1 - 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= a^2 \left(\varphi \Big|_0^{\pi} - 2 \sin \varphi \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi \right) = a^2 \left(\pi + \frac{1}{2} \varphi \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{3\pi}{2} a^2. \end{aligned}$$

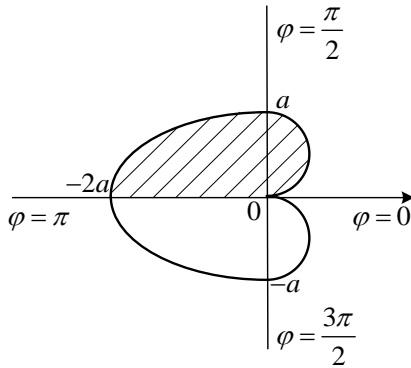


Рисунок 2.17

Відповідь: $\frac{3\pi}{2} a^2$.

9.2. Обчислити площу фігури, яка обмежена лінією $\rho = a \cos 3\varphi$, ($a > 0$).

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури (рисунок 2.18).

Період даної функції $T = \frac{2\pi}{3}$, при цьому допустимими значеннями для φ є ті, при яких $\cos 3\varphi \geq 0$:

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 3\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Дана фігура являє собою три рівні пелюстки, одна з яких описується при $-\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$.

Побудуємо таблицю, в якій φ будемо надавати довільні значення і обчислювати відповідні значення ρ :

φ	ρ
0	$\rho = a \cos 0 = a$
$\frac{\pi}{12}$	$\rho = a \cos \frac{\pi}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\rho = a \cos \frac{\pi}{2} = 0$

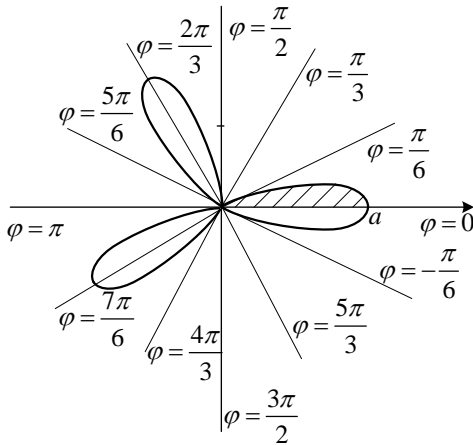


Рисунок 2.18

З рисунку видно, що $S = 6S_1$, де S_1 площа половини пелюстки

$$\begin{aligned}
 S &= 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} a^2 \cos^2 3\varphi d\varphi = 3a^2 \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2} (1 + 2\cos 6\varphi) d\varphi = \frac{3a^2}{2} (\varphi + \frac{1}{6} \sin 6\varphi) \Big|_0^{\pi/6} = \\
 &= \frac{3a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} a^2.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4} a^2$.

2. Перейдемо до обчислення довжини дуги плоскої кривої в декартовій системі координат.

9.3. Знайти довжину дуги кривої $y = \ln \sin x$, $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Використаємо формулу $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

(теорема 8.2 лекція 8).

Обчислимо підінтегральний вираз та проведемо його перетворення в такий вигляд, щоб було зручно здобувати корінь.

$$y' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x, (y')^2 = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}, 1 + (y')^2 = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Остаточно маємо:

$$\begin{aligned} l &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|\sin x|} dx = \left\| \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \\ |\sin x| = \sin x \end{array} \right\| = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = \\ &= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right| = \ln 1 - \ln \frac{1}{\sqrt{3}} = \ln \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\ln \sqrt{3}$.

9.4. Обчислити довжину дуги лінії $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, $1 \leq x \leq 2$.

Розв'язання. Всі дії виконуються аналогічно попередньому прикладу:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{x^2 - 1}{2x}; \\ \sqrt{1 + (y'(x))^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{2x} \right)^2} = \sqrt{\frac{4x^2 + x^4 - 2x^2 + 1}{4x^2}} = \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2}} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{x^2 + 1}{2x} \right)^2} = \left| \frac{x^2 + 1}{2x} \right| = \frac{x^2 + 1}{2x} \quad (\text{за умовою } 1 \leq x \leq 2). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$l = \int_1^2 \frac{x^2+1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 x dx + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 + \frac{1}{2} \ln|x| \Big|_1^2 = \frac{1}{4}(4-1) + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

Відповідь: $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$

9.5. Обчислити довжину напівкубічної параболи $5y^3 = x^2$, що розміщена в колі $x^2 + y^2 = 6$ (рисунок 2.19).

Розв'язання.

З'ясуємо точки перетину кривих. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 5y^3 = x^2, \\ x^2 + y^2 = 6, \end{cases} \Rightarrow 5y^3 + y^2 - 6 = 0.$$

Один з коренів даного рівняння $y = 1$. Таким чином,

$$\begin{array}{r} \underline{-5y^3 + y^2 - 6} \quad \Big| \quad \frac{y-1}{5y^2 + 6y + 6} \\ \underline{6y^2 - 6} \\ \underline{6y^2 - 6y} \\ \underline{-6y - 6} \\ \underline{6y - 6} \\ 0. \end{array}$$

Рівняння $5y^2 + 6y + 6 = 0$ не має дійсних коренів. Тобто лінії перетинаються тільки при $y = 1$. Знайдемо відповідні значення x :

$$x^2 = 5, \quad x = \pm\sqrt{5}.$$

Завдяки симетрії кривої відносно осі ординат обчислимо довжину частини лінії при $x > 0$, а результат подвоїмо.

Напишемо рівняння напівкубічної параболи у вигляді

$$x = x(y) : x^2 = 5y^3 \Rightarrow x = \sqrt{5}y^{\frac{3}{2}}.$$

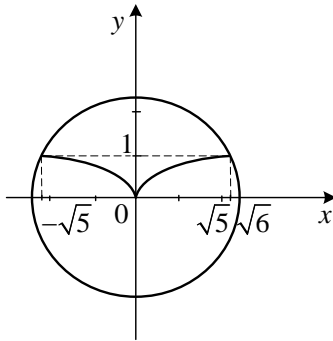


Рисунок 2.19

Таким чином

$$x'_y = \sqrt{5} \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{1+(x'_y)^2} = \sqrt{1+5\frac{9}{4}y} = \sqrt{\frac{4+45y}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4+45y},$$

$$\begin{aligned} l &= 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{4+45y}}{2} dy = \int_0^1 (4+45y)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{2}{3 \cdot 45} (4+45y)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{135} \left(49^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right) = \\ &= \frac{2}{135} (7^3 - 2^3) = \frac{2}{135} (343 - 8) = \frac{670}{135} = \frac{134}{27}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{134}{27}$.

3. Далі розглянемо обчислення довжини дуги лінії, що задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ де $x'(t), y'(t)$ неперервні на $[\alpha, \beta]$. У цьому випадку довжина дуги обчислюється за формулою (теорема 8.3 лекції 8):

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

9.6. Знайти довжину дуги кривої
$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{t}{2}, \\ y = \frac{1}{2} \ln |4+t^2|, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Розв'язання. Використаємо формулу
$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$$

Обчислимо підінтегральний вираз та проведемо його перетворення до такого вигляду, щоб було зручно здобувати корінь.

$$x'_t = \left(\operatorname{arctg} \frac{t}{2} \right)'_t = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{t^2}{4}} = \frac{2}{4+t^2}, \quad y'_t = \left(\frac{1}{2} \ln |4+t^2| \right)'_t = \frac{1}{2} \frac{2t}{4+t^2} = \frac{t}{4+t^2},$$

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = \frac{4}{(4+t^2)^2} + \frac{t^2}{(4+t^2)^2} = \frac{4+t^2}{(4+t^2)^2} = \frac{1}{4+t^2}.$$

Остаточно маємо:

$$l = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4+t^2}} dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} dt = \ln \left| t + \sqrt{4+t^2} \right| \Big|_0^1 = \ln |1 + \sqrt{5}| - \ln 2 = \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Відповідь: $\ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

9.7. Обчислити довжину дуги лінії
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(t^2 - 2t), \\ y = \frac{1}{3}(t-1)^3, \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 2.$$

Розв'язання. Всі дії виконуються аналогічно попередньому прикладу.

Оскільки $x'_t = \frac{1}{2}(2t-2) = t-1$, $y'_t = \frac{1}{3} \cdot 3(t-1)^2 = (t-1)^2$, тоді

$$\begin{aligned} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} &= \sqrt{(t-1)^2 + (t-1)^4} = \sqrt{(t-1)^2 (1+(t-1)^2)} = \\ &= |t-1| \sqrt{1+(t-1)^2} = (t-1) \sqrt{1+(t-1)^2} \quad (\text{за умовою } 1 \leq t \leq 2). \end{aligned}$$

Остаточно отримуємо:

$$l = \int_1^2 (t-1) \sqrt{1+(t-1)^2} dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{1+(t-1)^2} d(1+(t-1)^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[1+(t-1)^2 \right]_1^2^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3} \left(2^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{1}{3} (\sqrt{8} - 1).$$

Відповідь: $\frac{1}{3}(\sqrt{8}-1)$.

9.8. Обчислити довжину дуги лінії

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{\cos 2t}{4}, & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}. \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{\sin 2t}{4}, \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо

$$x'_t = -\frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} (-\sin 2t) \cdot 2 = -\frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t = \frac{1}{2} (\sin 2t - \sin t),$$

$$y'_t = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t \cdot 2 = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \cos 2t = \frac{1}{2} (\cos t - \cos 2t).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\sin 2t - \sin t)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(\cos t - \cos 2t)\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\sin^2 2t - 2 \sin 2t \cdot \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t + \cos^2 2t - 2 \cos 2t \cos t + \cos^2 2t} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2(\sin 2t \cdot \sin t + \cos 2t \cos t)} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2 \cos(2t - t)} = \frac{1}{2} \sqrt{2(1 - \cos t)} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \left| \sin \frac{t}{2} \right| = \sin \frac{t}{2} \quad \left(\text{за умовою } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Остаточно отримуємо:

$$l = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin \frac{t}{2} dt = -2 \cos \frac{t}{2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} = -2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{4} \right) = -2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} - 1.$$

Відповідь: $\sqrt{2}-1$.

9.9. Обчислити довжину дуги лінії $\rho = 8\cos^3 \frac{\varphi}{3}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Для обчислення довжини дуги лінії скористаємось

формулою (теорема 8.4 лекції 8): $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi$.

Для цього обчислимо

$$\rho'(\varphi) = 8 \cdot 3 \cos^2 \frac{\varphi}{3} \left(-\sin \frac{\varphi}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = -8 \cos^2 \frac{\varphi}{3} \sin \frac{\varphi}{3},$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} &= \sqrt{64 \cos^6 \frac{\varphi}{3} + 64 \cos^4 \frac{\varphi}{3} \sin^2 \frac{\varphi}{3}} = \\ &= 8 \cos^2 \frac{\varphi}{3} \sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{3} + \sin^2 \frac{\varphi}{3}} = 8 \cos^2 \frac{\varphi}{3}. \end{aligned}$$

Остаточно отримуємо:

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8 \cos^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \cos \frac{2\varphi}{3}\right) d\varphi = 4 \left(\varphi + \frac{3}{2} \sin \frac{2\varphi}{3} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \sin \frac{\pi}{6} \right) =$$

$$= \pi + 6 \sin \frac{\pi}{6} = \pi + 3.$$

Відповідь: $\pi + 3$.

9.10. Знайти довжину дуги кардіоїди $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

Розв'язання. Скористаємось формулою $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} d\varphi$.

Обчислимо підінтегральний вираз та проведемо його перетворення в такий вигляд, щоб було зручно здобувати корінь.

$$\rho' = a(-\sin \varphi), \quad \rho^2 = a^2 (1 + \cos \varphi)^2, \quad (\rho')^2 = a^2 (-\sin \varphi)^2.$$

$$\begin{aligned}
 (\rho')^2 + \rho^2 &= a^2 \sin^2 \varphi + a^2 (1 + \cos \varphi)^2 = a^2 (\sin^2 \varphi + 1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) = \\
 &= a^2 (2 + 2 \cos \varphi) = 2a^2 (1 + \cos \varphi) = 4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}.
 \end{aligned}$$

Остаточко маємо:

$$\begin{aligned}
 l &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = \left\| \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \frac{\varphi}{2} \leq \frac{\pi}{2}, \\ \cos \frac{\varphi}{2} \geq 0 \Rightarrow \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| = \cos \frac{\varphi}{2} \end{array} \right\| = \\
 &= 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a(1-0) = 8a.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $8a$.

Задачі для аудиторної роботи

1) Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

1. $\rho = 2 \sin 3\varphi$. 2. $\rho = 2(1 - \cos 2\varphi)$ 3. $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$. 4. $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$.
 5. $\rho = 2 - \sin 3\varphi$ 6. $\rho = 3 \cos 3\varphi$.

Відповіді:

1. π . 2. 6π . 3. 4. 4. 6π . 5. $\frac{9\pi}{2}$. 6. $\frac{9\pi}{4}$.

2) Обчислити довжини дуг кривих, що задані рівняннями:

1. $y = \frac{1}{3} \sqrt{(2x-1)^3}$, $2 \leq x \leq 8$. 2. $y = -\ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$.
 3. $x = 1 - \ln(y^2 - 1)$, $3 \leq y \leq 4$. 4. $x = 2 - e^y$, $\ln \sqrt{3} \leq y \leq \ln \sqrt{8}$.
 5. $\begin{cases} x = R(\cos t + t \sin t), \\ y = R(\sin t - t \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$. 6. $\begin{cases} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 5 \sin^2 t, \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Відповіді:

1. $\frac{56}{3}$. 2. $\ln \sqrt{3}$. 3. $1 + \ln \frac{6}{5}$. 4. $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$. 5. $\frac{\pi^2 R}{2}$. 6. $\sqrt{50}$.

Задачі для самостійної роботи

1) Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

1. $\rho = 2 \sin 2\varphi$. 2. $\rho = 2(1 + \cos 2\varphi)$. 3. $\rho = \sqrt{\sin 2\varphi}$. 4. $\rho = 3(1 + \sin \varphi)$.

5. $\rho = 2 - \cos 2\varphi$

Відповіді:

1. π . 2. 6π . 3. 1. 4. $\frac{27\pi}{2}$. 5. $\frac{9\pi}{2}$.

2) Обчислити довжини дуг кривих, що задані рівняннями:

1. $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. 2. $y = \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3}$, $1 \leq x \leq 9$.

3. $x = 1 + \arcsin y - \sqrt{1-y^2}$, $0 \leq y \leq \frac{3}{4}$. 4. $\rho = 6(1 + \cos \varphi)$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0$.

5.
$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Відповіді:

1. $\frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$. 2. $\frac{52}{3}$. 3. $\sqrt{2}$. 4. $12\sqrt{2}$. 5. $\frac{\pi^3}{3}$.

Практичне заняття 10

ОБЧИСЛЕННЯ ОБ'ЄМІВ ТІЛ ОБЕРТАННЯ. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ ПЕРШОГО ТА ДРУГОГО РОДУ

Контрольні питання

1. Обчислення об'єму тіла, отриманого при обертанні навколо осі Ox криволінійної трапеції, що обмежена лініями:

$$y = f(x), \quad x = a, \quad x = b, \quad y = 0.$$

2. Обчислення об'єму тіла, отриманого при обертанні навколо осі Oy криволінійної трапеції, що обмежена лініями:

$$x = \varphi(y), \quad y = c, \quad y = d, \quad x = 0.$$

3. Означення невласного інтеграла першого роду.

4. Означення невласного інтеграла другого роду.

Методичні рекомендації до практичного заняття

1. При розв'язанні таких задач доцільно зробити креслення фігури, що обертається. Рисунок допомагає з'ясувати межі інтегрування і дає уявлення про вигляд тіла обертання (з порожниною чи без порожнини). Якщо тіло обертання має порожнину, то його об'єм розглядають як різницю об'ємів V_1 і V_2 , де V_1 – об'єм тіла, отриманого при обертанні зовнішньої кривої, а V_2 – об'єм порожнини (користуються рисунком).

10.1. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Ox фігури, що обмежена лініями $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

Розв'язання. Зробимо креслення фігури, яка обмежена заданими лініями (рисунок 2.20).

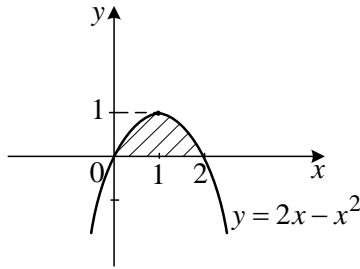


Рисунок 2.20

Скористаємось формулою для обчислення об'ємів тіл обертання навколо осі Ox (лекція 9):

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Отримуємо:

$$\begin{aligned} V_{Ox} &= \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi \left(4 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^2 = \\ &= \pi \left(4 \cdot \frac{8}{3} - 16 + \frac{32}{5} \right) = 4\pi \left(\frac{8}{3} - 4 + \frac{8}{5} \right) = 4\pi \frac{40 - 60 + 24}{15} = 4\pi \cdot \frac{4}{15} = \frac{16}{15} \pi. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{16}{15} \pi$.

10.2. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена лініями $y = x^2$, $2y = 1 + x^2$ навколо осі Ox .

Розв'язання. Зробимо креслення фігури, яка обмежена заданими лініями (рисунок 2.21).

Об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі Ox фігури, що обмежена заданими лініями можна розглядати як різницю об'ємів V_1

і V_2 , де V_1 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Ox

криволінійної трапеції, що обмежена параболою $y = \frac{1}{2}(1+x^2)$,

а V_2 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Ox криволінійної трапеції, що обмежена параболою $y = x^2$.

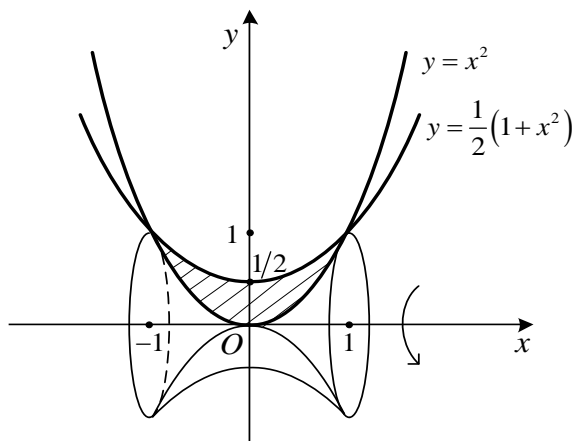


Рисунок 2.21

Знайдемо границі інтегрування – абсциси точок перетину двох парабол. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = \frac{1}{2}(x^2 + 1). \end{cases}$$

$$\text{Маємо: } x^2 = \frac{1}{2}(x^2 + 1) \Rightarrow 2x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1.$$

Використовуючи відповідну формулу формулою для обчислення об'ємів тіл обертання навколо осі Ox можна записати:

$$\begin{aligned}
 V_{Ox} &= V_1 - V_2 = \pi \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}(x^2 + 1) \right)^2 dx - \pi \int_{-1}^1 (x^2)^2 dx = \\
 &= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{4}(x^4 + 2x^2 + 1) \right) dx - 2\pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{\pi}{2} \left(\frac{x^5}{5} + 2 \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 - 2\pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) - \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi \cdot 28}{2 \cdot 15} - \frac{2\pi}{5} = \frac{14\pi}{15} - \frac{2\pi}{5} = \frac{8\pi}{15}.
 \end{aligned}$$

Зауважимо, що при обчисленні інтегралу було використано властивість інтеграла від парної функції за симетричним інтервалом інтегрування.

Відповідь: $\frac{8\pi}{15}$.

10.3. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Ox фігури, що обмежена лініями $x = \sqrt{1 - y^2}$, $y = \sqrt{\frac{3}{2}x}$, $y = 0$.

Розв'язання. Зробимо креслення фігури (рисунок 2.22).

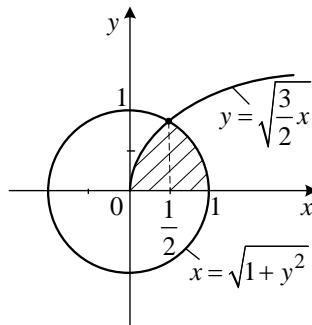


Рисунок 2.22

Фігура обмежена половиною кола з центром у початку координат та радіусом, що дорівнює одиниці, параболою $y = \sqrt{\frac{3}{2}x}$ та віссю Ox .

Знайдемо абсциси точок перетину кола і параболі. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1 - y^2}, \\ y = \sqrt{\frac{3}{2}x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y^2 = \frac{3}{2}x. \end{cases}$$

$$\text{Маємо: } x^2 + \frac{3}{2}x = 1; 2x^2 + 3x - 2; x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{2}.$$

Об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі Ox фігури, що обмежена заданими лініями можна розглядати як суму об'ємів V_1 і V_2 , де V_1 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Ox криволінійної трапеції, що обмежена параболою $y = \sqrt{\frac{3}{2}x}$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, а V_2 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Ox криволінійної трапеції, що обмежена частиною кола $x^2 + y^2 = 1$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Використовуючи відповідну формулу для обчислення об'ємів тіл обертання, можна записати:

$$\begin{aligned} V_{Ox} = V_1 + V_2 &= \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} x dx + \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - x^2) dx = \frac{3}{2} \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \\ &= \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{1}{4} + \pi \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \right) = \frac{19\pi}{48}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{19\pi}{48}.$$

10.4. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Oy фігури, що обмежена лініями $y = \ln x$, $y = 2$, $y = 5$, $x = 0$.

Розв'язання. Зробимо креслення фігури (рисунок 2.23).

Скористаємось формулою для обчислення об'єму тіла отриманого при обертанні навколо осі Oy (лекція 9):

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 dy.$$

В даному разі рівняння кривої $y = \ln x$ необхідно записати у вигляді $x = e^y$. Тоді

$$V_{Oy} = \pi \int_2^5 (e^y)^2 dy = \frac{\pi}{2} e^{2y} \Big|_2^5 = \frac{\pi}{2} (e^{10} - e^4).$$

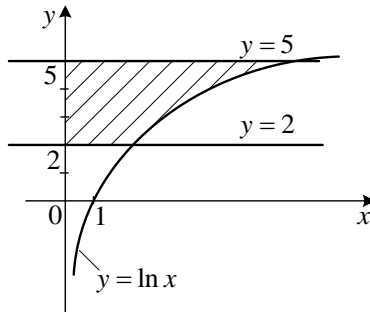


Рисунок 2.23

Відповідь: $\frac{\pi}{2} (e^{10} - e^4).$

10.5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена лініями $y = x^2$, $2y = 1 + x^2$ навколо осі Oy .

Розв'язання. Зробимо креслення фігури, яка обмежена заданими параболою (рисунок 2.24).

Об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі Oy фігури, яка обмежена заданими лініями, можна розглядати як різницю об'ємів V_1 і V_2 , де V_1 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Oy криволінійної трапеції, що обмежена параболою

$y = \frac{1}{2}(1+x^2) \Rightarrow x = \pm\sqrt{2y-1}$, а V_2 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Oy криволінійної трапеції, що обмежена параболою $y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$.

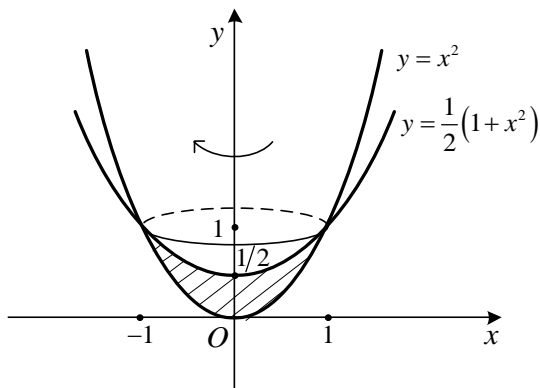


Рисунок 2.24

Використовуючи відповідну формулу для обчислення об'єму тіла, можна записати:

$$V_1 = \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy = \pi \int_0^1 y dy = \pi \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (\sqrt{2y-1})^2 dy = \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (2y-1) dy = \pi \left(\frac{2y^2}{2} - y \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \pi (y^2 - y) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \\ &= \pi \left(1 - \frac{1}{4} - \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right) = \pi \left(1 - \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Остаточно отримуємо } V_{Oy} = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4}$.

10.6. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Oy фігури, що обмежена лініями $y = (x+2)^2$, $y = 9x$, $x = 0$.

Розв'язання. Зробимо креслення фігури, яка обмежена заданими лініями (рисунок 2.25).

Об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі Oy фігури, яка обмежена заданими лініями можна розглядати як різницю об'ємів V_1 і V_2 , де V_1 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Oy криволінійної трапеції, що обмежена прямою $y = 9x$, а V_2 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Oy криволінійної трапеції, що обмежена параболою $y = (2+x)^2$.

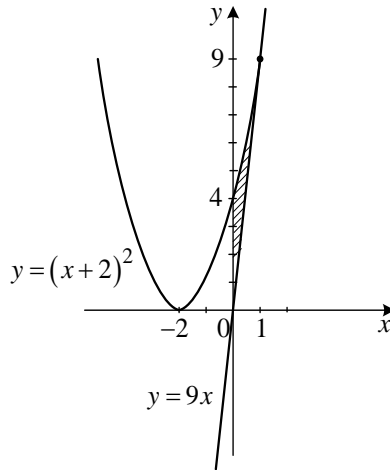


Рисунок 2.25

Знайдемо абсциси точок перетину заданих ліній. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = (x+2)^2, \\ y = 9x, \end{cases} \quad (x+2)^2 = 9x; \quad x^2 - 5x + 4 = 0; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4$$

При $x=1$ ордината $y=9$. Також необхідно рівняння ліній

$y=(x+2)^2$, $y=9x$ записати у вигляді $x=\frac{y}{9}$, $x=-2\pm\sqrt{y}$. Оскільки

фігура розглядається за умови $x>0$, обираємо $x=-2+\sqrt{y}$.

Використовуючи відповідну формулу для обчислення об'єму тіл обертання, отримуємо:

$$\begin{aligned} V_{Oy} &= V_1 - V_2 = \pi \int_0^9 \left(\frac{y}{9}\right)^2 dy - \pi \int_4^9 (\sqrt{y}-2)^2 dy = \frac{\pi}{81} \frac{y^3}{3} \Big|_0^9 - \pi \int_4^9 (y-4\sqrt{y}+4) dy = \\ &= 3\pi - \pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{4 \cdot 2y^{3/2}}{3} + 4y \right) \Big|_4^9 = 3\pi - \pi \left(\frac{81}{2} - 72 + 36 - 8 + \frac{64}{3} - 16 \right) = \\ &= 3\pi - \pi \frac{11}{6} = \frac{7}{6}\pi. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{7}{6}\pi$.

2. При дослідженні на збіжність (або обчисленні) невластних інтегралів першого або другого роду користуються, перш за все, відповідними означеннями (лекція 10).

10.7. Дослідити на збіжність $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$.

Розв'язання. Користуючись означенням невластних інтегралів I роду, маємо:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{\pi}}^T \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \left\| \begin{array}{l} t = \frac{1}{x}, \quad t_1 = \pi, \\ dt = -\frac{1}{x^2} dx, \quad t_2 = 0 \end{array} \right\| = \\ &= -\int_{\pi}^0 \sin t dt = \cos t \Big|_{\pi}^0 = \cos 0 - \cos \pi = 1 - (-1) = 2. \end{aligned}$$

Відповідь: інтеграл збігається.

10.8. Обчислити невластний інтеграл або встановити його

розбіжність $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$.

Розв'язання. Користуючись означенням можна записати

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 xe^x dx &= \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 xe^x dx = \left\| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = e^x dx, \\ du = dx, \quad v = e^x. \end{array} \right\| = \lim_{B \rightarrow -\infty} \left[xe^x \Big|_B^0 - \int_B^0 e^x dx \right] = \\ &= \lim_{B \rightarrow -\infty} \left[xe^x \Big|_B^0 - e^x \Big|_B^0 \right] = \lim_{B \rightarrow -\infty} \left[-Be^B - 1 + e^B \right] = -1. \end{aligned}$$

Відповідь: -1 .

10.9. Обчислити невластний інтеграл або встановити його

розбіжність $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}$.

Розв'язання. Користуючись означенням можна записати

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3 + 1} &= \int_{-\infty}^0 \frac{x^2 dx}{x^3 + 1} + \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3 + 1} = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \frac{x^2 dx}{x^3 + 1} + \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B \frac{x^2 dx}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow -\infty} \ln |x^3 + 1| \Big|_A^0 + \\ &+ \frac{1}{3} \lim_{B \rightarrow +\infty} \ln |x^3 + 1| \Big|_0^B = \infty. \end{aligned}$$

Відповідь: інтеграл розбігається.

10.10. Дослідити на збіжність $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2} dx$.

Розв'язання. Функція $f(x) = \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2}$ в точці $x=0$ має

нескінченний розрив. За означенням невластного інтегралу II роду:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^0+\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2} dx = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^0+\varepsilon} \int_{\frac{1}{3}}^{\varepsilon} e^{3+\frac{1}{x}} d\left(3 + \frac{1}{x}\right) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{3+\frac{1}{x}} \Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{\varepsilon}} = \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[e^6 - e^{3+\frac{1}{0+\varepsilon}} \right] = \infty. \end{aligned}$$

Відповідь: інтеграл розбігається.

10.11. Дослідити на збіжність $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

Розв'язання. Функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2-4x}}$ має нескінченний розрив в

точці $x = \frac{1}{2} \in (0,1)$, тоді за означенням невластного інтеграла II роду:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}} = \\ &= -\frac{3}{8} \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} (2-4x)^{\frac{2}{3}} \Big|_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon_1} - \frac{3}{8} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} (2-4x)^{\frac{2}{3}} \Big|_{\frac{1}{2}+\varepsilon_2}^1 = 0. \end{aligned}$$

Відповідь: інтеграл збігається.

10.12. Дослідити на збіжність $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln 2}{(1-x)\ln^2(1-x)} dx$.

Розв'язання. Функція $f(x) = \frac{\ln 2}{(1-x)\ln^2(1-x)}$ в точках

$x = 0 \notin \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $x = 1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ має нескінченний розрив. За означенням

невластного інтеграла II роду:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln 2}{(1-x)\ln^2(1-x)} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{\ln 2}{(1-x)\ln^2(1-x)} dx = \ln 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1-x)} \Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} = \\ &= \ln 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1-1+\varepsilon)} - \frac{1}{\ln \frac{1}{2}} \right] = \ln 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1-1+\varepsilon)} - \frac{1}{\ln \frac{1}{2}} \right] = 1. \end{aligned}$$

Відповідь: інтеграл збігається.

Задачі для аудиторної роботи

Обчислити об'єми тіл, отриманих при обертанні навколо осі Ox фігур, що обмежені лініями:

1. $y = \sin x$, $y = 0$, $(0 \leq x \leq \pi)$. 2. $y = x - x^2$, $y = 0$.

3. $xy = 4$, $2x + y - 6 = 0$. 4. $y = 2 - x^2$, $y = x^2$. 5. $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

6. $2y = x^2$, $2x + 2y - 3 = 0$. 7. $x = \sqrt{1 - y^2}$, $y = \sqrt{\frac{3}{2}}x$.

Обчислити або дослідити на збіжність невласні інтеграли:

8. $\int_1^{\infty} \frac{(1+x^2)}{x^3} dx$. 9. $\int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$. 10. $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$. 11. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$. 12. $\int_0^1 \frac{xdx}{1-x^4}$.

Відповіді:

1. $\frac{\pi^2}{2}$. 2. $\frac{\pi}{30}$. 3. $\frac{4\pi}{3}$. 4. $\frac{16\pi}{3}$. 5. $\frac{16\pi}{15}$. 6. $\frac{272\pi}{15}$. 7. $\frac{19\pi}{48}$.

8. Розбігається. 9. $-\frac{1}{2}$. 10. Розбігається. 11. Розбігається.

12. Розбігається.

Задачі для самостійної роботи

Обчислити об'єми тіл, отриманих при обертанні навколо осі Oy фігур, що обмежені лініями:

1. $y = \ln x$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$. 2. $y = 2 - \frac{x^2}{2}$, $x + y = 2$.

3. $x^2 - y^2 = 4$, $y = -2$, $y = 2$. 4. $y = x^3$, $y = 2 - x$, $x = 0$. 5. $y = x^2$, $y = x$.

6. $y^2 = 3x$, $x = 1$.

Відповіді:

1. $\frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$. 2. $\frac{4\pi}{3}$. 3. $\frac{64\pi}{3}$. 4. $\frac{14\pi}{15}$. 5. $\frac{\pi}{6}$. 6. $\frac{8\sqrt{3}\pi}{5}$.

Контрольна робота №2

Варіант 1

1. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi/2} (x+3) \sin x dx$.
2. Знайти середнє значення функції $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ на відрізку $[3,8]$.
3. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями:
 $y = \frac{4}{x}$, $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.
4. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OX фігури, що обмежена лініями:
 $y = 4 \sin x$, $y = 2 \sin x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
5. Обчислити невластний інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-4x} dx$.

Варіант 2

1. Обчислити інтеграл $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.
2. Знайти середнє значення функції $f(x) = xe^{-2x}$ на відрізку $[0,1]$.
3. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $y = e^{-x}$, $y = x^2 + 2$,
 $x = 0$, $x = 3$.
4. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OY фігури, що обмежена лініями $y = x^2$, $2y = 1 + x^2$.
5. Обчислити невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

Варіант 3

1. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi/6} x \cos 3x dx$.

2. Знайти середнє значення функції $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+3x}}$ на відрізку $[0, 5]$.

3. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями:

$$x = y^2 - 4y + 4, \quad x + 2y - 4 = 0.$$

4. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OX фігури, що обмежена лініями:

$$2x - x^2 - y = 0, \quad 2x^2 - 4x + y = 0.$$

5. Обчислити невластний інтеграл $\int_{-\infty}^{-1} \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + 16}}$.

Варіант 4

1. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{3^x}{3+9^x} dx$.

2. Знайти середнє значення функції $f(x) = (x+1)e^{2x}$ на відрізку $[-1, 0]$.

3. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями:

$$y^2 + 2y + x^2 = 0, \quad y = x.$$

4. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OY фігури, що обмежена лініями:

$$y = x^2 + 1, \quad y = x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

5. Обчислити невластний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$.

Варіант 5

1. Обчислити інтеграл $\int_1^2 (x-1) \ln x dx$.
2. Знайти середнє значення функції $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$ на відрізку $[1, e^3]$.
3. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями:
 $x = 4 - (y-1)^2$, $x = (y-2)^2 - 1$.
4. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OX фігури, що обмежена лініями:
 $x = \sqrt{y-2}$, $x = \sqrt{2-y}$, $x = 2$.
5. Обчислити невластний інтеграл $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{(4-x) \cdot x}}$.

Варіант 6

1. Обчислити інтеграл $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$.
2. Знайти середнє значення функції $f(x) = x^2 e^{3x}$ на відрізку $[0, 1]$.
3. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями:
 $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 4$.
4. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OY фігури, що обмежена лініями:
 $y = \sqrt{x}$, $y = 2-x$, $x = 0$.
5. Обчислити невластний інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$.

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

1. Таблиця похідних

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in R, x > 0;$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad 0 < a \neq 1, x \in R;$$

$$(e^x)' = e^x, \quad x \in R;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad 0 < a \neq 1, x > 0;$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in R;$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in R;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, n \in Z;$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R;$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R;$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad x \in R;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad x \in R;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x \in R;$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0.$$

2. Основні правила диференціювання

Якщо $U = U(x)$ та $V = V(x)$ – функції, що мають похідні, а C – стала, то:

$$(C)' = 0;$$

$$(C \cdot U)' = C \cdot U';$$

$$(U \pm V)' = U' \pm V';$$

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V';$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}, \quad V \neq 0;$$

$$\left(\frac{C}{V}\right)' = \frac{-C \cdot V'}{V^2}, \quad V \neq 0;$$

$$(f(U(x)))'_x = f'_U \cdot U'_x.$$

3. Таблиця інтегралів

$$\int dx = x + C;$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \quad x > 0;$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C;$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad |x| < a;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C, \quad |x| < 1;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C;$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C;$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C;$$

4. Властивості невизначеного інтегралу

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ за умови } F'(x) = f(x);$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx; \quad \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \int f_3(x)dx;$$

$$\int c f(x)dx = c \int f(x)dx;$$

$\int f(u)du = F(u) + C$, C – стала, $u = u(x)$ – будь-яка функція, що має похідну за змінної x ;

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a} F(ax) + C; \quad \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

5. Деякі тригонометричні формули

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha;$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha;$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)];$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right) = \cos \alpha;$$

$$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin \alpha;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \sin \alpha; \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm \sin \alpha;$$

6. Квадратні рівняння

Корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ знаходять за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac \geq 0.$$

Теорема Вієта:
$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \end{cases}$$
 де x_1, x_2 – корені квадратного рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ можна розкласти на множники:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1, x_2 – корені квадратного тричлена.

7. Формули скороченого множення

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

8. Визначений інтеграл

1. Формула Ньютона – Лейбніца:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2. Заміна змінної:

$$\int_a^b f(x) dx = \left\| \begin{array}{l} x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t) dt, \\ \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b \end{array} \right\| = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

3. Інтегрування частинами: $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$.

4. Теорема про оцінку визначеного інтеграла: якщо

$m \leq f(x) \leq M$ на $[a, b]$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

5. Теорема про середнє значення: якщо $f(x)$ неперервна на

$[a, b]$, то існує така точка $c \in (a, b)$, що $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$. Значення $f(c)$ – середнє значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

6. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями $y = f(x)$,

$(f(x) \geq 0)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$: $S = \int_a^b f(x) dx$.

7. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями $x = \varphi(y)$,

$(\varphi(y) \geq 0)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$: $S = \int_c^d \varphi(y) dy$

8. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями $y = f(x)$,

$(f(x) \leq 0)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$: $S = -\int_a^b f(x) dx$.

9. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями $x = \varphi(y)$,

$(\varphi(y) \leq 0)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$: $S = -\int_c^d \varphi(y) dy$

10. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями $y = f_1(x)$,

$y = f_2(x)$, $(f_2(x) \geq f_1(x))$, $x = a$, $x = b$: $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$.

11. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями $x = \varphi_1(y)$,

$x = \varphi_2(y)$, $(\varphi_2(y) \geq \varphi_1(y))$, $y = c$, $y = d$: $S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) dy$.

12. Площа плоскої фігури, якщо крива $y = f(x)$ задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta: \end{cases}$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt .$$

13. Площа криволінійного сектору, обмеженого кривою, що задана у полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, і променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, ($\alpha < \beta$): $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi$.

14. Довжина дуги лінії, що задана рівнянням $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$: $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$.

15. Довжина дуги лінії, що задана рівнянням $x = \varphi(y)$, $c \leq y \leq d$: $l = \int_c^d \sqrt{1+(\varphi'(y))^2} dy$.

16. Довжина дуги лінії, що задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta: \end{cases}$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt .$$

17. Довжина дуги лінії, що задана у полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$: $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi$.

18. Об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Ox криволінійної трапеції, що обмежена лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$: $V_{ox} = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

19. Об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо Oy осі криволінійної трапеції, що обмежена лініями $x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$,

$$x = 0: V_{Oy} = \pi \int_a^b \varphi^2(y) dy.$$

20. Невласні інтеграл першого роду:

$$\text{а) } \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx;$$

$$\text{в) } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx.$$

21. Невласні інтеграли другого роду: а) $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$,

де $x = b$ – точка нескінченного розриву функції $f(x)$;

б) $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$, де $x = a$ – точка нескінченного розриву

функції $f(x)$; в) $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx$, де

$x = c$ – точка нескінченного розриву функції $f(x)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособ. для вузов. – 20-е изд. / Г.Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 384 с.
2. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа / Бермант А.Ф., Араманович И.Г. – М.: Наука, 1973. – 720с.
3. Высшая математика в примерах и задачах : учеб. пособ. : в 2 т. Т. 1 / Ю.Л. Геворкян, Л.А. Балака, С.С. Габриелян и др. ; под ред. Ю.Л. Геворкяна. – Харьков : Вид-во «Підручник НТУ «ХП», 2011. – 408 с.
4. Вища математика в прикладах і задачах : у 2 т. Т. 1 : Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної : навч. посіб. / Л.В. Курпа, Ж.Б. Кашуба, Г.Б. Лінник та ін. ; за ред. Л.В. Курпи. – Харків : НТУ «ХП», 2009. – 532 с.
5. Геворкян Ю.Л. Краткий курс высшей математики : учеб. пособ. : в 2 ч. Ч. 1 / Ю.Л. Геворкян, А.Л. Григорьев, Н.А. Чикина. – Харьков : Вид-во «Підручник НТУ «ХП», 2011. – 324 с.
6. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики : у 2 ч. Ч. 1 / Н.О. Чікіна, І.В. Антонова, Л.О. Балака та ін. ; за ред. Н.О. Чікіної. – Харків : Підручник НТУ «ХП», 2012. – 224 с.
7. Методичні рекомендації до проведення практичних занять з теми «Невизначений інтеграл»/ Черемська Н.В., Черногор Т.Т.// Харків: НТУ «ХП», Друкарня НТУ «ХП», 2018. – 72 с.;
8. Методичні рекомендації до проведення практичних занять з теми «Визначений інтеграл та його застосування»/ Цехмістро І.І., Черемська Н.В., Черногор Т.Т.// Харків: НТУ «ХП», Друкарня НТУ «ХП», 2018. – 72 с.;
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. – М.: Наука, 1970, 1985. – Т.1.
10. Сборник индивидуальных заданий по высшей математики / под ред. А. П. Рябушко: В 3 ч. – М.: Выш. шк, 1991. – Ч. 2 – 352 с.

11. Тевяшев А.Д. Вища математика у прикладах та задачах : у 3 ч. Ч. 2 : Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних : навч. посіб. / А.Д. Тевяшев, О.Г. Литвин. – Харків : ХНУРЕ, 2002. – 440 с.

ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ В ІНТЕРНЕТІ

1. library.kpi.kharkov.ua – бібліотека НТУ «ХПІ». Електронний каталог та репозитарій електронних ресурсів.
2. eqworld.ipmnet.ru – сайт містить інформацію з різноманітних розділів математики, репозитарій електронних підручників, тощо.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ I. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА	4
НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ	4
Лекція 1. Поняття первісної. Означення невизначеного інтеграла. Властивості невизначеного інтеграла. Інтегрування частинами.....	4
Лекція 2. Інтегрування деяких функцій, які містять квадратний тричлен	13
Лекція 3. Інтегрування раціональних функцій	16
Лекція 4. Інтегрування тригонометричних функцій	23
Лекція 5. Інтегрування деяких ірраціональних функцій. Тригонометричні підстановки. Біноміальні інтеграли. Поняття про інтеграли, які не виражаються через елементарні функції	31
ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ	36
Лекція 6. Визначений інтеграл. Означення. Основні властивості	36
Лекція 7. Формула Ньютона – Лейбніца. Заміна змінних та інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Обчислення площі плоскої фігури за допомогою визначеного інтеграла	44
Лекція 8. Полярна система координат. Обчислення площі плоскої фігури в полярній системі координат та обчислення довжини дуги плоскої кривої	56
Лекція 9. Обчислення об'ємів тіл за допомогою визначеного інтеграла	66
Лекція 10. Невласні інтеграли	73
РОЗДІЛ II. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА	77
НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ	77
Практичне заняття 1. Табличні інтеграли. Інваріантність формул інтегрування	77
Практичне заняття 2. Інтегрування частинами	86
Практичне заняття 3. Інтеграли від деяких функцій, що містять квадратний тричлен	94
Практичне заняття 4. Інтегрування раціональних функцій. Найпростіші раціональні дроби та їх інтегрування	98

Практичне заняття 5. Інтегрування тригонометричних функцій	108
Практичне заняття 6. Інтегрування деяких ірраціональних функцій. Тригонометричні підстановки	118
Контрольна робота №1	127
ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ	129
Практичне заняття 7. Обчислення визначених інтегралів за допомогою формули Ньютона – Лейбніца. Метод заміни змінної інтегрування. Метод інтегрування частинами	129
Практичне заняття 8. Застосування визначеного інтегралу для обчислення площі плоских фігур в декартовій системі координат	137
Практичне заняття 9. Обчислення площі плоских фігур в полярній системі координат. Обчислення довжини дуги плоскої кривої.....	150
Практичне заняття 10. Обчислення об'ємів тіл обертання. Невласні інтеграли першого та другого роду.....	162
Контрольна робота №2	174
ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ	177
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	184

Навчальне видання

ПЕРШИНА Юлія Ігорівна
ПРИЩЕНКО Ольга Петрівна
ЧЕРЕМСЬКА Надія Валентинівна
ЧЕРНОГОР Тетяна Тимофіївна

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ТА ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛИ

Навчально-методичний посібник
з курсу вищої математики
для студентів та викладачів усіх спеціальностей

Відповідальний за випуск проф. Чікіна Н. О.

Роботу до видання рекомендувала доц. Руднева Г. В.

В авторській редакції

План 2022 р., поз. 18

Підп. до друку 09.02.2022 р. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Цифровий друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 4,75. Наклад 50 прим.
Зам. № 80. Ціна договірна.



Видавець і виготовлювач:
ТОВ «Друкарня Мадрид»
61024, м. Харків, вул. Гуданова, 18

Тел.: 0 800 33 67 62
www.madrid.in.ua
info@madrid.in.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК №4399 від 27.08.2012 року